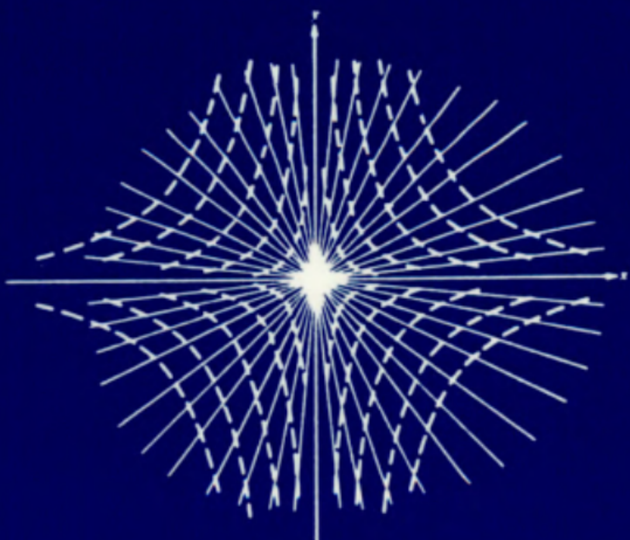
VOLUME 1

CÁLCULO

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear

TOM M. APOSTOL



editora reverté, ltda.

Tom M. Apostol

CÁLCULO

VOLUME I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear

EDITORA REVERTÉ LTDA.

Rio de Janeiro
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título da obra original:
Calculus, one-variable calculus, with an introduction to linear algebra ***Second edition***
Volume 1

Edição original em lingua inglesa publicada por:
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts

Tradução de:
Doutor António Ribeiro Gomes
Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade de Coimbra

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación, 86-88
(08024) Barcelona

Edição em português

Impresso em Espanha

ISBN - 84 - 291 - 5014 - 5 obra completa
ISBN - 84 - 291 - 5015 - 3 tomo 1

Depósito Legal B.37329/88
LITOCLUB S.A. - BARCELONA

Índice analítico

INTRODUÇÃO

Parte I – Introdução histórica

I 1.1 Os dois conceitos básicos do cálculo

O notável progresso conhecido pela ciência e tecnologia, durante o último século, foi devido em grande parte ao desenvolvimento da Matemática. O ramo da Matemática conhecido por Cálculo integral e diferencial é um instrumento natural e poderoso para atacar uma variedade de problemas que aparecem na Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia e noutros campos, incluindo mais recentemente alguns das Ciências Sociais.

Para dar a o leitor uma ideia dos muito diversos tipos de problemas que podem ser tratados pelos métodos do Cálculo, expõe-se a seguir uma pequena amostra de questões selecionadas dos exercícios que aparecem em capítulos posteriores deste livro.

Com que velocidade deve ser lançado um foguetão, para que não volte a tombar na Terra? Qual é o raio do menor disco circular que cobre todo o triângulo isósceles de perímetro L? Qual é o volume do material extraído de uma esfera de raio $2r$, se for atravessada por um orifício cilíndrico, de raio r, e cujo eixo passa pelo centro da esfera? Se uma cultura de bactérias cresce proporcionalmente à quantidade que existe em cada instante, e se a população duplica ao fim de uma hora, quanto terá aumentado ao fim de duas horas? Se uma força de dez quilos faz esticar de um metro uma corda elástica, qual o trebalho necessário para esticar a corda de quatro metros?

Estes exemplos, escolhidos em vários domínios, ilustram algumas das questões técnicas que podem ser resolvidas por aplicações mais ou menos rotinadas do Cálculo.

O Cálculo é mais do que um instrumento técnico – é uma compilação de ideias atraentes e excitantes, que interessaram o pensamento humano durante séculos. Estas ideias estão relacionadas com *velocidade, área, volume, taxa de crescimento, continuidade, tangente a uma curva* e com outros conceitos dizendo respeito a uma variedade de domínios. O Cálculo obriga-nos a não ir além, antes de pensarmos cuidadosamente acerca do significado destes conceitos. Outro aspecto notável do Cálculo é o seu poder de síntese. Muitos destes conceitos podem ser formulados de maneira que se reduzam a dois outros problemas, mais especializados, de natureza puramente geométrica. Passamos em seguida a uma breve descrição destes problemas.

Consideremos uma curva C situada acima duma reta horizontal (base), como se indica na fig. I.1. Suponhamos que esta curva goza da propriedade de ser intersetada por cada vertical, no máximo, uma vez. A parte sombreada da figura é formada pelos pontos situados abaixo da curva C, acima da horizontal, e entre dois segmentos verticais paralelos que unem C com a horizontal. O primeiro problema fundamental do Cálculo é o seguinte: *Determinar um número que dê a medida da área da parte sombreada da figura.*

Consideremos em seguida uma reta tangente à curva C, como se mostra na fig. I.1. O segundo problema fundamental pode enunciar-se do modo seguinte. *Determinar um número que dê o declive desta reta.*

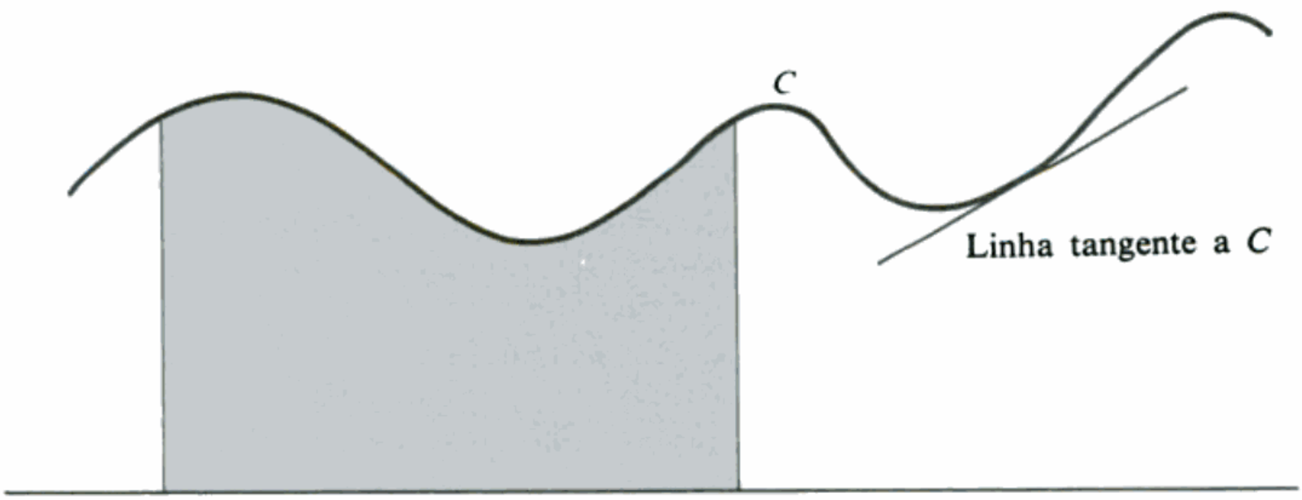


Fig. I.1

Fundamentalmente o Cálculo ocupa-se da formulação exata e da resolução destes dois problemas particulares. Permite-nos *definir* os conceitos de área e tangente, e *calcular* a área de uma dada região, ou o declive de tangente a uma curva dada. O *Cálculo Integral* ocupa-se do problema da área e será discutido neste primeiro capítulo. *O Cálculo Diferencial* ocupa-se do problema da tangente e será analisado no Capitulo 4.

O estudo do Cálculo requer uma certa preparação matemática. O presente capítulo trata desses conceitos básicos e está dividido em quatro partes: a primeira parte dá uma perspectiva histórica; a segunda refere a notação e terminologia da teoria dos conjuntos; a terceira trata do sistema dos números reais; e finalmente a quarta parte trata da indução matemática e da notação somatória. Se o leitor está familiarizado com estes temas pode abordar directamente o desenvolvimento do Cálculo integral, no capitulo 1. Caso contrário deverá familiarizar-se com as matérias contidas nesta introdução, antes de iniciar o estudo do Capitulo.

I 1.2 Introdução histórica

A origem do Cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo que designaram de *método de exaustão.* As ideias fundamentais deste método são elementares e podem descrever-se, sumariamente, do modo seguinte: dada uma região cuja área pretende determinar-se, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja de cálculo fácil. Em seguida, escolhemos outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e continuamos o processo tomando *linhas* poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada. O método está ilustrado na fig. I.2 para o caso duma região semicircular. Este método foi usado com êxito por Arquimedes (287-212 a. C.), para estabelecer fórmulas exactas das áreas do círculo e de algumas outras figuras particulares.

Depois de Arquimedes, o desenvolvimento do método de exaustão teve que esperar quase 18 séculos até que o uso de símbolos e técnicas algébricas se tornaram parte usual da matemática. A Álgebra elementar, que hoje é familiar à maioria dos alunos dos últimos anos do ensino secundário, era completamente desconhecida no tempo de Arquimedes, fato que tornava impossível estender o método a qualquer classe de regiões, sem se conhecer um modo adequado de expressar os extensos cálculos numa forma compacta e simplificada.

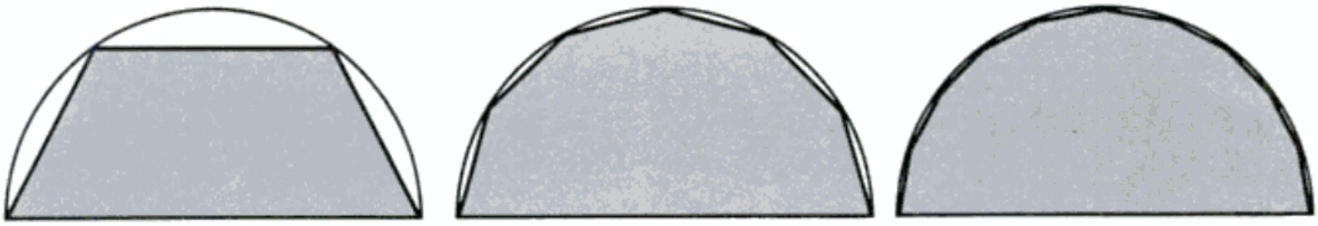


Fig. I.2 O método de exaustão aplicado a uma região semicircular.

Uma mudança lenta, mas revolucionária, no desenvolvimento das notações matemáticas teve início no século XVI. O complicado sistema de numeração romana foi gradualmente substituído pelos caráteres arábicos utilizados ainda hoje, os sinais + e − foram introduzidos pela primeira vez e começaram a reconhecer-se as vantagens da notação decimal. Durante este mesmo período, os brilhantes resultados dos matemáticos italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari na determinação de soluções algébricas para as equações cúbica e do quarto grau estimularam o desenvolvimento da Matemática e encorajaram a aceitação da nova e superior linguagem algébrica. Com a larga introdução dos bem escolhidos símbolos algébricos ressuscitou o interesse pelo antigo método de exaustão, e grande número de resultados parciais foram descobertos no século XVI por pioneiros tais como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal e Wallis.

Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que hoje se designa por Cálculo Integral, nova e poderosa disciplina com uma grande variedade de aplicações não só em problemas geométricos respeitantes a áreas e volumes, mas também em problemas de outras ciências. Este ramo da Matemática, que conservou alguns dos aspetos originais do método de exaustão, recebeu o seu maior impulso no século XVII, devido principalmente aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o seu desenvolvimento continuou até ao século XIX, data em que matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866) lhe deram uma base matemática sólida. Posteriores aperfeiçoamentos e extensões da teoria estão ainda a ser levados a cabo na Matemática contemporânea.

I 1.3 O método de exaustão para a área de um "segmento parabólico"

Antes de passarmos ao estudo sistemático do Cálculo integral, será instrutivo aplicar o método de exaustão directamente a uma das figuras particulares estudadas pelo próprio Arquimedes. A região em questão está representada na figura I.3 e pode descrever-se do modo seguinte: se escolhermos um ponto arbitrário na base da figura e designarmos por x a sua distância a 0, a distância vertical deste ponto à curva é x^2. Em particular, se o comprimento da base é b a altura da figura é b^2. A distância vertical de x à curva designa-se por "ordenada" de x. A curva assim descrita é uma *parábola* e a região limitada pela curva e pelos dois segmentos de recta chamar-se-á *segmento parabólico*.

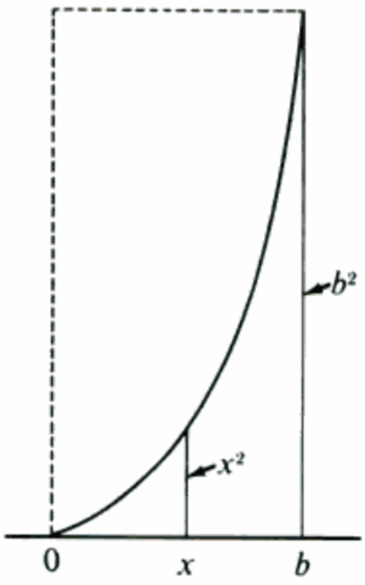


Fig. I.3 Segmento parabólico

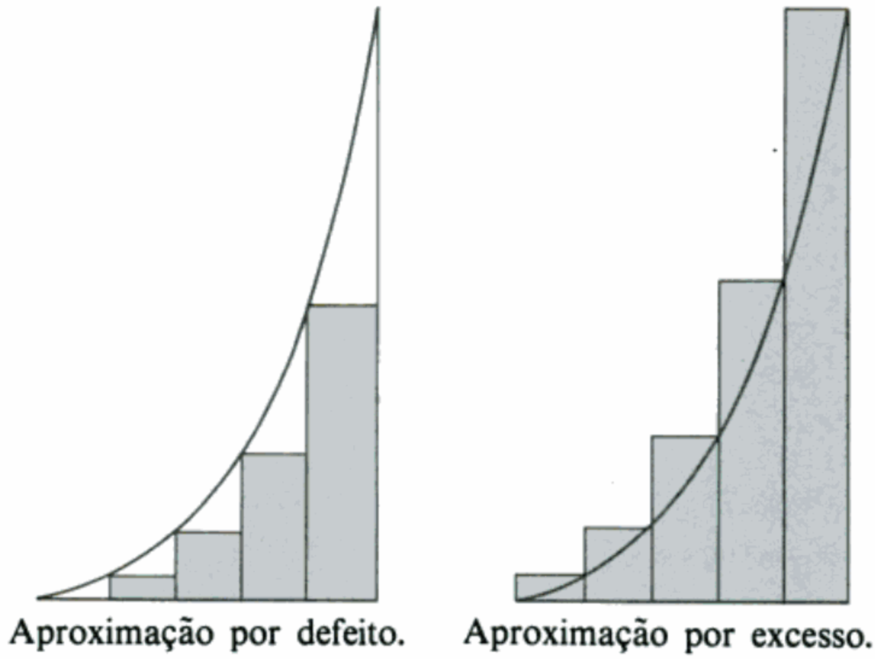


Fig. I.4

Esta figura pode ser contida num retângulo de base b e altura b^2, como se vê na fig. I.3. Observando a figura é evidente a afirmação de que a área do segmento parabólico é menor que metade da área do retângulo. Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a área do segmento parabólico é exactamente *um terço* da área do retângulo, isto é, $A = \frac{b^3}{3}$ representando A a área do segmento parabólico. Mostremos como se chega a este resultado.

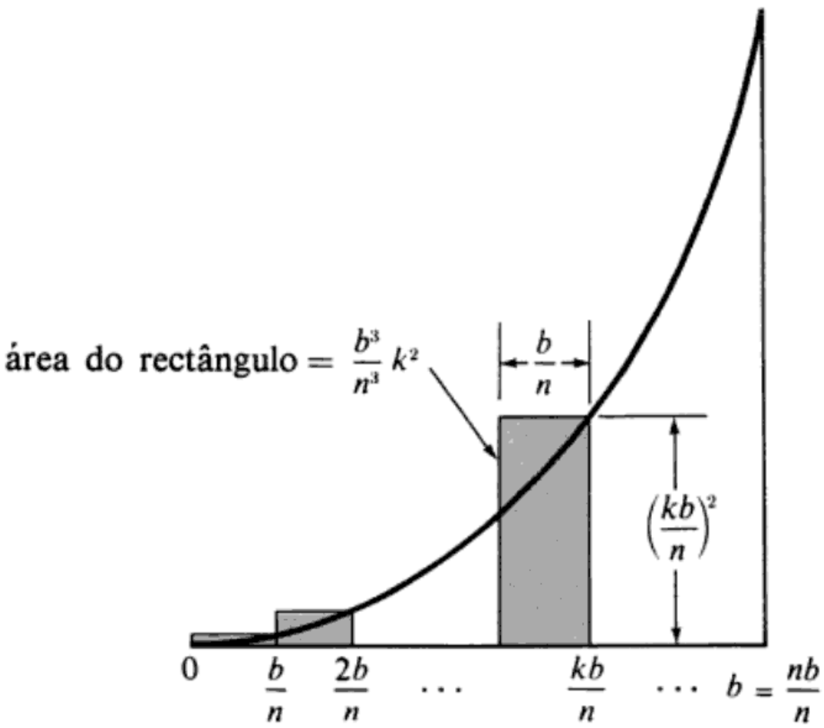


Fig. I.5 Cálculo da área dum segmento parabólico.

Deve notar-se que o segmento parabólico desenhado na fig. I.3 não é exactamente o que Arquimedes considerou, e que os pormenores dos cálculos que se seguem não são exatamente os utilizados por ele. Contudo as *ideias* essencias são as de Arquimedes; o que apresentamos aqui pode considerar-se o método de exaustão exposto com uma notação moderna.

O método consiste simplesmente no seguinte: divide-se a figura num certo número de bandas e obtêm-se duas aproximações da área da região, uma por defeito e a outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos como se indica na fig. I.4 (utilizam-se retângulos, em vez de polígonos quaisquer, para simplificar os cálculos). A área do segmento parabólico é maior que a área total dos retângulos interiores, mas é menor que a dos retângulos exteriores. Se cada banda se subdivide, para se obter uma nova aproximação com maior número de bandas, a área total dos retângulos interiores *aumenta,* enquanto a área total dos retângulos exteriores *diminui.* Arquimedes compreendeu que se podia obter a área com qualquer grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar um número suficiente de bandas.

O cálculo efetivo efectua-se como a seguir se indica. Com o objectivo de simplificar os cálculos divide-se a base em *n partes iguais,* cada uma de comprimento b/n (ver fig. I.5). Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b\,.$$

A expressão geral dum ponto de divisão é $x = \dfrac{kb}{n}$, onde k toma os valores sucessivos $k = 0$, 1, 2, 3, ..., n. En cada ponto kb/n constroi-se o retângulo exterior de altura $(kb/n)^2$, como se indica na fig. I.5. A área deste retângulo é o produto da base pela altura e é igual a

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}k^2.$$

Designando por S_n a soma das áreas de todos os retângulos exteriores, uma vez que a área do k-enésimo retângulo é $(b^3/n^3)k^2$, obtem-se

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\,. \tag{I.1}$$

Do mesmo modo se obtém a expressão da soma S_n dos rectângulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\,. \tag{I.2}$$

A forma destas somas é de grande importância no cálculo. Note-se que o fator que multiplica b^3/n^3 na equação (I.1) é a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,.$$

[O fator correspondente na equação (I.2) é análogo, apenas a soma tem unicamente n-1 parcelas]. O cálculo desta soma por adição directa das parcelas, para um grande valor de n, é fastidioso, porém existe uma identidade interessante que torna possível calcula-la dum modo mais simples; a identidade é

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\,. \tag{I.3}$$

É válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e pode provar-se do modo seguinte: Considere-se a igualdade $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ escrita na forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

Fazendo $k = 1, 2, \ldots, n-1$, obtém-se as $n-1$ fórmulas

$$\begin{gathered}
3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1^3 \\
3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3 \\
\vdots \\
3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3.
\end{gathered}$$

Somando as igualdades, membro a membro, todos os termos do segundo membro se eliminam, excepto dois, resultando

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - 1^3.$$

A expressão do segundo parêntesis reto é a soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo valor é $\frac{1}{2}n(n-1)$. Por conseguinte a última igualdade dá-nos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \qquad \text{(I.4)}$$

Somando n^2 a ambos os membros obtemos (I.3).

As expressões exactas dadas nos segundos membros de (I.3) e (I.4) não são necessárias ao objectivo que se persegue. Tudo o que necessitamos é a *dupla desigualdade*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \qquad \text{(I.5)}$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$. Esta dupla desigualdade pode ser deduzida fàcilmente de (I.3) e (I.4), ou direitamente por indução (ver Secção I. 4.1).

Multiplicando (I.5) por b^3/n^3 e considerando (I.1) e (I.2) obtém-se

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \qquad \text{(I.6)}$$

para todo o n inteiro e positivo. A dupla desigualdade (I.6) exprime que, para todo o n inteiro e positivo, o número $b^3/3$ está compreendido entre s_n e S_n. Podemos agora provar que $b^3/3$ é o *único* número que goza desta propriedade, isto é, que se A é um número qualquer que verifica

$$s_n < A < S_n \tag{I.7}$$

para todo o inteiro e positivo n, então $A = b^3/3$. Foi devido a este fato que Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico é $b^3/3$.

Para provar que $A = b^3/3$ utiliza-se uma vez mais a dupla desigualdade (I.5). Somando n^2 a ambos os membros da desigualdade da esquerda em (I.5) obtém-se:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 .$$

Multiplicando por b^3/n^3, e considerando (I.1), pode escrever-se

$$< \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} . \tag{I.8}$$

Analogamente, subtraindo n^2 a ambos os membros da desigualdade da direita em (I.5) e multiplicando por b^3/n^3, obtém-se:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n . \tag{I.9}$$

Porém, qualquer número A verificando (I.7) deve igualmente verificar

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{I.10}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Existem, então, unicamente três possibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \qquad A < \frac{b^3}{3}, \qquad A = \frac{b^3}{3}.$$

Se provarmos que as duas primeiras conduzem a contradições, então necessariamente terá que ser $A = \dfrac{b^3}{3}$, uma vez que, no estilo de Sherlock Holmes, se esgotam assim todas as possibilidades.

Suponhamos que a desigualdade $A > b^3/3$ era verdadeira. Da segunda desigualdade em (I.10) obtém-se

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \tag{I.11}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Uma vez que $A - b^3/3$ é positivo, podemos dividir ambos os membros de (I.11) por $A - b^3/3$ e multiplicar em seguida por n para obter a desigualdade

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para todo o n já referido. Mas esta desigualdade é evidentemente falsa para $n \geq b^3/(A-b^3/3)$. Portanto a desigualdade $A > b^3/3$ conduz a uma contradição. De maneira análoga se pode provar que $A < \dfrac{b^3}{3}$ conduz igualmente a uma contradição e por conseguinte deverá ser $A = b^3/3$, como já se afirmara.

*I 1.4 Exercícios

1. (a) Modificar a região indicada na fig. I.3 supondo que a ordenada, para cada valor de x, é $2x^2$ em vez de x^2. Desenhar a nova figura. Repetir para este caso os passos principais da anterior seção e determinar o efeito desta modificação no cálculo da área. Fazer o mesmo se a ordenada, para cada x, é (b) $3x^3$, (c) $\dfrac{1}{4}x^2$, (d) $2x^2 + 1$, (e) $ax^2 + c$.
2. Modificar a região na fig. I.3, supondo que a ordenada, para cada x, é x^3 em vez de x^2. Desenhar a nova figura.
   (a) Usar uma construção análoga à indicada na fig. I.5 e mostrar que as somas exterior e interior S_n e s_n são dadas por

$$S_n = \frac{b^4}{n^4}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3), \qquad s_n = \frac{b^4}{n^4}[1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3].$$

   (b) Usar a dupla desigualdade (que pode ser demonstrada por indução; ver Secção I.4.2.).

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \tag{I.12}$$

   para provar que $s_n < b^4/4 < S_n$ para todo o n e provar que $b^4/4$ é o *único* número compreendido entre s_n e S_n para qualquer n.
   (c) Que valor substitue $b^4/4$ se a ordenada, para cada x, for $ax^3 + c$?
3. As desigualdades (I.5) e (I.12) são casos particulares da dupla desigualdade mais geral

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k \tag{I.13}$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e todo o inteiro $k \geq 1$. Suposta (I.13) verdadeira, generalizar os resultados do Exercicio 2.

I 1.5 Análise crítica do método de Arquimedes

Mediante cálculos análogos aos feitos na Secção I 1.3, Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico considerado é $b^3/3$. Este facto foi aceite como um teorema matemático, até que, passados cerca de 2000 anos, se pensou que deviam ser analisados os resultados dum ponto de vista mais crítico. Para compreender as razões porque houve quem puzesse em dúvida a validade da conclusão de Arquimedes, é necessário conhecer algo acerca das importantes mudanças que tiveram lugar na história recente da Matemática.

Cada ramo do conhecimento é um conjunto de ideias descritas por intermédio de palavras e símbolos, e não se podem compreender estas ideias sem um conhecimento exacto do significado das palavras e dos símbolos utilizados. Alguns ramos do conhecimento, conhecidos por *sistemas dedutivos,* são diferentes de outros pelo facto de que um certo número de conceitos "não definidos" são escolhidos *à priori* e todos os restantes conceitos no sistema são definidos a partir daqueles.

Certas afirmações acerca destes conceitos não definidos toman-se como *axiomas* ou *postulados* e outras relações que podem deduzir-se destes axiomas são chamadas *teoremas*. O exemplo mais familiar de um sistema dedutivo é a Geometria euclidiana estudada por toda a pessoa culta desde a época da Grécia Antiga.

O espirito da primitiva matemática grega, seguindo o método de postulados e teoremas como na Geometria dos *Elementos* de Euclides, dominou o pensamento matemático até à época do Renascimento. Uma nova e vigorosa fase no desenvolvimento da Matemática começou com a aparição da Álgebra no sec. XVI, e os 300 anos que se seguiram foram testemunhas de grande quantidade de importantes descobertas. O raciocínio lógico, preciso, do método dedutivo, com o uso de axiomas, definições e teoremas, esteve manifestamente ausente durante este período. Em vez disso, os pioneiros nos séculos XVI, XVII e XVIII recorriam a uma mistura de raciocínio dedutivo combinado com intuição, mera conjectura e misticismo, e não surpreenderá que se tenha visto mais tarde que alguns dos seus resultados eram incorrectos. Contudo, um número surpreendentemente grande de importantes descobertas ocorreram neste período e uma grande parte deste trabalho sobreviveu à prova da História — um prémio à destreza e engenho daqueles cientistas.

Quando o caudal de novas descobertas começou a diminuir, um novo e mais crítico período apareceu. Pouco a pouco os matemáticos viram-se forçados a voltar às ideias clássicas do método dedutivo, numa tentativa de colocar a nova Matemática numa base firme. Esta fase de desenvolvimento, que começa em princípios do século XIX e continuou até o momento presente, alcançou um grau de abstracção e pureza lógica que ultrapassou todas as tradições da ciência Grega. Simultâneamente proporcionou uma compreensão mais clara dos fundamentos, não só do Cálculo, mas de todos os ramos da Matemática.

Existem várias formas de estruturar o Cálculo como sistema dedutivo. Uma maneira possível é tornar os números reais como conceitos não definidos. Algumas das regras que regem as operações com os números reais podem então ser tomadas como axiomas. Um tal conjunto de axiomas está indicado na Parte 3 desta Introdução. Novos conceitos, como *integral, limite, continuidade, derivada* devem então ser definidos em termos de números reais. As propriedades destes conceitos são, em seguida, deduzidas como teoremas a partir dos axiomas.

Considerando o cálculo como uma parte do sistema dedutivo, o resultado de Arquimedes para a área do segmento parabólico não pode ser aceite como um teorema se não for dada antecipadamente uma definição satisfatória de área. Não está provado que Arquimedes tivesse formulado, alguma vez, uma definição precisa do que entendia por área. Parece ter tornado como presuposto que cada região possui uma área que lhe está associada. Com esta hipótese ocupou-se a calcular áreas de regiões particulares. Nos seus cálculos utilizou certas propriedades da área que não podem ser provadas enquanto não se souber o que *se entende* por área. Por exemplo, supôs que, sendo uma região interior a outra, a área da região menor não pode exceder a área da maior. Do mesmo modo, se uma região é dividida em duas ou mais partes, a soma das áreas das partes é igual à área de toda a região. Estas propriedades é desejável que a área as possua, e, insistimos, qualquer definição de área deve implicar estas propriedades. É perfeitamente possível que o próprio Arquimedes considerasse a área como um conceito não definido e então tivesse utilizado as propriedades que mencionámos como *axiomas* da área.

Actualmente considera-se a obra de Arquimedes importante não tanto pelo que nos auxilia no cálculo de áreas de figuras particulares, mas sim porque sugere uma via razoável para *definir* o conceito de área para figuras mais ou menos *arbitrárias*. Acontece que o método de Arquimedes sugere uma maneira de definir um conceito muito mais geral que é o de *integral*. O integral, por sua vez, é usado para calcular não somente áreas, mas também quantidades tais como comprimentos de arco, volumes, trabalhos e outras.

Antecipando-nos a posteriores desenvolvimentos, e utilizando a terminologia do cálculo integral, o resultado do cálculo efectuado na Secção I.1.3 para o segmento parabólico é muitas vezes expresso como segue:

"O integral de x^2 de O a b é $b^3/3$"

e escreve-se, simbolicamente,

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

O símbolo $\int$ (um S alongado) é chamado *sinal de integral* e foi introduzido por Leibniz em 1675. O processo que determina o número $b^3/3$ diz-se *integração*. Os números O e b que afetam o sinal de integral designam-se por *limites de integração*. O símbolo $\int x^2 dx$ deve ser considerado como um todo. A sua definição deverá apresentar-se tal como o dicionário descreve a palavra "conferir" sem fazer referência a "con" e "ferir".

O símbolo de Leibniz para o integral foi prontamente aceite por muitos matemáticos, que o entendiam como uma espécie de "processo de somação" que lhes permitiria somar infinitas "quantidades infinitamente pequenas". Por exemplo, no caso do segmento parabólico concebia-se a área como uma soma de uma infinidade de retângulos infinitamente pequenos, de altura x^2 e base dx. O sinal de integral representava o processo de adição das áreas de todos esses retângulos. Este tipo de raciocínio é sugestivo e frequentemente útil, mas não é fácil atribuir um significado preciso de conceitos de "quantidade infinitamente pequena". Hoje em dia o integral é definido em termos da noção de número real, sem recorrer a conceitos como "infinitesimais". Esta definição será dada no Capítulo I.

I 1.6 A introdução ao cálculo utilizada neste livro

Uma exposição rigorosa e completa, quer do Cálculo integral, quer do Cálculo diferencial, depende em última análise de um estudo cuidadoso do sistema dos números reais. Este estudo, quando levado a cabo na sua totalidade, é um tema interessante, mas algo extenso de modo a exigir um pequeno volume para a sua exposição completa. O método utilizado neste livro consiste em introduzir os números reais como *conceitos não definidos (elementos primitivos)* e tomar simplesmente algumas das suas propriedades fundamentais como *axiomas*. Estes axiomas, e alguns dos teoremas mais simples que podem deduzir-se a partir deles, são discutidos na Parte 3 deste Capítulo. Muitas das propriedades dos números reais aqui tomadas como axiomas são, concerteza, familiares ao leitor pelo seu estudo da Álgebra elementar. Porém existem algumas propriedades dos números reais que habitualmente não são consideradas na álgebra elementar, mas que desempenham um papel importante no Cálculo. Estas propriedades são consequência do chamado *axioma do extremo superior* (conhecido igualmente por *axioma da continuidade*) que se estudará aqui com algum pormenor. O leitor poderá, se o deseja, estudar a Parte 3 na sequência do texto, ou então deixar esta matéria para mais tarde, quando entrar no estudo daquelas partes da teoria que utilizam propriedades do axioma do extremo superior. As matérias dependentes do axioma do extremo superior estarão claramente assinaladas.

Para desenvolver o Cálculo como uma teoria matemática completa seria necessário expôr, em complemento dos axiomas do sistema de números reais, os vários "métodos de demonstração" que permitirão deduzir os teoremas a partir dos axiomas. Cada afirmação, na teoria, teria que ser justificada quer como "uma lei estabelecida" (isto é, um axioma, uma definição, ou um teorema previamente demonstrado), ou como o resultado da aplicação de um dos métodos de demonstração considerados a uma lei estabelecida. Um programa desta natureza resultaria extremamente longo e enfadonho e não compensaria na ajuda à compreensão do assunto por um principiante. Felizmente não é necessário proceder desta maneira para chegar a uma boa compreensão e utilização do Cálculo. Neste livro o assunto é introduzido duma maneira informal, fazendo-se um amplo uso da intuição geométrica sempre que isso é considerado conveniente. Simultâneamente procura-se que a exposição das matérias goze da precisão e clareza de pensamento próprias da ciência moderna. Todos os teoremas importantes estão explicitamente expostos e rigorosamente demonstrados.

Para evitar interromper a sucessão de ideias, algumas das demonstrações aparecem em seções separadas assinaladas com um asterisco. Pela mesma razão, alguns capitulos são acompanhados de secções suplementares, nos quais se tratam, com pormenor, alguns temas importantes relacionados com o Cálculo. Alguns deles estão também assinalados com um asterisco para indicar que podem ser omitidos, ou deixados para mais tarde, sem que assim se interrompa a continuidade da exposição. A medida em que se devem tomar em consideração as secções com asterisco depende, em parte, da preparação do leitor e em parte do seu interesse. O leitor interessado fundamentalmente nas ideias básicas e na prática pode suprimir as secções com asterisco. Aquele que deseje um curso completo de Cálculo, tanto teórico como prático, deverá ler algumas dessas seções.

Parte 2 – Conceitos Fundamentais da Teoria dos Conjuntos

I 2.1 Introdução à teoria dos conjuntos

No estudo de qualquer ramo da Matemática, seja Análise, Álgebra ou Geometria, é útil o uso da notação e terminologia da teoria dos conjuntos. Esta teoria, desenvolvida por Boole e Cantor (+) no final do século XIX, teve uma profunda influência no desenvolvimento da Matemática no século XX. Unificou muitas ideias aparentemente desconexas e contribuiu para reduzir grande número de conceitos matemáticos aos seus fundamentos lógicos, dum modo elegante e sistemático. Um estudo completo da teoria dos conjuntos exigiria uma ampla discussão que consideramos fora do alcance deste livro. Felizmente as noções básicas são em número reduzido e é possível desenvolver um conhecimento prático dos métodos e ideias da teoria dos conjuntos, através duma discussão informal. Na realidade não vamos discutir tanto a moderna teoria, como indicar de modo preciso a terminologia que desejamos aplicar a ideias mais ou menos familiares.

Na Matemática a palavra "conjunto" é usada para representar uma coleção de objectos considerados como uma identidade única. As coleções designadas por nomes como "rebanho", "tribu", "multidão", "equipe" e "eleitorado" são todas exemplos de conjuntos. Os objetos que constituem a coleção chaman-se *elementos* ou *membros* do conjunto, e dizem-se que *pertencem* ou *estão contidos no* conjunto. O conjunto, por sua vez, diz-se *conter* ou ser *composto dos* seus elementos.

Ocupar-nos-emos principalmente de conjuntos de entes matemáticos: conjuntos de números, conjuntos de curvas, conjuntos de figuras geométricas, etc. Em muitas aplicações convém considerar conjuntos em que nenhuma hipótese se faz acerca da natureza dos seus elementos. Tais conjuntos dizem-se abstratos. A teoria dos conjuntos abstratos foi desenvolvida para tratar com tais coleções de objectos arbitrários e precisamente a essa generalidade se fica a dever o grande alcance da teoria.

(+) George Boole (1815-1864) foi um lógico-matemático inglês. O seu livro "Investigação das leis do pensamento", publicado em 1854, assinala a criação do primeiro sistema praticável de lógica simbólica.
George F. L. P. Cantor (1845-1918) e a sua escola criaram a moderna Teoria dos Conjuntos no período 1874-1895.

I 2.2 Notações para representar conjuntos

Os conjuntos designam-se, geralmente, pelas letras maiúsculas: $A, B, C, ..., X, Y, Z$; e os elementos pelas letras minúsculas: $a, b, c, ..., x, y, z$. Utilizamos a notação.

$$x \in S$$

para indicar que "x é um elemento de S" ou "x pertence a S". Se x não pertence a S escrevemos $x \notin S$. Quando conveniente, designaremos os conjuntos especificando os seus elementos entre os símbolos $\{\ \}$; por exemplo, o conjunto dos inteiros positivos pares, inferiores a 10, representa-se por $\{2, 4, 6, 8\}$, enquanto o conjunto de *todos* os inteiros positivos pares se representa por $\{2, 4, 6, 8, ...\}$, sendo os três pontos a representação matemática de "e assim sucessivamente". Os três pontos usar-se-ão apenas quando o significado de "e assim sucessivamente" for claro. Este método de representação dos conjuntos é muitas vezes designado por *representação em extensão.*

O primeiro conceito fundamental que relaciona um conjunto com outro é a *igualdade* de conjuntos:

DEFINIÇÃO DE IGUALDADE DE CONJUNTOS: *Dois conjuntos A e B dizem-se iguais (ou idênticos) se constam exactamente dos mesmos elementos e, nesse caso, escrevemos $A = B$. Se um dos conjuntos contém algum elemento que não pertence ao outro, dizemos que os dois conjuntos são distintos e escrevemos $A \neq B$.*

EXEMPLO 1. De acordo com esta definição, os dois conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 8, 6, 4\}$ são iguais, uma vez que ambos são constituidos pelos quatro elementos 2, 4, 6 e 8. Então, usada a *representação em extensão* para designar um conjunto, a ordem pela qual são referidos os seus elementos é irrelevante.

EXEMPLO 2. Os conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 2, 4, 4, 6, 8\}$ são iguais, apesar de no segundo os elementos 2 e 4 aparecerem repetidos. Ambos contêm os quatro elementos 2, 4, 6, 8 e apenas esses, pelo que a definição impõe que se considerem iguais esses conjuntos.

Este exemplo põe em evidência que não é necessário exigir que os elementos dum conjunto, na representação em extensão, sejam todos distintos. Um exemplo análogo é o conjunto das letras da palavra *Mississipi* que é igual ao conjunto $\{M, i, s, p\}$ formado pelas quatro letras distintas M, i, s, p.

I 2.3 Subconjuntos

Dado um conjunto S podemos formar novos conjuntos, chamados *subconjuntos* de S. Por exemplo, o conjunto dos inteiros positivos menores que 10 e divisíveis por 4 (o conjunto $\{4, 8\}$) é um subconjunto do conjunto de todos os inteiros positivos pares inferiores a 10. Em geral dá-se a seguinte definição.

Definição de subconjunto. *Um conjunto A diz-se um subconjunto dum conjunto B, e escreve-se*

$$A \subseteq B\,,$$

quando todo o elemento de A pertence a B. Diz-se também que A está contido em B ou que B contém A. O símbolo $\subseteq$ utiliza-se para representar a relação de inclusão de conjuntos.

A afirmação $A \subseteq B$ não exclui a possibilidade de $B \subseteq A$. Com efeito, podemos ter ambas as relações $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, mas isto acontece unicamente se A e B têm os mesmos elementos. Por outras palavras,

$$A = B \qquad \textit{se e sómente se} \quad A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Este teorema é uma consequência imediata das definições anteriores de igualdade e inclusão. Se $A \subseteq B$, mas $A \neq B$, então dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B; expressamos isto escrevendo $A \subset B$.

Em todas as nossas aplicações da teoria dos conjuntos, temos um conjunto S fixado "à priori" e só nos interessam subconjuntos daquele. O conjunto fundamental S pode variar de uma aplicação para outra; será considerado o *conjunto universal* de cada teoria particular. A notação

$$\{x \mid x \in S \quad \text{e} \quad x \text{ satisfaz a } P\}$$

designará o conjunto de todos os elementos x de S que satisfazem à propriedade P. Quando o conjunto universal, a que nos estamos a referir, se subentende, omitimos a referência a S e escrevemos simplesmente $\{x|x \text{ satisfaz a } P\}$, que se lê "o conjunto de todos os x tais que x satisfaz a P". Os conjuntos designados deste modo são caracterizados por uma *propriedade definidora*. Por exemplo, o conjunto de todos os números reais e positivos pode representar-se por $\{x|x > 0\}$; o conjunto universal S neste caso subentende-se que é o conjunto dos números reais. Do mesmo modo, o conjunto de todos os números pares positivos $\{2, 4, 6, \ldots\}$ pode representar-se $\{x|x \text{ inteiro par positivo}\}$. Evidentemente, a letra x pode ser substituída por outro símbolo adequado. Assim, podemos escrever

$$\{x \mid x > 0\} = \{y \mid y > 0\} = \{t \mid t > 0\}$$

etc.

Pode acontecer que um conjunto não contenha qualquer elemento. Designa-se, então, por *conjunto vazio* e representa-se pelo símbolo $\varnothing$. Considera-se $\varnothing$ subconjunto de qualquer conjunto. Se imaginarmos, por facilidade, um conjunto análogo a um recipiente (tal como uma bolsa ou uma caixa) que contém certos objectos, os seus elementos, então o conjunto vazio será análogo a um recipiente vazio.

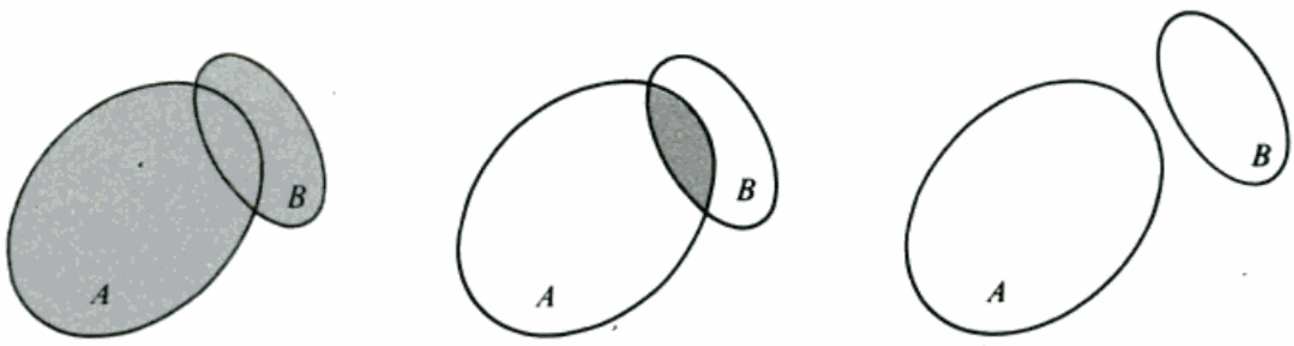
Para evitar dificultades lógicas, devemos fazer distinção entre o elemento x e o conjunto $\{x\}$ cujo único elemento é x. (Uma caixa com um chapéu dentro é conceitualmente distinta do próprio chapéu). Em particular o conjunto vazio $\varnothing$ não é o mesmo que o conjunto $\{\varnothing\}$. Com efeito, o conjunto vazio $\varnothing$ não contém elementos, enquanto que o conjunto $\{\varnothing\}$ contém um elemento, $\varnothing$. (Uma caixa que contém uma caixa vazia não está vazia). Os conjuntos formados de um só elemento dizem-se *conjuntos de um elemento* ou *singulares*.

Muitas vezes recorre-se ao auxílio de diagramas para tornar intuitivas relações entre conjuntos. Por exemplo, podemos considerar o conjunto S uma região do plano e cada um dos seus elementos um ponto. Os subconjuntos de S podem então ser imaginados como coleções de pontos interiores a S. Por exemplo, na fig. I.6(b) a parte sombreada é um subconjunto de A e também um subconjunto de B. As ajudas gráficas deste tipo, chamadas *diagramas de Venn*, são úteis para comprovar a validade de teoremas na teoria dos conjuntos ou para sugerir métodos de demonstração dos mesmos. Naturalmente tais demonstrações baseiam-se nas definições e conceitos e a sua validade dependerá de um raciocínio correcto e não dos diagramas.

I 2.4 Reuniões, interseções, complementos

A partir de dois conjuntos dados A e B, podemos formar um novo conjunto chamado *reunião* de A e B. Este novo conjunto representa-se pelo símbolo

$$A \cup B \quad (\text{ler: "}A \textit{ reunião com } B\text{"}),$$



(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cap B = \varnothing$

Fig. I.6 Reuniões e interseções

e define-se como o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos. Quer isto dizer que $A \cup B$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem, pelo menos, a um dos conjuntos A, B. Na fig. I.6(a) a parte sombreada representa $A \cup B$.

Analogamente a *intersecção* de A e B, representada por

$$A \cap B \quad (\text{ler: "}A \textit{ intersecção com } B\text{"}),$$

é definida como o conjunto dos elementos comuns a A e a B. Na fig. I.6(b) a parte sombreada representa a intersecção de A e B. Na fig. I.6(c) os conjuntos A e B não têm qualquer elemento comum; neste caso a intersecção é o conjunto vazio $\varnothing$. Dois conjuntos A e B dizem-se *disjuntos* se $A \cap B = \varnothing$.

Dados os conjuntos A e B, a *diferença* $A-B$ (também chamada *complementar de B em relação a* A) é definida pelo conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Então, por definição

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}\,.$$

Na fig. I.6(b) a parte não sombreada de A representa $A - B$; a parte não sombreada de B representa $B - A$.

As operações de reunião e intersecção possuem várias analogias formais com a adição e multiplicação de números reais. Por exemplo, uma vez que a ordem pela qual se consideram os conjuntos não intervém nas definições de reunião e intersecção, resulta que $A \cup B = B \cup A$ e que $A \cap B = B \cap A$, o que significa serem a reunião e intersecção operações *comutativas*. As definições são dadas de tal modo que as operações são *associativas:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \text{e} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,.$$

Estes e outros teoremas relativos à "álgebra dos conjuntos" são apresentados como exercícios na Seção I 2.5. Uma das melhores maneiras para o leitor se familiarizar com a terminologia e notações aqui introduzidas é estabelecer as demonstrações de cada uma destas propriedades. Uma amostra do tipo de argumentação que é necessária aparece imediatamente após os Exercícios.

As operações de reunião e intersecção podem estender-se a coleções finitas ou infinitas de conjuntos do modo seguinte: Seja $\mathscr{F}$ uma classe (+) não vazia de conjuntos. A reunião de todos os conjuntos de $\mathscr{F}$ define-se como o conjunto de todos aqueles elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos de $\mathscr{F}$ e representa-se pelo símbolo

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A\,.$$

Se $\mathscr{F}$ é uma colecção finita de conjuntos, por exemplo $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ escrevemos

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\,.$$

De modo análogo, a intersecção de todos os conjuntos de $\mathscr{F}$ define-se com o conjunto de

(+) Para comodidade de linguagem chamamos *classe* a uma colecção de conjuntos. Para representar as classes utilizamos letras maiúsculas em cursivo. A terminologia e notação usuais da teoria dos conjuntos aplicam-se, naturalmente, às classes. Por exemplo $A \in \mathscr{F}$ significa que A é um dos conjuntos da classe $\mathscr{F}$ e $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ significa que cada conjunto de $\mathscr{A}$ pertenece a $\mathscr{B}$, e assim sucessivamente.

todos aqueles elementos que pertencem a todos os conjuntos de $\mathscr{F}$ e representa-se por

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A\,.$$

Para colecções finitas (como acima) escrevemos

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\,.$$

As operações reunião e intersecção definiram-se de modo tal que a propriedade associativa é verificada automaticamente. Daqui resulta que não haverá ambiguidade quando escrevemos $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ou $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

I 2.5 Exercícios

1. Utilizar a representação em extensão para designar os seguintes conjuntos de números reais

$$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}. \qquad D = \{x \mid x^3 - 2x^2 + x = 2\}.$$

$$B = \{x \mid (x - 1)^2 = 0\}. \qquad E = \{x \mid (x + 8)^2 = 9^2\}.$$

$$C = \{x \mid x + 8 = 9\}. \qquad F = \{x \mid (x^2 + 16x)^2 = 17^2\}.$$

2. Para os conjuntos do Exercício 1, observe-se que $B \subseteq A$. Indicar todas as relações de inclusão $\subseteq$ que são válidas entre os conjuntos A, B, C, D, E, F.
3. Seja $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Discutir a validade das seguintes afirmações (provar que algumas são verdadeiras e explicar porque são as outras falsas).
   (a) $A \subset B$. (d) $1 \in A$.
   (b) $A \subseteq B$. (e) $1 \subseteq A$.
   (c) $A \in B$. (f) $1 \subset B$.
4. Resolver o Exercício 3 se $A = \{1\}$ e $B = \{\{1\}, 1\}$.
5. Dado o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$, expressar todos os subconjuntos de S. Existem 16 no total, incluindo $\varnothing$ e S.
6. Dados os quatro conjuntos seguintes

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \qquad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \qquad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

discutir a validade das afirmações seguintes (provar que algumas são verdadeiras e explicar porquê as outras não o são)
   (a) $A = B$. (d) $A \in C$. (g) $B \subset D$.

(b) $A \subseteq B$. (e) $A \subset D$. (h) $B \in D$.
(c) $A \subset C$. (f) $B \subset C$. (i) $A \in D$.

7. Demonstrar as propriedades seguintes da igualdade de conjuntos:
   (a) $\{a, a\} = \{a\}$.
   (b) $\{a, b\} = \{b, a\}$.
   (c) $\{a\} = \{b, c\}$ se e sómente se $a = b = c$.

Demonstrar o conjunto de relações dos Exercícios 8 ao 19 (Exemplos dessas demonstrações são dados no final desta Secção).

8. *Propriedade comutativa* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
9. *Propriedade associativa* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
10. *Propriedade distributiva* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
11. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
12. $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$.
13. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
14. $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
15. Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.
16. Se $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$, então $C \subseteq A \cap B$.
17. (a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, prove que $A \subset C$.
    (b) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, prove que $A \subseteq C$.
    (c) O que pode concluir-se se $A \subset B$ e $B \subseteq C$?
    (d) Se $x \in A$ e $A \subseteq B$, verificar-se-á necessariamente $x \in B$?
    (e) Se $x \in A$ e $A \in B$, verificar-se-á necessariamente que $x \in B$?
18. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
19. Seja $\mathscr{F}$ uma classe de conjuntos. Então

$$B - \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{A \in \mathscr{F}} (B - A) \qquad \text{e} \qquad B - \bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} (B - A).$$

20. (a) Provar que uma das duas fórmulas seguintes é sempre correcta e que a outra alguma vez é falsa

$$\text{(i)} \quad A - (B - C) = (A - B) \cup C,$$

$$\text{(ii)} \quad A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

    (b) Estabelecer uma condição necessária e suficiente adicional para que a fórmula que algumas vezes é incorreta passe a ser sempre válida.

Demonstração da propriedade comutativa $A \cup B = B \cup A$.

Sejam $X = A \cup B$ e $Y = B \cup A$. Para provar que $X = Y$ demonstra-se que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$. Suponhamos que $x \in X$. Então x pertence pelo menos a A ou a B. Logo x pertence pelo menos a B ou a A; logo $x \in Y$. Deste modo todo o elemento de X pertence igualmente a Y o que implica $X \subseteq Y$. Analogamente encontramos que $Y \subseteq X$, logo $X = Y$.

Demonstração de $A \cap B \subseteq A$. Se $x \in A \cap B$, então x pertence a A e a B. En particular, $x \in A$. Portanto todo o elemento de $A \cap B$ pertence a A e por conseguinte $A \cap B \subseteq A$.

Parte 3 – Um Conjunto de Axiomas para o Sistema dos Números Reais

I 3.1 Introdução

Há várias maneiras de introduzir o sistema dos números reais. Um método corrente consiste em começar com os inteiros e positivos 1, 2, 3, ... e utilizá-los como base para construir um sistema mais amplo, possuindo as propriedades desejadas. Em resumo, a idéia deste método consiste em tomar os inteiros e positivos como conceitos não definidos, estabelecer relativamente a estes alguns axiomas e, em seguida, utilizá-los para construir o sistema mais amplo dos números *racionais* (cociente de inteiros positivos). Os números racionais positivos utilizam-se, por sua vez, como uma base para construir os números *irracionais* positivos (números reais como $\sqrt{2}$ e π que não são racionais). A fase final consiste na introdução dos números reais negativos e do zero. A parte mais difícil de todo este processo é a transição dos números racionais para os números irracionais.

Embora a necessidade de introdução dos números irracionais fosse já clara para os matemáticos da Grécia antiga nos seus estudos de Geometria, métodos satisfatórios de construção dos números irracionais, a partir dos números racionais, só foram introduzidos muito mais tarde, no século XIX. Nesta época foram delineadas três teorias respectivamente por Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916). Em 1889 o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) apresentou cinco axiomas para os inteiros e positivos que podem ser utilizados como ponto de partida para a construção total. Uma exposição detalhada desta construção, começando com os axiomas de Peano e utilizando o método de Dedekind para introduzir os números irracionais, encontra-se no livro de E. Landau, *Foundations of Analysis* (New York, Chelsea Pub. Co., 1951).

O ponto de vista adotado aqui é não construtivo. Iniciamos o processo num ponto bastante avançado, considerando os números reais como conceitos primitivos verificando um certo número de propriedades que se tomam como axiomas, isto é, supomos a existência dum conjunto **R** de elementos, chamados números reais, que verificam os dez axiomas que apresentamos nas seções que se seguem. Todas as propriedades dos números reais se podem deduzir desses axiomas. Quando os números reais se definem por um processo construtivo, as propriedades que aqui se apresentam como axiomas são consideradas como teoremas a demonstrar.

A menos que se afirme o contrário, nos axiomas que apresentamos a seguir as letras $a, b, c, ..., x, y, z$ representam números reais arbitrários. Os axiomas dividem-se, duma maneira natural, em três grupos que designamos por *axiomas de corpo, axiomas de ordem* e *axioma do extremo superior* (também chamado *axioma de continuidade* ou *axioma de completude*).

I 3.2 Axiomas de corpo

Juntamente com o conjunto **R** dos números reais, admitimos a existência de duas operações chamadas *adição* e *multiplicação*, tais que para cada par de números reais x e y podemos formar a *soma* de x e y, que é outro número real representado por $x + y$, e o *produto* de x e y representado por xy ou $x \cdot y$. Supõe-se que $x + y$ e o produto xy são *univocamente determinados* por x e y. Por outras palavras, dados x e y, existe um e um só número real $x + y$ e um e um só número real xy. Não atribuimos significado especial aos símbolos + e além do contido nos axiomas.

AXIOMA 1. PROPRIEDADE COMUTATIVA $x + y = y + x$, $xy = yx$

AXIOMA 2. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\quad x(yz) = (xy)z$

AXIOMA 3. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA $x(y + z) = xy + xz$

AXIOMA 4. EXISTÊNCIA DE ELEMENTOS NEUTROS. *Existem dois números reais distintos, que se indicam por 0 e 1, tais que para cada número real x se tem* $x + 0 = x$ *e* $1 \cdot x = x$.

AXIOMA 5. EXISTÊNCIA DE NEGATIVOS. *Para cada número real x existe um número real y tal que* $x + y = 0$.

AXIOMA 6. EXISTÊNCIA DE RECÍPROCOS. *Para cada número real* $x \neq 0$, *existe um número real y tal que* $xy = 1$.

Nota: os números 0 e 1 dos Axiomas 5 e 6 são os do Axioma 4.

Dos axiomas anteriores podemos deduzir todas as regras usuais da álgebra elementar. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas. Nestes teoremas os símbolos a, b, c, d representam números reais arbitrários.

TEOREMA I.1 REGRA DE SIMPLIFICAÇÃO PARA A ADIÇÃO. *Se* $a + b = a + c$, *então* $b = c$. *(Em particular isto prova que o número 0 do axioma 4 é unico.)*

TEOREMA I.2 POSSIBILIDADE DA SUBTRACÇÃO. *Dados a e b existe um e um só x tal que* $a + x = b$. *Este número x representa-se por* $b - a$. *Em prrticular,* $0 - a$ *escreve-se simplesmente* $-a$ *e chama-se o simétrico de a.*

TEOREMA I.3. $b - a = b + (-a)$.

TEOREMA I.4 $-(-a) = a$.

TEOREMA I.5 $a(b - c) = ab - ac$.

TEOREMA I.6 $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

TEOREMA I.7 REGRA DE SIMPLIFICACÃO PARA A MULTIPLICACÃO. *Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$. (Em particular, isto mostra que o número 1 do Axioma 4 é único).*

TEOREMA I.8. POSSIBILIDADE DA DIVISÃO. *Dados a e b com $a \neq 0$, existe um e um só x tal que $ax = b$. Este x representa-se por b/a ou $\dfrac{b}{a}$ e chama-se o coeciente de b por a. Em particular $1/a$, que também se escreve a^{-1}, chama-se o recíproco de a.*

TEOREMA I.9. *Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.*

TEOREMA I.10. *Se $a \neq 0$, então $(a^{-1})^{-1} = a$.*

TEOREMA I.11. *Se $ab = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$.*

TEOREMA I.12. $(-a)\, b = -(ab)$ *e* $(-a)(-b) = ab$.

TEOREMA I.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ *se* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$.

TEOREMA I.14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ *se* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$.

TEOREMA I.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ *se* $b \neq 0$, $c \neq 0$, *e* $d \neq 0$.

Para ilustrar como estes teoremas podem ser obtidos como consequência dos axiomas apresentaremos as demonstrações dos Teoremas I.1 até I.4. Será instrutivo para o leitor tentar demonstrar os restantes.

Demonstração de I.1. Dado $a + b = a + c$. Pelo axioma 5 existe um número y tal que $y + a = 0$. Porque a soma é univocamente determinada, temos $y + (a + b) = y + (a + c)$. Utilizando a propriedade associativa obtemos $(y + a) + b = (y + a) + c$, ou $0 + b = 0 + c$. Mas pelo axioma 4 temos que $0 + b = b$ e $0 + c = c$, ou seja $b = c$. Repare-se que este teorema mostra que existe um só número real tendo a propriedade do 0 no axioma 4. Com efeito se 0 e 0′ possuissem ambos essa propriedade, então $0 + 0' = 0$ e $0 + 0 = 0$ e portanto $0 + 0' = 0 + 0$ e, pela regra de simplificação, $0 = 0'$.

Demonstração de I.2. Dados a e b, escolhemos y de modo que $a + y = 0$ e seja $x = y + b$. Então $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$. Por conseguinte existe pelo menos um x, tal que $a + x = b$. Mass em virtude do teorema I.1 existe quando muito um tal x. Portanto existe *um e um só* nessas condições.

Demonstração de I.3. Sejam $x = b - a$ e $y = b + (-a)$. Desejamos provar que $x = y$. Por definição de $b - a$, $x + a = b$ e

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Consequentemente $x + a = y + a$ e, pelo Teorema I.1, $x = y$.

Demonstração de I.4. Temos $a + (-a) = 0$ por definição de $-a$. Mas esta igualdade diznos que a é o simétrico de $-a$, isto é, $a = -(-a)$ como se pretendia demonstrar.

*I 3.3 Exercícios

1. Demonstrar os teoremas I.5 até I.15, utilizando os axiomas 1 a 6 e os teoremas I.1 a I.4.

Nos exercícios 2 a 10 demonstrar as proposições formuladas, ou estabelecer as igualdades dadas. Utilizar os axiomas 1 a 6 e os teoremas I.1 a I.15.

2. $-0 = 0$.
3. $1^{-1} = 1$.
4. Zero não admite recíproco.
5. $-(a + b) = -a - b$.
6. $-(a - b) = -a + b$.
7. $(a - b) + (b - c) = a - c$.
8. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ se $b \neq 0$.
10. $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

I 3.4 Axiomas de ordem

Este grupo de axiomas diz respeito a um conceito pelo qual se estabelece uma *ordenação* entre os números reais. Esta ordenação permitir-nos-á afirmar se um número real é maior ou menor que outro. Introduzem-se as propriedades de ordem com um conjunto de axiomas referentes a um novo conceito não definido dito *positividade*, para depois definirmos os conceitos de *maior que* e *menor que* em termos de positividade.

Admitiremos a existência dum certo subconjunto $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$, chamado conjunto dos números *positivos*, que verifica os três axiomas de ordem seguinte:

AXIOMA 7. *Se x e y pertencem a $\mathbf{R}^+$, o mesmo se verifica com $x + y$ e xy.*

AXIOMA 8. *Para cada real $x \neq 0$, ou $x \in \mathbf{R}^+$ ou $-x \in \mathbf{R}^+$, mas não ambos.*

AXIOMA 9. $0 \notin \mathbf{R}^+$.

Podemos agora definir os símbolos $<$, $>$, $\leq$ e $\geq$, chamados respectivamente *menor que, maior que, igual ou menor que* e *igual ou maior que*, da maneira seguinte:

$x < y$ significa que $y - x$ é positivo;

$y > x$ significa que $x < y$;

$x \leq y$ significa que ou $x < y$, ou $x = y$;

$y \geq x$ significa que $x \leq y$.

Assim temos $x > 0$ se e só se x é positivo. Se $x < 0$, dizemos que x é *negativo;* se $x \geq 0$ dizemos que x é *não negativo.* Um par de desigualdades simultâneas tais como $x < y$, $y < z$ escreve-se frequentemente de forma mais abreviada $x < y < z$; interpretações semelhantes são dadas às desigualdades compostas $x \leq y < z$, $x < y \leq z$, $x \leq y \leq z$.

A partir dos axiomas de ordem podem deduzir-se todas as regras usuais do cálculo com desigualdades. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas.

Teorema I.16. Propriedade tricotómica. *Para a e b números reais e arbitrários verificar-se-á uma e só uma das três relações $a < b$, $b < a$ ou $a = b$.*

Teorema I.17. Propriedade transitiva. *Se $a < b$ e $b < c$ é $a < c$.*

Teorema I.18. *Se $a < b$ é $a + c < b + c$.*

Teorema I.19. *Se $a < b$ e $c > 0$ é $ac < bc$.*

Teorema I.20. *Se $a \neq 0$ é $a^2 > 0$.*

Teorema I.21. *$1 > 0$.*

Teorema I.22. *Se $a < b$ e $c < 0$ é $ac > bc$.*

Teorema I.23. *Se $a < b$ é $-a > -b$. Em particular, se $a < 0$, é $-a > 0$.*

Teorema I.24. *Se $ab > 0$, então a e b são ambos positivos, ou ambos negativos.*

Teorema I.25. *Se $a < c$ e $b < d$, então $a + b < c + d$.*

Também aqui se demonstram apenas alguns teoremas como amostra do processo de demonstração. Os restantes são deixados ao leitor como exercício.

Demonstração de I.16. Seja $x = b - a$. Se $x = 0$, então $b - a = a - b = 0$ e por conseguinte, pelo axioma 9, não pode ser nem $a > b$, nem $b > a$. Se $x \neq 0$, o axioma 8 diz-nos que ou $x > 0$ ou $x < 0$, mas não ambos; e portanto ou $a < b$ ou $b < a$, mas não ambos. Em conclusão verifica-se uma e só uma das três relações $a = b$, $a < b$, $a < b$.

Demonstração de I.17. Se $a < b$ e $b < c$, então $b - a > 0$ e $c - b > 0$. Em virtude do axioma 7, podemos somar e escrever $(b - a) + (c - b) > 0$, donde resulta $c - a > 0$ e portanto $a < c$.

Demonstração de I.18. Seja $x = a + c$, $y = b + c$. Então $y - x = b - a$. Mas $b - a > 0$, pois que $b > a$. Resulta pois $y - x > 0$, o que significa que $x < y$.

Demonstração de I.19. Se $a < b$, então $b - a > 0$. Se $c > 0$, pelo axioma 7 podemos multiplicar c por $(b - a)$ e obter $(b - a)\,c > 0$. Mas $(b - a)\,c = bc - ac$ e por isso $bc - ac > 0$ o que significa que $ac < bc$, como se pretendia demonstrar.

Demonstração de I.20. Se $a > 0$, então $a \cdot a > 0$ pelo axioma 7. Se $a < 0$, então $-a > 0$ e daqui $(-a).(-a) > 0$ pelo mesmo axioma. Em ambos os casos tem-se $a^2 > 0$.

Demonstração de I.21. Aplicar o teorema I.20 com $a = 1$.

*I 3.5 Exercícios

1. Demonstrar os teoremas I.22 a I.25, utilizando os teoremas anteriores e os axiomas 1 a 9.

Nos exercícios 2 a 10, demonstrar as proposições ou estabelecer as desigualdades dadas. Devem utilizar-se os axiomas 1 a 9 e os teoremas I.1 a I.25.

2. Não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.
3. A soma de dois números negativos é um número negativo.
4. Se $a > 0$, então $1/a > 0$, se $a < 0$, então $1/a < 0$.
5. Se $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
6. Se $a \le b$ e $b \le c$, então $a \le c$.
7. Se $a \le b$ e $b \le c$, e $a = c$, então $b = c$.
8. Para números reais a e b quaisquer tem-se $a^2 + b^2 \ge 0$. Se a e b não são ambos 0, então $a^2 + b^2 > 0$.
9. Não existe nenhum número real a tal que $x \le a$ para *todo* o real x.
10. Se x verifica $0 \le x < h$ para *todo* o número real positivo h, então $x = 0$.

I 3.6 Números inteiros e números racionais

Há certos subconjuntos de **R** que se distinguem porque possuem propriedades específicas de que não gozam todos os números reais. Nesta secção trataremos de dois destes subconjuntos, o dos *números inteiros* e o dos *números racionais*.

Para introduzir os inteiros positivos começamos com o número 1, cuja existência é garantida pelo axioma 4. O número $1 + 1$ representa-se por 2, o número $2 + 1$ por 3 e assim sucessivamente. Os números 1, 2, 3, . . . obtidos deste modo pela adição repetida de 1 são todos positivos e chamam-se *inteiros positivos*. Em rigor, esta descrição dos numeros inteiros positivos não é inteiramente completa, porque não explicámos em pormenor qual o significado das expressões "e assim sucessivamente", ou "adição repetida de 1". Embora o significado destas expressões pareça evidente, num estudo rigoroso do sistema dos números reais torna-se necessário dar uma definição mais precisa dos inteiros positivos. Há várias maneiras de o fazer. Um método conveniente consiste em introduzir primeiro a noção de *conjunto indutivo*.

DEFINIÇÃO DE UM CONJUNTO INDUTIVO. *Um conjunto de números reais diz-se um conjunto indutivo se possui as propriedades seguintes:*

(a) *O número 1 pertence ao conjunto.*

(b) *Para cada x pertencente ao conjunto, o número $x + 1$ também pertence ao conjunto.*

Por exemplo, **R** é um conjunto indutivo. Igualmente o é o conjunto $\mathbf{R}^+$. Podemos agora definir os inteiros positivos como aqueles números reais que pertencem a todo o conjunto indutivo.

DEFINIÇÃO DE INTEIROS POSITIVOS. *Um número real diz-se inteiro positivo se pertence a todo o conjunto indutivo.*

Seja **P** o conjunto de todos os inteiros positivos. Então **P** é um conjunto indutivo porque (a) contém 1, e (b) contém $x + 1$ sempre que contenha x. Uma vez que os elementos de **P** pertencem a todo o conjunto indutivo, referimo-nos a **P** como o *menor* conjunto indutivo. Esta propriedade do conjunto **P** constitue a base lógica de um tipo de raciocínio que os matemáticos chamam *demonstração por indução,* que se exporá, em pormenor, na Parte 4 desta Introdução.

Os simétricos dos inteiros positivos chamam-se *inteiros negativos*. Os inteiros positivos conjuntamente com os inteiros negativos e o zero formam um conjunto **Z** designado muito simplesmente por *conjunto dos números inteiros*.

Num estudo completo do sistema dos números reais seria necessário, ao chegar a este ponto, demonstrar certos teoremas acerca dos inteiros. Por exemplo a soma, diferença ou produto de dois inteiros é um inteiro, mas o cociente de dois inteiros não é necessariamente inteiro. Não entraremos, todavia, nos pormenores de tais demonstrações.

O cociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$) define os *números racionais*. O conjunto dos números racionais, representado por **Q,** contém **Z** como subconjunto. O leitor poderá comprovar que **Q** verifica todos os axiomas de corpo e de ordem. Por esta razão dizemos que o conjunto dos números racionais é um *corpo ordenado*. Os números reais que não pertencem a **Q** chamam-se *irracionais*.

I 3.7 Interpretação geométrica dos números reais como pontos de uma recta

O leitor está, com certeza, familiarizado com a representação geométrica dos números reais por meio de pontos de uma reta. Escolhe-se um ponto para representar o *0* e outro, à direita de 0, para representar 1, como se mostra na figura I.7. Esta escolha define a escala. Se se adapta um conjunto apropriado de axiomas para a Geometria euclidiana, então cada número real corresponde a um e um só ponto de reta e, inversamente, cada ponto da reta corresponde a um e um só número real. Por este motivo, a reta chama-se frequentemente *reta real* ou *eixo real*, e é habitual usarem-se as palavras *número real* e *ponto* como sinónimos, dizendo-se por isso, muitas vezes, *ponto* x em vez de ponto correspondente ao número real x.

A relação de ordem entre os números reais tem uma interpretação geométrica simples. Se $x < y$, o ponto x está à esquerda de y, como se mostra na fig. I.7. Os números positivos estão à direita do 0 e os números negativos à esquerda. Se $a < b$, um ponto x satisfaz a $a < x < b$ se e só se x está *entre* a e b.

Esta possibilidade de representar geometricamente os números reais é um poderoso auxiliar, pois permite descobrir e compreender melhor estas propriedades dos números reais. O leitor deve, porém, ter presente que todas as propriedades dos números reais apresentadas como teoremas devem poder deduzir-se dos axiomas, sem qualquer recurso à Geometria. Isto não significa que não se possa fazer uso da Geometria no estudo das propriedades dos números reais. Pelo contrário, a Geometria sugere frequentemente o método de demonstração de um teorema particular e, algumas vezes, um argumento geométrico é mais sugestivo que a demonstração puramente *analítica* (dependente exclusivamente dos axiomas para os núme-

Fig. I.7 Números reais representados geomètricamente sobre uma recta.

ros reais). Neste livro, os argumentos geométricos serão usados em larga extensão para auxiliarem, motivarem ou clarificarem discussões *específicas*. Apesar disso, as demonstrações dos teoremas importantes serão apresentadas na forma analítica.

I 3.8 Limite superior dum conjunto, elemento máximo, extremo superior (supremo).

Os nove axiomas já enunciados contêm todas as propriedades dos números reais tratadas na álgebra elementar. Existe outro axioma, de importância fundamental no Cálculo, que habitualmente não é tratado nos cursos de álgebra elementar. Este axioma (ou algumas propriedades que lhe são equivalentes) é necessário para se estabelecer a *teoria* dos números irracionais.

Os números irracionais aparecem na álgebra elementar quando pretendemos resolver certas equações quadráticas. Por exemplo, pretende-se determinar o número real x tal que $x^2 = 2$. A partir dos nove axiomas já referidas não podemos provar que um tal x existe em **R**, porque esses nove axiomas são também satisfeitos por **Q**, e não existe nenhum número racional x cujo quadrado seja 2. (No Exercício 11 da Secção I. 3.12 esboça-se uma demonstração desta afirmação). O axioma 10 vai permitir-nos introduzir os números irracionais no sistema dos números reais e, simultâneamente, atribuir a este sistema dos números reais uma propriedade de continuidade que é a chave mestra na estrutura lógica do Cálculo.

Antes de expôr o axioma 10, é conveniente introduzir mais alguma terminologia e notações. Suponhamos S um conjunto de números reais não vazio e admitamos que existe um número B tal que

$$x \leq B$$

para todo o x de S. Então S diz-se *limitado superiormente* por B. O número B diz-se um *limite superior* de S. Dizemos *um* limite superior, porque qualquer número maior que B será também un limite superior de S. Se um limite superior B pertence a S, então B chama-se *elemento máximo* de S. Existira, quando muito, um tal elemento B. Se existir, escrevemos

$$B = \max S\,.$$

Então $B = \max S$ se $B \in S$ e $x \leq B$ para todo o $x \in S$. Um conjunto sem limite superior diz-se *não limitado superiormente.*

Os exemplos seguintes ilustram o significado destes termos.

EXEMPLO 1. Seja S o conjunto de todos os números reais positivos. É um conjunto não limitado superiormente. Não tem limite superior nem possui elemento máximo.

EXEMPLO 2. Seja S o conjunto de todos os números reais x, tais que $0 \leq x \leq 1$. *Este conjunto é limitado superiormente por 1. Com efeito 1 é o seu elemento máximo.*

EXEMPLO 3. Seja T o conjunto de todos os números reais x, tais que $0 \leq x < 1$. T é um conjunto parecido com o do Exemplo 2, excepto que 1 não pertence a T. Este conjunto é limitado superiormente por 1, mas não possui elemento máximo.

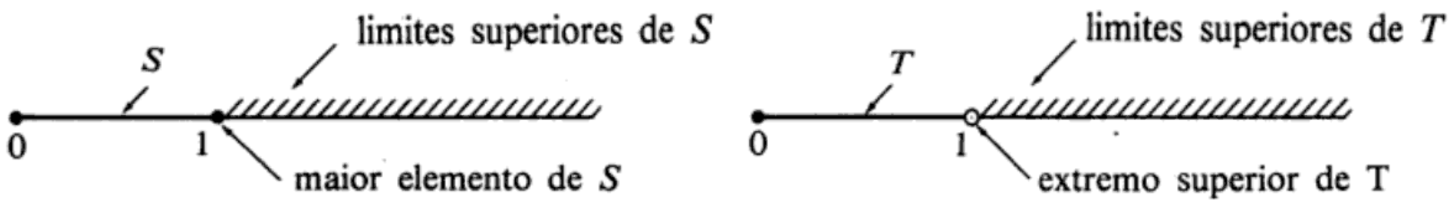
Alguns conjuntos, semelhantes ao do Exemplo 3, são limitados superiormente, mas não possuem elemento máximo. Para estes conjuntos existe um conceito que substitui o de elemento máximo. Chama-se *extremo superior* do conjunto e define-se como segue:

DEFINIÇAO DE EXTREMO SUPERIOR. *Um número B diz-se extremo superior dum conjunto S não vazio, se B possui as propriedades seguintes:*

(a) B é um limite superior para S.

(b) Nenhum número menor que B é um limite superior para S.

Se S tem um elemento máximo, este é também o extremo superior de S. Mas se S não tem elemento máximo, pode ainda ter um extremo superior. No exemplo 3 dado atrás, o número 1 é extremo superior de T, embora T não tenha elemento máximo (Ver fig. I.8).



(a) S tem elemento máximo: $\max S = 1$

(b) T não possui elemento máximo, mas tem extremo superior: $\sup T = 1$

Fig. I.8 Limite superior, elemento máximo, supremo.

TEOREMA I.26. *Dois números distintos não podem ser extremos superiores dum mesmo conjunto.*

Demonstração. Sejam B e C dois extremos superiores para um conjunto S. A propriedade (b) implica que $C \geq B$, uma vez que B é extremo superior; analogamente, $B \geq C$ já que C é extremo superior. Logo temos $B = C$.

Este teorema diz-nos que se existir um extremo superior para um conjunto S, ele é *único* e podemos por isso falar de o extremo superior.
É habitual designar o extremo superior de um conjunto pelo termo mais conciso *supremo*, abreviadamente *sup*. Adoptando esta convenção escrever-se-á

$$B = \sup S$$

para significar que B é o extremo superior, ou supremo, de S.

I 3.9 O axioma do extremo superior (axioma de completitude)

Estamos agora em condições de estabelecer o axioma do extremo superior para o sistema dos números reais.

AXIOMA 10: *Todo o conjunto não vazio S de números reais, que é limitado superiormente, tem supremo, isto é, existe um número real B tal que $B = \sup S$.*

Insistimos, uma vez mais, em que o supremo de S não pertence necessariamente a S. Com efeito, sup S pertence a S se e só se S possui elemento máximo, caso em que $\max S = \sup S$.
As definições de *limite inferior, limitado inferiormente, elemento mínimo* formulam-se de forma semelhante. O leitor deverá fazê-lo como exercício. Se S tem um elemento mínimo escrevemos min S.
Um número L diz-se *ínfimo* de S se (a) L é um limite inferior de S, e (b) nenhum número

maior que L é limite inferior de S. O ínfimo de S, quando existe, é único e representa-se por inf S. Se S possui um elemento mínimo então min S = inf S.

Recorrendo ao axioma 10 podemos demonstrar o seguinte:

TEOREMA I.27. *Todo o conjunto não vazio S que é limitado inferiormente tem ínfimo, isto é, existe um número real L tal que L = inf S.*

Demonstração. Seja $-S$ o conjunto dos simétricos dos números de S. Então $-S$ é não vazio e limitado superiormente. O axioma 10 diz-nos que existe um número B que é supremo de $-S$. É fácil verificar que $-B = \inf S$.

Consideremos uma vez mais os exemplos da Secção anterior. No Exemplo 1, o conjunto de todos os números reais positivos possui o número *0* como ínfimo. Este conjunto não possui elemento mínimo. Nos Exemplos 2 e 3 o número *0* é o elemento mínimo.

Nestes exemplos foi fácil determinar se o conjunto S é ou não limitado superiormente, ou inferiormente, e foi igualmente fácil determinar os números sup S e inf S. O exemplo seguinte mostra que pode ser difícil averiguar da existência de limites superiores ou inferiores.

EXEMPLO 4: Seja S o conjunto de todos os números da forma $(1 + 1/n)^n$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por exemplo, fazendo $n = 1, 2$ e 3, encontramos que os números $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}$ pertencem a S.Todo o número do conjunto é superior a 1 e assim o conjunto está limitado inferiormente e portanto possui ínfimo. Com um pequeno esforço pode provar-se que 2 é o menor elemento de$S$, de modo que inf S = min S = 2. O conjunto S é também limitado superiormente embora este facto não seja tão fácil de provar (Tente o leitor!). Uma vez sabido que S é limitado superiormente, o axioma 10 assegura-nos que existe um número que é o supremo de S. Neste caso não é fácil determinar o valor de sup S a partir de definição do conjunto S. No capítulo seguinte aprenderemos que o sup S é um número irracional, aproximadamente igual a 2,718. É um número importante no Cálculo chamado o número de Euler e.

I 3.10 A propriedade arquimediana do sistema dos números reais.

Esta secção contém algumas propriedades importantes do sistema dos números reais, as quais são consequência do axioma do extremo superior.

TEOREMA I.28. *O conjunto* **P** *dos números inteiros positivos 1, 2, 3, ... é ilimitado superiormente.*

Demonstração. Suponhamos **P** limitado superiormente. Vamos mostrar que tal hipótese conduz a uma contradição. Uma vez que **P** é não vazio, o axioma 10 garante-nos que **P** possui supremo, seja b. O número $b - 1$ sendo menor que b não pode ser limite superior de **P.** Logo existe pelo menos um inteiro positivo n, tal que $n > b - 1$. Para este n temos $n + 1 > b$.

Uma vez que $n + 1$ pertence a **P**, esta conclusão contradiz o fato de que b é um limite superior de **P.**

Como corolário do Teorema I.28 obtêm-se imediatamente as consequências seguintes:

TEOREMA I.29. *Para qualquer real x existe um inteiro positivo n tal que $n > x$.*

Demonstração. Se assim não acontecesse, algum x seria um limite superior de **P**, contradizendo deste modo o Teorema I.28.

TEOREMA I.30. *Se $x > 0$ e se y é um número real arbitrário, existe um inteiro positivo n tal que $nx > y$.*

Demonstração. Aplicar o Teorema I.29 com x substituido por y/x.

A propriedade enunciada no Teorema I.30 denomina-se frequentemente *propriedade arquimediana* do sistema dos números reais. Geometricamente significa que cada segmento de reta, de comprimento arbitràriamente grande, pode ser coberto por um número finito de segmentos de reta de comprimento (positivo) dado, tão pequeno quanto se queira. Por outras palavras, uma pequena régua, usada um número suficiente de vezes, pode sempre medir quaisquer distâncias arbitrariamente grandes. Arquimedes considerou esta como uma propriedade fundamental da reta e estabeleceu-a explicitamente como um dos axiomas da geometria. Nos séculos XIX e XX construiram-se geometrias não arquimedianas nas quais este axioma é rejeitado.

A partir da propriedade arquimediana, podemos demonstrar o seguinte teorema, que nos será util no Cálculo integral.

TEOREMA I.3.1. *Se três números reais a, x e y verificam as desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{I.14}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$, então $x = a$.

Demonstração. Se $x > a$, o teorema I.30 garante-nos que existe um inteiro e positivo n para o qual $n(x - a) > y$, contradizendo (I.14). Logo, não podendo ser $x > a$, teremos $x = a$.

I 3.11 Propriedades fundamentais do supremo e do ínfimo

Nesta secção analisam-se três propriedades fundamentais do supremo e ínfimo que utilizaremos mais tarde neste livro. A primeira propriedade estabelece que qualquer conjunto de números, possuindo supremo, contém pontos tão próximos quanto se queira do referido supremo; analogamente, um conjunto possuindo ínfimo contém pontos arbitràriamente próximos desse ínfimo.

TEOREMA I.32. *Seja h um número positivo dado e seja S um conjunto de números reais.*

(a) Se S tem supremo, então para algum x de S será

$$x > \sup S - h\,.$$

(b) Se S tem ínfimo, então para algum x de S será

$$x < \inf S + h\,.$$

Demonstração de (a). Se tivessemos $x \leq \sup S - h$ para *todo* o $x \in S$, então $\sup S - h$ seria um limite superior de S menor que o seu supremo. Por conseguinte deve ser $x > \sup S - h$ para, pelo menos, um $x \in S$, o que demonstra (a). A demonstração de (b) é semelhante.

TEOREMA I.33. PROPRIEDADE ADITIVA. *Dados dois subconjuntos não vazios A e B de* **R**, *seja C o conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}\,.$$

(a) Se A e B têm supremo, então C tem supremo e

$$\sup C = \sup A + \sup B\,.$$

(b) Se A e B possuem ínfimo, então C possui ínfimo e

$$\inf C = \inf A + \inf B\,.$$

Demonstração. Suponhamos que A e B têm supremo. Se $c \in C$, então $c = a + b$ com $a \in A$ e $b \in B$. Portanto $c \leq \sup A + \sup B$; deste modo $\sup A + \sup B$ é um limite superior de C. Isto prova que C tem supremo e que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

Seja agora n um inteiro e positivo qualquer. Segundo o teorema I.32 (com $h = 1/n$) existe um a em A e um b em B, tais que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}\,, \qquad b > \sup B - \frac{1}{n}\,.$$

Somando estas desigualdades obtemos $a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}$, ou $\sup A + \operatorname{Sup} B <$ $< a + b + \frac{2}{n} \leq \operatorname{Sup} C + \frac{2}{n}$, uma vez que $a + b \leq \sup C$. Temos portanto demonstrado que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$ Em virtude do teorema I.31 devemos ter $\sup C = \sup A + \sup B$, o que prova (a); a demonstração de (b) é análoga.

TEOREMA I.34. *Dados dois subconjuntos não vazios, S e T de* $\mathbf{R}$ *tais que*

$$s \leq t$$

para todo s de S e t de T, então S tem supremo e T tem ínfimo e verifica-se

$$\sup S \leq \inf T\,.$$

Demonstração. Cada t de T é um limite superior para S. Portanto S tem supremo que satisfaz à desigualdade $\sup S \leq t$ para todo o t de T. Daqui resulta que $\sup S$ é um limite inferior para T, e assim T tem um ínfimo que não pode ser menor que $\sup S$. Por outras palavras, temos $\sup S \leq \inf T$, como se queria provar.

***I 3.12 Exercícios**

1. Se x e y são números reais quaisquer com $x < y$, provar que existe pelo menos um número real z tal que $x < z < y$.
2. Se x é um número real arbitrário, provar que existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.
3. Se $x > 0$, provar que existe um inteiro positivo n tal que $1/n < x$.
4. Se x é um número real arbitrário, provar que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n é chamado a *parte inteira* de x e representa-se por $[x]$.
   Por exemplo $[5] = 5$, $[5/2] = 2$, $[-8/3] = -3$.
5. Se x é um número real arbitrário, provar que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $x \leq n < x + 1$.
6. Se x e y são números reais arbitrários, com $x < y$, provar que existe pelo menos um número racional r satisfazendo a $x < r < y$, e deduzir daqui que existem infinitos. Esta

propriedade exprime-se dizendo que o conjunto dos números racionais é *denso* no sistema dos números reais.

7. Se x é racional, $x \neq 0$, e y irracional, provar que $x + y$, $x - y$, xy, x/y, y/x são todos irracionais.
8. A soma ou o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional?
9. Se x e y são números reais arbitrários, com $x < y$, provar que existe pelo menos um número irracional z tal que $x < z < y$ e deduzir que existem infinitos.
10. Um inteiro diz-se *par* se $n = 2m$ para algum inteiro m e *ímpar* se n + 1 é par. Provar as afirmações seguintes:
    (a) Um inteiro não pode ser simultaneamente par e ímpar.
    (b) Todo o inteiro ou é par ou ímpar.·.
    (c) A soma ou o produto de dois inteiros pares é par. Que se pode dizer acerca da soma ou produto de dois inteiros ímpares?
    (d) Se n^2 é par, também n o é. Se $a^2 = 2\ b^2$, com a e b inteiros, então a e b são ambos pares.
    (e) Todo o número racional pode expressar-se na forma a/b, com a e b inteiros, um dos quais pelo menos é ímpar.
11. Provar que não existe nenhum número racional cujo quadrado seja 2.

    [*Sugestão*: Seguir um raciocínio de redução ao absurdo. Supõe-se $(a/b)^2 = 2$, com a e b inteiros, um dos quais, pelo menos, é ímpar. Utilizar partes do Exercício 10 para reduzir o raciocínio ao absurdo.]

12. A propriedade arquimediana do sistema dos números reais foi deduzida como consequência do axioma do extremo superior. Demonstrar que o conjunto dos números racionais satisfaz à propriedade arquimediana, mas não ao axioma do extremo superior. Isto prova que a propriedade arquimediana não implica o axioma do extremo superior.

*I 3.13. Existência de raízes quadradas para os números reais não negativos

Foi apontado anteriormente que a equação $x^2 = 2$ não tem soluções entre os números racionais. Com auxílio do axioma 10, podemos demonstrar que a equação $x^2 = a$ tem soluções entre os números *reais* se $a \geq 0$. Cada tal x chama-se *raíz quadrada de a*.

Em primeiro lugar vejamos algumas considerações relativas à raíz quadrada, sem ter em conta o axioma 10. Os números negativos não podem ter raíz quadrada, porque se $x^2 = a$, então a, sendo um quadrado, deve ser não negativo (pelo teorema I.20). Além disso se $a = 0$, $x = 0$ é a única raíz quadrada (pelo teorema I.11). Suponhamos, então, que $a > 0$. Se $x^2 = a$, então $x \neq 0$ e $(-x)^2 = a$ e assim x e o seu simétrico são ambos raízes quadradas. Por outras palavras, se a tem uma raíz quadrada, então tem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa. Além disso, tem *quando muito duas* porque se $x^2 = a$ e $y^2 = a$, então $x^2 = y^2$ e

$(x - y)(x + y) = 0$ e, deste modo, pelo teorema I.11 ou $x = y$ ou $x = -y$. Portanto, se a tem uma raíz quadrada tem *exactamente duas.*

A existência de pelo menos uma raíz quadrada pode ser deduzida por recurso a um importante teorema do cálculo, mas é instrutivo ver como pode essa existência ser provada diretamente, a partir do axioma 10.

TEOREMA I.35. *Todo o número real não negativo* a *tem uma raíz quadrada não negativa única.*

Nota: Se $a \geqslant 0$, representamos a sua raíz quadrada não negativa por $a^{1/2}$ ou por $\sqrt{a}$. **Seja** $a > 0$, a raíz quadrada negativa é $-a^{1/2}$ ou $-\sqrt{a}$.

Demonstração. Se $a = 0$, então 0 é a única raíz quadrada. Suponhamos, então, que $a > 0$. Seja S o conjunto de todos os números x reais positivos tais que $x^2 \leq a$. Uma vez que $(1 + a)^2 > a$, o número $1 + a$ é um limite superior de S. Mas S é não vazio porque o número $a/(1 + a)$ pertence a S; com efeito $a^2 \leq a(1 + a)^2$ e daqui $a^2/(1 + a)^2 \leq a$. Pelo axioma 10, S tem supremo que designaremos por b. Repare-se que $b \geq a/(1 + a)$ e portanto $b > 0$. Existem unicamente três possibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$ ou $b^2 = a$.

Suponhamos $b^2 > a$ e seja $c = b - (b^2 - a)/(2b) = \frac{1}{2}(b + a/b)$. Então $0 < c < b$ e $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/(4b^2) = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$. Portanto $c^2 > x^2$ para cada x de S, isto é, $c > x$ para cada x de S; esta conclusão significa que c é um limite superior de S. Uma vez que $c < b$, estamos perante uma contradição porque b era o *menor* limite superior de S. Portanto a desigualdade $b^2 > a$ é impossível.

Suponhamos $b^2 < a$. Se $b > 0$, podemos escolher um número positivo c tal que $c < b$ e $c < (a - b^2)/(3b)$ e então pode escrever-se

$$(b + c)^2 = b^2 + c(2b + c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a\,.$$

Quer dizer, $b + c$ pertence a S. Porque $b + c > b$, isto contradiz o fato de b ser um limite superior de S, e a desigualdade $b^2 < a$ é impossível, restando como única hipótese possível $b^2 = a$.

***I 3.14 Raízes de ordem superior. Potências racionais**

O axioma do extremo superior pode utilizar-se para mostrar também a existência de raízes de ordem superior. Por exemplo, se n é um inteiro positivo *ímpar*, então para cada real x existe um é um só real y tal que $y^n = x$. Este y denomina-se *raíz n-enésima* de x e representa-se por

$$y = x^{1/n} \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt[n]{x}\,. \tag{I.15}$$

Se n é *par*, a situação é um pouco diferente. Neste caso, se x é negativo não existe nenhum real y tal que $y^n = x$, porque $y^n \geq 0$ para todo o real y. Porém, se x é positivo pode demonstrar-se que existe um e um só positivo y tal que $y^n = x$. Este y denomina-se a *n-enésima raíz positiva* de x e representa-se pelos símbolos (I.15). Sendo n par $(-y)^n = y^n$ e portanto cada $x > 0$ tem duas raízes n-enésimas reais, y e $-y$. Contudo os símbolos $x^{1/n}$ e $\sqrt[n]{x}$ reservam-se para a *n-enésima raíz positiva*. Não expomos as demonstrações destas afirmações aqui, porque elas deduzir-se-ão, mais adiante, como consequências do teorema de valor intermédio para funções contínuas (Ver Secção 3.10).

Se r é um número racional positivo, $r = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros positivos, definimos x^r como $(x^m)^{1/n}$, isto é a n-enésima raíz de x^m sempre que exista. Se $x \neq 0$ definimos $x^{-r} = 1/x^r$ sempre que x^r seja definido. A partir destas definições é fácil verificar que as propriedades usuais das potências são válidas para expoentes racionais: $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$, e $(xy)^r = x^r y^r$.

*I 3.15 Representação dos números reais por meio de decimais

Um número real da forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \qquad \text{(I.16)}$$

onde a_0 é um inteiro não negativo e $a_1, a_2, ..., a_n$ são inteiros verificando $0 \leq a_i \leq 9$, escreve-se mais abreviadamente da maneira seguinte:

$$r = a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots a_n .$$

Esta é a *representação décimal finita* de r. Por exemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5\,, \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02\,, \qquad \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7{,}25.$$

Números reais deste tipo são necessariamente racionais e todos eles são da forma $r = a/10^n$ com a inteiro. Porém, nem todos os números racionais podem exprimir-se por meio duma representação décimal finita. Por exemplo, se $\frac{1}{3}$ pudesse ser expresso assim teríamos $\frac{1}{3} = a/10^n$, ou $3a = 10^n$ para algum inteiro a. Mas isto é impossível, uma vez que 3 não é divisor de nenhuma potência de dez.

Apesar disso, podemos representar um número real qualquer $x > 0$, com um grau de aproximação desejado, por uma soma da forma (I.16), tomando n suficientemente grande. A razão disto pode ver-se mediante o seguinte argumento geométrico: se x não é inteiro está compreendido entre dois inteiros consecutivos, sejam $a_0 < x < a_0 + 1$. O segmento definido por a_0 e $a_0 + 1$ pode dividir-se em dez partes iguais. Se x não coincide com nenhum dos pontos de divisão, estará compreendido entre dois pontos consecutivos. Isto dá lugar ao par de desigualdades da forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$

onde a_1 é um inteiro $(0 \le a_1 \le 9)$. Subdivide-se em seguida o segmento definido por $a_0 + \frac{a_1}{10}$ e $a_0 + (a_1 + 1)/10$ em dez partes iguais (cada uma de medida 10^{-2}) e continua-se o processo. Se depois de um número finito de divisões um dos pontos coincide com x, x é um número da forma (I-16). Se tal não se verifica, o processo continua-se indefinidamente e gera-se um conjunto infinito de inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Neste caso diz-se que x tem a representação décimal infinita

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Depois de n subdivisões, x verifica as desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

as quais nos dão duas aproximações de x, uma por excesso e a outra por defeito, por decimais finitos que diferem de 10^{-n}. Portanto podemos obter um grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar n suficientemente grande.

Quando $x = \dfrac{1}{3}$ é fácil verificar que $a_0 = 0$ e $a_n = 3$ para $n \geq 1$ e portanto a aproximação decimal correspondiente é

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}333 \cdots .$$

Cada número irracional tem uma representação decimal infinita. Por exemplo, quando $x = \sqrt{2}$ podemos calcular por tentativas tantos dígitos quantos os desejados da sua representação decimal. Com efeito $\sqrt{2}$ está compreendido entre 1,4 e 1,5, já que $(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2$. Do mesmo modo, quadrando e comparando com 2 obtém-se as seguintes aproximações sucessivas

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42, \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415, \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143.$$

Note-se que o processo anterior gera uma sucessão de intervalos de comprimento 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., cada um contido no anterior e contèndo o ponto x. Este é um exemplo do que se designa por encaixe de intervalos, um conceito que se utiliza algumas vezes como base para construir os números irracionais a partir dos racionais.

Uma vez que neste livro pouco uso se fará dos números decimais, não desenvolveremos com pormenor as suas propriedades e apenas mencionamos como se podem definir analiticamente desenvolvimentos decimais com auxílio do axioma do extremo superior.

Se x e um número real positivo dado, seja a_0 o maior inteiro $\leq x$. Escolhido a_0, seja a_1 o maior inteiro tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x .$$

Em geral, determinados $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, seja a_n o maior inteiro tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x . \tag{I.17}$$

Seja S o conjunto de todos os números

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \tag{I.18}$$

obtidos desta maneira para $n = 0, 1, 2, ...$ Então S é não vazio e limitado superiormente e é fácil verificar que o supremo coincide com x. Os inteiros $a_0, a_1, a_2, ...$ assim obtidos podem utilizar-se par definir uma representação decimal de x, pondo

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$$

onde o digito a_n, que ocupa o n-enésimo lugar, é o maior inteiro que satisfaz a (I-17). Por exemplo, se $x = \frac{1}{8}$ encontramos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ e $a_n = 0$ para $n \geq 4$. Portanto podemos descrever

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125000 \cdots .$$

Se em (I.17) substituímos o sinal $\leq$ por $<$ obtemos uma definição ligeiramente diferente da expressão decimal. O extremo superior de todos os números da forma (I.18) é igualmente x, embora os inteiros $a_0, a_1, a_2, ...$ não sejam necessariamente os mesmos que satisfazem (I.17). Por exemplo se esta segunda definição se aplica a $x = \frac{1}{8}$, encontramos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ e $a_n = 9$ para $n \geq 4$. Isto conduz-nos à representação decimal infinita.

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}124999 \cdots .$$

O fato de que um número real possa ter duas representações decimais diferentes é simplesmente o reflexo de dois conjuntos diferentes de números reais poderem ter o mesmo supremo.

Parte 4. Indução matemática, símbolo somatório e questões afins

I 4.1 Um exemplo de demonstração por indução matemática

Uma vez que somando 1 ao inteiro k se obtém $k + 1$ que é maior do que k, não existe nenhum inteiro que seja o *maior de todos*. Contudo, partindo do número 1, podemos alcançar qualquer inteiro positivo depois dum número finito de operações, passando sucessivamente de k a $k + 1$ em cada uma. Esta é a base de um tipo de raciocínio que os matemáticos chamam *demonstração por indução*. Ilustraremos a aplicação deste método, demonstrando a dupla desigualdade usada na Seção I.1.3 para o cálculo da área dum "segmento parabólico", a saber

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2. \tag{I.19}$$

Consideremos em primeiro lugar a desigualdade da esquerda, fórmula que abreviadamente se designará por $A(n)$ (afirmação respeitante a n). É imediata a verificação direta desta asserção para os primeiros valores de n, pois que se por exemplo n tomar os valores 1, 2 e 3 a afirmação virá

$$A(1)\colon 0 < \frac{1^3}{3}, \qquad A(2)\colon 1^2 < \frac{2^3}{3}, \qquad A(3)\colon 1^2 + 2^2 < \frac{3^3}{3},$$

supondo que se interpreta a soma do primeiro membro como *0* para $n = 1$.

É nosso objetivo provar que $A(n)$ é verdadeira para todo o inteiro positivo n. O processo consiste no seguinte: suponhamos a afirmação já provada para um valor particular de n, digamos $n = k$. Quer isto dizer que supomos provada

$$A(k)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}$$

para um $k \geq 1$. Então *utilizando agora $A(k)$*, devemos provar o correspondente resultado para $k + 1$:

$$A(k+1)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}.$$

Somando k^2 a ambos os membros de $A(k)$ obtém-se

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2 .$$

e para obter $A(k + 1)$, como consequência daquela, basta mostrar que

$$\frac{k^3}{3} + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3} .$$

Mas isto resulta imediato da igualdade

$$\frac{(k+1)^3}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} = \frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3} .$$

Portanto provámos que $A(k+1)$ e uma consequência de $A(k)$. Agora, uma vez que $A(1)$ foi verificada directamente, concluimos que $A(2)$ é também verdadeira. Sabendo que $A(2)$ é verdadeira concluímos que $A(3)$ é verdadeira e assim sucessivamente. Considerando que cada inteiro pode alcançar-se por este processo, $A(n)$ é verdadeira para todo o n inteiro e positivo. Está assim provada a desigualdade da esquerda em (I.19). A desigualdade da direita pode provar-se do mesmo modo.

I 4.2 O principio da indução matemática

O leitor deve ficar seguro de que compreendeu o *esquema* da demonstração anterior. Em primeiro lugar provou-se a afirmação $A(n)$ para $n = 1$. Em seguida mostrou-se que *se* a afirmação é verdadeira para um inteiro dado, *então* é também verdadeira para o inteiro seguinte. A partir daqui conclui-se que a afirmação é verdadeira para todos os inteiros positivos.

A ideia de indução pode ilustrar-se com muitos exemplos *não* matemáticos. Assim, imaginemos uma fila de soldados de chumbo, numerados consecutivamente e suponhamos que estão colocados de tal modo que se um deles cai, por exemplo o assinalado com o símbolo k, ele choca com o seguinte, assinalado com $k + 1$. Então qualquer pessoa pode imaginar o que acontecerá se o soldado número 1 é tombado para trás. Também é evidente que se fosse tombado para trás um soldado que não o primeiro, por exemplo o assinalado com n_1, todos os soldados depois *dele* cairíam. Este exemplo ilustra uma generalização do método de indução, a qual pode ser descrita do modo seguinte.

Método de demonstração por indução. Seja $A(n)$ uma afirmação referente a um inteiro n. Concluímos que $A(n)$ é verdadeira para cada $n \geq n_1$ se é possível:

(a) Provar que $A(n_1)$ é verdadeira.

(b) Provar que, suposta $A(k)$ verdadeira com k um inteiro positivo fixo $\geq n_1$, $A(k + 1)$ é verdadeira.

Na prática n_1 é geralmente 1. A justificação lógica deste método de demonstração é o seguinte teorema relativo a número reais.

TEOREMA I.36. PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA. *Seja S um conjunto de inteiros positivos que goza das seguintes propriedades:*

(a) O número 1 pertence ao conjunto S

(b) Se o número k pertence a S também k + 1 pertence a S.

Logo todo o inteiro positivo pertence ao conjunto S.

Demonstração: As propriedades (a) e (b) dizem-nos que S é um conjunto indutivo. Mas os inteiros positivos foram definidos como sendo os números reais que pertencem a todo o conjunto indutivo (Ver Seção I 3.6). Portanto S contém todo o inteiro positivo.

Quando efetuamos a demonstração de uma afirmação $A(n)$ para todo $n \geq 1$ por indução matemática, estamos a aplicar o teorema I.36 ao conjunto S de todos os inteiros para os quais a afirmação é verdadeira. Se desejamos provar que $A(n)$ é verdadeira unicamente para $n \geq n_1$, aplicamos o teorema I.36 ao conjunto dos números n para os quais é verdadeira $A(n + n_1 - 1)$.

*I 4.3 O princípio de boa ordenação

Existe uma outra importante propriedade dos inteiros positivos, chamada *o principio de boa ordenação* que é também usada como base para demonstrações por indução. Pode ser estabelecido como segue.

TEOREMA I.37. PRINCÍPIO DE BOA ORDENAÇÃO. *Todo o conjunto não vazio de números inteiros positivos contém um elemento que é o menor.*

Note-se que o princípio refere-se a conjuntos de inteiros *positivos*. O teorema não é verdadeiro para conjuntos de inteiros quaisquer. Por exemplo, o conjunto de todos os inteiros não têm um elemento que seja o menor.

O princípio de boa ordenação pode deduzir-se a partir do princípio de indução, e isso será demonstrado na Seção I.4.5. Concluímos esta seção com um exemplo, no qual se mostra como se pode aplicar o princípio de boa ordenação para demonstrar teoremas relativos a inteiros positivos.

Represente $A(n)$ a seguinte afirmação:

$$A(n)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

De novo se observa que $A(1)$ é verdadeira, uma vez que

$$1^2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}.$$

Há agora somente duas possibilidades. Ou

(i) $A(n)$ é verdadeira para todo o inteiro positivo n, ou

(ii) há pelo menos um inteiro positivo n para o qual $A(n)$ é falsa.

Trata-se de provar que a alternativa (ii) conduz a uma contradição. Suponhamos (ii) verdadeira. Então pelo princípio de boa ordenação existirá um inteiro e positivo *menor que todos os outros*, digamos k, para o qual $A(k)$ é falsa. (Estamos a aplicar o princípio ao conjunto de todos os inteiros positivos n para os quais $A(n)$ é falsa. A alternativa (ii) garante que este conjunto é não vazio.) Este k deve ser maior que 1, porque verificámos que $A(1)$ era verdadeira. Igualmente a afirmação deve ser verdadeira para $k-1$, uma vez que é k o menor inteiro para o qual $A(k)$ é falsa; portanto podemos escrever

$$A(k-1)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)^3}{3} + \frac{(k-1)^2}{2} + \frac{k-1}{6}.$$

Adicionando k^2 a ambos os membros e simplicando o segundo membro encontramos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}.$$

Mas esta igualdade prova que $A(k)$ é verdadeira; deste modo estamos perante uma contradição, porque k é um inteiro para o qual $A(k)$ era falsa. Por outras palavras, a alternativa (ii) conduz a uma contradição. Quer isto dizer que (i) se verifica, o que prova que a identidade em questão é válida para $n \geq 1$. Uma consequência imediata desta identidade é a desigualdade da direita em (I.19).

Uma demonstração na qual, como no exemplo apresentado, se faça uso do princípio da boa ordenação, pode substituir-se por uma demonstração por indução. Sem dúvida. que se poderia ter feito a demonstração na forma mais usual, verificando $A(1)$ e depois passando de $A(k)$ a $A(k+1)$.

I 4.4 Exercícios

1. Demonstrar por indução as relações seguintes:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

(d) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

2. Observar que

$$1 = 1,$$

$$1-4=-(1+2)\,,$$
$$1-4+9=1+2+3\,,$$
$$1-4+9-16=-(1+2+3+4)\,.$$

Inferir a expressão geral e prová-la por indução.

3. Observar que

$$1+\tfrac{1}{2}=2-\tfrac{1}{2}\,,$$
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=2-\tfrac{1}{4}\,,$$
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}=2-\tfrac{1}{8}\,.$$

Inferir a expressão geral e demonstrá-la por indução.

4. Observar que

$$1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\,,$$
$$(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})=\tfrac{1}{3}\,,$$
$$(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})=\tfrac{1}{4}\,.$$

Inferir a expressão geral e demonstrá-la por indução.

5. Inferir a expressão geral que exprime de modo simplificado o produto

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

e demonstrá-la por indução.

6. Seja $A(n)$ a proposição: $1+2+\ldots+n=\dfrac{1}{8}(2n+1)^2$.

   (a) Provar que se $A(k)$ é verdadeira para um inteiro k, então $A(k+1)$ é também verdadeira.

   (b) Criticar a afirmação: "Por indução resulta que $A(n)$ é verdadeira para todo o n".

   (c) Modificar $A(n)$, mudando a igualdade numa desigualdade que seja verdadeira para todo o inteiro positivo n.

7. Seja n_1 o menor inteiro positivo n para o qual a desigualdade $(1+x)^n > 1+nx+nx^2$ é verdadeira, qualquer que seja $x>0$. Determinar n_1 e provar que a desigualdade é verdadeira para todo o inteiro $n \geq n_1$.

8. Dados os números reais positivos $a_1, a_2, \ldots$, tais que $a_n \leq ca_{n-1}$ para todo o $n \geq 2$, com c um número positivo fixo, aplicar o método de indução para provar que $a_n \leq a_1\, c^{n-1}$ para todo o $n \geq 1$.

9. Provar, por indução, a seguinte afirmação: Dado um segmento de comprimento uni-

dade, então o segmento de comprimento $\sqrt{n}$ pode construir-se com régua e compasso, para cada inteiro e positivo n.

10. Seja b um inteiro positivo. Demonstrar por indução a proposição seguinte: Para cada inteiro $n \geq 0$, existem inteiros não negativos q e r tais que

$$n = qb + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

11. Sejam n e d inteiros. Diz-se que d é um *divisor* de n se $n = cd$ para algum inteiro c. Um inteiro n diz-se *primo* se $n > 1$ e se os únicos divisores positivos de n são n e 1. Provar, por indução, que cada inteiro $n > 1$ ou é primo, ou é um produto de fatores primos.
12. Explicar o erro na seguinte "demonstração" por indução:

Proposição: dado um conjunto de n raparigas loiras, se pelo menos uma delas tem olhos azuis, então as n têm olhos azuis.

Demonstração: A proposição é verdadeira para n = 1. A passagem de k a $k + 1$ pode exemplificar-se passando de 3 a 4. Suponhamos para isso que a proposição é verdadeira para n = 3 e sejam G_1, G_2, G_3, G_4 quatro raparigas loiras tais que uma delas, pelo menos, tenha olhos azuis, por exemplo a G_1. Tomando G_1, G_2, G_3 conjuntamente e fazendo uso da proposição verdadeira para $n = 3$, resulta que também G_2 e G_3 têm olhos azuis. Repetindo o processo com G_1, G_2 e G_4 conclui-se igualmente que G_4 tem olhos azuis, isto é, as quatro tem olhos azuis. Um raciocínio análogo permite a passagem de k a $k + 1$ em geral.

Corolário: Todas as raparigas têm olhos azuis.

Demonstração. Uma vez que existe efetivamente uma rapariga com olhos azuis, pode aplicar-se o resultado precedente ao conjunto formado por todas as raparigas loiras.

Nota: Este exemplo deve-se a G. Pólya que sugere ao leitor que comprove experimentalmente a validade da proposição.

*I 4.5 Demonstração do princípio de boa ordenação

Passamos agora à dedução do princípio de boa ordenação, a partir do princípio de indução. Seja T um conjunto não vazio de inteiros positivos. Desejamos provar que T possui um número que é o menor, isto é, que existe em T um inteiro positivo t_0, tal que $t_0 \leq t$ para qualquer t de T.

Admitamos que tal não se verificava. Devemos provar que isto conduz a uma contradição. O inteiro 1 não pode estar em T (caso contrário, seria ele o menor elemento de T). Represente S o conjunto de todos os inteiros positivos n, tais que $n < t$ para todo o t de T. Por conseguinte 1 está em S porque $1 < t$ para todo o t de T. Em seguida, seja k um inteiro positivo de

S. Então $k < t$ para todo o t de T. Devemos provar que $k + 1$ está também em S. Se tal não se verificasse, então para algum t_1 em T teríamos $t_1 \leqq k + 1$. Uma vez que T não possui nenhum elemento mínimo, existirá um inteiro t_2 em T tal que $t_2 < t_1$ e daqui $t_2 < k + 1$. Mas isto significa que $t_2 \leq k$, contradizendo o fato de que $k < t$ para todo o t em T. Portanto $k + 1$ está em S. Pelo princípio de indução, S contém todos os inteiros e positivos. Uma vez que T é não vazio, existe um inteiro positivo t em T. Mas este t deverá também pertencer a S (pois que S contém todos os inteiros). Resulta da definição de S que $t < t$, o que é absurdo. Portanto a hipótese de que T não possui nenhum elemento menor que todos os outros conduz a uma contradição. Resulta pois que T deve ter um elemento mínimo e, por sua vez, isto prova que o princípio de boa ordenação é uma consequência do princípio de indução.

I 4.6 O símbolo somatório

No cálculo da área do "segmento parabólico" encontrámos a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 . \tag{I.20}$$

Repare-se que o termo geral da soma é da forma k^2 e que se obtêm todos os termos fazendo k variar de 1 até n. Há um símbolo muito útil e conveniente, o qual nos permite escrever somas semelhantes a esta numa forma mais compacta, designando *símbolo somatório* e representado pela letra grega Σ. Fazendo uso do símbolo somatório podemos escrever a soma (I.20) como segue:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Este símbolo lê-se: "Soma de k^2, para k variando de 1 a n". Os números aparecendo em baixo e por cima de Σ dão-nos a série de valores assumidos por k. A letra k designa-se por *índice de somação*. Sem dúvida que não tem significado especial o uso da letra k; qualquer outra letra pode ocupar o seu lugar. Por exemplo em vez de $\Sigma_{k=1}^{n} k^2$ poderemos escrever $\Sigma_{i=1}^{n} i^2, \Sigma_{j=1}^{n} j^2, \Sigma_{m=1}^{n} m^2$, etc., sendo todas as expresões alternativas de representação duma mesma coisa. As letras i, j, k, m, etc., utilizadas na notação anterior são *índices mudos*. Não seria muito conveniente ter utilizado n como índice mudo neste exemplo particular, porque n já estava a ser usado para o número de termos.

Mais geralmente, quando desejamos formar a soma de vários números reais, por exemplo $a_1, a_2, ..., a_n$ representamos a soma por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{I.21}$$

a qual, usando o símbolo somatório, se pode escrever

$$\sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{I.22}$$

Por exemplo, temos

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 .$$

Por vezes é necessário iniciar a soma por 0 ou por algum valor superior a 1 do índice. Por exemplo, temos

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ,$$

$$\sum_{n=2}^{5} n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

Outras utilizações da notação são apresentadas a seguir:

$$\sum_{m=0}^{4} x^{m+1} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$$

$$\sum_{j=1}^{6} 2^{j-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Para dar, uma vez mais, ênfase à importância da escolha do índice mudo, note-se que a última soma pode escrever-se em qualquer uma das seguintes formas:

$$\sum_{q=1}^{6} 2^{q-1} = \sum_{r=0}^{5} 2^r = \sum_{n=0}^{5} 2^{5-n} = \sum_{k=1}^{6} 2^{6-k}.$$

Nota: Dum ponto de vista estrictamente lógico, os símbolos em (I.21) e (I.22) não aparecem entre os primitivos símbolos para o sistema dos números reais. Dum ponto de vista mais rigoroso, dever-se-iam definir estes novos símbolos a partir dos primitivos símbolos não definidos nesse sistema. Pode fazer-se isto recorrendo a um processo designado *definição por indução,* o qual, tal como a demonstração por indução, consta de duas partes:

(a) Define-se

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 .$$

(b) Admitindo definida $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para um $n \geq 1$ fixo, define-se

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}\,.$$

Por exemplo, pode-se tomar $n = 1$ em (b) e utilizar (a) para se obter

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k + a_2 = a_1 + a_2\,.$$

Definida $\Sigma_{k=1}^{2} a_k$, pode aplicar-se novamente (b) agora com $n = 2$ para se obter

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3\,.$$

Pela propriedade associativa da adição (Axioma 2), a soma $(a_1 + a_2) + a_3$ é a mesma que $a_1 + (a_2 + a_3)$ e, portanto, podem suprimir-se os parêntesis sem perigo de confusão e escrever simplesmente

$$a_1 + a_2 + a_3 \text{ para } \textstyle\sum_{k=1}^{3} a_k\,.$$

Anàlogamente:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4\,.$$

Neste caso pode *provar-se* que a soma $(a_1 + a_2 + a_3) + a_4$ é a mesma que $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$ ou $a_1 + (a_2 + a_3 + a_4)$ e, portanto, o parêntesis pode ser eliminado também sem perigo de ambiguidade e escrever-se

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4\,.$$

Prosseguindo deste modo, encontra-se que (a) e (b) conjuntamente dão-nos uma definição completa do símbolo (I.22). A notação em I.21 é uma outra forma de escrever (I.22). Tal notação está justificada por uma propriedade associativa geral da adição, a qual não será nem enunciada nem demonstrada aqui. Deve notar-se que a *definição por indução* e a *demonstração por indução* encerram a mesma ideia fundamental. Uma definição por indução diz-se também uma *definição por recorrência*.

I 4.7 Exercícios

1. Achar os valores numericos das seguintes somas:

(a) $\sum_{k=1}^{4} k$, (c) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$, (e) $\sum_{i=0}^{5} (2i + 1)$,

(b) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$, (d) $\sum_{n=1}^{4} n^n$, (f) $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Estabelecer as seguintes propriedades do símbolo somatório,

(a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva)

(b) $\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (propriedade homogênea)

(c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescopica)

Utilizar as propriedades do Exercicio 2, sempre que possível, para deduzir as fórmulas dos Exercícios 3 a 8.

3. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$. (Isto significa $\sum_{k=1}^{n} a_k$, quando cada $a_k = 1$).

4. $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$. [*Sugestão:* $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$].

5. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. [*Sugestão:* Utilizar os exercícios 3 e 4].

6. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. [*Sugestão:* $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$].

7. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

8. (a) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ se $x \neq 1$. *Nota:* Por definição, $x^0 = 1$

[*Sugestão:* Aplicar o Exercício 2 a $(1 - x) \Sigma_{k=0}^{n} x^k$]

(b) A que é igual a soma, quando $x = 1$?

9. Provar, por indução, que a soma $\Sigma_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k + 1)$ é proporcional a n e determinar a constante de proporcionalidade.

10. (a) Dar uma definição aceitável do símbolo $\Sigma_{k=m}^{m+n} a_k$

    (b) Provar, por indução, que para $n \geq 1$ se tem

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

11. Dizer se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Para cada caso justificar a resposta.

(a) $\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4.$

(b) $\sum_{j=0}^{100} 2 = 200.$

(c) $\sum_{k=0}^{100} (2 + k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k.$

(d) $\sum_{i=1}^{100} (i + 1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2.$

(e) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right).$

(f) $\sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3.$

12. Induzir e demonstrar uma regra geral que simplifique a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

13. Demonstrar que $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ se $n \geq 1$. A partir do resultado anterior provar que

$$2\sqrt{m} - 2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m} - 1$$

se $m > 2$. Em particular quando $m = 10^6$, a soma está compreendida entre 1998 e 1999.

I 4.8 Valores absolutos e desigualdade triangular

Os cálculos com desigualdades são frequentes. São de particular importância as que se relacionam com a noção de *valor absoluto*. Se x é um número real, o valor absoluto de x é um número real não negativo, designado por $|x|$ e definido do modo seguinte:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0\,, \\ -x & \text{se} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Notemos que $-|x| \leq x \leq |x|$. Quando os números reais são representados geometricamente sobre o eixo real, o número $|x|$ representa a *distância* de x a *0*. Se $a > 0$ e se um ponto x está entre $-a$ e a, então $|x|$ está mais próximo de *0* do que de a. A tradução analítica deste fato é dada pelo seguinte teorema.

TEOREMA I.38. *Se $a \geq 0$, então $|x| \leq a$ se e só se $-a \leq x \leq a$.*

Demonstração: Há que provar duas afirmações: primeiro, que a desigualdade $|x| \leq a$ implica a dupla desigualdade $-a \leq x \leq a$ e, inversamente, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.

Suponhamos $|x| \leq a$. Então temos, do mesmo modo, $-a \leq -|x|$. Mas ou $x = |x|$, ou $x = -|x|$ e portanto $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$, o que prova a primeira afirmação.

Para provar o recíproco, supomos $-a \leq x \leq a$. Então se $x \geq 0$, temos $|x| = x \leq a$, ao passo que se $x \leq 0$, temos $|x| = -x \leq a$. Em qualquer dos casos ter-se-á $|x| \leq a$, o que completa a demonstração.

A fig. I.9 ilustra o significado geométrico deste teorema

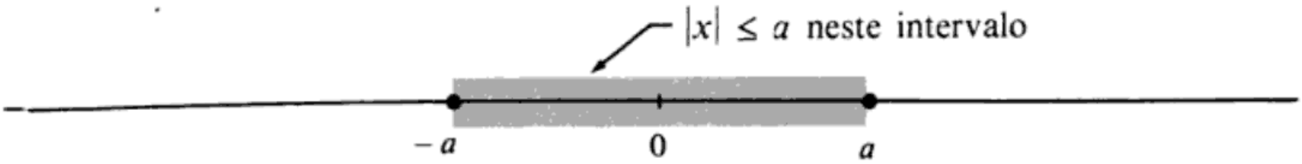


Fig. I.9 — Interpretação geométrica do teorema I.38.

Como consequência do Teorema I.38 é fácil derivar uma importante desigualdade, a qual estabelece que o valor absoluto da soma de dois números reais não pode exceder a soma dos valores absolutos desses números.

TEOREMA I.39. *Para x e y números reais arbitrários tem-se*

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

Nota: Esta propriedade é vulgarmente designada por *desigualdade triangular,* porque quando é generalizada a vetores significa que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é igual ou menor do que a soma dos outros dois.

Demonstração: Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| ,$$

e daqui, pelo Teorema I.38, concluímos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Se fizermos $x = a - c$ e $y = c - b$, então $x + y = a - b$ e a desigualdade triangular vem

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c| .$$

Esta forma da desigualdade triangular é usada frequentemente na prática.

Por indução matemática, podemos generalizar a desigualdade triangular do modo seguinte:

TEOREMA I.40. *Para os números reais arbitrários a_1, a_2 ..., a_k, tem-se*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

Demonstração: Para $n = 1$ a desigualdade é trivial e para $n = 2$ é a desigualdade triangular. Suponhamos, então, que é verdadeira para n números reais. Para n + 1 números reais $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ virá

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| .$$

Portanto o teorema é verdadeiro para $n + 1$ números reais se fôr verdadeiro para n; logo, pelo princípio de indução, é verdadeiro para todo o inteiro positivo n.

O teorema seguinte estabelece uma importante desigualdade, que usaremos mais adiante, em ligação com o estudo da Álgebra vetorial.

TEOREMA I. 41. A DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ. *Se $a_1, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais arbitrários, tem-se*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) . \tag{I.23}$$

O sinal de igualdade verifica-se se e só se existe um número real x tal que $a_k\, x + b_k = 0$ para cada valor de $k = 1, 2, ..., n$.

Demonstração: Temos $\Sigma_{k=1}^{n} (a_k\, x + b_k)^2 \geq 0$ para todo o real x, porque uma soma de quadrados nunca pode ser negativa. A desigualdade anterior pode escrever-se

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0\,, \tag{I.24}$$

onde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\,, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2\,.$$

Desejamos demonstrar que $B^2 \leq AC$. Se $A = 0$, cada $a_k = 0$ e deste modo $B = 0$ e o resultado é trivial. Se $A \neq 0$, podemos escrever

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\,.$$

O segundo membro é mínimo quando $x = -B/A$. Fazendo $x = -B/A$ em (1.24) obtemos $B^2 \leq AC$ o que demonstra I.23. O leitor deve verificar que o sinal de igualdade é válido se e só se existir um x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada k.

I 4.9 Exercícios

1. Provar cada uma das propriedades seguintes dos valores absolutos.
   (a) $|x| = 0$ se e só se $x = 0$.
   (b) $|-x| = |x|$.
   (c) $|x - y| = |y - x|$.
   (d) $|x|^2 = x^2$.
   (e) $|x| = \sqrt{x^2}$.
   (f) $|xy| = |x|\,|y|$.
   (g) $|x/y| = |x|/|y|$ se $y \neq 0$.
   (h) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
   (i) $|x| - |y| \leq |x - y|$.
   (j) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
2. Cada desigualdade (a_i), escrita a seguir, é equivalente exactamente a uma desigualdade (b_j). Por exemplo, $|x| < 3$ se e só se $-3 < x < 3$ e portanto (a_1) é equivalente a (b_2). Estabelecer todos os pares equivalentes.
   (a_1) $|x| < 3$.
   (a_2) $|x - 1| < 3$.
   (a_3) $|3 - 2x| < 1$.
   (a_4) $|1 + 2x| \leq 1$.
   (a_5) $|x - 1| > 2$.
   (a_6) $|x + 2| \geq 5$.
   (a_7) $|5 - x^{-1}| < 1$.
   (a_8) $|x - 5| < |x + 1|$.
   (a_9) $|x^2 - 2| \leq 1$.
   (a_{10}) $x < x^2 - 12 < 4x$.
   (b_1) $4 < x < 6$.
   (b_2) $-3 < x < 3$.
   (b_3) $x > 3$ ou $x < -1$.
   (b_4) $x > 2$.
   (b_5) $-2 < x < 4$.
   (b_6) $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
   (b_7) $1 < x < 2$.
   (b_8) $x \leq -7$ ou $x \geq 3$.
   (b_9) $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$.
   (b_{10}) $-1 \leq x \leq 0$.
3. Dizer se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Em qualquer dos casos justificar a resposta.
   (a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.

(b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$.

(c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x \geq -\frac{2}{3}$.

(d) Não há nenhum real x para o qual $|x - 1| = |x - 2|$.

(e) Para cada $x > 0$ existe um $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

4. Demonstrar que o sinal de igualdade, na desigualdade de Cauchy-Schwarz, se mantém se e só se existe um número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo o $k = 1, 2, ..., n$.

*I 4.10 Exercícios vários referentes ao método de indução

Nesta Secção reunem-se um certo número de enunciados cujas demonstrações são boas aplicações do método de indução matemática. Alguns destes exercícios podem servir de base para discussões suplementares entre professor e alunos.

Coeficientes factorial e binomial. O símbolo $n!$ (lê-se *n factorial*) pode definir-se, por indução, do modo seguinte: $0! = 1$, $n! = (n - 1)!\, n$ se $n \geq 1$. Note-se que $n! = 1.2.3.4... n$.

Se $0 \leq k \leq n$ o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ *define-se*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Nota: Algumas vezes escreve-se C_k^n em vez de $\binom{n}{k}$. Estes números aparecem como coeficientes no desenvolvimento da potência do binómio. (Ver Exercício 4 e seguintes).

1. Calcular os valores dos seguintes coeficientes binomiais:
   (a) $\binom{5}{3}$, (b) $\binom{7}{0}$, (c) $\binom{7}{1}$, (d) $\binom{7}{2}$, (e) $\binom{17}{14}$, (f) $\binom{0}{0}$.
2. (a) Demonstrar que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (c) Sabendo que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$, calcular k.
   (b) Sabendo que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$, calcular n. (d) Existirá um k tal que $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?
3. Demonstrar que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Esta é a chamada *lei do triângulo de Pascal* que permite um cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais. O triângulo de Pascal é dado a seguir, para $n \leq 6$.

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

4. Usar o método de indução para provar a fórmula do desenvolvimento do binómio

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Em seguida utilizar a fórmula para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \qquad \text{se} \quad n > 0.$$

O símbolo produto. O produto de n números reais $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ representa-se pelo símbolo $\Pi_{k=1}^{n} a_k$, o qual pode ser definido por indução. A notação $a_1 a_2 \ldots a_n$ é outra forma de escrever o mesmo produto. Notemos que

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

5. Dar uma definição, por indução, do produto $\Pi_{k=1}^{n} a_k$.

   Demonstrar, por indução, as seguintes propriedades dos produtos:

6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ (propriedade multiplicativa)

   Um caso importante é a relação: $\prod_{k=1}^{n} (ca_k) = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k$.

7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ se cada $a_k \neq 0$ (propriedade telescópica)

8. Se $x \neq 1$ mostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}.$$

   Qual é o valor do produto quando $x = 1$?

9. Se $a_k < b_k$ para cada valor de $k = 1, 2, ..., n$ é fácil demonstrar por indução que $\Sigma_{k=1}^{n} a_k < \Sigma_{k=1}^{n} b_k$.

   Discutir a desigualdade correspondente para produtos

$$\prod_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} b_k.$$

Algumas desigualdades notáveis.

10. Se $x > 1$, provar por indução que $x^n > x$ para todo o inteiro $n \geq 2$. Se $0 < x < 1$ provar que $x^n < x$ para todo o inteiro $n \geq 2$.
11. Determinar todos os inteiros positivos n para o quais $2^n < n!$
12. (a) Usar o teorema de binómio para provar que, para n inteiro positivo, se tem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1 - \frac{r}{n}\right)\right\}.$$

(b) Se $n > 1$, utilizar parte da alinea (a) e o Exercício 11 para estabelecer as desigualdades

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 3.$$

13. (a) Seja p um inteiro positivo. Provar que

$$b^p - a^p = (b - a)(b^{p-1} + b^{p-2}a + b^{p-3}a^2 + \cdots + ba^{p-2} + a^{p-1}).$$

[*Sugestão*: usar a propriedade (A) pág. 48].

(b) Sejam p e n inteiros e positivos. Recorrendo a parte de (a) mostrar que

$$n^p < \frac{(n + 1)^{p+1} - n^{p+1}}{p + 1} < (n + 1)^p.$$

(c) Demonstrar, por indução, que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p + 1} < \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

A alínea (b) auxiliará a passar, na indução, de n a $n + 1$.

14. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ n números reais, todos do mesmo sinal e todos maiores que -1. Aplicar o método de indução para demonstrar que:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Em particular, quando $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = x$, onde $x > -1$, transforma-se em

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \textit{(desigualdade de Bernoulli).} \tag{I.25}$$

Provar que se $n > 1$, o sinal de igualdade se apresenta em (I.25) somente para $x = 0$..

15. Se $n \geq 2$, provar que $n!/n^n \leq (\frac{1}{2})^k$, onde k é o enteiro máximo $\leq n/2$.

16. Os números 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., 21, tais que cada um, depois do segundo, é a soma dos dois anteriores, designam-se por *números de Fibonacci*. Podem definir-se por indução da maneira seguinte:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{se} \quad n \geq 2\,.$$

Demonstrar que

$$a_n < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para todo o $n \geq 1$.

Desigualdades que relacionam diferentes tipos de médias.
Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ n números reais positivos. Se p é um inteiro não nulo, a *média das potências de ordem p, M_p*, define-se do modo seguinte:

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

O número M_1 define a *média aritmética, M_2 a média quadrática* e *M_{-1} a média harmónica.*

17. Se $p > 0$ provar que $M_p < M_{2p}$ quando $x_1, x_2, ..., x_n$ não forem todos iguais.

[*Sugestão:* Aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz com $a_k = x_k^p$ e $b_k = 1$.]

18. Aplicar o resultado do exercício anterior para demonstrar que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \tfrac{64}{3}$$

se $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ e $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

19. Sejam $a_1, ..., a_n$ n números reais positivos cujo produto é igual a 1.
Provar que $a_1 + ... + a_n \geq n$ e que o sinal de igualdade se verifica únicamente quando cada $a_k = 1$

[*Sugestão:* Considerar dois casos: (a) todo $a_k = 1$; (b) nem todo $a_k = 1$. Usar o método de indução. No caso (b) reparar que se $a_1, a_2 \dots a_{n+1} = 1$, então pelo menos um fator, seja a_1, excederá 1 e pelo menos um fator, seja a_{n+1}, é menor do que 1. Seja $b_1 = a_1 a_{n+1}$ e aplique-se a hipótese de indução ao produto $b_1\, a_2 \dots a_n$, tendo em conta que $(a_1 - 1) \cdot (a_{n+1} - 1) < 0$.]

20. *A média geométrica* G de n números reais positivos $x_1, \dots, x_n$ está definida pela fórmula $G = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$.

(a) Representando-se a *média das potências de ordem* p por M_p, demonstrar que $G \le M_1$ e que $G = M_1$ unicamente quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(b) Sejam p e q inteiros, $q < 0 < p$. A partir de (a) deduzir que $M_q < G < M_p$ se x_1, x_2, ..., x_n não são todos iguais.

21. Servindo-se dos resultados do exercício 20 provar a seguinte proposição: Se a, b, e c são números reais positivos tais que $abc = 8$, então $a + b + c \ge 6$ e $ab + ac + bc \ge 12$.

22. Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números positivos e se $y_k = 1/x_k$ demonstrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \ge n^2 .$$

23. Se a, b, c são positivos e se $a + b + c = 1$, demonstrar que $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \ge 8abc$.

1
OS CONCEITOS DO CÁLCULO INTEGRAL

Neste capítulo são expostas a definição de integral e algumas das suas propriedades fundamentais. Para compreender a definição, é necessário ter conhecimento do conceito de função; algumas das seções seguintes são pois dedicadas a uma exposição deste conceito e de outras noções com ele relacionadas.

1.1 As ideias fundamentais da geometria cartesiana

Como foi referido anteriormente, uma das aplicações do integral é o cálculo de áreas. Geralmente, não tem significado falar de área em si mesma, bem pelo contrário fala-se de área de *alguma coisa* o que quer dizer que nós temos certos objetos (regiões poligonais, regiões circulares, segmentos parabólicos, etc.), cujas áreas desejamos medir. Se pretendemos chegar a um conhecimento da área que nos possa habilitar a tratar com diferentes espécies de objetos, devemos primeiramente encontrar uma maneira efetiva de descrição desses objectos.

O método mais simples de o conseguir, consiste em desenhar as figuras, como foi feito na Grécia antiga. Uma via muito mais profunda foi sugerida por René Descartes (1596-1650), ao introduzir em 1637 as bases de Geometria Analítica (também conhecida por *Geometria cartesiana*). A ideia fundamental de Descartes consistia em representar pontos geométricos por *números*.

O método, para pontos do plano, consiste no seguinte:

Escolhem-se duas retas de referência perpendiculares (chamadas *eixos coordenados*), uma horizontal (chamada o eixo dos *xx*) e a outra vertical (chamada o eixo dos *yy*). O seu ponto de intersecção, representado por 0, diz-se *a origem*. Sobre o eixo $0X$, e à direita de 0, escolhe-se um ponto de modo que a sua distância a 0 represente a *unidade de comprimento*. As distâncias verticais, correspondentes ao eixo $0Y$, medem-se com a mesma unidade de comprimento. Então, a cada ponto do plano (algumas vezes chamado plano $X0Y$) é atribuido um par de números, ditas as suas *coordenadas*, as quais nos dizem como localizar o ponto e representam as distâncias do ponto aos eixos. Na figura 1.1, apresentam-se alguns exemplos. O ponto com coordenadas (3,2) está três unidades para a direita do eixo $0Y$ e duas unidades acima do eixo $0X$. O número 3 chama-se a coordenada x e o número 2 a coordenada y. Pontos à esquerda do eixo $0Y$ têm a coordenada x negativa, os situados abaixo do eixo $0X$ têm a coordenada y negativa. A coordenada x de um ponto chama-se também a sua *abcissa* e a coordenada y a sua *ordenada.*

Quando escrevemos um par de números, tais como *(a,b)*, para representar um ponto, convencionamos que a abcissa, ou a coordenada x, se escreve em primeiro lugar. Por este motivo, o par *(a, b)* é muitas vezes designado por *par ordenado.* É evidente que dois pares ordenados *(a, b)* e *(c, d)* representam o mesmo ponto se e só se tivermos $a = c$ e $b = d$. Pontos *(a, b)* com a e b positivos dizem-se situados no *primeiro quadrante; se* $a < 0$ y $b > 0$ estão no *segundo quadrante;* se $a < 0$ e $b < 0$ estão no *terceiro quadrante*, e finalmente, se $a > 0$ e $b < 0$ estão no *quarto quadrante.* Na fig. 1.1 representa-se um ponto de cada quadrante.

O processo para pontos no espaço é semelhante. Tomam-se três eixos, dois a dois perpendiculares e que se intersetem num ponto 0 (a origem). Estas retas definem três planos, dois a dois perpendiculares, e cada ponto do espaço pode ser completamente determinado por três números que, com os sinais adequados, definem as distâncias aos planos referidos. A Goemetria cartesiana tridimensional será apresentada, com mais pormenor, mais tarde; de momento fixamos a nossa atenção na Geometria analítica plana.

Uma figura Geométrica, por exemplo uma curva plana, é um conjunto de pontos satisfazendo uma ou mais condições especiais. Traduzindo estas condições por expressões contendo as coordenadas x e y, obtemos uma ou mais

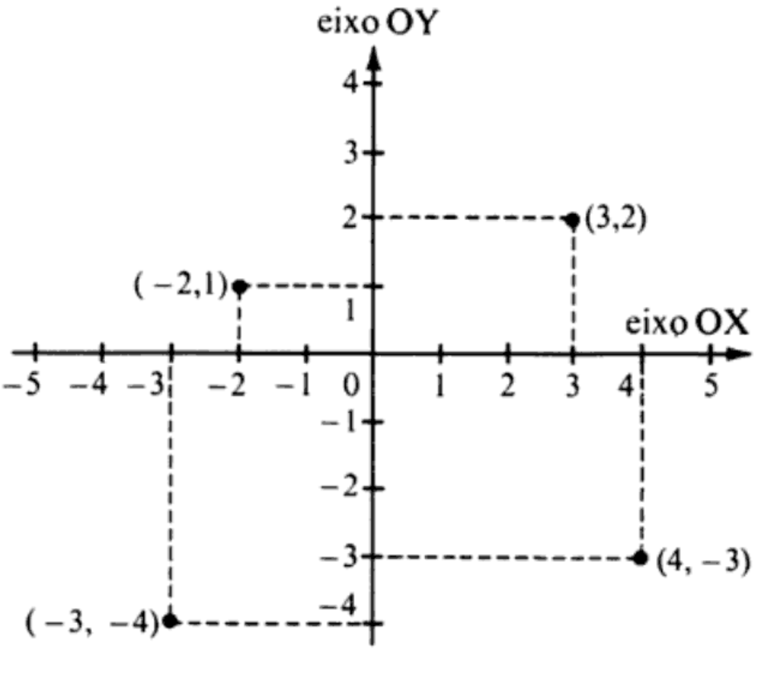


Fig. 1.1

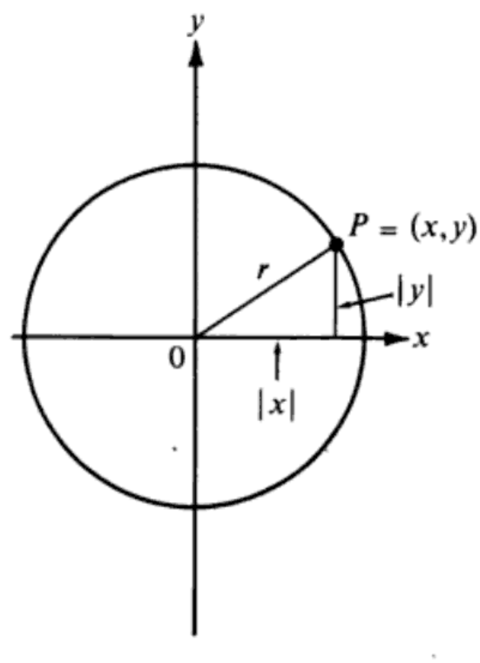


Fig. 1.2. A circunferência representada pela equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

equações que caraterizam a figura em questão. Por exemplo, consideremos uma circunferência de raio r com o centro na origem, como se indica na fig. 1.2. Seja P um ponto arbitrário da circunferência e suponhamos que P tem coordenadas (x, y). Então OP é a hipotenusa dum triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos $|x|$ e $|y|$ e por conseguinte, em virtude do teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Esta equação, a *equação cartesiana* da circunferência, é satisfeita por todos os pontos (x, y) da circunferência e apenas esses, de modo que a equação carateriza completamente esta curva. Este exemplo põe em evidência o modo como a geometria analítica é usada para reduzir proposições geométricas relativas a pontos, a proposições analíticas com números reais.

Durante os seus respetivos desenvolvimentos históricos, o cálculo e a geometria analítica estiveram intimamente ligados. Novas descobertas em um dos assuntos deram lugar a progressos no outro. O tratamento em conjunto do cálculo e da geometria analítica neste livro é semelhante ao respetivo desenvolvimento histórico. Contudo, o nosso propósito fundamental é desenvolver os conceitos do cálculo, pelo que os conceitos de geometria analítica requeridos a esta finalidade serão expostos quando for necessário. De momento, apenas um reduzido número de conceitos elementares de Geometria analítica plana são necessários à compreensão dos rudimentos do Cálculo. Um estudo mais aprofundado de geometria analítica só é necessário para estender o alcance e aplicações do cálculo e esse estudo será feito nos últimos capítulos, usando o Cálculo vetorial. Até lá, tudo o que necessita conhecer-se da Geometria analítica são rudimentos sobre o traçado de gráficos de funções.

1.2 Funções. Ideias gerais e exemplos

São diversos os campos de atividade humana a apresentar relações que existem entre uma coleção de ums objetos e outra coleção de outros objetos. Gráficos, mapas, curvas, tabelas, fórmulas, sondagens Gallup são familiares a toda a pessoa que leia os jornais. Estes são simples esquemas usados para descrever relações especiais, numa forma quantitativa. Os matemáticos consideram certos tipos destas relações como *funções*. Nesta Seção apresentamos ideias gerais do conceito de função. Uma definição rigorosa de função será dada na seção 1.3.

EXEMPLO 1. A força F necessária para esticar uma mola de aço de uma distância x, além do seu comprimento normal, é proporcional a x, isto é, $F = cx$ com c um número independente de x, chamado a constante da mola. Esta fórmula, descoberta por Robert Hooke em meados do século XVII, é a chamada *lei de Hooke* e diz-se exprimir a força como uma função do deslocamento.

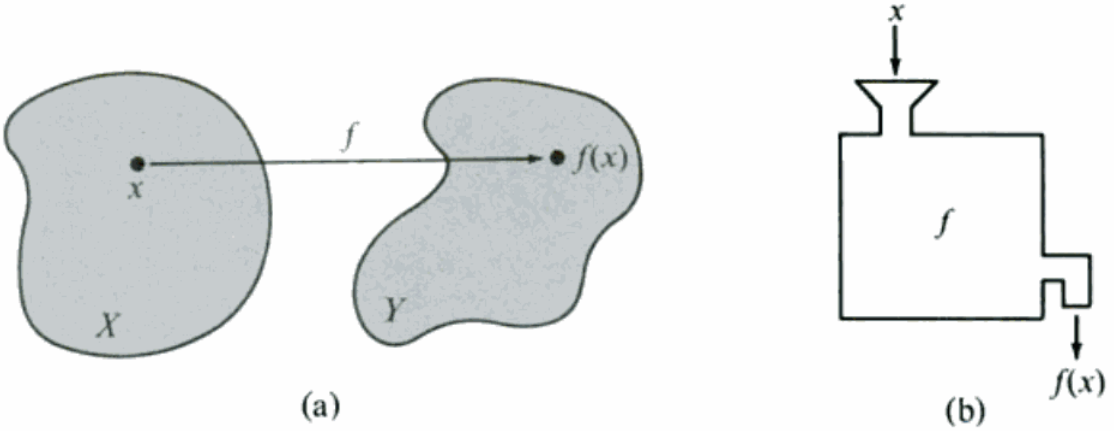
EXEMPLO 2. O volume de um cubo é uma função do comprimento da sua aresta. Se a aresta tiver comprimento x, o volume V é dado pela formula $V = x^3$.

EXEMPLO 3. Um *número primo* é qualquer inteiro $n > 1$ que não pode ser expresso na forma $n = ab$, com a e b inteiros e positivos, ambos menores do que n. Os primeiros números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Dado um número real $x > 0$, é possivel contar quantos são os números primos menores do que x. Este número diz-se ser uma função de x, muito embora não se conheça uma fórmula algébrica simples para o determinar (sem necessidade de os contar) quando x é conhecido.

A palavra "função" foi introduzida na Matemática por Leibniz, que usou o termo, inicialmente, para designar certo tipo de fórmulas matemáticas. Mais tarde compreendeu-se que a ideia de função de Leibniz tinha um alcance muito restrito e o significado da palavra correspondeu, desde então, a muitas fases de generalização. Hoje o significado de função é essencialmente este: Dados dois conjuntos, digamos X e Y, uma *função* é uma correspondência que associa a cada elemento de X um e um só elemento de Y. O conjunto X é o *domínio* da função. Os elementos de Y associados com os elementos de X formam um conjunto dito o *contradomínio* da função. (Este pode ser todo o conjunto Y, mas tal não é necessário.)

Letras dos alfabetos latino e grego são muitas vezes usadas para representar funções. Em particular usam-se muito frequentemente com essa finalidade as letras f, g, h, F, G, H e φ. Se f é uma dada função e x é um elemento do seu domínio, a notação $f(x)$ utiliza-se para designar o elemento do contradomínio que está associado a x pela função f e chama-se *valor da função f em x* ou a *imagem de x por f*. O símbolo $f(x)$ lê-se "f de x".

A noção de função pode ilustrar-se esquematicamente de muitas maneiras. Por exemplo, na fig. 1.3(a) os conjuntos X e Y são conjuntos de pontos e com uma seta indica-se como se emparelha um ponto arbitrário x de X com o ponto imagem $f(x)$ de Y. Outro esquema é apresentado na fig. 1.3(b), onde a função f se imagina ser semelhante a uma máquina, na qual os elementos do conjunto X se transformam para produzir elementos do conjunto Y. Quando um elemento x é transformado pela máquina, o elemento produzido é $f(x)$.



(a) (b)

Fig. 1.3 – Representação esquemática do conceito de função.

Embora o conceito de função não ponha qualquer restrição na natureza dos elementos do domínio X e contradomínio Y, no cálculo elementar estamos principalmente interessados em funções cujos domínio e contradomínio são conjuntos de números reais. Tais funções dizem-se *funções de variável real* ou mais abreviadamente *funções reais* e podem ser representadas, geometricamente, mediante um gráfico no plano $X0Y$. Representa-se o domínio X no eixo $0X$ e, a partir de cada $x \in X$, representa-se o ponto (x, y), onde $y = f(x)$. O lugar geométrico dos pontos (x, y) define o gráfico da função.

Consideremos ainda mais alguns exemplos de funções reais.

EXEMPLO 4. *A função identidade*. Suponhamos que $f(x) = x$ para todo o valor real de x. Esta função é, muitas vezes, chamada *função identidade*. O seu domínio é o eixo real, isto é, o conjunto de todos os números reais. Para cada ponto (x,y), do gráfico de f, é $x = y$. O gráfico é uma reta que faz ângulos iguais com os eixos coordenados (Ver fig. 1.4). O contradomínio de f é o conjunto de todos os números reais.

EXEMPLO 5. *A função valor absoluto*. Consideremos a função que faz corresponder a cada número real x, o número não negativo $|x|$. Uma parte da sua representação gráfica é dada na fig. 1.5. Designando esta função por φ, tem-se $\varphi(x) = |x|$ para todo o real x. Por exemplo

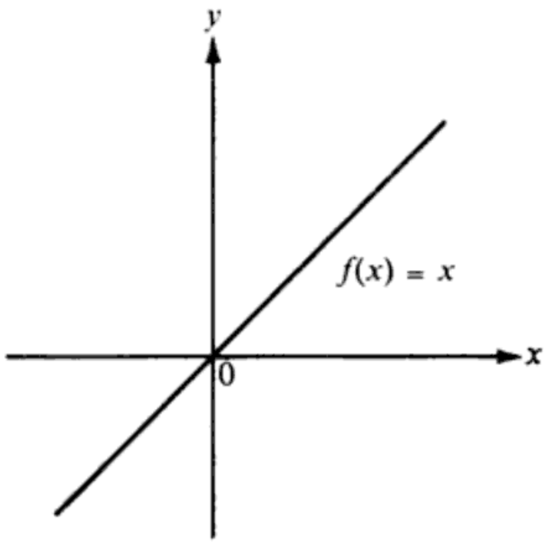


Fig. 1.4 — Gráfico da função identidade $f(x) = x$

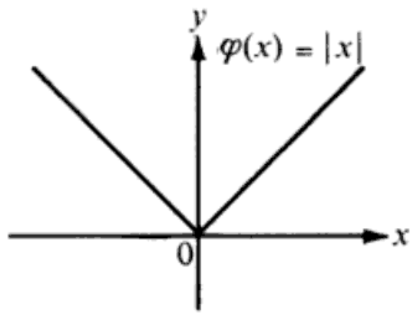


Fig. 1.5 — Função valor absoluto $\varphi(x) = |x|$

$\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(-3) = 3$. Com esta notação podem apresentar-se algumas propriedades dos valores absolutos

(a) $\varphi(-x) = \varphi(x)$. (d) $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$.

(b) $\varphi(x^2) = x^2$. (e) $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

(c) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ (desigualdade triangular).

Exemplo 6. *A funçao número primo.* Para todo $x > 0$, represente $\pi(x)$ o número de números primos menores ou iguais a x. O domínio de π é o conjunto dos números reais positivos. O seu contradomínio é o conjunto dos inteiros não negativos $\{0, 1, 2, 3, 7, ...\}$. Na fig. 1.6 apresenta-se uma parte do gráfico de π.

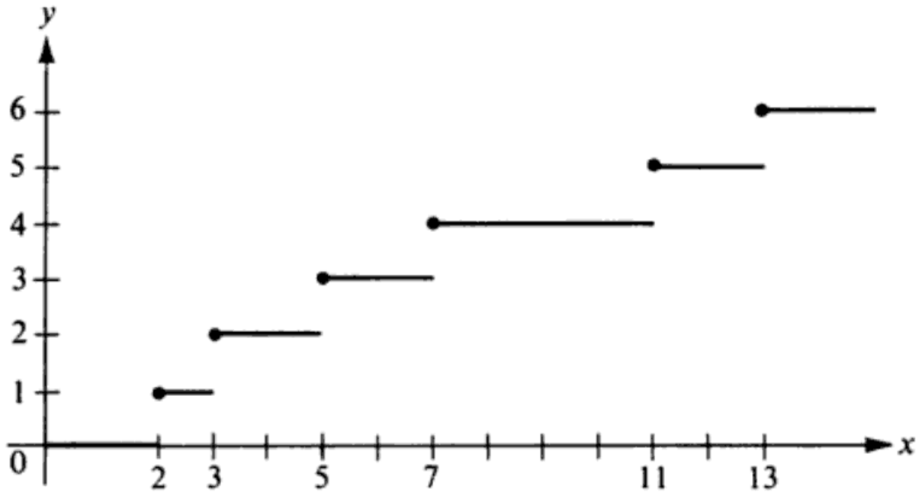


Fig. 1.6 — A função número primo.

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

Fig. 1.7 — A função fatorial.

(Nos eixos OX e OY são usadas escalas diferentes). Quando x aumenta, a função $\pi(x)$ permanece constante até que x seja igual a um número primo, ponto em que o valor da função apresenta um salto igual à unidade. Quer dizer que o gráfico de π consiste de segmentos de reta paralelos a OX. Este é um exemplo de uma classe de funções chamadas *funções em escada;* desempenham um importante papel na teoria do integral.

Exemplo 7. *A função fatorial.* Para cada inteiro n define-se $f(n)$ por $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Neste exemplo, o domínio de f é o conjunto dos inteiros positivos. Os valores da função crescem tão rapidamente que é preferível apresentar a função na forma tabulada em vez da representação gráfica. A fig. 1.7 é uma tábua apresentando os pares $(n, n!)$ para $n = 1, 2, 3, ..., 10$.

Chama-se a atenção do leitor para dois aspectos caractensticos comuns aos exemplos apresentados atrás.

(1) Para cada x do domínio X existe uma e uma só imagem y que forma um par com aquele valor particular de x.

(2) Cada função gera um conjunto de pares (x, y), onde x é o elemento genérico do domínio X e y é o único elemento de Y que corresponde a x.

Em muitos dos exemplos referidos, apresentaram-se os pares (x, y) geometricamente como pontos de um gráfico. No exemplo 7 apresentaram-se como entradas numa tabela. Em qualquer dos casos conhecer a função é conhecer, duma maneira ou de outra, *todos* os pares (x, y) que ela gera. Esta observação simples é a origem da definição formal do conceito de função que se expõe na Seção seguinte.

*1.3 Funções. Definição formal como um conjunto de pares ordenados

Na discussão informal da seção anterior, uma função foi apresentada como uma correspondência que associa a cada elemento dum conjunto X um e um só elemento dum conjunto Y. As palavras "correspondência" e "associa a" podem não assumir o mesmo significado para toda a gente, razão pela qual devemos reformular a ideia dum modo diferente, baseando-a no conceito de conjunto. Em primeiro lugar necessitamos da noção de *par ordenado* de dois elementos.

Na definição de igualdade de conjuntos não se faz referência à *ordem* pela qual aparecem os elementos. Assim, os conjuntos $\{2, 5\}$ e $\{5, 2\}$ são iguais porque contêm exactamente os mesmos elementos. Algumas vezes, porém, a ordem *é* importante. Por exemplo, na Geometria analítica plana, as coordenadas (x, y) dum ponto representam um par ordenado de números. O ponto com coordenadas $(2, 5)$ não é o mesmo que o ponto com coordenadas $(5, 2)$, muito embora os *conjuntos* $\{2, 5\}$ e $\{5, 2\}$ sejam iguais. Do mesmo modo, se temos um par ordenado de objectos a e b (não necessàriamente distintos) e desejamos designar um dos objetos, seja a, como o *primeiro* elemento e o outro, b, como o *segundo*, encerramo-los num parêntesis (a, b) e consideramos que formam um par ordenado. Dizemos que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e só se os seus primeiros elementos são iguais e se são também iguais os segundos elementos. Quer isto dizer que temos

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{se e só se} \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Podemos agora estabelecer a definição de função.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO. *Uma função f é um conjunto de pares ordenados (x, y), nenhum dos quais tem o mesmo primeiro elemento que outro.*

Se f é uma função, o conjunto de todos os elementos x que aparecem como primeiros elementos dos pares (x, y) de f chama-se o *domínio* de f. O conjunto dos segundos elementos y é o *contradomínio* de f, ou o conjunto de *valores* de f.

Intuitivamente, uma função pode imaginar-se como uma tabela formada por duas colunas. Cada entrada na tabela é um par ordenado (x, y); a coluna dos x é o domínio de f, e a coluna dos y, o contradomínio. Se duas entradas (x, y) e (x, z) aparecerem na tabela com o mesmo valor de x, então para a tabela representar uma função é necessário que $y = z$. Por outras palavras, uma função não pode tomar dois valores distintos num dado ponto x. Portanto, para cada x do domínio de f existe um é só um y tal que $(x, y) \in f$. Uma vez que este y está univocamente determinado desde que se conheça x, podemos introduzir para ele um símbolo especial. É costume escrever

$$y = f(x)$$

em vez de $(x, y) \in f$ para indicar que o par (x, y) pertence ao conjunto f.

Outra alternativa à descrição da função f especificando explicitamente os pares que contém, e que é usualmente preferível, consiste em descrever o domínio de f e para cada x do domínio indicar como se obtém o valor de função $f(x)$. Em relação com isto, temos o seguinte teorema cuja demonstração é deixada ao leitor como exercício.

TEOREMA 1.1. *Duas funções f e g são iguais se e só se*
(a) f e g têm o mesmo domínio e
(b) $f(x) = g(x)$ para todo o x do domínio de f.

É importante ter presente que os objetos x e $f(x)$ que aparecem nos pares ordenados $(x, f(x))$ de uma função não são necessàriamente números, mas sim objetos de natureza qualquer. Em certas ocasiões faremos uso deste grau de generalidade, mas para a maior parte dos problemas ficaremos confinados a funções reais, isto é, funções cujo domínio e contradomínios são subconjuntos da reta real.

Algumas das funções que aparecem no Cálculo são definidas em alguns exemplos que se seguem.

1.4. Mais exemplos de funções reais

1. *Funções constantes.* Uma função em que o contradomínio consiste dum único número diz-se uma função constante. Na fig. 1.8 apresenta-se um exemplo em que $f(x) = 3$ para todo o x real. A representação gráfica é uma reta paralela a OX, intersetando o eixo OY no ponto $(0,3)$.

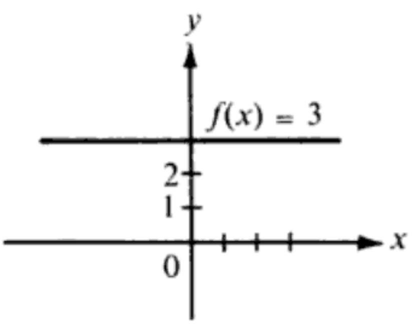


Fig. 1.8 — Função constante $f(x) = 3$

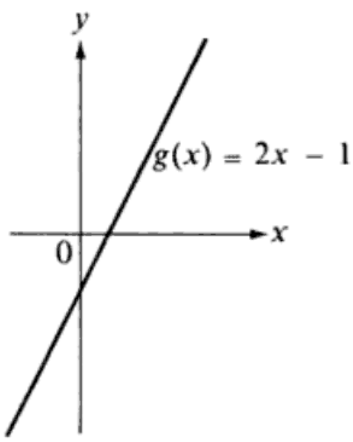


Fig. 1.9 — Função linear $g(x) = 2x - 1$

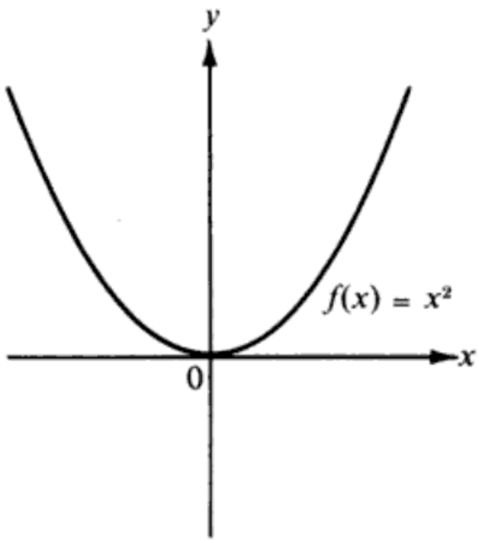


Fig. 1.10 — Função quadrática $f(x) = x^2$

2. *Funções lineares.* Uma função g definida, para todo o real x, por uma fórmula da forma

$$g(x) = ax + b$$

diz-se função linear porque o seu gráfico é uma reta. O número b é a ordenada na origem; é a coordenada y do ponto $(0, b)$ em que a reta intersecta o eixo $0Y$. O número a é o declive da recta. Um exemplo, $g(x) = x$, está representado na fig. 1.4. Outro exemplo, $g(x) = 2x - 1$, está representado na fig. 1.9.

3. *Função potência*. Para um determinado inteiro positivo n, seja f a função definida por $f(x) = x^n$ para todo o real x. Quando $n = 1$, é a função identidade referida na fig. 1.4. Para $n = 2$ o gráfico é uma parábola, parte do qual está desenhado na fig. 1.10. Para $n = 3$ o gráfico é uma curva cúbica e tem a forma apresentada na fig. 1.11 (pg. 68).

4. *Funções polinomiais*. Uma função polinomial P é definida, para todo o valor real de x, por uma relação da forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Os números $c_0, c_1, \ldots, c_n$ são os *coeficientes* do polinómio e o inteiro não negativo n é o seu *grau* (se $c_n \neq 0$). As funções deste tipo incluem as funções constantes e as potências com casos particulares. Os polinómios de graus 2 e 3 denominam-se polinómios *quadráticos* e *cúbicos* respetivamente. A fig. 1.12 representa uma parte do gráfico duma função polinomial P do 4.º grau, definida por $P(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

5. *A circunferência*. Voltemos à equação cartesiana da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e resolvamo-la relativamente a y. Existem duas soluções dadas por

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

(Lembramos que se $a > 0$, o símbolo $\sqrt{a}$ representa a raíz quadrada positiva de a. A raíz quadrada negativa é $-\sqrt{a}$). Houve uma época em que os matemáticos diziam que y era uma função *bivalente* de x definida por $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Porém, modernamente, não se admite a "bivalência" como propriedade de funções. A definição de função exige que a cada x do domínio, corresponda um e um só valor de y do contradomínio. Geometricamente isto significa que retas paralelas a $0Y$, que intersectam o gráfico, o fazem num único ponto. Por conseguinte para tornar o exemplo anterior compatível com a teoria, dizemos que as duas soluções para y definem *duas* funções, f e g, sendo

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

para todo o x satisfazendo a $-r \leq x \leq r$. Cada uma destas funções tem por domínio o intervalo estendido de $-r$ a r. Se $|x| > r$, não existe nenhum valor real para y e tal que $x^2 + y^2 = r^2$ e dizemos que as funções f e g ***não estão definidas*** para tal valor de x. Uma vez que $f(x)$ é a raiz quadrada positiva de $r^2 - x^2$, o gráfico de f é a semi-circunferência superior representada na fig. 1.13. Os valores da função g são ≤ 0 e por isso o gráfico de g é a semi-circunferência inferior representada na mesma figura.

6. ***Somas, produtos e cocientes de funções.*** Sejam f e g duas funções reais que têm o mesmo domínio D. A partir de f e g podemos construir novas funções por adição, multiplicação ou divisão dos seus valores. A função u definida por

$$u(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{se} \quad x \in D$$

diz-se *soma* de f e g e representa-se por $f + g$. De modo análogo, o *produto* $v = f \cdot g$ e o *cociente* $w = f/g$ são definidos pelas fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \qquad \text{se} \quad x \in D, \qquad w(x) = f(x)/g(x) \qquad \text{se} \quad x \in D \quad \text{e} \quad g(x) \neq 0.$$

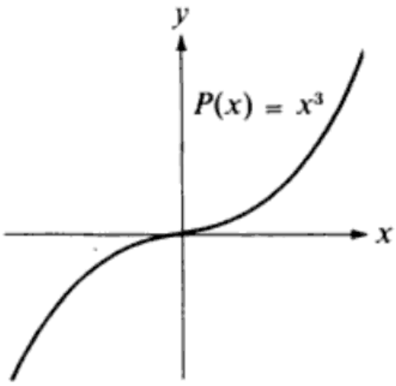


Fig. 1.11 A função cúbica $P(x) = x^3$

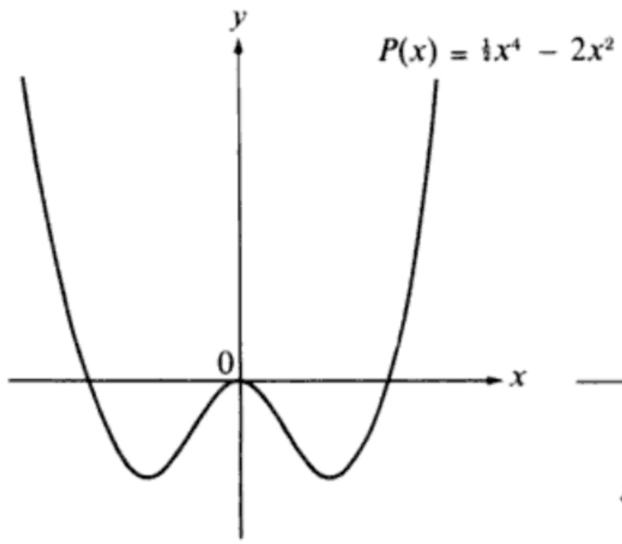


Fig. 1.12 A função polinomial de 4º grau $P(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^2$

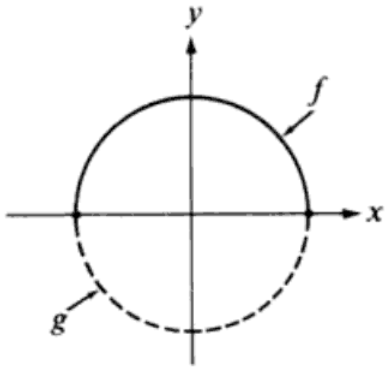


Fig. 1.13. Gráficos das funções $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$

Com o conjunto de exercícios que a seguir se apresentam pretende-se que o leitor se familiarize com o uso da notação utilizada para as funções.

1.5 Exercícios

1. Seja $f(x) = x + 1$, para todo o x real. Calcular: $f(2)$, $f(-2)$, $-f(2)$, $f(1/2)$, $1/f(2)$, $f(a + b)$, $f(a) + f(b)$, $f(a)f(b)$.

2. Sejam $f(x) = 1 + x$ e $g(x) = 1 - x$, para todo o real x. Calcular: $f(2) + g(2)$, $f(2) - g(2)$, $f(2)g(2)$, $f(2)/g(2)$, $f[g(2)]$, $g[f(2)]$, $f(a) + g(-a)$, $f(t)g(-t)$.
3. Seja $\varphi(x) = |x - 3| + |x - 1|$, para todo o x real. Calcular: $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$. Determinar os valores de t para os quais $\varphi(t + 2) = \varphi(t)$.
4. Seja $f(x) = x^2$ para todo o real x. Provar cada uma das seguintes igualdades. Em cada caso determinar o conjunto dos reais x, y, t, etc. para os quais a fórmula correspondente é válida.

   (a) $f(-x) = f(x)$.
   (b) $f(y) - f(x) = (y - x)(y + x)$.
   (c) $f(x + h) - f(x) = 2xh + h^2$.
   (d) $f(2y) = 4f(y)$.
   (e) $f(t^2) = f(t)^2$.
   (f) $\sqrt{f(a)} = |a|$.

5. Seja $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $|x| \leq 2$. Provar cada uma das igualdades seguintes e indicar para que valores de x, y, s e t são elas válidas.

   (a) $g(-x) = g(x)$.
   (b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$.
   (c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$.
   (d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$.
   (e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$.
   (f) $\dfrac{1}{2 + g(x)} = \dfrac{2 - g(x)}{x^2}$.

6. Seja f definida do modo seguinte: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. A função não é definida para $x < 0$ ou $x > 2$.
   (a) Traçar o gráfico de f.
   (b) Seja $g(x) = f(2x)$. Definir o domínio de g e traçar o respetivo gráfico.
   (c) Seja $h(x) = f(x - 2)$. Definir o domínio de h e traçar o seu gráfico.
   (d) Seja $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Definir o domínio de k e traçar o seu gráfico.
7. Os gráficos das duas funções polinomiais $g(x) = x$ e $f(x) = x^3$ intersetam-se em três pontos. Traçar partes suficientes dos respectivos gráficos para mostrar como se intersectam.
8. Os gráficos de duas funções quadráticas $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ intersetam-se em dois pontos. Traçar as partes dos dois gráficos entre os pontos de interseção.
9. Este exercício desenvolve algumas propriedades fundamentais dos polinómios. Seja $f(x) = \Sigma_{k=0}^{n} c_k x^k$ *um polinómio de grau n.*

   Provar:
   (a) Se $n \geq 1$ e $f(0) = 0$, $f(x) = x\, g(x)$ sendo $g(x)$ um polinómio de grau $n - 1$.
   (b) Para cada real a, a função p definida por $p(x) = f(x + a)$ é um polinómio de grau n.
   (c) Se $n \geq 1$ e $f(a) = 0$ para um certo valor real a, então $f(x) = (x - a)\, h(x)$, sendo $h(x)$ um polinómio de grau n $- 1$. [*Sugestão:* Considere-se $p(x) = f(x + a)$].
   (d) Se $f(x) = 0$ para $n + 1$ valores reais e distintos de x todos os coeficientes c_k são nulos e $f(x) = 0$ para todo o real x.
   (e) Seja $g(x) = \Sigma_{k=0}^{m} b_k x^k$ um polinómio de grau m, $m \geq n$. Se $g(x) = f(x)$ para $m + 1$ valores reais e distintos de x, então $m = n$, $b_k = c_k$ para todos os valores de k, e $f(x) = g(x)$ para todo o real x.

10. Em cada caso, determinar todos os polinómios p de grau ≤ 2 que satisfazem às condições dadas.
(a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$. (c) $p(0) = p(1) = 1$.
(b) $p(0) = p(1) = 1, p(2) = 2$. (d) $p(0) = p(1)$.

11. Em cada caso, determinar todos os polinómios p de grau ≤ 2 que verificam as condições dadas, para todo o x real.
(a) $p(x) = p(1 - x)$. (c) $p(2x) = 2p(x)$.
(b) $p(x) = p(1 + x)$. (d) $p(3x) = p(x + 3)$.

12. Demonstrar que as expressões seguintes são polinómios, escrevendo-se na forma $\Sigma_{k=0}^{m} a_k x^k$ para um valor de m conveniente. Em cada exemplo n é um inteiro e positivo.
(a) $(1 + x)^{2n}$. (b) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$. (c) $\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$.

1.6 O conceito de área como uma função de conjunto

Quando um matemático tenta desenvolver uma teoria geral que abarque muitos conceitos diferentes, tenta isolar propriedades comuns que pareçam ser fundamentais para cada uma das aplicações particulares que tem em mente. Utiliza então essas propriedades como pedras fundamentais da sua teoria. Euclides serviu-se deste processo, ao desenvolver a geometria elementar como um sistema dedutivo baseado num conjunto de axiomas. Nós utilizámos o mesmo processo no tratamento axiomático do sistema dos números reais e vamos usá-lo, uma vez mais, na nossa discussão do conceito de área.

Quando atribuímos uma área a uma região plana, asociamos um número a um conjunto S do plano. De um ponto de vista puramente matemático, isto significa que temos uma função a (a função área) que atribui um número real $a(S)$ (a área de S) a cada conjunto S de uma certa colecção de conjuntos dada. Uma função deste tipo, cujo domínio é uma colecção de conjuntos e cujos valores são números reais, chama-se *função de conjunto*. O problema fundamental é o seguinte: Dado um conjunto plano S, que área $a(S)$ devamos atribuir a S?

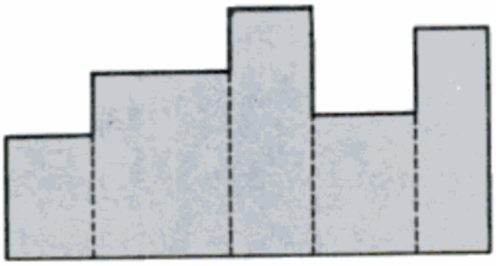
O nosso método para abordar este problema consiste em partir com um certo número de propriedades que se admite serem atributos da área, e tomá-las como *axiomas* para a área. Qualquer função de conjunto que satisfaça a estes axiomas designar-se-á por função área. É necessário provar que existe realmente uma função área, para estarmos certos de que não estamos a discutir uma teoria vazia. Não o faremos aqui: Em vez disso admitimos a existência duma função área e deduzimos novas propriedades a partir dos axiomas. Uma construção elementar duma função área encontra-se nos Capítulos 14 e 22 de Edwin E. Moise, *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint,* Addison-Wesley Pub. Co., 1963.

Antes de estabelecermos os axiomas para a área, façamos algumas observações acerca da coleção de conjuntos no plano aos quais pode ser atribuida uma área. Estes conjuntos chamar-se-ão *mensuráveis*; a coleção de todos os conjuntos mensuráveis representa-se por $\mathscr{M}$. Os axiomas contém suficiente informação acerca dos conjuntos de $\mathscr{M}$, de modo a permitirem-nos demonstrar que todas as figuras geométricas que aparecem nas aplicações usuais do cálculo estão em $\mathscr{M}$ e que as respetivas áreas podem ser calculadas por integração.

Um dos axiomas (axioma 5) estabelece que todo o retângulo é mensurável e que a sua área é o produto dos comprimentos dos lados. O termo "retângulo", quando usado aqui, significa qualquer conjunto congruente (+) a um conjunto da forma

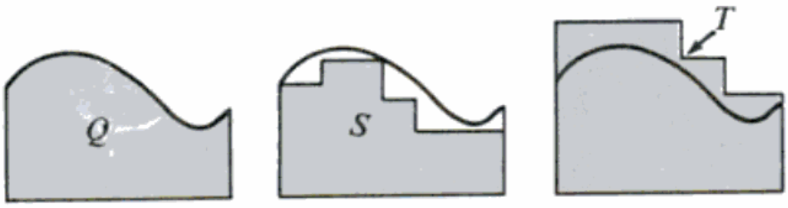
$$\{(x, y) \mid 0 \le x \le h, 0 \le y \le k\},$$

onde $h \ge 0$ e $k \ge 0$. Os números h e k são os comprimentos dos lados do retângulo. Consideramos um segmento ou um ponto casos particulares de retângulos supondo h ou k (ou ambos) nulos.



Uma região em escada.

Fig. 1.14.



(a) Conjunto de ordenadas

(b) Região em escada interior

(c) Região em escada exterior

Fig. 1.15. Conjunto de ordenadas "contido" por duas regiões em escada.

A partir de retângulos podemos construir conjuntos mais complicados. O conjunto representado na fig. 1.14 é a reunião de uma coleção finita de retângulos adjacentes com as bases no eixo OX e chama-se uma *região em escada*. Os axiomas implicam que cada região em escada é mensurável e que a sua área é a soma das áreas dos retângulos componentes.

A região Q, representada na fig. 1.15(a), é um exemplo de um *conjunto de ordenadas*. O seu contorno superior é o gráfico duma função não negativa. O axioma 6 permite-nos-á demonstrar que muitos conjuntos de ordenadas são mensuráveis e que as suas áreas podem ser calculadas aproximando tais conjuntos por regiões em escada interiores e exteriores, como se indica na fig. 1.15(b) e (c).

Enunciemos agora os axiomas referidos.

Definição axiomática de área. *Admite-se que existe uma classe $\mathscr{M}$ de conjuntos mensuráveis no plano e uma função de conjunto a, cujo domínio é $\mathscr{M}$, com as seguintes propriedades:*

(+) Congruência é usada aqui no mesmo sentido que na geometria euclidiana. Dois conjuntos dizem-se congruentes se os seus pontos podem pôr-se em correspondência um a um de tal modo que as distâncias sejam conservadas, isto é, se dois pontos p e q num conjunto correspondem a p' e q' no outro a distância de p a q deve ser igual à distância de p' a q' devendo isto verificar-se para um par p e q qualquer

1. *Propriedade de não negatividade. Para cada conjunto S de* $\mathscr{M}$, *tem-se* $a(S) \geq O$.

2. *Propriedade aditiva. Se S e T estão em* $\mathscr{M}$, *também estão em* $\mathscr{M}$, $S \cap T$ *e* $S \cup T$ *e tem-se*

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

3. *Propriedade da diferença. Se S e T estão en* $\mathscr{M}$ *com* $S \subseteq T$, *então T-S está em* $\mathscr{M}$ *e tem-se* $a(T\text{-}S) = a(T) - a(S)$.

4. *Invariância por congruência. Se um conjunto S está em* $\mathscr{M}$ *e se T é congruente com S, então T está também em* $\mathscr{M}$ *e têm-se* $a(S) = a(T)$.

5. *Escolha de escala. Todo o retângulo R está em* $\mathscr{M}$. *Se os lados de R têm comprimentos h e k, então* $a(R) = hk$.

6. *Propriedade de exaustão. Seja Q um conjunto que pode ser contido entre duas regiões em escada S e T, de maneira que*

$$S \subseteq Q \subseteq T. \tag{1.1}$$

Se existe um e um só número C que verifica as desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

para todas as regiões em escada S e T que satisfaçam a (1.1), então Q é mensurável e $a(Q) = C$.

O axioma 1 estabelece simplesmente que a área de um conjunto plano mensurável é um número positivo ou nulo. O axioma 2 diz-nos que, quando um conjunto é formado por duas regiões (as quais podem sobrepor-se), a área da reunião é a soma das áreas das duas partes, menos a área da sua interseção. Em particular, se a interseção tem área nula, a área do todo é a soma das áreas das duas partes.

Se removemos um conjunto mensurável S dum conjunto mensurável maior T, o axioma 3 estabelece que a parte restante $T - S$ é mensurável e a sua área obtém-se por subtração $a(T) - S) = A(T) - a(S)$. Em particular, este axioma implica que o conjunto vazio $\varnothing$ é mensurável e tem área nula. Uma vez que $a(T - S) \geq 0$, o axioma 3 também implica *a propriedade de monotonia:*

$$a(S) \leq a(T), \qquad \text{para conjuntos } S \text{ e } T \text{ em } \mathscr{M} \text{ com } S \subseteq T.$$

Por outras palavras, um conjunto que é parte de outro não pode ter área maior.

O axioma 4 atribui áreas iguais a conjuntos tendo o mesmo tamanho e forma. Seria trivial a verificação dos primeiros quatro axiomas se atribuissemos o número zero como área de cada conjunto de $\mathscr{M}$. O axioma 5 atribui uma área não nula a certos retângulos e portanto exclui aquele caso trivial. Finalmente o axioma 6 incorpora o método de exaustão; permite-nos estender a classe dos conjuntos mensuráveis das regiões em escada a regiões mais gerais.

O axioma 5 atribui área nula a todo o segmento de reta. O uso repetido da propriedade aditiva mostra que cada região em escada é mensurável e que a sua área é a soma das áreas dos retângulos componentes. Outras consequências elementares dos axiomas são examinadas no conjunto de exercícios que a seguir se apresentam.

1.7 Exercícios

Neste conjunto de exercícios deduzem-se as propriedades da área a partir dos axiomas enunciados na Seção anterior.

1. Provar que cada um dos seguintes conjuntos é mensurável e tem área nula: (a) Um conjunto formado por um único ponto; (b) Um conjunto consistindo dum número finito de pontos no plano; (c) A reunião duma coleção finita de segmentos de reta num plano.
2. Toda a região em forma de triângulo retângulo é mensurável, porque pode ser obtida por interseção de dois retângulos. Provar que toda a região triangular é mensurável e que a sua área é metade do produto da base pela altura.
3. Provar que todo o trapézio e todo o paralelogramo são mensuráveis e derivar as fórmulas usuais para calcular essas áreas.
4. Um ponto (x, y) no plano diz-se um *ponto de uma rede* se ambas as coordenadas x e y são inteiras. Seja P um polígono cujos vértices são pontos de uma rêde. A área de P é $I + \frac{1}{2}B - 1$, onde I é o número de pontos da rede interiores a P, e B o número de pontos da fronteira.

   (a) Provar que esta fórmula é correta para retângulos de lados paralelos aos eixos coordenados.

   (b) Provar que a fórmula é correta para triângulos retângulos e paralelogramos.

   (c) Usar o método de indução sobre o número de lados, para construir uma demonstração para polígonos gerais.
5. Provar que um triângulo cujos vértices são pontos da rede não pode ser equilátero.

   [*Sugestão:* Supor que existe um tal triângulo e calcular a sua área de duas maneiras distintas, servindo-se dos exercícios 2 e 4.]

6. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathscr{M}$ a classe de todos os subconjuntos de A. (São 32 no total, contando o próprio A e o conjunto vazio $\varnothing$). Para cada conjunto S em $\mathscr{M}$ seja $n(S)$ o número de elementos distintos de S. Se $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e $T = \{3, 4, 5\}$, calcular $n(S \cup T)$, $n(S \cap T)$, $n(S - T)$ e $n(T - S)$. Provar que a função de conjunto n verifica os três primeiros axiomas da área.

1.8 Intervalos e conjuntos de ordenadas

Na teoria da integração trabalha-se fundamentalmente com funções reais, cujos domínios são intervalos do eixo OX. Algumas vezes é importante distinguir entre intervalos que incluem os seus pontos extremos e os que os não incluem. Esta distinção faz-se pela introdução das seguintes definições:

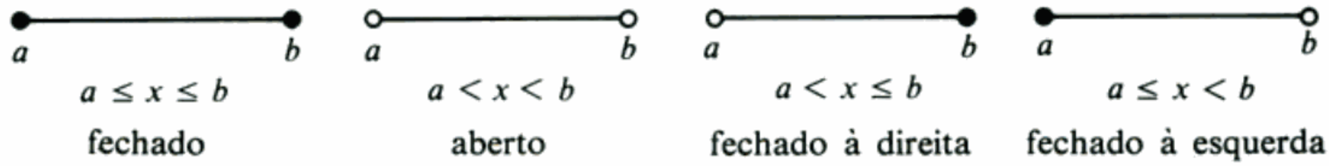


Fig. 1.16 — Exemplos de intervalos.

Se $a < b$, representamos por $[a, b]$ o conjunto de todos os pontos x satisfazendo às desigualdades $a \leq x \leq b$ e referimo-nos a este conjunto como o *intervalo fechado* de a a b. O correspondente *intervalo aberto*, representado por (a, b) é o conjunto de todos os pontos x satisfazendo a $a < x < b$. O intervalo fechado $[a, b]$ inclui os pontos a e b, enquanto que o correspondente intervalo aberto não. (Ver Fig. 1.16). O intervalo aberto (a, b) diz-se também *interior* de $[a, b]$. Os intervalos $(a, b]$, $[a, b)$, que incluem um dos pontos extremos, dizem-se semi-abertos e são definidos pelas desigualdades $a < x \leqq b$ e $a \leqq x < b$.

Seja f uma função não negativa cujo domínio é o intervalo fechado $[a, b]$. A região do plano compreendida entre o gráfico de f e o eixo OX chama-se o *conjunto de ordenadas* de f. Mais precisamente, o conjunto de ordenadas de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem às desigualdades

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq f(x).$$

Em cada um dos exemplos representados na fig. 1.17 a parte sombreada representa o conjunto de ordenadas da função correspondente.

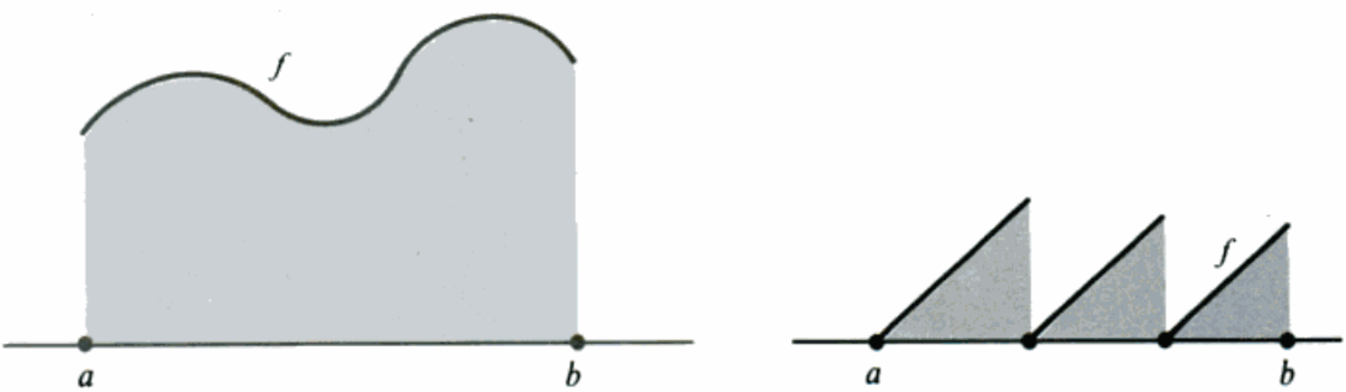


Fig. 1.17 — Exemplos de conjuntos de ordenadas.

Os conjuntos de ordenadas são os entes geométricos cujas áreas desejamos calcular por intermédio do cálculo integral. O conceito de integral vai ser definido em primeiro lugar para funções em escada e depois utilizar-se-á esse conceito para formular a definição de integral para funções mais gerais. A teoria de integração para funções em escada é extremamente simples e conduz, dum modo natural, à teoria correspondente a funções mais gerais. Para realizar este plano é necessário dar uma definição analítica de função em escada, o que se consegue facilmente em termos do conceito de *partição* que passamos a tratar.

1.9 Partições e funções em escada

Suponhamos um intervalo fechado $[a, b]$ dividido em n subintervalos pela fixação de $n - 1$ pontos de subdivisão $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, sujeitos unicamente à restrição

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b. \tag{1.2}$$

É conveniente designar o ponto a por x_0 e o ponto b por x_n. Um conjunto de pontos satisfazendo (1.2) diz-se uma *partição P* de $[a, b]$ e representa-se por

$$P = \{x_0\,, x_1\,, \ldots, x_n\}.$$

A partição P determina n subintervalos fechados

$$[x_0\,, x_1], [x_1\,, x_2]\,, \ldots, [x_{n-1}\,, x_n]\,.$$

Um subintervalo fechado genérico é $[x_{k-1}, x_k]$ e designa-se por subintervalo fechado de ordem k de P, na fig. 1.18 apresenta-se um exemplo. O correspondente intervalo aberto (x_{k-1}, x_k) diz-se o subintervalo aberto de ordem k de P.

Estamos agora em condições de formular uma definição analítica duma função em escada.

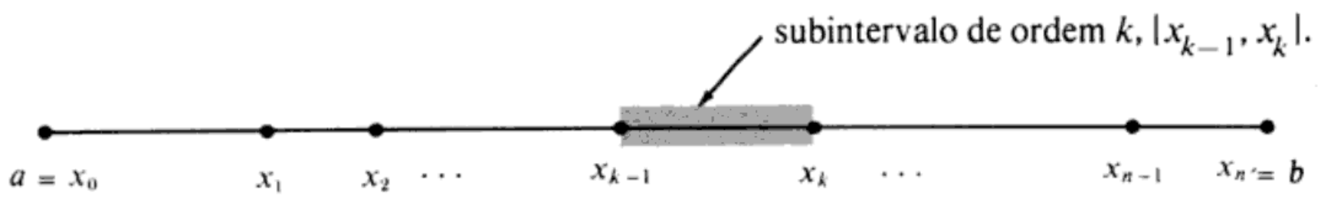


Fig. 1.18. Um exemplo duma partição de $[a, b]$.

Definição de função em escada. *Uma função s, cujo domínio é um intervalo fechado $[a, b]$, diz-se uma função em escada, se existe uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tal que seja constante em cada subintervalo fechado de P. Quer isto dizer que para cada $k=1, 2, ..., n$ existe um número real s_k tal que*

$$s(x) = s_k \qquad \text{se} \qquad x_{k-1} < x < x_k \, .$$

Funções em escada são algumas vezes chamadas funções constantes por intervalos.

Nota: Em cada um dos extremos x_{k-1} e x_k a função deve ter um valor bem definido, mas este não será necessariamente o mesmo que s_k.

EXEMPLO. Um exemplo conhecido de função em escada é a "função franquia postal" cujo gráfico é apresentado na fig. 1.19. Tendo em conta que a taxa de uma carta é 4$00 por cada 20 gr, ou fracção até 100 grs., o gráfico desta função em escada é formado por intervalos semiabertos que contêm o seu extremo direito. O domínio desta função é o intervalo [0, 100] e o gráfico mostra o número de selos de 4$00 necessários para selar cartas até 100 grs.

A partir de uma dada partição P de $[a, b]$ podemos sempre formar uma nova partição P', juntando novos pontos de divisão aos pontos que já estavam em P. Uma tal partição P' diz-se um *refinamento* de P, ou que P' é *mais fina que* P. Por exemplo, $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ é uma partição do intervalo [0, 4]. Se lhe juntarmos os pontos 3/4, $\sqrt{2}$, e 7/2 obtemos uma nova partição P' de [0, 4], a saber, $P' = \{0, 3/4, 1, \sqrt{2}, 7/2, 4$ a qual é um refinamento de P. (Ver fig. 1.20). Se uma função em escada é constante nos subintervalos abertos de P, é também constante nos subintervalos abertos de cada refinamento P'.

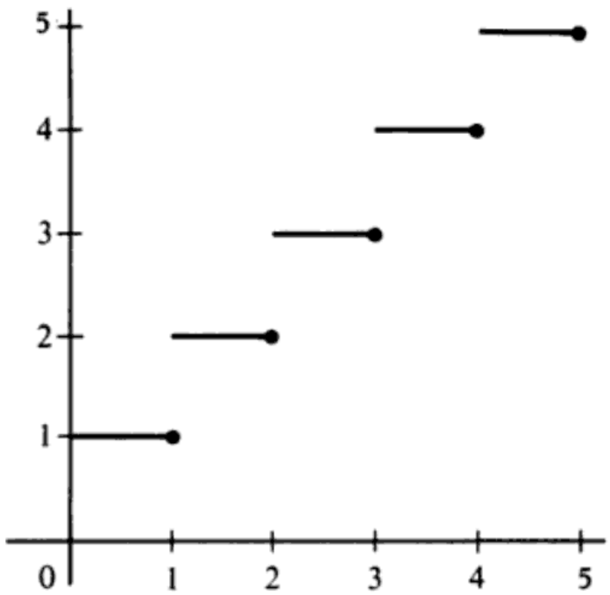


Fig. 1.19. A função franquia postal.

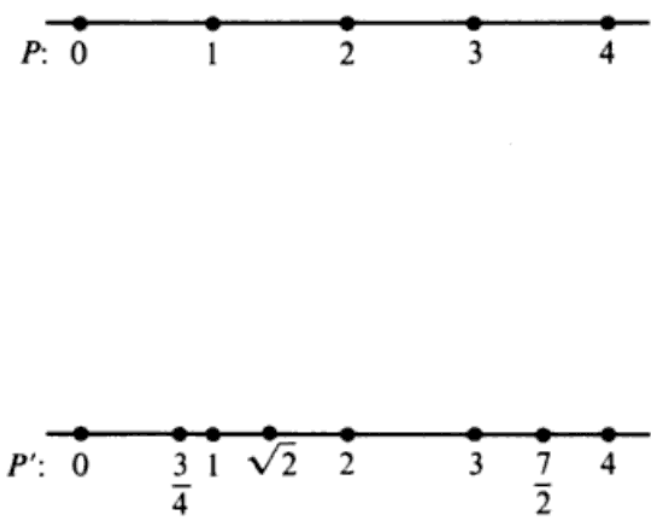


Fig. 1.20. A partição P de [0, 4] e um refinamento P'.

1.10 Soma e produto de funções em escada

Somando os valores correspondentes de funções em escada, podem formar-se novas funções do mesmo tipo. Por exemplo, suponhamos que s e t são funções em escada definidas ambas no mesmo intervalo $[a, b]$. Sejam P_1 e P_2 partições de $[a, b]$, tais que s é constante nos subintervalos abertos de P_1 e t constante nos subintervalos abertos de P_2. A partir de s e t pode definir-se uma nova função em escada $u = s + t$:

$$u(x) = s(x) + t(x) \qquad \text{se} \qquad a \leq x \leq b\,.$$

Fig. 1.21. Soma das duas funções em escada.

Para se provar que u é ainda uma função em escada, deve construir-se uma partição P tal que u seja constante nos subintervalos abertos de P. Para formar esta nova partição P tomam-se todos os pontos de P_1 juntamente com todos os pontos de P_2. Esta partição, a reunião de P_1 com P_2, diz-se o *refinamento comum* de P_1 e P_2. Uma vez que tanto s como t são constantes nos subintervalos abertos do refinamento comum, o mesmo se verifica para u. Na fig. 1.21 mostra-se um exemplo. A partição P_1 é $\{a, x_1, b\}$, a partição P_2 é $\{a, x_1', b\}$ e o refinamento comum é $\{a, x_1', x_1, b\}$.

Analogamente, o produto $v = st$ de duas funções em escada é outra função em escada. Um caso especial importante ocorre quando um dos factores, por exemplo t, é constante em todo o intervalo $[a, b]$. Se $t(x) = c$ para todo o x de $[a, b]$, então cada valor da função $v(x)$ obtém-se multiplicando pela constante c o valor da função em escada $s(x)$.

1.11 Exercícios

Neste conjunto de exercícios $[x]$ representa o maior inteiro $\leq x$.

1. Sejam $f(x) = [x]$ e $g(x) = [2x]$, para todo o x real. Traçar, para cada caso, o gráfico da função h definida no intervalo $[-1, 2]$ pelas fórmulas seguintes:

   (a) $h(x) = f(x) + g(x)$. (c) $h(x) = f(x)g(x)$.

   (b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$. (d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.

2. Em cada uma das alíneas, f é uma função definida no intervalo $[-2, 2]$ pelas fórmulas dadas a seguir. Desenhar o gráfico de f. Se f for uma função em escada, determinar a partição P de $[-2, 2]$, tal que f seja constante nos subintervalos abertos de P.
   (a) $f(x) = x + [x]$. (d) $f(x) = 2[x]$.
   (b) $f(x) = x - [x]$. (e) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$.
   (c) $f(x) = [-x]$. (f) $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$.

3. Traçar os gráficos das funções definidas pelas fórmulas seguintes:
   (a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ para $0 \le x \le 10$. (c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \le x \le 10$.
   (b) $f(x) = [x^2]$ para $0 \le x \le 3$. (d) $f(x) = [x]^2$ para $0 \le x \le 3$.

4. Demonstrar que a função parte inteira goza das propriedades seguintes:
   (a) $[x + n] = [x] + n$ para todo o inteiro n.
   (b) $[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{se } x \text{ é um inteiro.} \\ -[x] - 1 & \text{se } x \text{ não é inteiro.} \end{cases}$
   (c) $[x + y] = [x] + [y]$ ou $[x] + [y] + 1$.
   (d) $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$.
   (e) $[3x] = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$.

Exercícios facultativos

5. As fórmulas dos Exercícios 4(d) e 4(e) sugerem uma generalização para $[nx]$. Estabelecer e provar tal generalização.
6. Recorda-se que um ponto (x, y) duma rede no plano é aquele cujas coordenadas são inteiras. Seja f uma função não negativa, cujo domínio é o intervalo $[a, b]$ com a e b inteiros e $a < b$. Seja S o conjunto de pontos (x, y) verificando $a \le x \le b$, $0 < y \le f(x)$. Provar que o número de pontos da rede em S é igual à soma

$$\sum_{n=a}^{b} [f(n)].$$

7. Se a e b são inteiros positivos entre si, tem-se a fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Quando $b = 1$, a soma do primeiro membro supõe-se ser 0.
(a) Estabelecer este resultado geometricamente, contando os pontos da rêde num triângulo retângulo.
(b) Estabelecer o mesmo resultado analiticamente do modo seguinte: variando o índice do somatório, notar que $\sum_{n=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b-n)/b]$. Aplicar agora os Exercícios 4(a) e 4(b) ao parêntesis do segundo membro.
8. Seja S um conjunto de pontos da reta real. A *função caraterística* de S é, por defini-

ção, a função χ_S tal que $\chi_S(x) = 1$ para todo o x de S e $\chi_S(x) = 0$ para todo o x não pertence a S. Seja f uma função em escada que toma o valor constante C_k no subintervalo aberto de ordem k, I_k, de determinada partição dum intervalo $[a, b]$. Provar que, para cada x elemento de $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ se tem

$$f(x) = \sum_{k=1} c_k \chi_{I_k}(x).$$

Esta propriedade significa que toda a função em escada é uma combinação linear de funções caraterísticas de intervalos.

1.12 A definição de integral para funções em escada

Apresentamos a seguir a definição de integral para funções em escada. A definição deve ser construida de modo que o integral duma função em escada, não negativa, seja igual à área do respetivo conjunto de ordenadas.

Seja s uma função em escada definida em $[a, b]$ e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ a partição de $[a, b]$ tal que s seja constante nos subintervalos abertos de P. Designemos por s_k o valor constante de s no subintervalo aberto de ordem k, ou seja

$$s(x) = s_k \qquad \text{se} \qquad x_{k-1} < x < x_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

DEFINIÇÃO DO INTEGRAL DE FUNÇÕES EM ESCADA. *O integral de s de a a b, representado pelo símbolo $\int_a^b s(x)\,dx$, é definido pela fórmula*

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})\,. \tag{1.3}$$

Quer isto dizer que, para obter o valor do integral, multiplicamos cada valor constante s_k pela medida do subintervalo correspondente $(x_k - x_{k-1})$, obtendo-se o produto $s_k(x_k - x_{k-1})$ e somam-se, em seguida, todos os produtos obtidos.

Observe-se que os valores de s nos pontos extremos dos subintervalos são sem significado, uma vez que não aparecem no segundo membro de (1.3). Em particular, se s é constante no intervalo aberto (a, b), isto é, $s(x) = c$ se $a < x < b$, então tem-se

$$\int_a^b s(x)\,dx = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b - a)\,,$$

independentemente dos valores $s(a)$ e $s(b)$. Se $c > 0$ e $s(x) = c$ para todo o x do intervalo fechado $[a, b]$, o conjunto de ordenadas de s é um rectângulo de base $b - a$ e altura c; o integral de s é $c(b - a)$, a área desse retângulo. Mudando os valores de s em um ou ambos os extremos a e b do intervalo, o conjunto de ordenadas varia, mas não altera o integral de s ou a área do respectivo conjunto de ordenadas. Por exemplo, os dois conjuntos de ordenadas da fig. 1.22 têm áreas iguais.

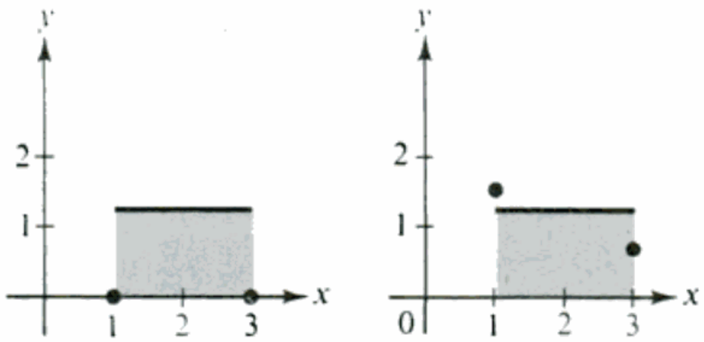


Fig. 1.22. Mudanças nos valores da função nos dois extremos não alteram a área do conjunto de ordenadas.

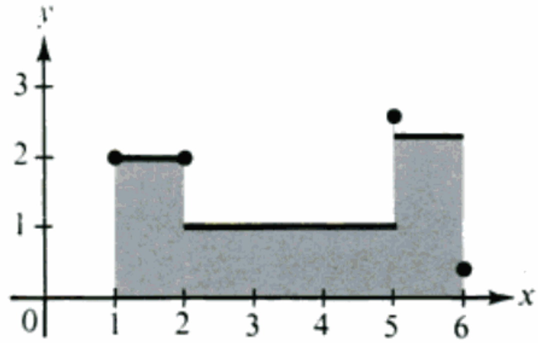


Fig. 1.23. O conjunto de ordenadas duma função em escada.

O conjunto de ordenadas de qualquer função em escada não negativa s é formado por um número finito de retângulos, um por cada intervalo em que a função é constante; ao conjunto de ordenadas podem também pertencer ou faltar certos segmentos verticais, dependendo do modo como s está definida nos pontos de subdivisão. O integral de s é igual à soma das áreas de cada um dos retângulos, independentemente dos valores de s nos pontos de divisão. Esta afirmação é coerente com o fato de os segmentos verticais terem área nula e não darem qualquer contribuição para a área do conjunto de ordenadas. Na fig. 1.23, a função em escada s toma os valores constantes 2, 1 e 9/4 nos intervalos abertos (1, 2), (2, 5) e (5, 6), respectivamente. O seu integral é igual a

$$\int_1^6 s(x)\,dx = 2\cdot(2-1) + 1\cdot(5-2) + \tfrac{9}{4}\cdot(6-5) = \tfrac{29}{4}\,.$$

Deve observar-se que a fórmula (1.3) para o integral é independente da escolha da partição P, contanto que s seja constante nos subintervalos abertos de P. Por exemplo, se substituímos P por uma partição mais fina P', introduzindo um novo ponto de divisão t, com $x_0 < t < x_1$, então o primeiro termo do segundo membro de (1.3) será substituído pelos dois termos $s_1 . (t - x_0)$ e $s_1 . (x_1 - t)$, e os restantes termos não se alteram. Uma vez que

$$s_1\cdot(t-x_0) + s_1\cdot(x_1-t) = s_1\cdot(x_1-x_0)\,,$$

o valor da soma completa mantém-se. Podemos passar de P a qualquer outra partição mais fina P', inserindo novos pontos de divisão, um de cada vez. Em cada fase, a soma em (1.3) permanece inalterada, e portanto o integral é o mesmo para todos os refinamentos de P.

1.13 Propriedades do integral duma função em escada

Nesta seção apresentamos um certo número de propriedades fundamentais do integral duma função em escada. Muitas destas propriedades parecem evidentes quando se faz a sua interpretação geométrica e algumas delas podem mesmo parecer trivias. Todas elas são válidas para integrais de funções mais gerais e será uma questão simples a sua demonstração naquela hipótese de generalidade, uma vez estabelecidas para as funções em escada. As propriedades são apresentadas na forma de teoremas e de cada uma faz-se a respetiva interpretação geométrica, para funções em escada não negativas, em termos de áreas. As demonstrações analíticas dos teoremas serão feitas na Seção 1.15.

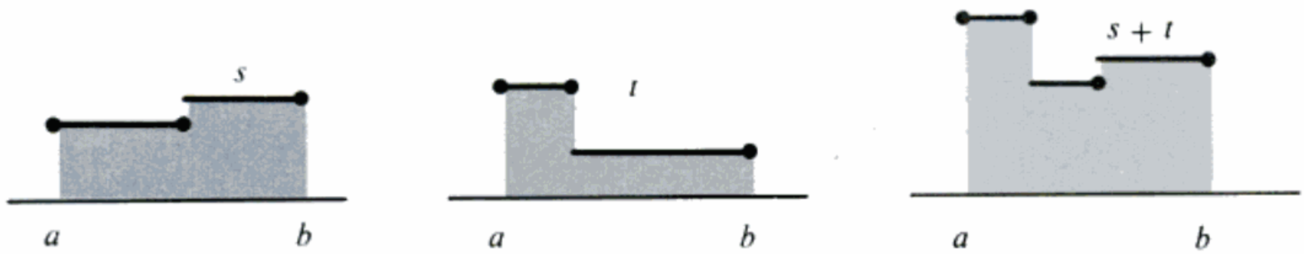


Fig. 1.24 — A propriedade aditiva do integral.

A primeira propriedade estabelece que o integral da soma de duas funções em escada é igual à soma dos integrais dessas funções. Designa-se por *propriedade aditiva* e está representada na fig. 1.24.

Teorema 1.2 — Propriedade aditiva.

$$\int_a^b [s(x) + t(x)]\, dx = \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx\,.$$

A propriedade seguinte, representada na fig. 1.25, denomina-se *propriedade homogénea* e estabelece que, multiplicando os valores da função por uma constante c, o integral vem multiplicado por c.

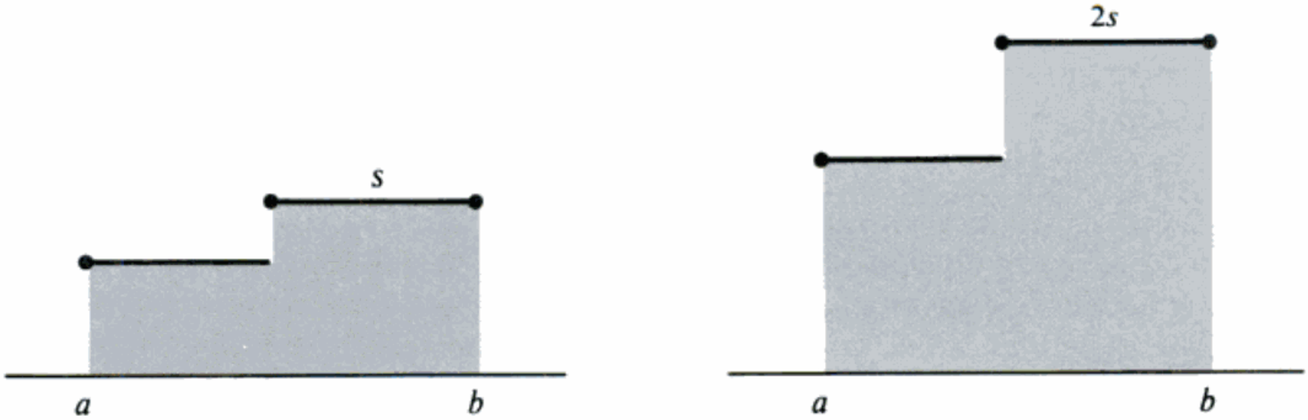


Fig. 1.25 — A propriedade homogénea do integral para $c = 2$.

TEOREMA 1.3 — PROPRIEDADE HOMOGÉNEA. *Para todo o número real c, tem-se*

$$\int_a^b c \cdot s(x)\, dx = c \int_a^b s(x)\, dx\,.$$

Estes dois teoremas podem combinar-se numa única fórmula, conhecida por propriedade de linearidade.

TEOREMA 1.4 — PROPRIEDADE DE LINEARIDADE. *Para todo o par de números reais c_1 e c_2 tem-se*

$$\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]\, dx = c_1 \int_a^b s(x)\, dx + c_2 \int_a^b t(x)\, dx\,.$$

A proposição seguinte é um teorema de *comparação*, o qual estabelece que se uma função em escada toma, em todo o intervalo $[a, b]$, valores superiores aos de outra função, o seu integral estendido ao mesmo intervalo é também maior.

TEOREMA 1. 5 — TEOREMA DE COMPARAÇÃO. *Se $s(x) < t(x)$ para todo o x de $[a, b]$, então*

$$\int_a^b s(x)\, dx < \int_a^b t(x)\, dx\,.$$

A interpretação geométrica deste teorema indica que, se um conjunto de ordenadas está contido noutro, a área da região menor não pode exceder a da região maior.

As propriedades apresentadas até agora referem-se todas elas a funções em escada definidas num intervalo comum. O integral goza de outras propriedades importantes que relacionam integrais definidos em intervalos distintos.

Entre elas temos as seguintes:

TEOREMA 1.6 — ADITIVIDADE COM RESPEITO AO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO.

$$\int_a^c s(x)\, dx + \int_c^b s(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx \qquad \text{se} \qquad a < c < b\,.$$

Este teorema exprime a propriedade aditiva da área, apresentada na fig. 1.26. Se o conjunto de ordenadas se decompõe em dois, a soma das áreas das duas partes é igual à área total.

Outro teorema exprime a *invariânça relativa a uma translação*. Se o conjunto de ordenadas de uma função em escada é "deslocado" de c, o conjunto de ordenadas resultante é o de outra função em escada t, relacionada com s pela equação $t(x) = s(x - c)$. Se s é definida em $[a, b]$, então t é definida em $[a + c, b + c]$ e os respetivos conjuntos de ordenadas, sendo congruentes, têm áreas iguais. Esta propriedade é expressa analiticamente do modo seguinte:

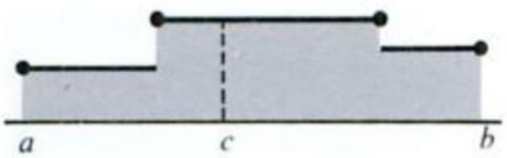


Fig. 1.26 — Aditividade com respeito ao intervalo de integração.

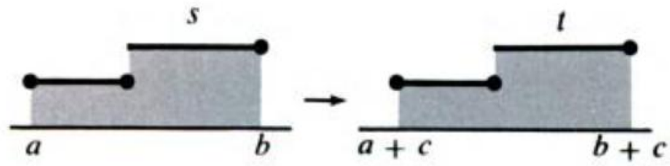


Fig. 1.27 – Invariância do integral sob translação $t(x) = s(x-c)$.

TEOREMA 1.7 — INVARIÂNCIA SOB TRANSLAÇÃO

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx \qquad \textit{para cada real } c.$$

A interpretação geométrica é dada na fig. 1.27 para $c > 0$. Quando $c < 0$ o conjunto de ordenadas é "deslocado" para a esquerda.

A propriedade homogénea (Teorema 1.3) indica como varia um integral quando se efetua uma mudança de escada no eixo OY. O teorema que se segue refere-se a uma mudança de escada na direção OX multiplicando cada abcissa x por um fator $k > 0$, o novo gráfico é outra função em escada t, definida no intervalo $[ka, kb]$, e relacionada com s por meio da equação:

$$t(x) = s\left(\frac{x}{k}\right) \qquad \text{se} \qquad ka \leq x \leq kb\,.$$

A fig. 1.28 mostra um exemplo com $k = 2$ e sugere que a figura modificada tem uma área duas vezes a da figura original. Em geral, um factor positivo k tem como efeito multiplicar

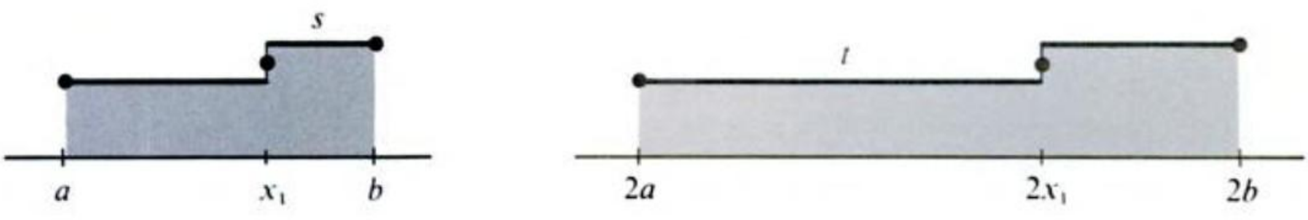


FIGURE 1.28 Cambio de escada no eixo x: $t(x) = s(x/2)$.

o integral por k. Analiticamente a propriedade exprime-se da forma seguinte:

TEOREMA 1.8 — DILATAÇÃO OU CONTRACÇÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO.

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k\int_a^b s(x)\,dx \qquad \textit{para cada } k > 0.$$

Até agora, quando utilizámos o símbolo $\int_a^b$, subentendeu-se que o limite inferior a era menor que o limite superior b. É, contudo, conveniente generalizar um pouco mais as ideias e considerar integrais com o limite inferior maior que o limite superior. Tal é possível definindo

$$\int_b^a s(x)\,dx = -\int_a^b s(x)\,dx \qquad \text{se} \qquad a < b\,. \tag{1.4}$$

Igualmente se define

$$\int_a^a s(x)\,dx = 0\,,$$

o que é sugerido por (1.4), fazendo $a = b$. Estas convenções permitem-nos concluir que o teorema 1.6 é válido não somente quando c está entre a e b, mas também para qualquer permutação dos pontos a, b, c. O teorema 1.6 traduz-se muitas vezes, pela fórmula

$$\int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx + \int_b^a s(x)\,dx = 0\,.$$

Analogamente, podemos estender o campo de validade do teorema 1.8 ao caso em que a constante k seja negativa. Em particular, quando $k = -1$, o teorema 1.8 e a igualdade (1.4) dão-nos

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)\,dx\,.$$

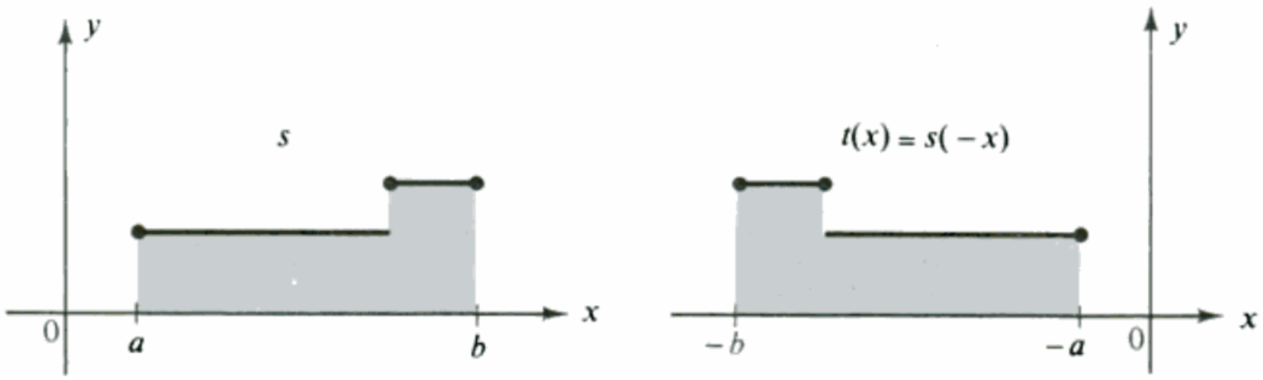


Fig. 1.29 — Propriedade dè reflexão do integral.

Designamos esta por *propriedade de reflexão do integral*, uma vez que o gráfico da função t dado por $t(x) = s(-x)$ obtém-se do de s por reflexão relativamente a OY. A fig. 1.29 representa um exemplo.

1.14 Outras notações para os integrais

A letra x que aparece no símbolo $\int_a^b s(x)\,dx$ não desempenha nenhum papel fundamental na definição do integral. Qualquer outra letra servirá do mesmo modo. As letras t, u, v, z são frequentemente utilizadas com a mesma finalidade, pelo que em vez de $\int_a^b s(x)\,dx$, podemos escrever $\int_a^b s(t)\,dt, \int_a^b s(u)\,du$, etc. sendo considerados todos como notações diferentes duma mesma coisa. Os símbolos x, t, u, etc., que se utilizam desta maneira dizem-se "variáveis mudas". São análogas aos índices mudos usados na notação do somatório.

Há uma tendência entre alguns autores de livros de Cálculo para omitirem simultaneamente a variável muda e o símbolo d e escreverem simplesmente $\int_a^b s$ para o integral. Uma boa razão para usar este símbolo abreviado é que ele sugere muito fortemente que o integral depende unicamente da *função* s e do *intervalo* $[a, b]$. Além disso, certas fórmulas aparecem mais simplificadas nesta notação. Por exemplo, a propriedade aditiva vem $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$. Por outro lado resulta, todavia, mais complicado escrever algumas fórmulas, tais como as dos teoremas 1.7 e 1.8, na notação abreviada. Mais importantes que estes fatos são, sem dúvida, as vantagens práticas que a notação original de Leibniz apresenta, como veremos mais adiante.O símbolo dx, que nos parece quase supérfluo nesta altura, apresentar-se-á como um instrumento extremamente útil na prática de cálculo de integrais.

1.15 Exercícios

1. Calcular o valor de cada um dos seguintes integrais, podendo fazer-se uso dos teoremas da Seção 1.13, sempre que isso seja conveniente. A notação $[x]$ representa o maior inteiro $\leq x$.

   (a) $\int_{-1}^{3} [x]\,dx.$ (d) $\int_{-1}^{3} 2[x]\,dx.$

   (b) $\int_{-1}^{3} [x+\frac{1}{2}]\,dx.$ (e) $\int_{-1}^{3} [2x]\,dx.$

   (c) $\int_{-1}^{3} ([x]+[x+\frac{1}{2}])\,dx.$ (f) $\int_{-1}^{3} [-x]\,dx.$

2. Dar um exemplo dum função em escada s, definida no intervalo fechado $[0, 5]$, a qual tem as seguintes propriedades: $\int_0^2 s(x)\,dx = 5$, $\int_0^5 s(x)\,dx = 2$.
3. Mostrar que $\int_a^b [x]\,dx + \int_a^b [-x]\,dx = a - b$.
4. (a) Se n é um inteiro positivo, provar que $\int_0^n [t]\,dt = n\dfrac{(n-1)}{2}$.

   (b) Se $f(x) = \int_0^x [t]$ dt para $x \geq 0$, traçar o gráfico de f relativo ao intervalo $[0, 4]$.
5. (a) Provar que $\int_0^2 [t^2]\,dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}.$

   (b) Calcular $\int_{-3}^{3} [t^2]\,dt$
6. (a) Se n é um inteiro positivo, provar que $\int_0^n [t]^2\,dt = n(n-1)(2n-1)/6$.

   (b) Se $f(x) = \int_0^x [t]^2\,dt$ para $x \geq 0$, traçar o gráfico de f relativo ao intervalo $[0, 3]$.

   (c) Determinar todos os valores de $x > 0$ para os quais $\int_0^x [t]^2\,dt = 2(x-1)$.

7. (a) Calcular $\int_0^9 [\sqrt{t}]\, dt$.

   (b) Se n é um inteiro positivo, provar que $\int_0^{n^2} [\sqrt{t}]\, dt = n(n-1)(4n+1)/6$.

8. Mostrar que a propriedade de translação (teorema 1.7) pode ser expressa na forma equivalente

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx = \int_a^b f(x+c)\, dx\,.$$

9. Mostrar que a seguinte propriedade é equivalente ao teorema 1.8:

$$\int_{ka}^{kb} f(x)\, dx = k\int_a^b f(kx)\, dx\,.$$

10. Dado o inteiro positivo p, define-se a função em escada s no intervalo $[0, p]$ como segue: $s(x) = (-1)^n n$ se x está no intervalo $n \le x \le n+1$, onde $n = 0, 1, 2, ..., p-1$; $s(p) = 0$. Seja $f(p) = \int_0^p s(x)\, dx$.

    (a) Calcular $f(3)$, $f(4)$ e $f(f(2))$.

    (b) Para que valor (ou valores) de p é $|f(p)| = 7$?

11. Se, em vez de definir integrais de funções em escada pela fórmula (1.3), usarmos a definição

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3 \cdot (x_k - x_{k-1})\,.$$

pode resultar uma nova e diferente teoria de integração. Quais destas propriedades permaneceriam válidas na nova teoria?

(a) $\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s$.

(b) $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$.

(c) $\int_a^b c \cdot s = c\int_a^b s$.

(d) $\int_{a+c}^{b+c} s(x)\, dx = \int_a^b s(x+c)\, dx$.

(e) Se $s(x) < t(x)$ para cada x em $[a, b]$, então $\int_a^b s < \int_a^b t$.

12. Resolver o Exercício 11, utilizando a definição

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k^2 - x_{k-1}^2)\,.$$

No exercícios seguintes pedem-se as demonstrações analíticas das propriedades do integral dadas na Seção 1.13. As demonstrações dos teoremas 1.3 e 1.8 são apresentadas como exemplos e são dadas sugestões para as restantes.

Demonstração do teorema 1.3: $\int_a^b c.\, s(x)\, dx = c\int_a^b s(x)\, dx$ para todo o real c.

Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, tal que s seja constante nos subintervalos abertos de P. Suponhamos $s(x) = s_k$ se $x_{k-1} < x < x_k (k = 1, 2, ..., n)$. Então $c \cdot s(x) = = c \cdot s_k$ se $x_{k-1} < x < x_k$ e daqui, pela definição de integral. temos

$$\int_a^b c \cdot s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c \cdot s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \int_a^b s(x)\, dx .$$

Demonstração do teorema 1.8.

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x)\, dx \qquad \text{se} \quad k > 0 .$$

Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, tal que s seja constante nos subintervalos abertos de P. Suponhamos que $s(x) = s_i$ se $x_{i-1} < x < x_i$. Seja $t(x) = s(x/k)$ se $ka \leq x \leq kb$. Então $t(x) = s_i$ se x pertence ao intervalo aberto (kx_{i-1}, kx_i); por conseguinte $P' = \{kx_0, kx_1, ..., kx_n\}$ é uma partição de $[ka, kb]$ e t é constante nos subintervalos abertos de P'. Portanto t é uma função em escada cujo integral é

$$\int_{ka}^{kb} t(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (kx_i - kx_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = k \int_a^b s(x)\, dx .$$

13. Demonstrar o teorema 1.2 (propriedade aditiva).

[*Sugestão:* Aplicar a propriedade aditiva para somas:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k .]$$

14. Demonstrar o teorema 1.4

[*Sugestão:* Aplicar a propriedade aditiva e a propriedade homogénea.]

15. Demonstrar o teorema 1.5

[*Sugestão:* Aplicar a propriedade correspondente para somas $\Sigma_{k=1}^{n} a_k < \Sigma_{k=1}^{n} b_k$ se $a_k < b_k$ para $k = 1, 2, ..., n$.]

16. Demonstrar o teorema 1.16

[*Sugestão:* Se P_1 é uma partição de $[a, c]$ e P_2 uma partição de $[c, b]$, os pontos de P_1, juntamente com os de P_2 formam uma partição de $[a, b]$.]

17. Demonstrar o teorema 1.7

[*Sugestão:* Se $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, então $P' = \{x_0 + c, x_1 + c, ..., x_n + c\}$ é uma partição de $[a + c, b + c]$.]

1.16 O integral de funções mais gerais

O integral $\int_a^b s(x)\,dx$ foi definido quando s é uma função em escada. Nesta seção devemos formular uma definição de $\int_a^b f(x)\,dx$ que seja aplicável a funções f mais gerais. A definição deverá ser estabelecida de tal modo que o integral dela resultante goze de todas as propriedades referidas na Seção 1.13.

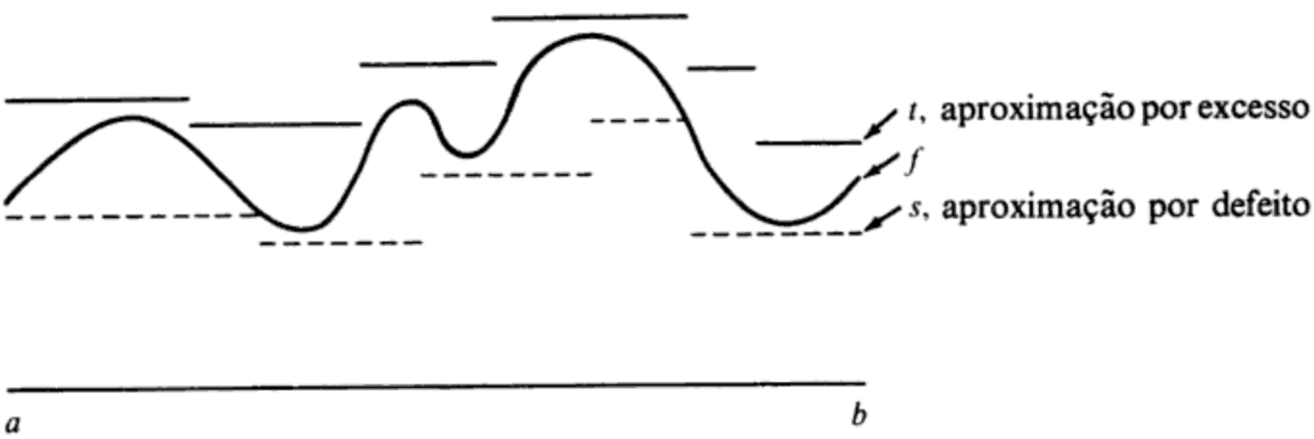


Fig. 1.30 Aproximação duma função f por defeito e por excesso, por meio de funções em escada

O método será inspirado no de Arquimedes, que foi desenvolvido na Secção I 1.3. A ideia é simplesmente esta: começamos por aproximar, por defeito e por excesso, a função f por intermédio de funções em escada, como se sugere na fig. 1.30. Para isso escolhemos uma função em escada arbitrária s, cujo gráfico esteja abaixo do de f, e uma função em escada arbitrária t, cujo gráfico esteja acima do de f. Em seguida consideramos o conjunto de todos os números $\int_a^b s(x)\,dx$ e $\int_a^b t(x)\,dx$ obtidos escolhendo s e t de todas as maneiras possíveis. Pelo teorema de comparação teremos

$$\int_a^b s(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx$$

Se o integral de f há-de verificar o mesmo teorema, então deve ser um número compreendido entre $\int_a^b s(x)\,dx$ e $\int_a^b t(x)\,dx$, para cada par s e t de funções de aproximação. Se existir *um único número* gozando desta propriedade, definimos o integral de f como sendo esse número.

Há somente um pormenor que pode dificultar este processo, e que se apresenta logo desde início: infelizmente nem sempre é possível aproximar *toda a* função por defeito ou por excesso, por intermédio de funções em escada. Por exemplo, a função f dada por

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0\,, \qquad f(0) = 0\,,$$

é definida para todo o x real, mas em nenhum intervalo $[a, b]$ que contenha a origem se pode "enquadrar" f por funções em escada. Deve-se tal situação ao fato de f tomar valores arbitràriamente grandes nos vizinhanças da origem ou, por outras palavras, f *não* ser *limitada* nas vizinhanças da origem (Ver fig. 1.31). Portanto devemos em primeiro lugar restringir-nos àquelas funções que são *limitadas* em $[a, b]$, quer dizer, funções f para as quais existe um número $M > 0$ tal que

$$-M \leq f(x) \leq M\,, \tag{1.5}$$

qualquer que seja x em $[a, b]$. Geometricamente o gráfico de tais funções está situado entre os gráficos de duas funções em escada constantes, s e t, que tomam os valores $-M$ e M, respectivamente. (Ver fig. 1.32). Neste caso diz-se que f está

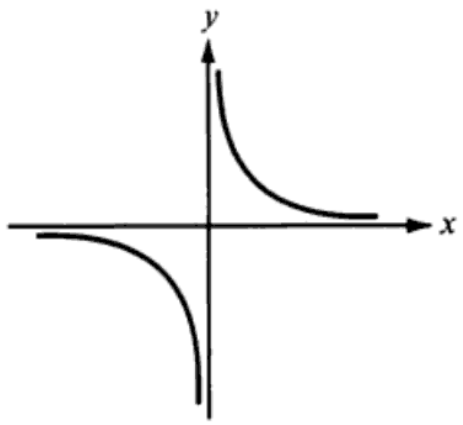


Fig. 1.31 – Uma função não limitada.

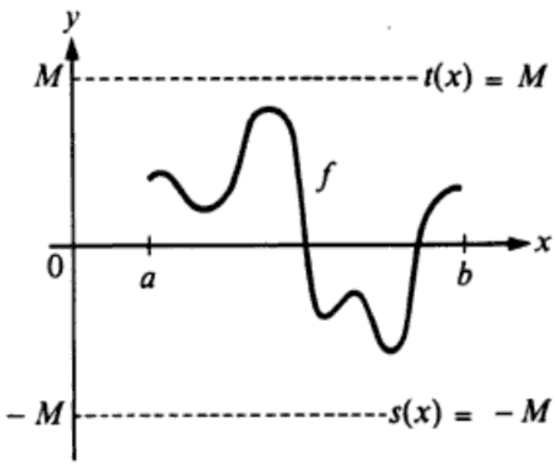


Fig. 1.32 – Uma função limitada.

limitada por M. As duas desigualdades em 1.5 podem também escrever-se

$$|f(x)| \leq M\,.$$

Salvaguardado este ponto, podemos continuar a realizar o plano descrito atrás e formular a definição de integral.

Definição de integral duma função limitada. *Seja f definida e limitada em $[a, b]$.*

Sejam s e t funções em escada arbitrárias definidas em $[a, b]$ *e tais que*

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x) \tag{1.6}$$

para cada x em $[a, b]$. *Se existir um e um só número I, tal que*

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx \tag{1.7}$$

para cada par de funções em escada s e t satisfazendo a (1.6), então este número I chama-se o integral de f de a a b e representa-se pelo símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ *ou* $\int_a^b f$. *Quando um tal número I existe, a função f diz-se integrável em* $[a, b]$.

Se $a < b$, definimos $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, suposta $f(x)$ integrável em $[a, b]$. Definimos também $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Se $f(x)$ é integrável em $[a, b]$, dizemos que o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe*. A função f chama-se *função integranda*, os números a e b são os *limites de integração* e o intervalo $[a, b]$ o *intervalo de integração.*

1.17 Integrais superior e inferior

Suponhamos a função f limitada em $[a, b]$. Se s e t são funções em escada satisfazendo a (1.6), dizemos que s é *inferior* a f e t *superior* a f e escreve-se $s \leq f \leq t$.

Seja S o conjunto de todos os números $\int_a^b s(x)\,dx$ obtidos quando s passa por todas as funções em escada inferiores a f, e seja T o conjunto de todos os números $\int_a^b t(x)\,dx$ obtidos ao tomar para t todas as funções em escada superiores a f, ou seja

$$S = \left\{\int_a^b s(x)\,dx \,\middle|\, s \leq f\right\}, \qquad T = \left\{\int_a^b t(x)\,dx \,\middle|\, f \leq t\right\}.$$

Ambos os conjuntos S e T são não vazios, uma vez que f é limitada. Assim sendo $\int_a^b s(x)\,dx \leq \int_a^b t(x)\,dx$ se $s \leq f \leq t$, pelo que todo o número de S é menor que qualquer número de T. Portanto, pelo Teorema 1.34, S tem um supremo e T um ínfimo que verificam as desigualdades

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \sup S \leq \inf T \leq \int_a^b t(x)\,dx$$

para quaisquer s e t verificando $s \leq f \leq t$. Isto mostra que ambos os números $\sup S$ e $\inf T$ satisfazem a (1.7). Portanto f é integrável em $[a, b]$ se e somente se $\sup S = \inf T$, caso em que se tem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup S = \inf T\,.$$

O número sup S chama-se o *integral inferior* de f e representa-se por $\underline{I}(f)$. O número T chamase *integral superior* de f e representa-se por $\bar{I}(f)$. Então tem-se

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s(x)\,dx \,\middle|\, s \leq f\right\}, \qquad \bar{I}(f) = \inf\left\{\int_a^b t(x)\,dx \,\middle|\, f \leq t\right\}.$$

O raciocinio precedente prova o teorema seguinte.

TEOREMA 1.9. *Toda a função f limitada em $[a, b]$ tem um integral inferior $\underline{I}(f)$ e um integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfazem às desigualdades*

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x)\,dx$$

para todas as funções em escada s e t tais que $s \leq f \leq t$. A função f é integrável em $[a, b]$ se e somente se os seus integrais superior e inferior são iguais, e nesse caso será

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)\,.$$

1.18 A área de um conjunto de ordenadas expressa por um integral

O conceito de área foi introduzido axiomaticamente na Seção 1.6 como uma função de conjunto que goza de certas propriedades. A partir destas propriedades provou-se que a área do conjunto de ordenadas, duma função em escada não negativa, é igual ao integral da função. Agora mostramos que o mesmo é verdadeiro para qualquer função não negativa integrável. Lembramos que o conjunto de ordenadas duma função não negativa f, relativa a um intervalo $[a, b]$, é o conjunto de todos os pontos (x, y) verificando as desigualdades $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

TEOREMA 1.10. *Se f é uma função não negativa, integrável num intervalo $[a, b]$, e Q o conjunto de ordenadas de f a respeito de $[a, b]$, então Q é mensurável e a sua área é igual ao integral $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Demonstração: Sejam S e T duas regiões em escada verificando $S \subseteq Q \subseteq T$. Existem então duas funções s e t satisfazendo a $s \leq f \leq t$ em $[a, b]$, tais que

$$a(S) = \int_a^b s(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad a(T) = \int_a^b t(x)\,dx\,.$$

Uma vez que f é integrável em $[a, b]$ o número $I = \int_a^b f(x)dx$ é o único verificando as desigualdades

$$\int_a^b s(x)\,dx \le I \le \int_a^b t(x)\,dx$$

para todas as funções em escada s e t com $s \le f \le t$. Portanto, esse é também o único número verificando $a(S) \le I \le a(T)$ para todas as regiões em escada S e T, com $S \subseteq Q \subseteq T$. Pela propriedade de exaustão, a conclusão anterior prova que Q é mensurável e que $a(Q) = I$.

Represente Q o conjunto de ordenadas do teorema 1.10 e seja Q' o conjunto que resulta de subtrairmos a Q os pontos do gráfico de f, isto é,

$$Q' = \{(x, y) \mid a \le x \le b\,, 0 \le y < f(x)\}\,.$$

O argumento usado para demonstrar o teorema 1.10 mostra que Q' é mensurável e que $a(Q') = a(Q)$. Portanto, pela propriedade da diferença para a área, o conjunto $Q - Q'$ é mensurável e

$$a(Q - Q') = a(Q) - a(Q') = 0\,.$$

Provámos, pois, o seguinte teorema.

TEOREMA 1.11. *Seja f uma função não negativa, integrável num intervalo $[a, b]$. O gráfico de f, ou seja, o conjunto*

$$\{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y = f(x)\}\,,$$

é mensurável e tem área igual a 0.

1.19 Observações relativas à teoria e técnica de integração

Chegados a este ponto apresentam-se duas questões fundamentais: (1) *Quais as funções limitadas que são integráveis? (2) Sabido que uma função f é integrável, como calcular o integral de f?*

À primeira questão encontra-se resposta na "Teoria da Integração" e à segunda no capítulo intitulado "Técnica de Integração". Uma resposta completa á questão (1) ultrapassa o nível de um curso preliminar e não será estudada neste livro. Em vez disso, daremos respostas parciais as quais exigirão apenas ideias elementares.

Em primeiro lugar introduzimos uma classe importante de funções, as *funções monótonas*. Apresentamos a seguir a sua definição e damos alguns exemplos. Demonstramos depois que todas as funções monótonas limitadas são integráveis. Felizmente, muitas das funções que aparecem na prática são ou monótonas ou somas de funções monótonas, de maneira que os resultados desta teoria reduzida de integração são suficientemente amplos.

A discussão da "Técnica de Integração" começa na Seção 1.23 onde calculamos o integral $\int_0^b x^p\,dx$, quando p é um inteiro positivo. Em seguida desenvolvemos propriedades gerais do integral tais como linearidade e aditividade e mostramos como estas propriedades nos ajudam a alargar os nossos conhecimentos a integrais de funções específicas.

1.20 Funções monótonas e monótonas por partes. Definições e exemplos

Uma função f diz-se *crescente num conjunto* S se $f(x) \leqq f(y)$ para todo o par de pontos x e y de S com $x < y$. Se a desigualdade $f(x) < f(y)$ se verifica para todos o $x < y$ de S, diz-se que a função f é *estritamente crescente* em S. De modo análogo, f diz-se *decrescente* em S se $f(x) \geqq f(y)$ para todo o $x < y$ em S. Se $f(x) > f(y)$, quaisquer que sejam $x < y$ de S, então f diz-se *estritamente decrescente* em S. Uma função chama-se *monótona* em S se for crescente ou decrescente em S. A designação *estritamente monótona* significa que a função ou é estritamente crescente ou estritamente decrescente em S. Regra geral, o conjunto S é quer um intervalo aberto, que um intervalo fechado. Na fig. 1.33 representam-se alguns exemplos.

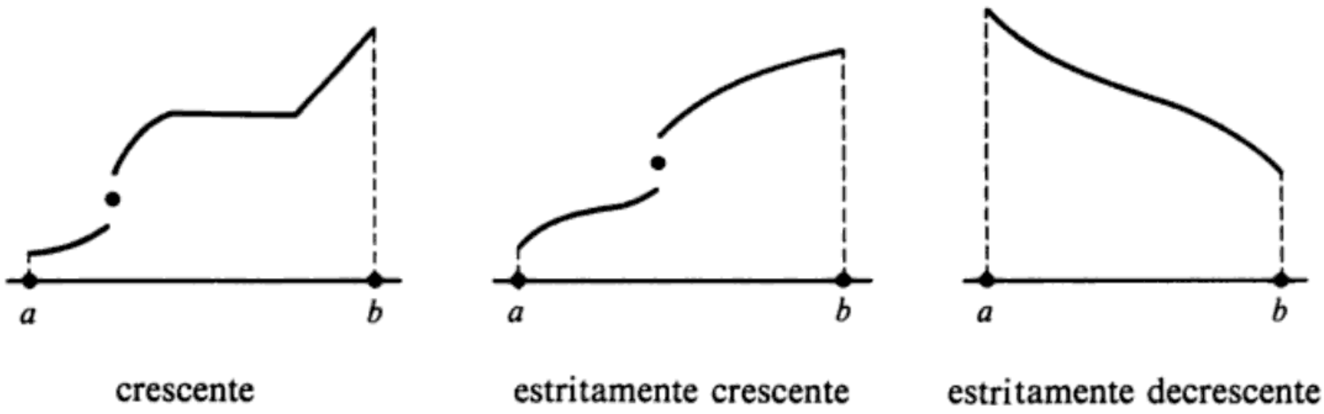


Fig. 1.33. Funções monótonas.

Uma função diz-se *"monótona por partes"*, num intervalo, se o gráfico é formado por um número finito de partes monótonas. Quer dizer, f é monótona por partes em $[a, b]$ se existe uma partição P de $[a, b]$, tal que f seja

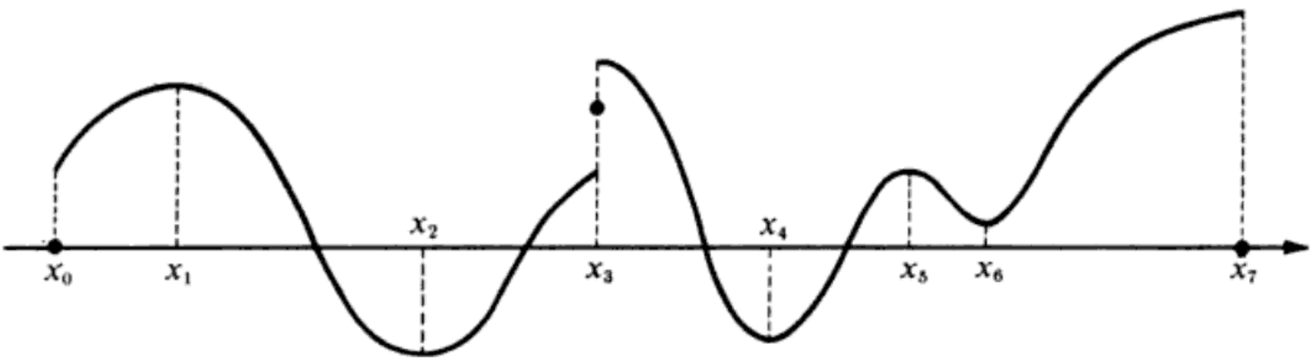


Fig. 1.34. Função monótona por partes.

monótona em cada um dos subintervalos de P. Em particular, funções em escada são monótonas por partes, bem como todos os exemplos figurados nas figs. 1.33 e fig. 1.34.

EXEMPLO 1. *A função potência*. Se p é um inteiro positivo, temos a desigualdade

$$x^p < y^p \qquad \text{se} \quad 0 \leq x < y,$$

a qual pode ser facilmente demonstrada por indução. Implica este fato que a função potência f, definida para todo o real x pela equação $f(x) = x^p$, é estritamente crescente no eixo real não negativo. A mesma função é monótona em sentido restrito no eixo real negativo (é decrescente se p é *par* e crescente se p é ímpar). Por conseguinte f é monótona por partes, em cada intervalo finito.

EXEMPLO 2. *A função raíz quadrada.* Seja $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. Esta função é estritamente crescente no eixo real não negativo. Com efeito se $0 \leq x < y$, temos

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}};$$

logo $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$

EXEMPLO 3. O gráfico da função g definida por

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{se} \quad -r \leq x \leq r$$

é uma semicircunferência de raio r. Esta função é estritamente crescente no intervalo $-r \leq x \leq 0$ e estritamente decrescente no intervalo $0 \leq x \leq r$. Por conseguinte g é monótona por partes em $[-r, r]$.

1.21 Integrabilidade de funções monótonas limitadas

A importância das funções monótonas na teoria da integração é devida ao seguinte teorema:

TEOREMA 1.12. *Se f é monótona no intervalo fechado $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Demonstramos o teorema para funções crescentes. A demonstração para funções decrescentes é análoga. Suponhamos f crescente e sejam $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ os seus integrais inferior e superior, respectivamente. Devemos provar que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

Designemos por n um inteiro e positivo e construamos duas funções de aproximação em escada, s_n e t_n, do modo seguinte: Seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos *iguais*, isto é, subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, tais que $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, para todo o k. Definamos agora s_n e t_n pelas fórmulas

$$s_n(x) = f(x_{k-1}), \qquad t_n(x) = f(x_k) \qquad \text{se} \quad x_{k-1} < x < x_k.$$

Nos pontos de divisão, definem-se s_n e t_n de modo que se mantenham as relações $s_n(x) \leq f(x) \leq$ $\leq t_n(x)$ em todo $[a, b]$. Na fig. 1.35 (a) apresenta-se um exemplo. Para esta escolha de funções em escada temos

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n},$$

onde a última expressão é uma consequência da propriedade (A) fig. 48 das somas finitas. A igualdade da primeira com a última expressão é susceptível duma interpretação geométrica simples. A diferença $\int_a^b t_n - \int_a^b s_n$ é igual à soma das áreas dos retângulos sombreados na fig. 1.35 (a). Deslocando estes rectângulos para a direita de modo a que fiquem com uma base comum, como na fig. 1.35 (b), vemos que eles completam um retângulo de base $(b-a)/n$ e altura $f(b)-f(a)$;

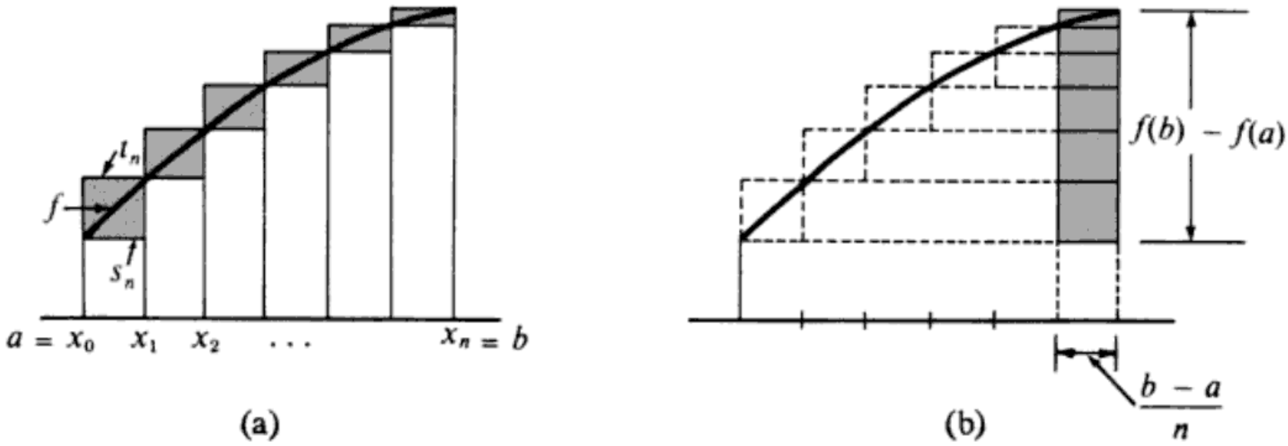


FIGURE 1.35 **Prova de integrabilidade duma função crescente.**

Podemos agora escrever de novo a relação anterior na forma

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n}. \tag{1.8}$$

Os integrais superior e inferior de f verificam as desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \qquad \text{e} \qquad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n.$$

Multiplicando o primeiro conjunto de desigualdades por (-1) e somando o resultado ao segundo conjunto, obtemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n.$$

Servindo-nos de (1.8) e da relação $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$, obtemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \frac{C}{n}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Portanto pelo teorema 1.31, devemos ter $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, o que prova que f é integrável em $[a, b]$.

1.22 Cálculo do integral de uma função monótona limitada

A demonstração do teorema 1.12 não só prova que o integral de uma função limitada crescente *existe*, como também sugere um método de cálculo do valor do integral. É o que se prova pelo seguinte teorema.

TEOREMA 1.13. *Seja f crescente no intervalo fechado $[a, b]$ e $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Se I é qualquer número que verifica as desigualdades*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{1.9}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$, então $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Demonstração. Suponhamos que s_n e t_n são duas funções em escada, obtidas por divisão do intervalo $[a, b]$ em n partes iguais, como foi referido na demonstração do teorema 1.12. Deste modo a desigualdade (1.9) estabelece que

$$\int_a^b s_n \leq I \leq \int_a^b t_n$$

para $n \geq 1$. Mas o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ verifica as mesmas desigualdades que I. Utilizando (1.8) vemos que

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{C}{n}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Portanto, pelo teorema 1.31, temos $I = \int_a^b f(x)\,dx$ como se queria demonstrar. Um argumento análogo permite a demonstração do teorema correspondente para funções decrescentes.

TEOREMA 1.14. *Seja f uma função decrescente em $[a, b]$ e $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Se I é um número qualquer que verifica as desigualdades*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

para todo o inteiro $n \geq 1$, então $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

1.23 Cálculo do integral $\int_0^b x^p dx$ quando p é um inteiro positivo

Para exemplificar o uso do teorema 1.13 vamos calcular o integral $\int_0^b x^p\, dx$, com $b > 0$ e p um inteiro positivo qualquer. O integral existe porque a função integranda é limitada e crescente em $[0, b]$.

TEOREMA 1.15. *Se p é um inteiro positivo e $b > 0$, tem-se*

$$\int_0^b x^p\, dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

Demonstração: Comecemos com as desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

válidas para todo o inteiro $n \geq 1$ e todo inteiro $p \geq 1$. Estas desigualdades podem ser facilmente demonstradas por indução matemática. (No Exercício 13 da Seção I 4.10 esboça-se a demonstração). Multiplicando as desigualdades por b^{p+1}/n^{p+1} obtemos

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p.$$

Se fizermos $f(x) = x^p$ e $x_k = kb/n$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, estas desigualdades vêm

$$\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Portanto, as desigualdades (1.9) do teorema 1.13 são satisfeitas com $f(x) = x^p$, $a = 0$ e $I = b^{p+1}/(p+1)$. Resulta pois que $\int_0^b x^p\, dx = b^{p+1}/(p+1)$.

1.24 Propriedades fundamentais do integral

A partir da definição de integral é possível deduzir as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão dadas na Secção 1.27.

TEOREMA 1.16. LINEARIDADE RELATIVA A FUNÇÃO INTEGRANDA. *Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, o mesmo se verifica para $c_1 f + c_2 g$ qualquer que seja o par das constantes reais c_1 e c_2. Além disso, tem-se*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx.$$

Nota: Utilizando o método de indução matemática, a propriedade da linearidade pode generalizar-se do modo seguinte: se $f_1, ..., f_n$ são integráveis em $[a, b]$, então também o é $c_1f_1 + ... + c_nf_n$, quaisquer que sejam as constantes reais $c_1, c_2, ..., c_n$, e

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x)\, dx\,.$$

TEOREMA 1.17. ADITIVIDADE COM RESPEITO AO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO. *Se dois dos três integrais seguintes existem, o terceiro também existe e tem-se*

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx\,.$$

Nota: Em particular, se f é monótona em $[a, b]$ e também em $[b, c]$, então ambos os integrais $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$ existem e assim $\int_a^c f$ existe também e é igual à soma dos dois outros integrais.

TEOREMA 1.18. INVARIÂNCIA SOB TRANSLAÇÃO. *Se f é integrável em $[a, b]$, então qualquer que seja o número real c tem-se*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx\,.$$

TEOREMA 1.19. DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO. *Se f é integrável em $[a, b]$, então para todo o real $k \neq 0$ tem-se*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx\,.$$

Nota: Em ambos os teoremas 1.18 e 1.19, a existência de um dos integrais implica a existência do outro. Quando $k = -1$, o teorema 1.19 chama-se *propriedade de reflexão.*

TEOREMA 1.20. TEOREMA DE COMPARAÇÃO. *Se f e g são ambas integráveis em $[a, b]$ e se $g(x) \leqq f(x)$ para todo o x á $[a, b]$ tem-se*

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Um caso particular importante do teorema 1.20 ocorre quando $g(x) = 0$ para todo o x. Neste caso o teorema estabelece que se $f(x) \geq 0$ em todo o intervalo $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Por outras palavras, uma função não negativa tem um integral não negativo. Pode também demonstrar-se que se tivermos a desigualdade $g(x) < f(x)$ para todo o x em $[a, b]$, então a mesma desigualdade é válida para os integrais, mas a demonstração não é fácil de dar nesta altura.

No capítulo 5 discutiremos vários métodos de cálculo do valor de um integral sem necessidade de aplicar em cada caso a definição de integral. Estes métodos, porém, são aplicáveis unicamente a um número reduzido de funções e para a maior parte das funções integráveis o valor numérico do integral pode apenas ser calculado aproximadamente; isto faz-se, habitualmente, aproximando a função integranda superior e inferiomente por funções em escada, ou por outras funções simples cujo integral se pode calcular de maneira exata. O teorema de comparação utiliza-se para se obterem as aproximações correspondentes para o integral da função em questão. Esta ideia será analisada mais completamente no capítulo 7.

1.25 Integração de polinómios

Na Seção 1.23 estabelecemos a fórmula de integração

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} \tag{1.10}$$

para $b > 0$ e p um inteiro positivo qualquer. A fórmula é também válida se $b = 0$, uma vez que ambos os membros são nulos. Podemos servir-nos do Teorema 1.19 para demonstrar que (1.10) também é válida para b negativo. Fazemos simplesmente $k = -1$ no teorema 1.19 e obtemos

$$\int_0^{-b} x^p\,dx = -\int_0^b (-x)^p\,dx = (-1)^{p+1}\int_0^b x^p\,dx = \frac{(-b)^{p+1}}{p+1},$$

que nos mostra que (1.10) é válida para b negativo. A propriedade aditiva $\int_a^b x^p dx = \int_0^b x^p dx - \int_0^a x^p\,dx$ conduz-nos agora à formula mais geral

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1},$$

válida para quaisquer reais a e b e qualquer inteiro $p \geq 0$.

Algumas vezes usa-se o símbolo

$$P(x)\Big|_a^b$$

para designar a diferença $P(b) - P(a)$. Assim sendo, a fórmula anterior pode igualmente escrever-se

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Esta fórmula, simultaneamente com a propriedade da linearidade, permite-nos integrar qualquer função polinomial. Por exemplo, para calcular o integral $\int_1^3 (x^2 - 3x + 5)\,dx$ determinamos o integral de cada termo e depois adicionamos os resultados obtidos. Assim, temos

$$\int_1^3 (x^2 - 3x + 5)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx - 3\int_1^3 x\,dx + 5\int_1^3 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - 3\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 5x\Big|_1^3$$

$$= \frac{3^3 - 1^3}{3} - 3\,\frac{3^2 - 1^2}{2} + 5\,\frac{3^1 - 1^1}{1} = \frac{26}{3} - 12 + 10 = \frac{20}{3}\,.$$

Mais geralmente, para calcular o integral de qualquer polinómio integramos termo a termo:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} c_k\,\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}\,.$$

Podemos ainda integrar funções mais complicadas desdobrando-as em vários polinómios. Por exemplo, consideremos o integral $\int_0^1 |x(2x-1)|\,dx$. Devido ao sinal de valor absoluto, a função integranda não é um polinómio. Porém, considerando o sinal de $x(2x-1)$, podemos dividir o intervalo $[0, 1]$ em dois subintervalos, em cada um dos quais a função integranda seja um polinómio. Quando x varia de *0* a *1*, o produto $x(2x-1)$ muda de sinal no ponto $x = \frac{1}{2}$; é negativo se $0 < x < \frac{1}{2}$ e positivo se $1/2 < x < 1$. Portanto, podemos usar a propriedade aditiva e escrever

$$\int_0^1 |x(2x-1)|\,dx = -\int_0^{1/2} x(2x-1)\,dx + \int_{1/2}^1 x(2x-1)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} (x - 2x^2)\,dx + \int_{1/2}^1 (2x^2 - x)\,dx$$

$$= (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{12}) + (\tfrac{7}{12} - \tfrac{3}{8}) = \tfrac{1}{4}\,.$$

1.26 Exercicios

Calcular cada um dos integrais seguintes

1. $\int_0^3 x^2\,dx.$
2. $\int_{-3}^3 x^2\,dx.$
3. $\int_0^2 4x^3\,dx.$
4. $\int_{-2}^2 4x^3\,dx.$
5. $\int_0^1 5t^4\,dt.$
6. $\int_{-1}^1 5t^4\,dt.$
7. $\int_0^1 (5x^4 - 4x^3)\,dx.$
8. $\int_{-1}^1 (5x^4 - 4x^3)\,dx.$
9. $\int_{-1}^2 (t^2 + 1)\,dt.$
10. $\int_2^3 (3x^2 - 4x + 2)\,dx.$
11. $\int_0^{1/2} (8t^3 + 6t^2 - 2t + 5)\,dt.$
12. $\int_{-2}^4 (u-1)(u-2)\,du.$
13. $\int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx.$
14. $\int_0^{-1} (x+1)^2\,dx.$

15. $\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx.$

16. $\int_0^2 |(x-1)(3x-1)|\,dx.$

17. $\int_0^3 (2x-5)^3\,dx.$

18. $\int_{-3}^3 (x^2-3)^3\,dx.$

19. $\int_0^5 x^2(x-5)^4\,dx.$

20. $\int_{-2}^{-4} (x+4)^{10}\,dx.$ [*Sugestão:* Teorema 1.18]

21. Determinar todos os valores de c para os quais

(a) $\int_0^c x(1-x)\,dx = 0,$ (b) $\int_0^c |x(1-x)|\,dx = 0.$

22. Calcular cada um dos seguintes integrais e traçar o gráfico de f para cada caso.

(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le c, \\ c\dfrac{1-x}{1-c} & \text{se } c \le x \le 1; \end{cases}$

c é um número real fixo, $0 < c < 1$.

23. Calcular um polinómio do 2.º grau P para o qual $P(0) = P(1) = 0$ e $\int_0^1 P(x)dx = 1$.

24. Determinar um polinómio do 3.º grau P para o qual $P(0) = P(-2) = 0$, $P(1) = 15$, e $3\int_{-2}^0 P(x)dx = 4$.

Exercícios facultativos.

25. Seja f uma função cujo domínio contém $-x$ sempre que contém x. Diz-se que f é uma função *par* se $f(-x) = f(x)$ e uma função *impar* se $f(-x) = -f(x)$, para todo o x no domínio de f. Se f é integrável em $[0, b]$ demonstrar que:

(a) $\int_{-b}^b f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$ se f é par;

(b) $\int_{-b}^b f(x)\,dx = 0$ se f é impar.

26. Utilizar os teoremas 1.18 e 1.19 para deduzir a fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f[a + (b-a)x]\,dx\,.$$

27. Os teoremas 1.18 e 1.19 sugerem uma generalização para o integral $\int_a^b f(Ax + B)\,dx$. Inferir a fórmula sugerida e demonstrá-la com auxílio dos teoremas 1.18 e 1.19. Discutir também o caso $A = 0$.

28. Utilizar os teoremas 1.18 e 1.19 para estabelecer a fórmula

$$\int_a^b f(c-x)\,dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)\,dx\,.$$

1.27 Demonstração das propriedades fundamentais do integral

Nesta seção vamos ocupar-nos da demonstração das propriedades fundamentais do integral referidas nos teoremas 1.16 e 1.20 da Seção 1.24. Para tal fazemos repetido uso do fato de que toda a função f que é limitada num intervalo $[a, b]$ tem um integral inferior $\underline{I}(f)$ e um integral superior $\bar{I}(f)$, definidos por

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s \mid s \leq f\right\}, \qquad \bar{I}(g) = \inf\left\{\int_a^b t \mid f \leq t\right\},$$

onde s e t representam funções em escada arbitrárias inferior e superior a f, respetivamente. Sabemos, pelo teorema 1.9, que f é integrável se e só se $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, caso em que o valor do integral de f é o valor comum do integral superior e do integral inferior.

Demonstração da propriedade de linearidade (Teorema 1.16). Descomponhamos essa propriedade em duas partes:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,, \tag{A}$$

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f\,. \tag{B}$$

Para provar (A), façamos $I(f) = \int_a^b f$ e $I(g) = \int_a^b g$. Interessa-nos provar que $\underline{I}(f + g) = \bar{I}(f + g) = I(f) + I(g)$.

Sejam s_1 e s_2 funções em escada arbitrárias inferior a f e g respectivamente. Uma vez que f e g são integráveis, temos

$$I(f) = \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f\right\}, \qquad I(g) = \sup\left\{\int_a^b s_2 \mid s_2 \leq g\right\}.$$

Pela propriedade aditiva do supremo (Teorema I.33) temos também

$$I(f) + I(g) = \sup\left\{\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 \mid s_1 \leq f,\, s_2 \leq g\right\}. \tag{1.11}$$

Mas se $s_1 \leq f$ e $s_2 \leq g$, então a soma $s = s_1 + s_2$ é uma função em escada inferior a $f + g$ e resulta que

$$\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 = \int_a^b s \leq \underline{I}(f + g)\,.$$

Portanto, o número $\underline{I}(f + g)$ é um limite superior para o conjunto que figura no segundo membro de (1.11). Este limite superior não pode ser menor que o supremo do conjunto, pelo que concluímos

$$I(f) + I(g) \leq \underline{I}(f + g)\,. \tag{1.12}$$

De modo semelhante, se usamos as relações

$$I(f) = \inf\left\{\int_a^b t_1 \,\middle|\, f \le t_1\right\}, \qquad I(g) = \inf\left\{\int_a^b t_2 \,\middle|\, g \le t_2\right\},$$

onde t_1 e t_2 representam funções em escada arbitrárias superiores a f e g, respetivamente, obtemos a desigualdade

$$\bar{I}(f+g) \le I(f) + I(g)\,. \tag{1.13}$$

As desigualdades (1.12) e (1.13) em conjunto mostram que $\underline{I}(f+g) = \bar{I}(f+g) = I(f) + I(g)$. Portanto $f + g$ é integrável e a relação (A) é válida.

A relação (B) é trivial se $c = 0$. Se $c > 0$, observemos que cada função em escada s_1 inferior a cf é da forma $s_1 = cs$, onde s é uma função em escada inferior a f. Do mesmo modo, cada função em escada t_1 superior a cf é da forma $t_1 = ct$, onde t é uma função em escada superior a f. Portanto temos

$$\underline{I}(cf) = \sup\left\{\int_a^b s_1 \,\middle|\, s_1 \le cf\right\} = \sup\left\{c\int_a^b s \,\middle|\, s \le f\right\} = cI(f)$$

e

$$\bar{I}(cf) = \inf\left\{\int_a^b t_1 \,\middle|\, cf \le t_1\right\} = \inf\left\{c\int_a^b t \,\middle|\, f \le t\right\} = cI(f)\,.$$

e em conclusão $\underline{I}(cf) = \bar{I}(cf) = cI(f)$. Aqui utilizámos as seguintes propriedades do supremo e do ínfimo:

$$\sup\{cx \mid x \in A\} = c\sup\{x \mid x \in A\}\,, \qquad \inf\{cx \mid x \in A\} = c\inf\{x \mid x \in A\}\,, \tag{1.14}$$

as quais são válidas se $c > 0$. Está assim demonstrada (B), se $c > 0$.

Se $c < 0$, a demonstração de (B) é fundamentalmente a mesma, exceto que cada função em escada s_1 inferior a cf é da forma $s_1 = ct$, com t uma função em escada *superior* a f, e toda a função em escada t_1 superior a cf é da forma $t_1 = cs$, onde s é uma função em escada *inferior* a f. Além disso, em vez de (1.14) usamos as relações

$$\sup\{cx \mid x \in A\} = c\inf\{x \mid x \in A\}\,, \qquad \inf\{cx \mid x \in A\} = c\sup\{x \mid x \in A\}\,,$$

que são válidas se $c < 0$. Temos pois

$$\underline{I}(cf) = \sup\left\{\int_a^b s_1 \,\middle|\, s_1 \le cf\right\} = \sup\left\{c\int_a^b t \,\middle|\, f \le t\right\} = c\inf\left\{\int_a^b t \,\middle|\, f \le t\right\} = cI(f)\,.$$

Analogamente se prova que $\bar{I}(cf) = cI(f)$. Por conseguinte (B) é verdadeira para qualquer valor real c.

Demonstração da aditividade com respeito ao intervalo de integração (Teorema 1.17). Suponhamos que $a < b < c$ e que os dois integrais $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$ existem. Representemos por $I(f)$ e $\bar{I}(f)$ os integrais superior e inferior de f no intervalo $[a, c]$. Interessa-nos provar que

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{1.15}$$

Se s é uma função em escada qualquer inferior a f em $[a, c]$, temos

$$\int_a^c s = \int_a^b s + \int_b^c s.$$

Inversamente, se s_1 e s_2 são funções em escada inferiores a f em $[a,b]$ e em $[b,c]$, respetivamente, então a função s, que é igual a s_1 em $[a, b]$ e igual a s_2 em $[b, c]$, é uma função em escada inferior a f em $[a, c]$ para a qual temos

$$\int_a^c s = \int_a^b s_1 + \int_b^c s_2.$$

Por conseguinte, pela propriedade aditiva do supremo (teorema 1.33), temos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^c s \mid s \le f\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \le f\right\} + \sup\left\{\int_b^c s_2 \mid s_2 \le f\right\} = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

De modo análogo se prova

$$\bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

o que nos demonstra (1.15) quando $a < b < c$. A demonstração é semelhante para qualquer sequência dos pontos a, b, c.

Demonstração da propriedade de translação (Teorema 1.18). Seja g a função definida no intervalo $[a + c, b + c]$ por $g(x) = f(x - c)$. Designemos por $\bar{I}(g)$ e $\underline{I}(g)$ os integrais superior e inferior de g no intervalo $[a + c, b + c]$. Queremos provar que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.16}$$

Seja s uma função em escada arbitrária inferior a g no intervalo $[a + c, b + c]$. Então a função s_1 definida em $[a, b]$ pela equação $s_1(x) = s(x + c)$ é uma função em escada inferior a f em $[a, b]$. Além disso, toda a função em escada s_1 inferior a f em $[a, b]$ tem esta forma para uma determinada s inferior a g. Também

$$\int_{a+c}^{b+c} s(x)\,dx = \int_a^b s(x + c)\,dx = \int_a^b s_1(x)\,dx.$$

Por conseguinte tem-se

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{a+c}^{b+c} s \mid s \le g\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \le f\right\} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Analogamente, encontramos $\bar{I}(g) = \int_a^b f(x)\,dx$ o que demonstra (1.16).

Demonstração da propriedade de dilatação ou contracção (Teorema I.19). Suponhamos $k > 0$ e definamos g no intervalo $[ka, kb]$ pela equação $g(x) = f(x/k)$. Sejam $\underline{I}(g)$ e $\bar{I}(g)$ os integrais inferior e superior de g em $[ka, kb]$. Interessa-nos provar que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = k \int_a^b f(x)\, dx\,. \tag{1.17}$$

Seja s qualquer função em escada inferior a g em $[ka, kb]$. Então a funçao s_1, definida em $[a, b]$ pela igualdade $s_1(x) = s(kx)$, é uma função em escada inferior a f em $[a, b]$. Além disso, cada função em escada s_1 inferior a f em $[a, b]$ tem esta forma. Também, em virtude do teorema de dilatação para integrais de funções em escada, temos

$$\int_{ka}^{kb} s(x)\, dx = k \int_a^b s(kx)\, dx = k \int_a^b s_1(x)\, dx\,.$$

Portanto temos,

$$\underline{I}(g) = \sup \left\{ \int_{ka}^{kb} s \mid s \leq g \right\} = \sup \left\{ k \int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f \right\} = k \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Analogamente, encontramos $\bar{I}(g) = k\int_a^b f(x)dx$, o que demonstra (1.17) se $k > 0$. O mesmo tipo de demonstração pode ser utilizado se $k < 0$.

Demonstração do teorema de comparação (Teorema I.20). Suponhamos $g \leqq f$ no intervalo $[a, b]$. Seja s qualquer função em escada inferior a g, e t qualquer função em escada superior a f. Então temos $\int_a^b s \leq \int_a^b t$ e pelo teorema I.34 resulta

$$\int_a^b g = \sup \left\{ \int_a^b s \mid s \leq g \right\} \leq \inf \left\{ \int_a^b t \mid f \leq t \right\} = \int_a^b f\,,$$

o que nos permite concluir que $\int_a^b g \leq \int_a^b f$, como desejávamos demonstrar.

2
ALGUMAS APLICAÇÕES DA TEORIA DA INTEGRAÇÃO

2.1 Introdução

Na Secção 1.18 representámos, por meio dum integral, a área dum conjunto de ordenadas de uma função não negativa. Neste capítulo mostraremos que áreas de regiões mais gerais podem também ser expressas por integrais e analisaremos ainda outras aplicações do integral a conceitos tais como volume e trabalho. Também, no final do capítulo, estudaremos propriedades de funções definidas por integrais.

2.2 A área de uma região compreendida entre dois gráficos representada por um integral

Se duas funções f e g estão relacionadas pela desigualdade $f(x) \leq g(x)$ para qualquer x do intervalo $[a, b]$, escrevemos $f \leq g$ em $[a, b]$. A fig. 2.1 mosta dois exemplos. Se $f \leq g$ em $[a, b]$, o conjunto S formado por todos os pontos (x, y) que verificam as desigualdades

$$f(x) \leq y \leq g(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

diz-se a região entre os gráficos de f e g. O teorema seguinte ensina-nos como exprimir a área de S por meio de um integral.

TEOREMA 2.1 *Sejam f e g funções integráveis e verificando $f \leq g$ em $[a, b]$. A região S entre os respetivos gráficos é mensurável e a sua área, $a(S)$, é dada pelo integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx. \tag{2.1}$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f e g são não negativas, como se indica na fig. 2.1(a). Sejam F e G os seguintes conjuntos

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y < f(x)\}, \qquad G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

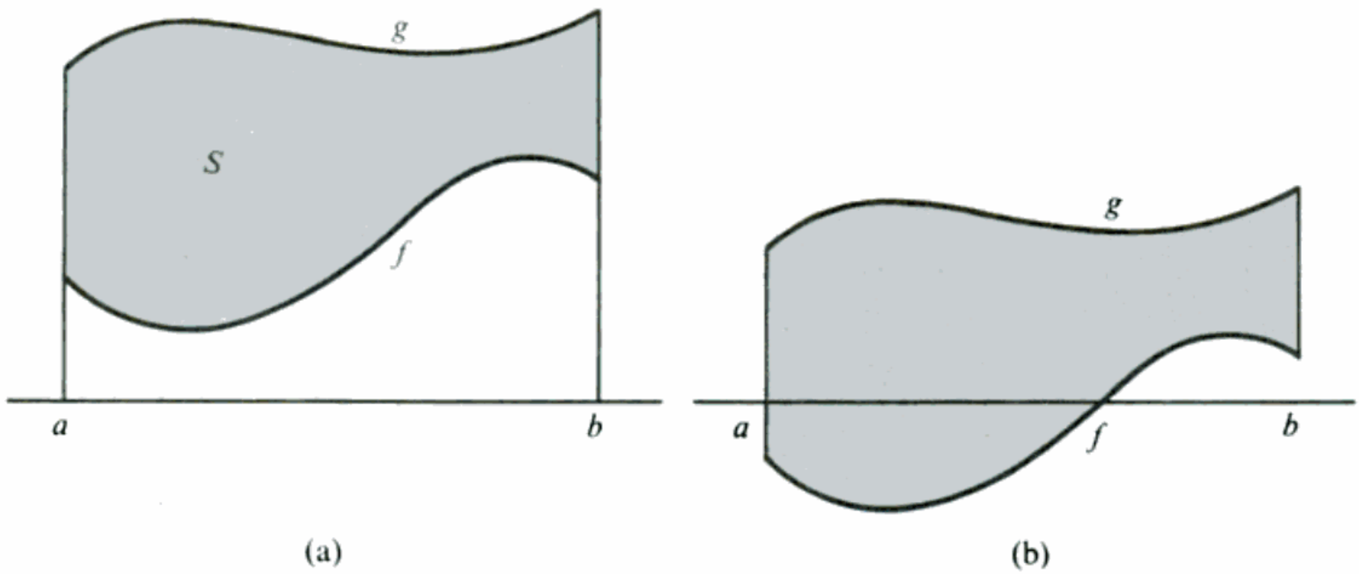


Fig. 2.1 — A área da região entre dois gráficos representada por um integral: $a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

quer dizer G é o conjunto de ordenadas de g e F é o conjunto de ordenadas de f, menos o gráfico de f. A região S entre os gráficos de f e g é a diferença $S = G - F$. Devido aos teoremas 1.10 e 1.11, ambos F e G são mensuráveis e uma vez que $F \subseteq G$, a diferença $S = G - F$ é também mensurável e temos

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx\,.$$

Está assim provada (2.1) quando f e g são não negativas.

Consideremos agora o caso geral quando $f \leq g$ em $[a, b]$, mas f e g não são necessariamente não negativas. Na fig. 2.1(b) apresenta-se um exemplo. Podemos reduzir este caso ao anterior deslocando a região para uma outra (translação paralela a OY) que fique situada acima do eixo OX, isto é, escolhemos um número positivo c suficientemente grande, para nos garantir que $0 \leqq f(x) + c \leqq g(x) + c$ para todo o x em $[a, b]$. Por aquilo que já se demonstrou, a nova região T entre os gráficos de $f + c$ e $g + c$ é mensurável e a sua área é dada pelo integral.

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)]\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx\,.$$

Mas T é congruente com S e portanto S é também mensurável e temos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx\,,$$

o que completa a demonstração.

2.3 Exemplos resolvidos

EXEMPLO 1. Calcular a área da região S entre os gráficos de f e g no intervalo $[0, 2]$, se $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = x/2$.

Resolução: Os dois gráficos estão representados na fig. 2.2. A parte sombreada representa S. Uma vez que $f \leqq g$ no intervalo $[0, 2]$, servimo-nos do Teorema 2.1 para escrevermos

$$a(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2\right) dx = \frac{5}{2}\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

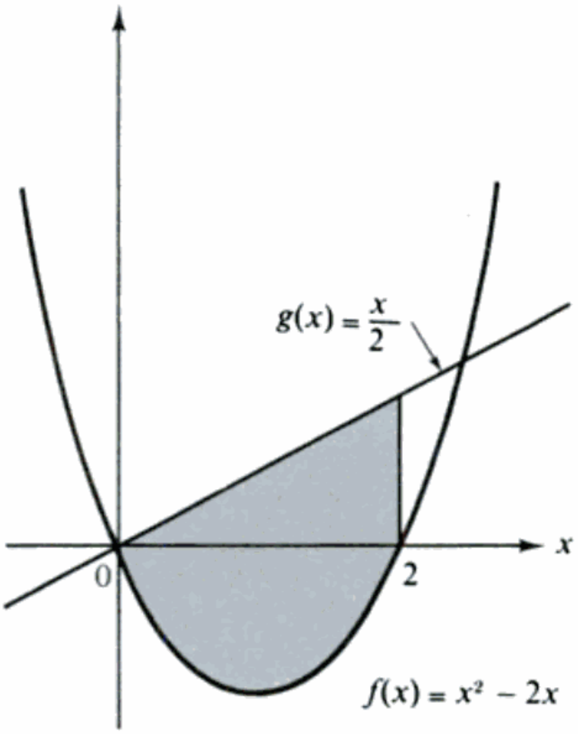


Fig. 2.2 — Exemplo 1.

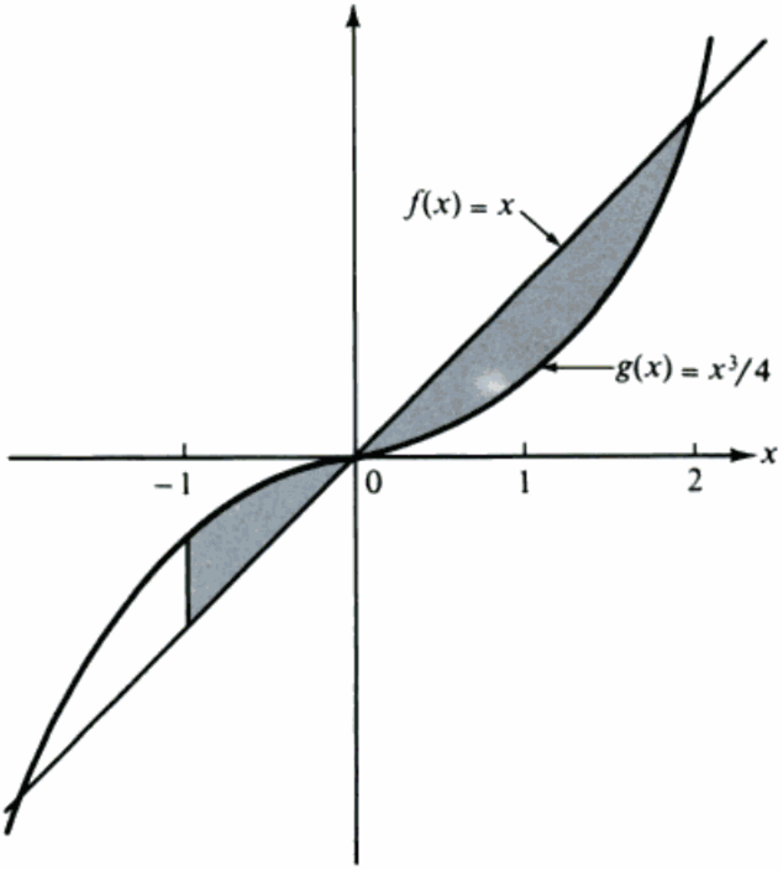


Fig. 2.3 — Exemplo 2.

EXEMPLO 2. Calcular a área da região S entre os gráficos de f e g no intervalo $[-1, 2]$ se $f(x) = x$ e $g(x) = x^3/4$.

Resolução: A região S está representada na fig. 2.3. Aqui não se verifica $f \leq g$ para todo o intervalo $[-1, 2]$. Contudo tem-se $f \leqq g$ no subintervalo $[-1, 0]$ e $g \leqq f$ no subintervalo $[0, 2]$. Aplicando o teorema 2.1 a cada subintervalo temos

$$a(S) = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)]\, dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^3}{4} - x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(x - \frac{x^3}{4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{2^4}{4} = \frac{23}{16}.$$

Em exemplos semelhantes a este, em que o intervalo $[a, b]$ pode ser dividido um número finito de subintervalos em cada um dos quais ou é $f \le g$ ou $g \le f$, a fórmula (2.1) do teorema 2.1 escreve-se

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx .$$

EXEMPLO 3. *Área do círculo.* Um círculo de raio r é o conjunto de todos os pontos sobre uma circunferência de raio r e todos os que lhe são interiores. Um tal círculo é congruente com a região compreendida entre os gráficos de duas funções f e g definidas no intervalo $[-r, r]$ pelas fórmulas

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Cada uma das funções é limitada e monótona em $[-r, r]$ de modo que cada uma delas é integrável em $[-r, r]$. O teorema 2.1 diz-nos que a região entre os gráficos é mensurável e que a sua área é $\int_{-r}^{r}[g(x)-f(x)]dx$. Representemos por $A(r)$ a área do círculo. Vamos provar que

$$A(r) = r^2 A(1).$$

isto é, *que a área do círculo de raio r é igual ao produto da área de um círculo unitário (círculo de raio 1) por r^2.*

Uma vez que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, o teorema 2.1 dá-nos

$$A(r) = \int_{-r}^{r} 2g(x)\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

Em particular, quando $r = 1$, temos a fórmula

$$A(1) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx .$$

Modificando a escala no eixo 0X, e utilizando o teorema 1.19 com $k = 1/r$, obtém-se

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\, dx = 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\, dx$$

$$= 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = r^2 A(1),$$

o que prova que $A(r) = r^2 A(1)$ como se tinha afirmado.

DEFINIÇÃO. *Define-se o número π como a área de um círculo unitário.*

A fórmula que acabámos de demonstrar escreve-se então

$$A(r) = \pi r^2.$$

O exemplo anterior elucida-nos sobre o comportamento da área perante a dilatação ou contração de regiões planas. Suponhamos que S é um dado conjunto de pontos do plano e consideremos um novo conjunto de pontos obtidos por multiplicação das coordenadas de cada ponto de S por um fator constante $k > 0$. Representamos este novo conjunto por kS e dizemos que é *semelhante a S*. O processo que produz kS a partir de S chama-se *transformação por semelhança*. Cada ponto desloca-se, ao longo de uma reta que passa pela origem, de um segmento k vezes a sua distância inicial àquela origem. Se $k > 1$ a transformação diz-se também em *alongamento* ou *dilatação* (a partir da origem) e esse $0 < k < 1$ diz-se um *encolhimento* ou uma *contração* (em direção à origem).

Por exemplo, se S é a região limitada por uma circunferência de raio unidade e centro na origem, então kS é uma região circular concêntrica com a anterior e cujo raio é k. No exemplo 3 mostrou-se que, para regiões circulares, a área de kS é k^2 vezes a área de S. Vamos provar agora que esta propriedade da área é válida para qualquer conjunto de ordenadas.

EXEMPLO 4. *Comportamento da área de um conjunto de ordenadas perante uma transformação por semelhança*. Seja f uma função não negativa e integrável em $[a, b]$ e S o seu conjunto de ordenadas. Na fig. 2.4(a) apresenta-se um exemplo. Se aplicarmos uma transformação por semelhança com um fator positivo k, então kS é o conjunto de ordenadas de uma nova função, seja g, sobre o intervalo $[ka, kb]$ (Ver fig. 2.4(b)). Um ponto (x, y) pertence ao gráfico de g se e só se o ponto $(x/k, y/k)$ pertencer ao gráfico de f. Logo $y/k = f(x/k)$ e portanto $y = kf(x/k)$. Por outras palavras, a nova função g está relacionada com f pela fórmula

$$g(x) = kf(x/k)$$

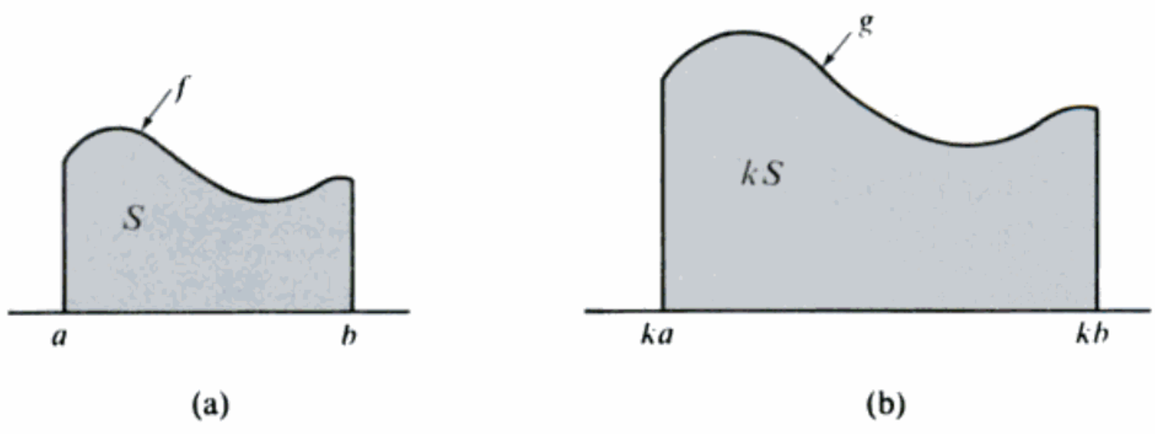


Fig. 2. 4 — A área de kS é k^2 vezes a área de S.

para cada x em $[ka, kb]$. Por conseguinte, a área de kS é dada por

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k^2 \int_a^b f(x)\, dx\ ,$$

onde, na última passagem, se utilizou a propriedade de dilatação para os integrais (teorema 1.19). Uma vez que $\int_a^b f(x)\,dx = a(S)$, isto prova que $a(kS) = k^2 a(S)$. Por outras palavras, a área de kS é k^2 vezes a área de S.

EXEMPLO 5. *Cálculo do integral* $\int_0^a x^{1/2}\,dx$. O integral para a área é uma espada de dois gumes. Embora usualmente se faça uso do integral para calcular áreas, algumas vezes podemos servir-nos dos nossos conhecimentos relativos à área para calcular o integral. Pomos este fato em evidência calculando o valor do integral $\int_0^a x^{1/2}\,dx$, com $a > 0$. (O integral existe uma vez que a função integranda é crescente e limitada em $[0, a]$.).

A fig. 2.5 representa o gráfico da função f dada por $f(x) = x^{1/2}$ no intervalo $[0, a]$. O respectivo conjunto de ordenadas S tem uma área dada por

$$a(S) = \int_0^a x^{1/2}\, dx\ .$$

Vamos calcular esta área dum outro modo. Observamos muito simplesmente que na fig. 2.5 a região S e a parte sombreada T completam um retângulo de base a e altura $a^{1/2}$. Portanto $a(S) + a(T) = a^{3/2}$ e assim temos

$$a(S) = a^{3/2} - a(T)\ .$$

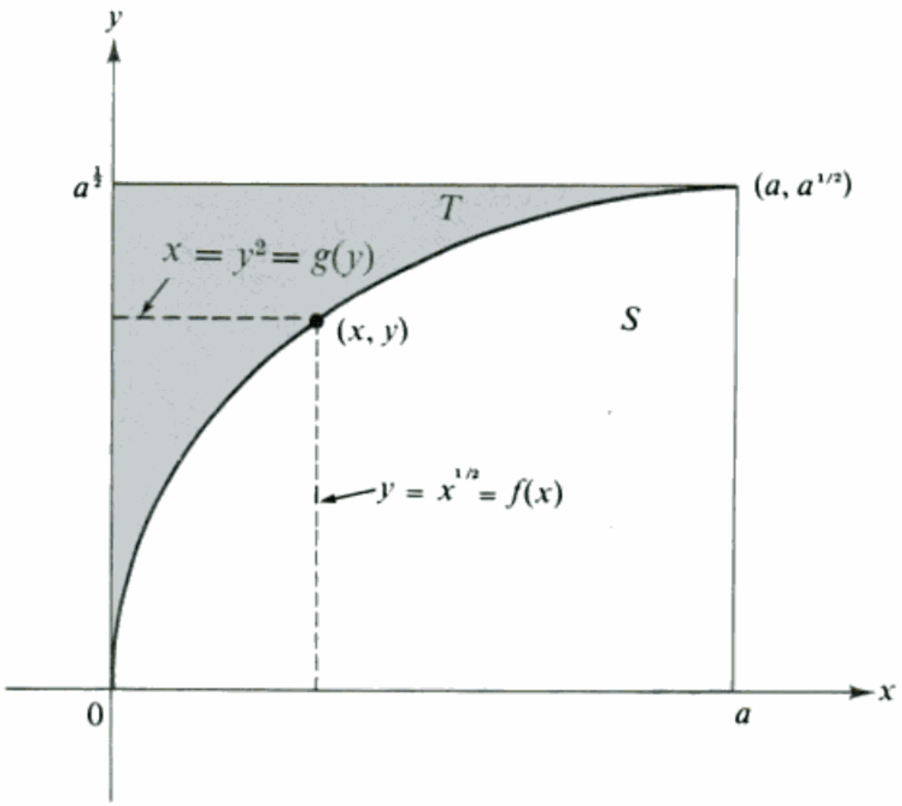


Fig. 2.5 — Cálculo do integral $\int_0^a x^{1/2}\,dx$.

Mas T é o conjunto de ordenadas de uma função g definida no intervalo $[0, a^{1/2}]$ do eixo OY pela relação $g(y) = y^2$. Então temos

$$a(T) = \int_0^{a^{1/2}} g(y)\,dy = \int_0^{a^{1/2}} y^2\,dy = \tfrac{1}{3}a^{3/2}\,,$$

e por conseguinte $a(S) = a^{3/2} - \frac{1}{3}a^{3/2} = \frac{2}{3}a^{3/2}$. Isto prova que

$$\int_0^a x^{1/2}\,dx = \tfrac{2}{3}\,a^{3/2}\,.$$

Mais geralmente, se $a > 0$ e $b > 0$, podemos aplicar a propriedade aditiva do integral para obter a fórmula

$$\int_a^b x^{1/2}\,dx = \tfrac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})\,.$$

O argumento anterior pode também ser aplicado para calcular o integral $\int_a^b x^{1/n}\,dx$, se n fôr um inteiro positivo. Estabelecemos o resultado em forma de teorema.

TEOREMA 2.2. *Para $a > 0$, $b > 0$ e n um inteiro positivo, tem-se*

$$\int_a^b x^{1/n}\,dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + 1/n}\,. \tag{2.2}$$

A demonstração é tão semelhante à do Exemplo 5 que a deixamos ao cuidado do leitor.

2.4 Exercícios

Nos exercícios 1 a 14, calcular a área da região S compreendida entre os gráficos das funções f e g definidas no intervalo $[a, b]$ especificado em cada caso. Traçar os gráficos e sombrear a parte que define S.

1. $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 0$, $a = -2$, $b = 2$.
2. $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 8 - 2x^2$, $a = -2$, $b = 2$.
3. $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x^3 + 1$, $a = -1$, $b = 1$.
4. $f(x) = x - x^2$, $g(x) = -x$, $a = 0$, $b = 2$.
5. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 0$, $b = 1$.
6. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 1$, $b = 2$.
7. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 0$, $b = 2$.
8. $f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$.
9. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $a = -1$, $b = (1 + \sqrt{5})/2$.
10. $f(x) = x(x^2 - 1)$, $g(x) = x$, $a = -1$, $b = \sqrt{2}$.
11. $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 1$, $a = -1$, $b = 1$.
12. $f(x) = |x - 1|$, $g(x) = x^2 - 2x$, $a = 0$, $b = 2$.
13. $f(x) = 2\,|x|$, $g(x) = 1 - 3x^3$, $a = -\sqrt{3}/3$, $b = \frac{1}{3}$.
14. $f(x) = |x| + |x - 1|$, $g(x) = 0$, $a = -1$, $b = 2$.
15. Os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = cx^3$, com $c > 0$, intersetam-se nos pontos $(0, 0)$ e $(1/c,$

$1/c^2$). Determinar c de maneira que a região limitada por esses gráficos e sobre o intervalo $[0, 1/c]$ tenha área 2/3.

16. Seja $f(x) = x - x^2$, $g(x) = ax$. Determinar a de maneira que região acima do gráfico de g e inferior de f tenha área 9/2 .
17. Definiu-se π como a área dum círculo de raio unidade. No Exemplo 3 da Seção 2.3 provou-se que $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Fazendo uso das propriedades do integral calcular, em termos de π:

   (a) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$; (b) $\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx$; (c) $\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\,dx$.
18. Calcular as áreas dos dodecágonos regulares (polígonos de doze lados) inscritos e circunscritos numa circunferência de raio unidade e provar as desigualdades $3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$.
19. Seja C a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 1$. Seja E o conjunto dos pontos obtidos por multiplicação da abcissa x de cada ponto (x, y) de C por um fator constante $a > 0$ e a ordenada y por um fator constante $b > 0$. O conjunto E chama-se uma elipse. (Quando $a = b$, a elipse é outro círculo.)

   a) Mostrar que cada ponto (x, y) de E satisfaz à equação cartesiana $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

   b) Aplicando propriedades do integral, demonstrar que a região limitada pela elipse é mensurável e que a sua área é πab.
20. O Exercício 19 é uma generalização do Exemplo 3 da Seção 2.3. Estabelecer e demonstrar uma generalização correspondente ao exemplo 4 da Seção 2.3
21. Usar um argumento análogo ao do Exemplo 5 da Seção 2.3 para demonstrar o teorema 2.2.

2.5 As funções trigonométricas

Antes de prosseguirmos nas aplicações da teoria da integração, vamos fazer uma breve disgressão de comentário às funções trigonométricas. Supomos que o leitor tem algum conhecimento das propriedades das seis funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, e das suas funções inversas arco seno, arco cosseno, arco tangente, etc.

Estas funções são estudadas nos cursos de trigonometria elementar, em ligação com problemas variados de resolução de triângulos. As funções trigonométricas são importantes no cálculo não só pelas suas relações com os lados e ângulos dum triângulo, mas principalmente pelas propriedades que possuem como *funções*. As seis funções trigonométricas têm em comum uma propriedade importante conhecida por periocidade.

Uma função f diz-se *periódica* de período $p \neq 0$, se o seu domínio contém $x + p$ sempre que contenha x e se $f(x + p) = f(x)$ para todo o x do domínio de f. As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π, com π a área do disco circular de raio unidade. Muitos problemas de física e engenharia tratam com fenómenos periódicos (tais como vibrações, movimento planetário e movimento ondulatório) e as funções seno e cosseno formam a base para a análise matemática de tais problemas.

As funções seno e cosseno podem ser definidas de maneiras diferentes. Por exemplo, há definições geométricas que relacionam as funções seno e cosseno com os ângulos e há definições analíticas que apresentam estas funções sem qualquer referência à geometria. Umas e outras são equivalentes, no sentido de que conduzem às mesmas funções.

Geralmente, quando trabalhamos com o seno e o cosseno não nos importam tanto as respetivas definições como as propriedades que podem ser deduzidas a partir delas. Algumas destas propriedades, importantes no Cálculo, são enunciadas a seguir. Como habitualmente, representamos os valores das funções seno e cosseno em x por sen x, cos x respetivamente.

PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DO SENO E DO COSSENO

1. *Domínio de definição. As funções seno e cosseno são definidas em toda a reta real.*

2. *Valores particulares. Tem-se* $\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1, \cos \pi = -1.$

3. *Cosseno de uma diferença. Para todo o par x e y, tem-se*

$$\cos (y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x. \tag{2.3}$$

4. *Desigualdades fundamentais. Para* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *tem-se*

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}. \tag{2.4}$$

Destas quatro propriedades podemos deduzir todas as propriedades do seno e do cosseno que são importantes no Cálculo. Isto sugere-nos a introdução das funções trigonométricas axiomaticamente, isto é, podemos tomar as propriedades 1 a 4 como axiomas relativos ao seno e cosseno e deduzir todas as restantes propriedades como teoremas. Para estarmos seguros que não estamos a discutir uma teoria vazia, é necessário mostrar que existem funções satisfazendo às propriedades atrás referidas. Poremos, contudo, de parte a análise desta questão para já. Em primeiro lugar supomos que existem funções que verificam aquelas propriedades fundamentais e vamos, pois, demonstrar como podem deduzir-se outras propriedades. Depois, na Secção 2.7, apresentaremos um processo geométrico de definição do seno e cosseno com as propriedades desejadas. No capítulo 11 esboçaremos igualmente um método analítico para definir o seno e cosseno.

TEOREMA 2.3. *Se duas funções* sen *e* cos *satisfazem às propriedades 1 a 4, satisfazem também às seguintes:*

(a) Fórmula fundamental (identidade de Pitágoras), $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ *para qualquer* x.

(b) Valores particulares, $\operatorname{sen} 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi = 0.$

(c) O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, isto é, para todo o x tem-se

$$\cos (-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen} (-x) = -\operatorname{sen} x.$$

(d) Para todo o x, tem-se

$$\operatorname{sen} (\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x, \qquad \cos (\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x.$$

(e) Periodicidade. Para todo o x, tem-se sen $(x + 2\pi) =$ sen x, cos $(x + 2\pi) =$ cos x.
(f) Fórmulas de adição. Para x e y quaisquer tem-se

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,,$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y\,.$$

(g) Fórmulas de diferença. Para todos os valores de a e b tem-se

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}\,,$$
$$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}\,.$$

(h) Monotonia. No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, *o seno é estritamente crescente e o cosseno é estritamente decrescente.*

Demonstração: A parte (a) deduz-se imediatamente se fizermos $x = y$ em (2.3) e usarmos $\cos 0 = 1$. A propriedade (b) resulta de (a) fazendo $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ e usando a relação $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$. Que o cosseno é par resulta também de (2.3), fazendo $y = 0$. Deduzimos a igualdade

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x\,, \tag{2.5}$$

fazendo $y = \frac{1}{2}\pi$ em (2.3). Utilizando a igualdade anterior e (2.3) verificamos que o seno é ímpar, uma vez que

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] =$$
$$= \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x\,.$$

o que prova (c). Para provar (d), usamos mais uma vez (2.5), substituindo primeiramente x por $\frac{\pi}{2} + x$ e depois x por $-x$. O uso repetido de (d) dá-nos então as relações de periodicidade (e).

Para provar a fórmula de adição para o cosseno, basta substituir x por $-x$ em (2.3) e ter em conta a paridade ou não paridade da função. Utilizando (d) e a fórmula de adição para o cosseno obtemos

$$\operatorname{sen}(x+y) = -\cos\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y\,.$$

o que prova (f). Para deduzir as fórmulas de diferenças (g), substituímos primeiro y por $-y$ na fórmula de adição para sen $(x + y)$ para obtermos

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y\,.$$

Subtraindo esta da fórmula para sen $(x + y)$ e fazendo o mesmo para a função cosseno, obtemos

$$\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x\,,$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x\,.$$

Fazendo $x = (a + b)/2$, $y = (a-b)/2$ deduzimos das igualdades anteriores as fórmulas (g) de diferença.

As propriedades de (a) a (g) foram deduzidas unicamente a partir das propriedades 1, 2, 3. A propriedade 4 serve para provar (h). As desigualdades (2.4) mostram que cos x e sen x são positivos se $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Se $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$ os números $(a + b)/2$ e $(a - b)/2$ estão no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e as fórmulas de diferenças (g) mostram que sen $a >$ sen b e cos $a <$ cos b. Isto completa a demonstração do teorema 2.3.

Outras propiedades das funções seno e cosseno são analisadas no conjunto de exercícios que serão apresentados a seguir (pg. 126). Mencionamos, em particular, duas fórmulas que se usam frequentemente no cálculo. São as chamadas fórmulas do *ângulo duplo* ou *fórmulas de duplicação,* a saber

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x\,, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\,.$$

Elas são evidentemente, simples casos particulares das fórmulas de adição já obtidas, fazendo-se $y = x$. A segunda fórmula para cos $2x$ resulta da primeira pelo uso da fórmula fundamental. Esta (a identidade de Pitágoras) mostra também que $|\cos x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para x qualquer.

2.6 Fórmulas de integração para o seno e o cosseno

As propriedades de monotonia na alínea (h) do teorema 2.3, juntamente com a propriedade (d) (pg. 115) e as propriedades de periodicidade, mostram que as funções seno e cosseno são "monótonas por partes". Portanto, pelo uso repetido do teorema 1.12, vemos que as funções seno e cosseno são integráveis em qualquer intervalo finito. Passamos, em seguida, ao cálculo desses integrais, por aplicação do teorema 1.14. Esse cálculo utiliza duas desigualdades que nós enunciamos como um teorema:

TEOREMA 2.4. *Se* $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$ *e* $n \geq 1$, *tem-se*

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ka}{n}. \tag{2.6}$$

Demonstração: As desigualdades (2.6) serão deduzidas da identidade

$$2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x, \tag{2.7}$$

a qual é válida para $n \geq 1$ e todo o x real. Para provar (2.7), fazemos uso das fórmulas de diferenças (g) do teorema 2.3 para escrevemos

$$2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\cos kx = \operatorname{sen}(k+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}(k-\tfrac{1}{2})x.$$

Tomando $k = 1, 2, ..., n$ e somando estas equações, encontramos que na soma do segundo membro há termos que se reduzem, obtendo-se (2.7).

Se $\frac{1}{2}x$ não é um múltiplo inteiro de π, podemos dividir ambos os membros de (2.7) por $2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ obtendo-se

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}.$$

Substituindo n por $n - 1$ e somando 1 a ambos os membros obtemos também

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}.$$

Ambas as fórmulas são válidas se $x \neq 2m\pi$, onde m é um inteiro. Tomando $x = a/n$, com $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$ encontramos que o par de desigualdades em (2.6) é equivalente ao par

$$\frac{a}{n}\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\,\frac{\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}.$$

Este par, por sua vez, é equivalente ao par

$$\operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{a}{n}-\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)<\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2n}\right)}{\left(\dfrac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen} a<\operatorname{sen}\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\frac{a}{n}+\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right). \tag{2.8}$$

Portanto, demonstrar (2.6) é equivalente a demonstrar (2.8). Devemos provar que se tem

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta-\operatorname{sen}\theta<\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}2n\theta<\operatorname{sen}(2n-1)\theta+\operatorname{sen}\theta \tag{2.9}$$

para $0<2n\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Quando $\theta=a/(2n)$ estas desigualdades reduzem-se a (2.8).

Para demonstrar a desigualdade da esquerda em (2.9), servimo-nos da fórmula de adição para o seno, escrevendo

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta=\operatorname{sen}2n\theta\cos\theta+\cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta<\operatorname{sen}2n\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}+\operatorname{sen}\theta, \tag{2.10}$$

tendo ainda utilizado as desigualdades

$$\cos\theta<\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},\qquad 0<\cos 2n\theta\leq 1,\qquad \operatorname{sen}\theta>0,$$

as quais são todas válidas uma vez que $0<2n\theta\leq\frac{\pi}{2}$. A desigualdade (2.10) é equivalente à desigualdade da esquerda em (2.9).

Para demonstrar a desigualdade da direita em (2.9), utilizamos novamente a fórmula de adição para o seno e escrevemos

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta=\operatorname{sen}2n\theta\cos\theta-\cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta.$$

Adicionando $\operatorname{sen}\theta$ a ambos os membros, obtemos

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta+\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}2n\theta\left(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\,\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen}2n\theta}\right). \tag{2.11}$$

Mas uma vez que se tem

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen}2n\theta}=\frac{2\operatorname{sen}^2 n\theta}{2\operatorname{sen}n\theta\cos n\theta}=\frac{\operatorname{sen}n\theta}{\cos n\theta},$$

o segundo membro de (2.11) é igual a

$$\operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}\right) = \operatorname{sen} 2n\theta\,\frac{\cos\theta\cos n\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} =$$

$$= \operatorname{sen} 2n\theta\,\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}.$$

Portanto, para completar a demonstração de (2.9), necessitamos mostrar somente que

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}. \tag{2.12}$$

Mas nós temos

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\theta\cos\theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta\operatorname{sen}\theta <$$

$$< \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\,\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

onde, mais uma vez, usámos a desigualdade fundamental $\cos\theta < \theta/(\operatorname{sen}\theta)$. Esta última relação implica (2.12) e assim a demonstração do teorema 2.4 fica completa.

TEOREMA 2.5. *Se duas funções* sen *e* cos *verificam as propriedades fundamentais desde 1 a 4, então para todo o real* a *tem-se*

$$\int_0^a \cos x\,dx = \operatorname{sen} a, \tag{2.13}$$

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = 1 - \cos a. \tag{2.14}$$

Demonstração. Vamos em primeiro lugar demonstrar (2.13) e, em seguida, utilizá-la para demonstrar (2.14). Suponhamos que $0 < a \le \frac{\pi}{2}$. Uma vez que o cosseno é decrescente em $[0, a]$, podemos aplicar o teorema 1.4 em conjunção com as desigualdades do teorema 2.4 para se obter (2.13). A fórmula também é válida (trivialmente) para $a = 0$, já que ambos os membros são nulos. Usando as propriedades gerais do integral, podemos agora estender a sua validade para todo o real a.

Por exemplo, se $-\frac{1}{2}\pi \le a \le 0$, então $0 \le -a \le \frac{1}{2}\pi$, e a propriedade reflexiva dá-nos

$$\int_0^a \cos x\,dx = -\int_0^{-a} \cos(-x)\,dx = -\int_0^{-a} \cos x\,dx = -\operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} a.$$

Então (2.13) é válida no intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Suponhamos agora que $\frac{1}{2}\pi \le a \le \frac{3}{2}\pi$. Então $\frac{1}{2}\pi \le a - \pi \le \frac{1}{2}\pi$, e assim temos

$$\int_0^a \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\, dx = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos (x+\pi)\, dx =$$
$$= 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x\, dx = 1 - \operatorname{sen}(a-\pi) + \operatorname{sen}(-\tfrac{1}{2}\pi) = \operatorname{sen} a\,.$$

Deste modo se conclui que (2.13) é válida para todo o a pertencente ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. Mas este intervalo tem medida 2π, pelo que a fórmula (2.13) é válida para todo o a uma vez que ambos os membros são periódicos em a com período 2π.

Usamos agora (2.13) para deduzir (2.14). Em primeiro lugar provamos que (2.14) é válida quando $a = \pi/2$. Aplicando sucessivamente, a propriedade de translação, a igualdade $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ e a propriedade reflexiva, encontramos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x)\, dx\,.$$

Considerando que $\cos(-x) = \cos x$ e a igualdade (2.13), obtém-se

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1\,.$$

Por conseguinte, para qualquer real a podemos escrever

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^a \operatorname{sen} x\, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx =$$
$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x\, dx = 1 + \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos a\,.$$

o que mostra que (2.13) implica (2.14).

EXEMPLO 1. Considerando (2.13) e (2.14) em conjunção com a propriedade aditiva

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^b f(x)\, dx - \int_0^a f(x)\, dx,$$

obtemos fórmulas de integração mais gerais

$$\int_a^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

e

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a)\,.$$

Se utilizarmos aqui o símbolo especial $f(x)\Big|_a^b$ para representar $f(b) - f(a)$, podemos escrever

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b \qquad \text{e} \qquad \int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_a^b .$$

EXEMPLO 2. Com os resultados do exemplo anterior e a propriedade

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x/c) \, dx ,$$

obtemos as seguintes fórmulas, válidas para $c \neq 0$:

$$\int_a^b \cos cx \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \cos x \, dx = \frac{1}{c} (\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca) ,$$

e

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx \, dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{c} (\cos cb - \cos ca) .$$

EXEMPLO 3. A identidade $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ implica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$ e deste modo, a partir do Exemplo 2, obtemos

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^a (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2a .$$

Uma vez que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos também

$$\int_0^a \cos^2 x \, dx = \int_0^a (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = a - \int_0^a \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2a .$$

2.7 Descrição geométrica das funções seno e cosseno

Nesta Seção apresentamos um método geométrico para definir as funções seno e cosseno e dar uma interpretação geométrica das propriedades fundamentais enunciadas na Seção 2.5.

Consideremos uma circunferência de raio r e centro na origem. Designemos o ponto $(r, 0)$ por A e por P qualquer outro ponto da circunferência. Os dois raios $0A$ e $0P$ determinam uma figura geométrica chamada ângulo, a qual se designa pelo símbolo $\angle$AOP, e se representa na fig. 2.6. É conveniente atribuir a este ângulo um número real não negativo x, o qual possa ser usado como exprimindo a medida da sua grandeza. A maneira mais corrente de o fazer é tomar uma circunferência de raio unidade e chamar x o comprimento do arco AP, descrito no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros dum relógio e dizer que a medida de $\angle AOP$ é x radianos. Dum ponto de vista lógico, isto não é satisfatório para já, uma vez que não se discutiu o conceito de comprimento dum arco. Este conceito será analisado no capítulo 14. Uma vez que o con-

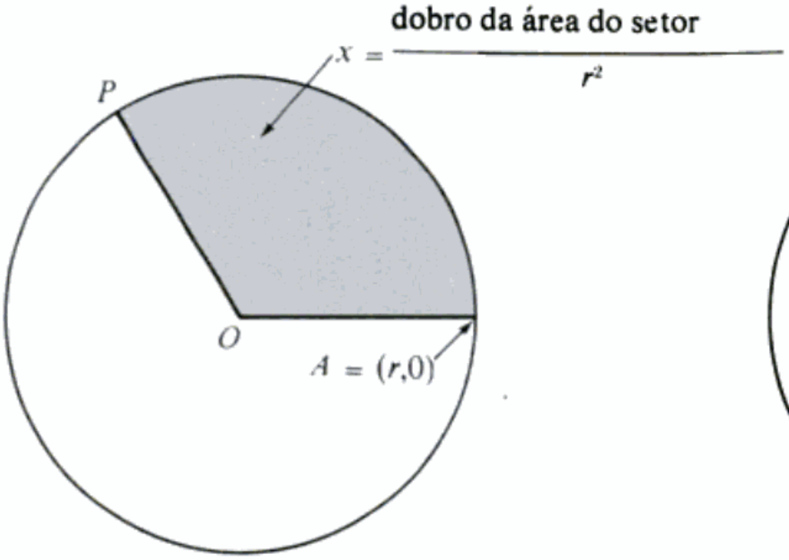


Fig. 2.6 — Um ângulo $\angle AOP$ medindo x radianos.

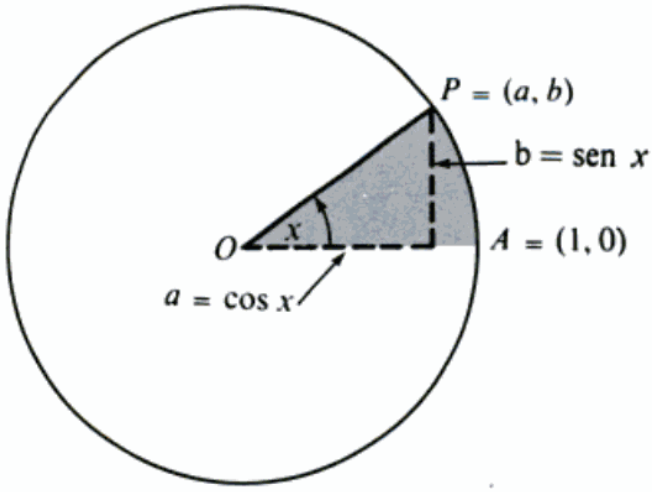


Fig. 2.7 – Interpretação geométrica de sen x e cos x.

ceito de área já foi discutido, preferimos usar a área do setor circular AOP, de preferência ao comprimento de arco AP, como uma medida da grandeza de $\angle AOP$. Subentende-se que o sector AOP é a menor das duas partes do círculo, quando P está situado acima do eixo real e é a maior quando P está situado abaixo do mesmo eixo.

Mais adiante, quando o conceito de comprimento de arco tiver sido discutido, veremos que o comprimento do arco AP é exactamente o dobro da área de sector AOP. Portanto, para se obter a mesma escala de medida para ângulos por ambos os métodos, devemos usar o *dobro* da área do setor AOP como medida do ângulo $\angle AOP$. Contudo, para se obter uma medida de ângulos independente da unidade de comprimento do sistema de coordenadas utilizado, definimos a medida de $\angle AOP$ como sendo o *dobro da área do setor AOP dividida pelo quadrado do raio*. Este cociente não varia se dilatarmos ou contraírmos o círculo, e portanto não há perda de generalidade em restringirmos as nossas considerações a uma circunferência de raio unidade. A unidade de medida assim obtida é o *radiano*. Então diremos que a medida de um ângulo $\angle AOP$ é x radianos se $x/2$ é a área do sector AOP determinado num círculo de raio unidade.

Já introduzimos o símbolo π para designarmos a área dum círculo unitario. Quando $P = (-1,0)$, o setor AOP é um semicírculo de área $\frac{\pi}{2}$ e subtende um ângulo de π radianos. O círculo completo é um setor de 2π radianos. Se P, inicialmente em $(1,0)$, se move ao longo da circunferência no sentido positivo (contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio), a área do sector AOP cresce de 0 a π, tomando todos os valores do intervalo $[0, \pi]$ uma vez e só uma. Esta propriedade, que é geometricamente aceitável, pode demonstrar-se exprimindo a área como um integral, mas não faremos essa demonstração.

O passo seguinte é definir o seno e o cosseno de um ângulo, sendo de momento preferível falar de seno e cosseno de um *número* em vez de um *ângulo*, de modo que o seno e o cosseno sejam *funções* definidas sobre a reta real. Procedemos do modo seguinte: escolhemos um número x tal que $0 < x < 2\pi$ e seja P o ponto da circunferência unitária, tal que a área do setor

AOP seja igual a $x/2$. Sejam (a, b) as coordenadas de P. Na fig. 2.7 considera-se um exemplo. Os números a e b estão completamente determinados por x. Definem-se o seno e o cosseno de x por:

$$\cos x = a\,, \qquad \operatorname{sen} x = b\,.$$

Por outras palavras, $\cos x$ é a abcissa de P, $\operatorname{sen} x$ é a sua ordenada.

Por exemplo, quando $x = \pi$ temos $P = (-1,0)$ de modo que $\cos \pi = -1$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$. Analogamente, quando $x = \dfrac{\pi}{2}$ temos $P = (0,1)$ e portanto $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$. Este método descreve o seno e o cosseno como funções definidas no intervalo aberto $(0,2\pi)$. Generalizam-se as definições a todo o eixo real por meio das egualdades:

$$\operatorname{sen} 0 = 0\,, \qquad \cos 0 = 1\,, \qquad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x\,.$$

As outras quatro funções trigonométricas podem definir-se em função do seno e do cosseno mediante as fórmulas

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}\,, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,.$$

Estas funções são definidas para todo o real x, exceto para certos pontos isolados onde os denominadores podem anular-se. Todas verificam a propriedade da perioodicidade $f(x + 2\pi) = f(x)$. A tangente e a cotangente têm o mais pequenho período π.

Apresentamos a seguir argumentos geométricos que provam como estas definições conduzem às propriedades fundamentais enunciadas na Secção 2.5. As propriedades 1 e 2 já foram tidas em consideração pelo modo como definimos o seno e o cosseno. A fórmula fundamental resulta evidente, perante a fig. 2.7. O segmento OP é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos $|\cos x|$ e $|\operatorname{sen} x|$, e o teorema de Pitágoras, para triângulos retângulos, conduz à identidade $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

Utilizamos, mais de uma vez, o teorema de Pitágoras para dar uma demonstração geométrica de (2.3) para $\cos(y - x)$. Consideremos os dois triângulos retângulos PAQ e PBQ traçados na fig. 2.8. No triângulo PAQ, o comprimento do lado AQ é $|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x|$, o valor absoluto da diferença das ordenadas de Q e P. Do mesmo modo, AP tem um comprimento $|\cos x - \cos y|$. Se d representa o comprimento da hipotenusa PQ teremos, segundo o teorema de Pitágoras,

$$d^2 = (\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x - \cos y)^2\,.$$

Por outro lado, no triângulo retângulo PBQ o cateto BP tem um comprimento $|1 - \cos(y-x)|$ e BQ o comprimento $|\operatorname{sen}(y-x)|$. Portanto, o teorema de Pitágoras dá-nos

$$d^2 = [1 - \cos(y - x)]^2 + \operatorname{sen}^2(y - x)\,.$$

Igualando as duas expressões de d^2 e resolvendo relativamente a $\cos(y - x)$ obtemos a fór-

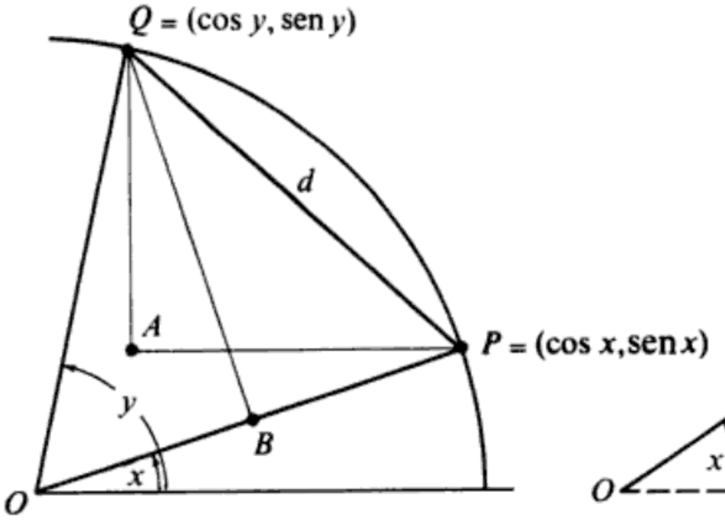


Fig. 2.8 — Demonstração geométrica da fórmula cos $(y - x)$.

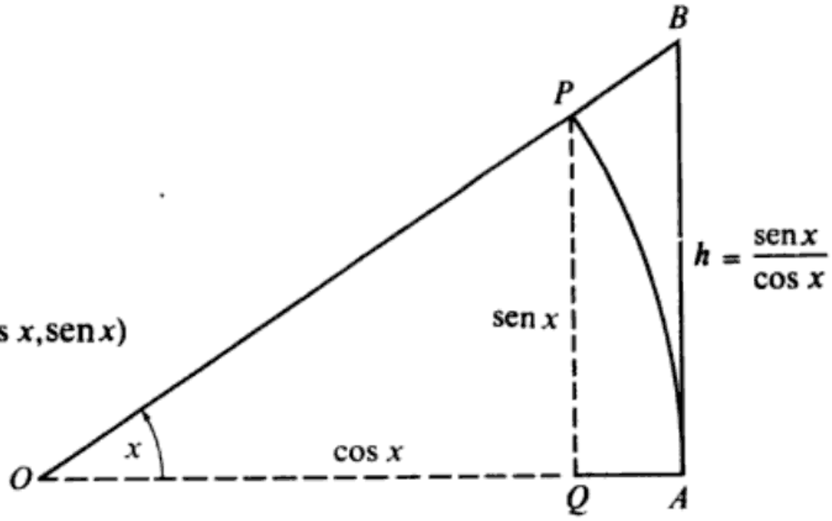


Fig. 2.9 — Demonstração geométrica das desigualdades.

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

mula (2.3) para cos $(y - x)$ como pretendíamos.

Finalmente, as demonstrações geométricas das desigualdades fundamentais da propriedade 4 podem ser feitas sobre a figura 2.9. Muito simplesmente comparamos a área do setor AOP com as dos triângulos OQP e OAB. Devido ao modo como definimos medida do ângulo, a área do sector OAP é $\frac{1}{2}x$. O triâgulo AOB tem base 1 e altura h, por exemplo. Pela semelhança de triângulos, encontramos $h/1 = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$, pelo que a área do triângulo OAB é $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$. Por conseguinte, a comparação das áreas dá-nos as desigualdades.

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Dividindo por $\frac{1}{2}$ sen x e tomando os recíprocos obtemos as desigualdades fundamentais (2.4).

Lembramos ao leitor, uma vez mais, que era propósito desta Seção dar uma interpretação geométrica do seno e do cosseno e das suas propriedades fundamentais. Um tratamento analítico destas funções, sem recorrer a noções de geometria, será apresentada na Seção 11.11.

En muitos manuais de Matemática aparecem tabelas de valores do seno, cosseno, tangente e cotangente. Na fig. 2.10 (pág. 129) estão traçados os gráficos das seis funções trigonométricas correspondentes ao intervalo de amplitude um período. Servindo-nos da perioodicidade, é imediato o traçado do gráfico completo para cada caso.

2.8 Exercícios

Neste conjunto de Exercícios podem utilizar-se as propriedades do seno e do cosseno apresentadas das Seções 2.5 a 2.7.

1. (a) Provar que sen $n\pi = 0$ para todo o inteiro n e que estes são os únicos valores de x para os quais sen $x = 0$.
   (b) Determinar todos os valores reais de x tais que $\cos x = 0$.
2. Determinar todos os valores reais de x tais que (a) sen $x = 1$; (b) $\cos x = 1$; (c) sen $x =$ $= -1$; (d) $\cos x = -1$.
3. Provar que sen $(\pi + x) = -$sen x e $\cos(\pi + x) = -\cos x$ para x qualquer.
4. Provar que sen $3x = 3$ sen $x - 4$ sen$^3 x$ e $\cos 3x = \cos x - 4$ sen$^2 x \cos x$ para todo o real x.
   Provar também que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
5. a) Provar que sen $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.[*Sugestão:* Recorrer ao Exercício 4]
   b) Provar que sen $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.
   c) Provar que sen $\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
6. Provar que tg$(x - y) = ($tg $x -$ tg $y)/(1 +$ tg x tg $y)$ para todo o par de valores de x e y, tais que tg x tg $y \neq -1$. Obter as correspondentes fórmulas para tg$(x + y)$ e cotg$(x + y)$.
7. Determinar os números A e B tais que 3 sen$(x + \dfrac{\pi}{3}) = A$ sen $x + B\cos x$, para qualquer x.
8. Demonstrar que se C e α são números reais dados, existem números reais A e B tais que C sen $(x + \alpha) = A$ sen $x + B \cos x$ para todo o x.
9. Provar que se A e B são números reais dados, existem números C e α, com $C \geq 0$, tais que a fórmula do Exercício 8 é válida.
10. Determinar C e α, com $C > 0$, tais que C sen $(x + \alpha) = -2$ sen $x - 2\cos x$ para todo o x.
11. Provar que se A e B são números reais dados, existem dois números C e α, com $C \geq 0$ tais que $C\cos(x + \alpha) = A$ sen $x + B\cos x$. Determinar C e α se $A = B = 1$.
12. Determinar todos os números reais x tais que sen $x = \cos x$
13. Determinar todos os números reais x tais que sen $x - \cos x = 1$.
14. Provar que as igualdades seguintes são válidas para todos os pares x e y.
    (a) $2\cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$.
    (b) 2 sen x sen $y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.
    (c) 2 sen $x \cos y =$ sen $(x - y) +$ sen $(x + y)$.
15. Se $h \neq 0$, demonstrar que as identidades seguintes são válidas para todo o x:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Estas fórmulas serão usadas no cálculo diferencial.

16. Dizer se são ou não corretas as afirmações seguintes:
    (a) Para todo o $x \neq 0$ tem-se $\operatorname{sen} 2x \neq 2 \operatorname{sen} x$.
    (b) Para todo o x, existe um y tal que $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$.
    (c) Existe um x tal que $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ para todo y.
    (d) Existe um $y \neq 0$ tal que $\int_0^y \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} y$.

17. Calcular o integral $\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx$ para cada um dos seguintes valores de a e b. Em cada caso interpretar o resultado geometricamente em termos de áreas.
    (a) $a = 0, b = \pi/6$.
    (b) $a = 0, b = \pi/4$.
    (c) $a = 0, b = \pi/3$.
    (d) $a = 0, b = \pi/2$.
    (e) $a = 0, b = \pi$.
    (f) $a = 0, b = 2\pi$.
    (g) $a = -1, b = 1$.
    (h) $a = -\pi/6, b = \pi/4$.

Calcular os integrais dos Exercícios 18 a 27.

18. $\int_0^\pi (x + \operatorname{sen} x)\, dx$.

19. $\int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos x)\, dx$.

20. $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$.

21. $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx$.

22. $\int_0^\pi (\frac{1}{2} + \cos t)\, dt$.

23. $\int_0^\pi |\frac{1}{2} + \cos t|\, dt$.

24. $\int_{-\pi}^x |\frac{1}{2} + \cos t|\, dt$, si $0 \leq x \leq \pi$.

25. $\int_x^{x^2} (t^2 + \operatorname{sen} t)\, dt$.

26. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\, dx$.

27. $\int_0^{\pi/3} \cos \frac{x}{2}\, dx$.

28. Demonstrar as seguintes fórmulas de integração, válidas para $b \neq 0$.

$$\int_0^x \cos(a + bt)\, dt = \frac{1}{b}[\operatorname{sen}(a + bx) - \operatorname{sen} a],$$

$$\int_0^x \operatorname{sen}(a + bt)\, dt = -\frac{1}{b}[\cos(a + bx) - \cos a].$$

29. (a) Fazer uso da identidade $\operatorname{sen} 3t = 3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t$ para deduzir a fórmula de integração

$$\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\, dt = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x)\cos x.$$

    (b) Demonstrar a identidade $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ e usá-la para demonstrar que

$$\int_0^x \cos^3 t\, dt = \tfrac{1}{3}(2 + \cos^2 x)\operatorname{sen} x.$$

30. Se uma função f é periódica com período $p > 0$ e integrável em $[0, p]$, provar que $\int_0^p f(x)\, dx = \int_a^{a+p} f(x)\, dx$ para todo o a.

31. (a) Provar que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = 0$ para todo o inteiro $n \neq 0$.

(b) Usando a alínea (a) e as fórmulas de adição para o seno e o cosseno, estabelecer as seguintes fórmulas, válidas para os inteiros m e n, tais que $m^2 \neq n^2$.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi , \qquad \text{si} \quad n \neq 0 .$$

Estas são as fórmulas de ortogonalidade para o seno e para o cosseno.

32. A partir da identidade

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos kx = \operatorname{sen} (2k + 1) \frac{x}{2} - \operatorname{sen} (2k - 1) \frac{x}{2}$$

e da propriedade A (pg. 48) das somas finitas, provar que se $x \neq 2m\pi$ (m inteiro) se tem

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n + 1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x} .$$

33. Se $x \neq 2m\pi$ (m inteiro), provar que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \operatorname{sen} \frac{1}{2}(n + 1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x} .$$

34. Utilizando a fig. 2.7, provar, por comparação da área do triângulo OAP com a do setor circular OAP, que $\operatorname{sen} x < x$ se $0 < x < \pi/2$. Usar então o fato de que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para provar que $|\operatorname{sen} x| < |x|$ se $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$.

2.9 Coordenadas polares

Até aqui localizámos os pontos no plano por intermédio das coordenadas retangulares. Podemos também localizá-los recorrendo às coordenadas polares, como se indica a seguir. Seja P um ponto distinto da origem. Suponhamos que o segmento de reta definida por P e pela origem tem um comprimento $r > 0$ e forma um ângulo θ com o semi-eixo positivo $0X$, como se representa na fig. 2.11. Os dois números r e θ chamam-se *coordenadas polares* de P. Estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas igualdades

$$x = r \cos \theta , \qquad y = r \operatorname{sen} \theta . \tag{2.15}$$

O número positivo r chama-se *distância radial* ou *raio vector* de P, e θ um *ângulo polar* ou *argumento*. Dizemos *um* ângulo polar, em vez de *o* ângulo polar, porque se θ satisfaz (2.15) o mesmo se verifica para $\theta + 2n\pi$ com n inteiro qualquer. Chamam-se coordenadas polares de P todo o par de números reais (r, θ) que verificam (2.15) com $r > 0$, e por isso, um dado

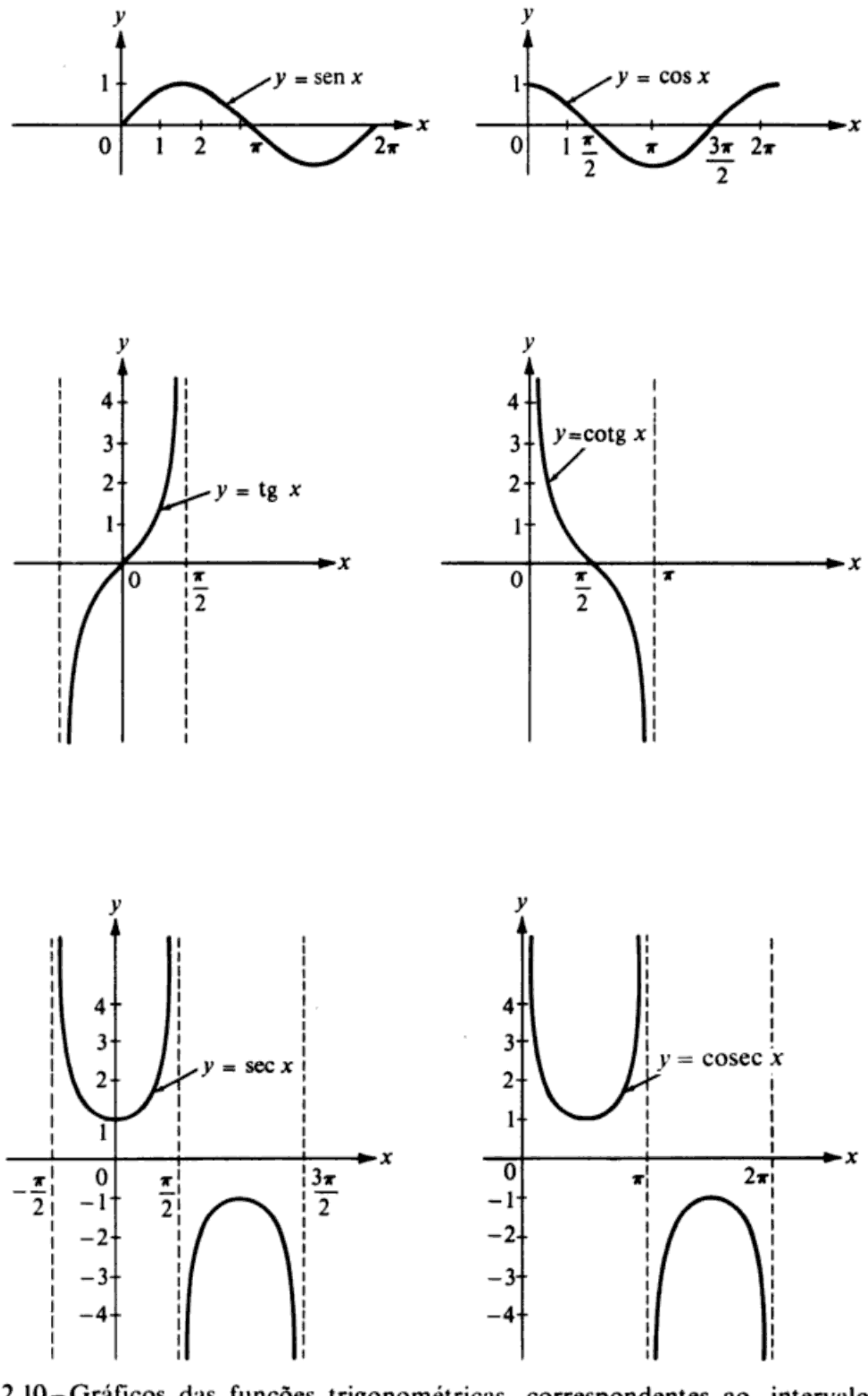


Fig. 2.10 – Gráficos das funções trigonométricas, correspondentes ao intervalo dum período.

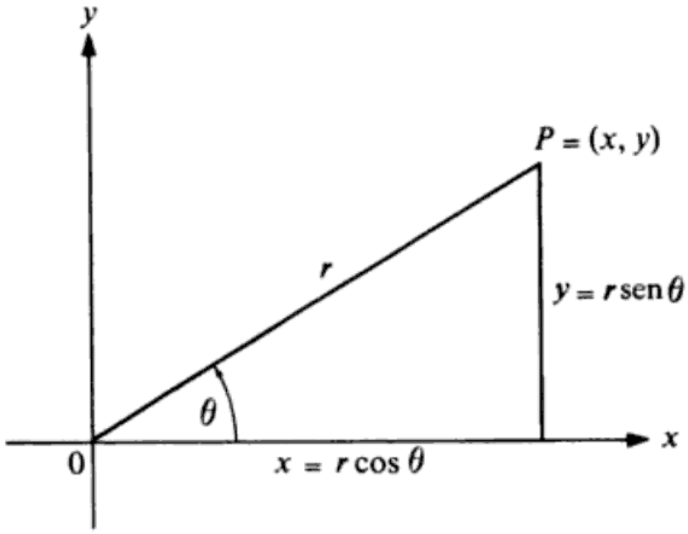


Fig. 2.11 — Coordenadas polares

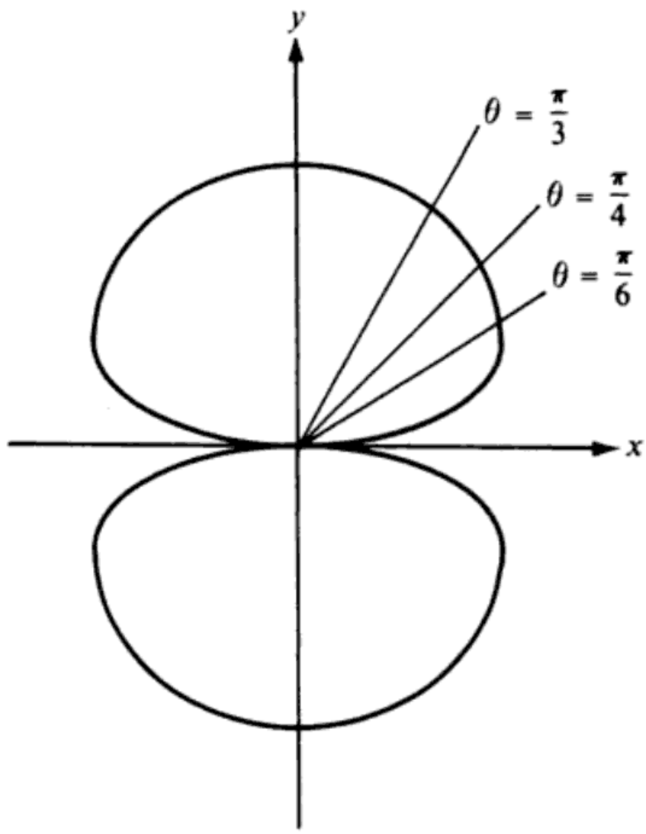


Fig. 2.12 — Curva em forma de oito cuja equação em coordenadas polares é $r = \sqrt{|\operatorname{sen} \theta|}$.

ponto tem mais do que um par de coordenadas polares. A distância radial r está univocamente determinada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, mas o ângulo polar θ é determinado a menos de multiplos inteiros de 2π.

Quando P está na origem, as equações (2.15) são verificadas com $r = 0$ e θ qualquer. Por este motivo atribuímos à origem a distância radial $r = 0$ e convencionamos que *qualquer* real θ pode ser usado como o respectivo ângulo polar.

Seja f uma função não negativa definida no intervalo $[a, b]$. O conjunto de todos os pontos com coordenadas polares (r, θ), satisfazendo a $r = f(\theta)$, chama-se o gráfico de f em coordenadas polares. A equação $r = f(\theta)$ chama-se a equação polar dessa curva. Para algumas curvas as equações polares podem ser mais simples e de uso mais conveniente que as equações cartesianas. Por exemplo, a circunferência com a equação $x^2 + y^2 = 4$ tem a equação polar muito mais simples $r = 2$. As equações (2.15) mostram como se pode passar de coordenadas cartesianas a polares.

EXEMPLO. A fig. 2.12 representa uma curva com a forma de um oito e cuja equação cartesiana é $(x^2 + y^2)^3 = y^2$. Por intermédio de (2.15) encontramos $x^2 + y^2 = r^2$, e assim as coordenadas polares dos pontos desta curva verificam a equação $r^6 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, ou $r^2 = |\operatorname{sen} \theta|$, $r = \sqrt{|\operatorname{sen} \theta|}$. Não é difícil traçar esta curva a partir da equação polar. Por exemplo, no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$, sen θ aumenta de 0 a 1 e portanto r também cresce de 0 a 1. Marcando alguns pontos que sejam fáceis de determinar, por exemplo, os correspondentes a $\theta =$

$=\pi/6, \pi/4, \dfrac{\pi}{3}$, quase se pode desenhar a parte da curva do primeiro quadrante. A parte restante da curva obtém-se tendo em conta a simetria da equação cartesiana, ou a simetria e periodicidade de $|\text{sen}\ \theta|$. Seria bastante mais trabalhoso traçar a curva a partir unicamente da equação cartesiana.

2.10 O integral para a área em coordenadas polares

Seja f uma função não negativa definida num intervalo $[a, b]$, onde $0 \leq b - a \leq 2\pi$. O conjunto de todos os pontos com coordenadas polares (r, θ), verificando as desigualdades

$$0 \leq r \leq f(\theta)\,, \qquad a \leq \theta \leq b\,,$$

chama-se *conjunto radial* de f sobre $[a, b]$. A região sombreada indicada na fig. 2.13 é um exemplo. Se f é constante em $[a, b]$ o seu conjunto radial é um setor circular correspon-

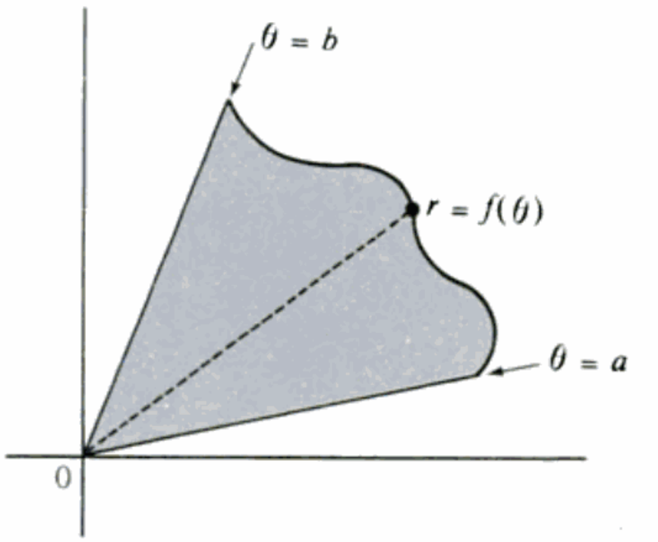


Fig. 2.13 — O conjunto radial de f relativo a um intervalo $[a, b]$.

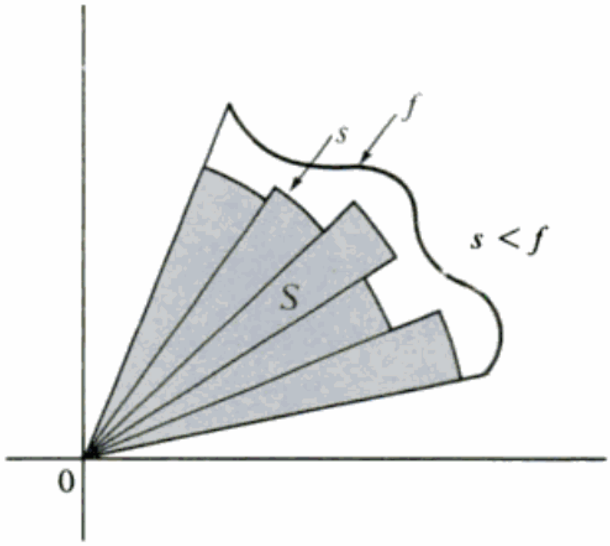


Fig. 2.14—O conjunto radial de uma função em escada S é uma união de setores circulares. A sua área $1/2 \int_a^b s^2(\theta)d\theta$.

dendo a um ângulo de $b-a$ radianos. A fig. 2.14 mostra o conjunto radial S de uma função em escada s. Em cada um dos n subintervalos abertos (θ_{k-1}, θ_k) de $[a, b]$ no qual s é constante, $s(\theta) = s_k$, o gráfico de s, em coordenadas polares, é um arco de circunferência de raio s_k e o respetivo conjunto radial é um setor circular correspondendo a um ângulo de $\theta_k - \theta_{k-1}$ radianos. Atendendo ao modo como se definiu a medida angular, a área deste setor é $\dfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_{k-1})\, s_k^2$. Uma vez que $b-a \leqq 2\pi$ nenhuns destes setores se sobrepoem e pela aditividade do integral, a área do conjunto radial de s correspondente ao intervalo $[a, b]$ é dada por

$$a(S) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} s_k^2 \cdot (\theta_k - \theta_{k-1}) = \tfrac{1}{2} \int_a^b s^2(\theta)\, d\theta \,,$$

onde $s^2(\theta)$ representa o quadrado de $s(\theta)$. Deste modo, para funções em escada, a área do conjunto radial foi expressa por um integral. Vamos demonstrar a seguir que esta fórmula integral é susceptível de maior generalidade.

TEOREMA 2.6 – *Seja R o conjunto radial de uma função não negativa f num intervalo $[a, b]$, onde $0 \leq b - a \leq 2\pi$, e suponha-se que R é mensurável. Se f^2 é integrável em $[a, b]$, a área de R é dada pelo integral*

$$a(R) = \tfrac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta)\, d\theta \,.$$

Demonstração. Escolhamos duas funções em escada s e t verificando.

$$0 \leq s(\theta) \leq f(\theta) \leq t(\theta)$$

para todo o θ em $[a, b]$ e sejam S e T os respetivos conjuntos radiais. Posto que $s \leq f \leq t$ em $[a, b]$, os conjuntos radiais satisfazem às relações de inclusão $S \subseteq R \subseteq T$. Daqui resulta, pela propriedade de monotonia da área, que $a(S) \leq a(R) \leq a(T)$. Mas S e T são conjuntos radiais de funções em escada, pelo que $a(S) = \dfrac{1}{2} \int_a^b s^2(\theta)\, d\theta$ e $a(T) = \dfrac{1}{2} \int_a^b t^2(\theta)\, d\theta$. Por conseguinte temos as desigualdades

$$\int_a^b s^2(\theta)\, d\theta \leq 2a(R) \leq \int_a^b t^2(\theta)\, d\theta \,,$$

para todas as funções em escada s e t satisfazendo a $s \leq f \leq t$ em $[a, b]$. Mas s^2 e t^2 são funções em escada arbitrárias que verificam $s^2 \leq f^2 \leq t^2$ em $[a, b]$ e por isso, uma vez que f^2 é integrável, devemos ter $2a(R) = \int_a^b f^2(\theta)\, d\theta$, o que demonstra o teorema.

Nota: Pode provar-se que a mensurabilidade de R é uma consequência da hipótese que f^2 seja integrável, mas não apresentaremos a demonstração.

EXEMPLO. Para calcular a área do conjunto radial R interior à curva en forma de oito, apresentada na fig. 2.12, calculamos a área da porção situada no primeiro quadrante e multiplicamos por quatro. Para esta curva tem-se $f^2(\theta) = |\text{sen}\ \theta|$ e uma vez que sen $\theta \geqq 0$ para $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$, encontramos

$$a(R) = 4\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} f^2(\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}\, \theta\, d\theta = 2\left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}\right) = 2\,.$$

2.11 Exercícios

Em cada um dos Exercícios 1 a 4 provar que o conjunto de pontos cujas coordenadas retangulares (x, y) satisfazem à equação cartesiana dada é igual ao conjunto de todos os pontos cujas coordenadas polares (r, θ) verificam a correspondente equação polar.

1. $(x-1)^2 + y^2 = 1; \qquad r = 2\cos\theta, \quad \cos\theta > 0.$
2. $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2+y^2}; \qquad r = 1 + \cos\theta.$
3. $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2, y^2 \leq x^2; \qquad r = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad \cos 2\theta \geq 0.$
4. $(x^2+y^2)^2 = |x^2 - y^2|; \qquad r = \sqrt{|\cos 2\theta|}.$

Em cada um dos Exercícios 5 a 15 traçar o gráfico de f em coordenadas polares e calcular a área do conjunto radial de f no intervalo especificado. Deve supor-se que cada conjunto é mensurável.

5. *Espiral de Arquimedes:* $f(\theta) = \theta, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
6. *Circunferência tangente a 0Y:* $f(\theta) = 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$
7. *Duas circunferências tangentes a 0Y:* $f(\theta) = 2|\cos\theta|, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$
8. *Circunferência tangente a 0X:* $f(\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi.$
9. *Duas circunferências tangentes a 0X:* $f(\theta) = 4\,|\text{sen}\,\theta|, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
10. *Pétala de rosa:* $f(\theta) = \text{sen}\,2\theta, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
11. *Rosa de quatro folhas:* $f(\theta) = |\text{sen}\,2\theta|, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
12. *Oito achatado:* $f(\theta) = \sqrt{|\cos\theta|}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
13. *Trevo de quatro folhas:* $f(\theta) = \sqrt{|\cos 2\theta|}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
14. *Cardioide:* $f(\theta) = 1 + \cos\theta, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
15. *Caracol:* $f(\theta) = 2 + \cos\theta, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

2.12 Aplicação da integração ao cálculo de volumes

Na Seção 1.6 introduzimos o conceito de área como uma função de conjunto verificando certas propriedades que foram tomadas como axiomas. Depois, nas Seções 1.18 e 1.22, mostrámos que as áreas de muitas regiões podiam ser calculadas por integração. O mesmo caminho vai ser adoptado para discutir o conceito de volume.

Suponhamos que existem certos conjuntos S de pontos no espaço tridimensional, aos quais chamamos *conjuntos mensuráveis,* e uma função de conjunto v chamada *função volume* que atribui a cada conjunto mensurável S um número $v(S)$, chamado o volume de S. Representamos a classe de todos os conjuntos mensuráveis do espaço tridimensional por $\mathscr{A}$ e a cada conjunto S de $\mathscr{A}$ chamamos *sólido.*

Tal como no caso da área, enunciamos um certo número de propriedades caraterísticas do volume e consideramo-las como axiomas. A escolha dos axiomas permite-nos demonstrar que os volumes de muito sólidos podem ser calculados por integração.

Os três primeiros axiomas, semelhantes aos da área, referem-se às propriedades de não negatividade, aditividade e da diferença. Em vez do axioma de invariância sob congruência, enunciamos um axioma de tipo diferente, chamado o *princípio de Cavalieri.* Este atribui volumes iguais a sólidos congruentes e também a certos sólidos que, embora não sendo congruentes, tem secões de áreas iguais ao serem intersetados por planos perpendiculares a uma dada reta. Mais precisamente, suponhamos que S é um sólido dado e L uma determinada reta. Se um plano F é perpendicular a L, a intersecção $F \cap S$ diz-se uma seção plana perpendicular a L. Se cada seção plana perpendicular a L é um conjunto mensurável no seu próprio plano, dizemos que S é um *sólido de Cavalieri*. O princípio de Cavalieri define volumes iguais para dois sólidos de Cavalieri, S e T, se $a(S \cap F) = a(T \cap F)$, para todo o plano F perpendicular a uma reta dada L.

O princípio de Cavalieri pode interpretar-se intuitivamente como segue. Imaginemos um sólido de Cavalieri como sendo uma pilha de lâminas materiais delgadas, semelhantes a um baralho de cartas, cada uma perpendicular a uma reta dada L. Se deslizamos, cada lâmina no seu próprio plano, podemos alterar a forma do sólido, mas não o seu volume.

O axioma seguinte estabelece que o volume de uma paralelipípedo retângulo é o produto dos comprimentos das suas arestas. Um paralelipípedo retângulo é qualquer conjunto congruente a um conjunto da forma

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c\}. \tag{2.16}$$

Utilizaremos a palavra mais curta "caixa" de preferência a "paralelípipedo retângulo". Os números não negativos a, b, c em (2.16) são os comprimentos das arestas da caixa.

Finalmente, incluímos um axioma que estabelece que cada conjunto convexo é mensurável. Um conjunto diz-se *convexo* se, para todo o par de pontos P e Q do conjunto, o segmento de reta unindo P a Q pertence também ao conjunto. Este axioma, conjuntamente com as propriedades aditiva e de diferença, asseguram-nos que todos os sólidos elementares que aparecem nas aplicações usuais do cálculo são mensuráveis.

Os axiomas para o volume podem enunciar-se do modo seguinte:

DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE VOLUME. *Supõe-se que existe uma classe $\mathscr{A}$ de sólidos e uma função de conjunto v, cujo domínio é $\mathscr{A}$, com as propriedades seguintes:*

1. *Propriedade de não negatividade. Para todo o conjunto S de $\mathscr{A}$ tem-se $v(S) \geq 0$.*
2. ***Propriedade aditiva. Se S e T pertencem a $\mathscr{A}$, então $S \cup T$ e $S \cap T$ pertencem a $\mathscr{A}$ e tem-se***

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T).$$

3. *Propriedade subtractiva. Se S e T estão em $\mathscr{A}$ com $S \subseteq T$, então $T - S$ está em $\mathscr{A}$ e tem-se $v(T - S) = v(T) - v(S)$.*
4. *Princípio de Cavalieri. Se S e T são dois sólidos de Cavalieri em $\mathscr{A}$ com $a(S \cap F) \leq a(T \cap F)$ para todo o plano F perpendicular a uma reta dada, então $v(S) \leq v(T)$.*
5. *Escolha de escala. Toda a caixa B pertence $\mathscr{A}$. Se as arestas de B tem comprimento a, b, c então $v(B) = abc$.*
6. *Todo o conjunto convexo pertence a $\mathscr{A}$.*

O axioma 3 assegura que o conjunto vazio $\varnothing$ pertence a $\mathscr{A}$ e tem volume zero. Uma vez que $v(T - S) \geq 0$, o Axioma 3 implica também a seguinte propriedade de monotonia.

$$v(S) \leq v(T), \qquad \text{para conjuntos } S \text{ e } T \text{ em } \mathscr{A} \text{ com } S \subseteq T.$$

A propriedade de monotonia, por sua vez, mostra que todo o conjunto limitado plano S de $\mathscr{A}$ tem volume zero. Um conjunto plano diz-se *limitado* se é um subconjunto de certo quadrado no plano. Se consideramos uma caixa B, de altura c, tendo este quadrado por base, então $S \subseteq B$, de modo que temos $v(S) \leq v(B) = a^2 c$, onde a é o comprimento do lado do quadrado base. Se tivermos $v(S) > 0$, poderemos escolher c de tal maneira que $c < v(S)/a^2$, contradizendo a desigualdade $v(S) \leq a^2 c$. Isto prova-nos que $v(S)$ não pode ser positiva logo $v(S) = 0$, como se afirmara.

Note-se que o princípio de Cavalieri foi estabelecido na forma de desigualdades. Se $a(S \cap F) = a(T \cap F)$, para todo o plano F perpendicular a uma reta dada, podemos aplicar o Axioma 5 duas vezes para deduzir $v(S) \leq v(T)$ e $v(T) \leq v(S)$ e portanto concluir-se que $v(T) = v(S)$.

Em continuação vamos provar que o volume de um sólido cilíndrico reto de revolução é igual á area da base multiplicada pela altura. Por sólido cilíndrico de revolução entende-se um conjunto congruente a um conjunto S da forma

$$S = \{(x, y, z) \big| (x, y) \in B, \quad a \leq z \leq b\},$$

com B um conjunto plano mensurável limitado. As áreas das Seções planas de S, perpendiculares ao eixo OZ, determinam uma *função área seção plana* a_s, a qual torna o valor constante $a(B)$ no intervalo $a \leq z \leq b$, e o valor 0 fora desse intervalo $[a, b]$.

Seja agora T uma caixa com a função área seção plana a_T igual a a_S. O axioma 5 diz-nos que $v(T) = a(B)\,(b - a)$, com $a(B)$ a área da base de T e $b - a$ a sua altura. O princípio de Cavalieri estabelece que $v(S) = v(T)$ e assim o volume de S é a área da sua base, $a(B)$, multiplicado pela respetiva altura, $b - a$. Notemos que o produto $a(B)\,(b - a)$ é o integral da função a_S estendido ao intervalo $[a, b]$. Por outras palavras, o volume dum cilindro de revolução é igual ao integral da sua função área seção plana

$$v(S) = \int_a^b a_S(z)\, dz\,.$$

Podemos generalizar esta formula a sólidos de Cavalieri mais gerais. Seja R um sólido de Cavalieri com seções mensuráveis perpendiculares a uma reta dada L. Consideremos um eixo coordenado coincidente com L (chamado eixo u), e seja $a_R(u)$ a área da seção produzida por um plano perpendicular a L no ponto u. O volume de R pode calcular-se, devido ao teorema seguinte:

TEOREMA 2.7. *Seja R um sólido de Cavalieri de $\mathscr{A}$, cuja função área seção plana a_R e integrável em $[a, b]$ e é nula fora do mesmo intervalo. Então o volume de R é igual ao integral da função área seção plana:*

$$v(R) = \int_a^b a_R(u)\, du\,.$$

Demonstração. Escolhamos funções em escada s e t, tais que $s \leq a_R \leq t$ em $[a, b]$ e com s e t nulas no exterior de $[a, b]$. Para cada subintervalo de $[a, b]$, no qual s é constante, podemos imaginar um sólido de forma cilíndrica (por exemplo um cilindro circular reto) construído de tal modo que a sua área seção plana, neste subintervalo, tem o mesmo valor constante que s. A união destes cilindros sobre todos os intervalos em que s é constante é um sólido S cujo volume $v(S)$ é, pela propriedade de aditividade, igual ao integral $\int_a^b s(u)\,du$. Análogamente, existe um sólido T, uma reunião de cilindros, cujo volume $v(T) = \int_a^b t(u)\,du$. Mas $a_S(u) = s(u) \leq a_R(u) \leq t(u) = a_T(u)$ para todo os u de $[a, b]$, de maneira que o princípio de Cavalieri implica que $v(S) \leq v(R) \leq v(T)$. Por outras palavras, $v(R)$ verifica as desigualdades

$$\int_a^b s(u)\,du \leq v(R) \leq \int_a^b t(u)\,du$$

para todas as funções em escada s e t satisfazendo a $s \leq a_S \leq t$ em $[a, b]$. Uma vez que a_S integrável em $[a, b]$, resulta que $v(R) = \int_a^b a_S(u)\,du$.

Exemplo. *Volume de um sólido de revolução.* Seja f uma função não negativa e integrável num intervalo $[a, b]$. Se o conjunto de ordenadas dessa função roda em torno do eixo $0X$, gera um sólido de revolução. Cada seção determinada por um plano perpendicular ao eixo $0X$ é um circulo. A área do círculo correspondente ao ponto x é $\pi f^2(x)$, onde $f^2(x)$ representa o quadrado de $f(x)$. Deste modo, pelo teorema 2.7, o volume do sólido (se o sólido pertence a $\mathscr{A}$ é igual ao integral $\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$, caso exista. Em particular, se $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ para $-r \leq x \leq r$, o conjunto de ordenadas de f é um semi círculo de raio r e o sólido gerado é uma esfera do mesmo raio. A esfera é convexa. O seu volume é igual a

$$\int_{-r}^{r} \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \tfrac{4}{3}\pi r^3 .$$

Mais geralmente, admitamos que temos duas funções não negativas, f e g, que são integráveis em $[a, b]$ e satisfazem a $f \leq g$ em $[a, b]$. Quando a região entre os seus gráficos roda em torno do eixo $0X$ gera um sólido de revolução, tal que cada seção produzida por um plano perpendicular ao eixo $0X$, no ponto x, é uma coroa circular (região limitada por duas circunferências concêntricas) cuja área é $\pi g^2(x) - \pi f^2(x)$. Por conseguinte, se $g^2 - f^2$ é integrável, o volume de um tal sólido (se o sólido pertence a $\mathscr{A}$) é dada pelo integral

$$\int_a^b \pi[g^2(x) - f^2(x)]\,dx .$$

2.13 Exercícios

1. Usar a integração para calcular o volume dum cone circular reto gerado pela revolução, em torno de $0X$, do conjunto de ordenadas de uma função linear $f(x) = cx$, relativo ao intervalo $a \leqq x \leqq b$. Mostrar que o resultado é igual a uma terça parte da área da base do cone a multiplicar pela sua altura.

Em cada um dos Exercícios 2 a 7, calcular o volume do sólido gerado pela revolução, em torno de $0X$, do conjunto de ordenadas de uma função f no intervalo indicado. Desenhar cada um dos conjuntos de ordenadas

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
3. $f(x) = x^{1/4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
4. $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
6. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

Em cada um dos Exercícios 8 a 11, desenhar a região entre os gráficos de f e g e calcular o volume do sólido obtido por revolução da referida região em torno de $0X$.

8. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$
9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$
11. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$
12. Traçar os gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x/2$ referentes ao intervalo $[0, 2]$. Determinar um número t, $1 < t < 2$, tal que quando a região entre os gráficos de f e g, relativa a $[0, t]$, roda em torno do eixo $0X$, gera um sólido de revolução cujo volume é $\pi t^3/3$.
13. Que volume de material se remove de uma esfera de raio $2r$ quando se atravessa por um orifício cilíndrico de raio r, cujo eixo passa pelo centro de esfera?
14. Uma argola de guardanapo obtém-se fazendo um furo cilindrico numa esfera, de modo que o centro desta esteja sobre o eixo daquele. Se o comprimento do furo é $2h$, provar que o volume da argola e $\pi a h^3$, com a um número racional.
15. Um sólido tem uma base circular de raio 2. Cada seção plana feita por um plano perpendicular a um diâmetro fixo é um triângulo equilátero. Calcular o volume do sólido.
16. As seções planas de um sólido determinadas por planos perpendiculares ao eixo $0X$ são quadrados cujos centros estão sobre aquele eixo. Se o quadrado obtido pela seção no ponto x tem o lado igual a $2x^2$, determinar o volume do sólido entre $x = 0$ e $x = a$. Traçar um esboço.
17. Determinar o volume do sólido cuja seção plana, determinada por um plano perpendicular ao eixo OX, tem a área $ax^2 + bx + c$ para todo o x pertencente intervalo $0 \leq x \leq h$. Explicitar o volume em função das áreas B_1, M e B_2 das seções correspondentes a $x = 0$, $x = h/2$ e $x = h$ respetivamente. A fórmula resultante é conhecida pela *fórmula do prismoide.*
18. Traçar a região do plano XOY formada de pontos (x, y) verificando simultaneamente as desigualdades $0 \leq x \leq 2$, $\frac{x^2}{4} \leq y \leq 1$. Calcular o volume do sólido obtido por rotação desta região em torno (a) do eixo OX; b) do eixo OY; (c) da paralela OY passando pelo ponto $(2, 0)$; (d) da paralela a OX passando pelo ponto $(0, 1)$.

2.14 Aplicação da integração ao conceito de trabalho

Até aqui aplicámos a teoria da integração ao cálculo de áreas e volumes. Analisaremos, em seguida, uma aplicação ao conceito fisico de *trabalho.*

O trabalho é a medida da energia dispendida por uma força ao deslocar uma partícula de um ponto para outro. Nesta Seção, consideramos unicamente o caso mais simples do movimento retilíneo, isto é, supomos que o movimento do ponto se faz ao longo duma reta (que tomamos para eixo $0X$), desde um ponto $x = a$ até outro ponto $x = b$ e que a força atua sobre o ponto ao longo da reta. Admitimos que pode ser ou $b < a$ ou $a < b$. Supomos, além disso, que a força atuando sobre a partícula é uma função da posição desta. Se a partícula se encontra em x, representamos por $f(x)$ a força que atua sobre ela, com $f(x) > 0$ se a força atua no sentido positivo de $0X$ e $f(x) < 0$ se atua no sentido contrário. Quando a força é constante, por exemplo $f(x) = c$, para todos os valores de x entre a e b, definimos o trabalho feito pela força f como sendo o número $c \cdot (b - a)$, isto é, a força multiplicada pelo deslocamento. O trabalho pode ser positivo ou negativo.

Se a força está medida em *dines* e a distância em *centímetros* (sistema *cgs*), o trabalho exprime-se em *dines* por *centímetro*. Um *dine-centímetro* de trabalho chama-se *erg*. Se a força se mede em *newtons* e a distância em *metros* (sistema *mks*), o trabalho exprime-se em *newtons por metro*. O trabalho de um *newton-metro* chama-se *joule*. Um newton equivale a 10^5 dines e um joule a 10^7 ergs. Se a força se mede em libras e a distância em *pés*, o trabalho mede-se em *libras-pés*.

Exemplo. Uma pedra de 3 libras de peso lança-se para cima, verticalmente, até à altura de 15 pés e volta a cair no solo. Tomamos o eixo $0X$ coincidente com a vertical e orientado positivamente para cima. A força constante da gravidade actua de cima para baixo, de modo que $f(x) = -3$ libras para cada x, $0 \leq x \leq 15$. O trabalho efectuado pela gravidade ao mover-se, por exemplo, a pedra de $x = 6$ até $x = 15$ é $-3(15 - 6) = -27$ libras-pé. Quando a mesma pedra cai desde $x = 15$ até $x = 6$, o trabalho efectuado pela gravidade é $-3(6 - 15) = 27$ libras-pé.

Suponhamos agora que a força não é necessàriamente constante, mas sim uma dada função de posição definida no intervalo $[a, b]$. Como definir o trabalho produzido pela força f ao deslocar uma partícula de a até b? Para obter uma resposta procederemos de modo análogo ao seguido para a área e para o volume. Estabeleceremos certas propriedades, que são impostas ao trabalho por exigências físicas e, em seguida, provamos que para qualquer definição de trabalho que admita essas propriedades, o trabalho realizado por uma função força f, integrável, é igual ao integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriedades fundamentais do trabalho. *Represente $W_a^b(f)$ o trabalho realizado por uma força função para deslocar uma partícula de a até b. Tal trabalho goza das seguintes propriedades:*

1. *Propriedade aditiva. Se $a < c < b$, então $W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f)$.*
2. *Propriedade monótona. Se $f \leq g$ em $[a, b]$, então $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$, isto é, a força maior produz um trabalho maior.*
3. *Fórmula elementar. Se f é constante, por exemplo $f(x) = c$, para qualquer x no intervalo aberto (a, b), então $W_a^b(f) = c \cdot (b - a)$.*

A propriedade aditiva pode generalizar-se por indução a qualquer número finito de intervalos, quer dizer, se $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$, tem-se

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} W_k \, ,$$

sendo W_k o trabalho realizado por f desde x_{k-1} a x_k. Em particular, se a força é uma função em escada s que toma o valor constante s_k no intervalo aberto (x_{k-1}, x_k), a propriedade 3 estabelece que $W_k = s_k(x_k - x_{k-1})$ e assim tem-se

$$W_a^b(s) = \sum_{k=1} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x)\, dx \, .$$

Então para funções em escada o trabalho foi expresso por um integral. É agora fácil provar que tal é ainda possível em casos mais gerais.

TEOREMA 2.8 *Admita-se que o trabalho se definiu para uma classe de funções força f de modo que satisfaça as propriedades 1, 2 e 3. Então o trabalho realizado por uma função força integrável f, ao deslocar a partícula de a até b é igual ao integral de f,*

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Demonstração. Sejam s e t duas funções em escada satisfazendo a $s \leq f \leq t$ em $[a, b]$. A propriedade monótona do trabalho estabelece que $W_a^b(s) \leq W_a^b(f) \leq W_a^b(t)$. Mas $W_a^b(s) = \int_a^b s(x)\,dx$ e $W_a^b(t) = \int_b^b t(x)\,dx$ e portanto $W_a^b(f)$ satisfaz as desigualdades

$$\int_a^b s(x)\, dx \leq W_a^b(f) \leq \int_a^b t(x)\, dx$$

para todas as funções em escada s e t satisfazendo $s \leq f \leq t$ em $[a, b]$. Porque f é integrável em $[a, b]$ resulta que $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Nota: Muitos autores definem simplesmente trabalho como sendo o integral da função força. A demonstração anterior pode considerar-se como uma justificação de tal definição.

EXEMPLO. *Trabalho necessário para esticar uma mola.* Suponhamos que a força $f(x)$ necessária para esticar uma mola de aço de um comprimento x, além do seu comprimento normal, é proporcional a x *(lei de Hooke)*. Definindo o eixo OX ao longo da mola, temos $f(x) = cx$, onde a constante da mola c é positiva. (O valor de c pode determinar-se desde que se conheça a força $f(x)$ para um valor particular de $x \neq 0$). O trabalho necessário para esticar a mola de uma distância a é $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a cx\,dx = ca^2/2$, um número proporcional ao quadrado do deslocamento.

No Volume II e mediante a introdução de integrais curvilíneos, será feito um estudo do trabalho para o movimento do ponto ao longo de curvas.

2.15 Exercícios

Nos Exercícios 1 e 2 supõe-se que a força atuando sobre a mola obedece à lei de Hooke.

1. Se uma força de 10 libras estica uma mola elástica de uma polegada, qual é o trabalho necessário para esticar a mola de um pé?
2. Uma mola tem normalmente um comprimento de 1 metro (m). Uma força de 100 newtons comprime-a para 0,9 m. Quantos joules de trabalho são necessários para a comprimir para metade do seu comprimento normal? Qual é o comprimento da mola quando já tiverem sido realizados vinte joules de trabalho?
3. Uma partícula move-se ao longo do eixo $0X$, por ação duma força $f(x) = 3x^2 + 4x$ newtons. Calcular quantos joules de trabalho são realizados pela força para deslocar a partícula (a) de $x = 0$ a $x = 7$m; (b) de $x = 2m$ a $x = 7$m.
4. Uma partícula desloca-se ao longo de $0X$ por acção da força $f(x) = ax^2 + bx$ dines. Calcular a e b de maneira que se realize um trabalho de 900 ergs para deslocar a partícula 10 cm da origem, se a força vale 65 dines quando $x = 5$ cm.
5. Um cabo com 50 pés de comprimento e 4 libras de peso por pé está pendente dum sarilho. Calcular o trabalho efetuado ao enrolar 25 pés de cabo. Considerar apenas a força da gravidade.
6. Resolver o exercício 5 se for ligado à extremidade do cabo um peso de 50 libras.
7. Um peso de 150 libras está ligado à extremidade de uma longa cadeia flexível, pesando 2 libras/pé. Inicialmente o peso está suspenso com 10 pés de cadeia sobre o bordo de um edífico com 100 pés de altura. Considerando unicamente a força da gravidade, calcular o trabalho realizado quando se desce até uma altura de 10 pés do solo.
8. No Exercício 7, supor que a cadeia só tem 60 pés de comprimento e que o peso e a cadeia se deixam cair para o solo, partindo da mesma posição inicial que antes. Calcular o trabalho realizado pela força da gravidade quando o peso atinge o solo.
9. Seja $V(q)$ a voltagem requerida para estabelecer uma carga q nas placas de um condensador. O trabalho necessário para carregar um condensador desde $q = a$ até $q = b$ define-se mediante o integral $\int_a^b V(q)\,dq$. Se a voltagem é proporcional à carga, provar que o trabalho efetuado para colocar a carga Q num condensador descarregado é $\frac{1}{2}\,Q\,V(Q)$.

2.16 Valor médio de uma função

Na investigação cientifica torna-se muitas vezes necessário realizar várias medições em condições análogas e depois calcular uma *média*, com a finalidade de resumir os dados. Há diferentes tipos de médias, sendo a mais usual a *média aritmética*. Se $a_1, a_2, ..., a$ são n números reais, a sua média aritmética a é definida por

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\,. \tag{2.17}$$

Se os números a_k são os valores de uma função f em n pontos distintos, isto é $a_k = f(x_k)$, então o número

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

é a média aritmética dos valores $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ da função. Pode generalizar-se este conceito para calcular um valor médio não sòmente para um número finito de valores de $f(x)$, mas para todos os valores de $f(x)$ quando x percorre todo um intervalo dado. A definição que apresentamos a seguir tem esta finalidade.

DEFINIÇÃO DE VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO NUM INTERVALO. *Se f é integrável em $[a, b]$, define-se $A(f)$, valor médio de f em $[a, b]$, pela fórmula*

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\,. \tag{2.18}$$

Quando f é não negativa, esta fórmula é suscetível duma interpretação geométrica simples. Escrita na forma $(b-a)A(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ estabelece que o retângulo de altura $A(f)$ e base $[a, b]$ tem uma área igual à do conjunto de ordenadas de f sobre $[a, b]$.

Podemos agora provar que a fórmula (2.18) é realmente uma extensão do conceito de média aritmética. Seja f uma função em escada, que é constante em cada um dos n subintervalos iguais de $[a, b]$. Seja $x_k = a + k(b-a)/n$ com $k = 0, 1, 2, ..., n$ e suponhamos que $f(x) = f(x_k)$ se $x_{k-1} < x < x_k$. Então $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ e desta maneira tem-se

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,.$$

Quer dizer, para funções em escada a média $A(f)$ é a mesma que a média aritmética dos valores $f(x_1), ..., f(x_n)$, tomados nos intervalos em que a função é constante.

Muitas vezes utilizam-se *médias aritméticas pesadas*, em vez da média aritmética ordinária (2.17). Se $w_1, w_2, ..., w_n$ são n números não negativos (chamados *pesos*), não todos nulos, a média aritmética pesada $\bar{a}$ de $a_1, a_2, ..., a_n$ define-se pela fórmula

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k}\,.$$

Quando os pesos são todos iguais este valor coincide com a média aritmética ordinária. A generalização deste conceito a funções integráveis é feita pela fórmula

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\,, \tag{2.19}$$

onde w é uma função peso não negativa com $\int_a^b w(x)dx \neq 0$. As médias pesadas são muito utilizadas na física e engenharia, bem como na matemática. Consideremos, por exemplo, uma vara retilínea de comprimento a feita de um material de densidade variável. Coloque-se a vara ao longo do semi-eixo positivo $0X$, com uma extremidade coincidindo com a origem 0, e seja $m(x)$ a massa da parte da vara de comprimento x, medida a partir de 0. Se $m(x) = \int_0^x \rho(t)dt$ para certa função integrável ρ é a *densidade (de massa)* de vara. Uma vara *uniforme* é a que tem densidade constante. O integral $\int_0^a x\rho(x)dx$ chama-se *primeiró momento* (ou momento de primeira ordem) da vara relativamente a 0 e o *centro de massa* é o ponto cuja abcissa x é definida por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\rho(x)\,dx}{\int_0^a \rho(x)\,dx}\,.$$

Este é um exemplo de média ponderada. Estamos a calcular a média da função distânci $f(x) = x$, com a densidade de massa ρ como função peso.

O integral $\int_0^a x^2\rho(x)\,dx$ chama-se *segundo momento* (momento de segunda ordem) ou *momento de inércia* da vara relativamente a 0, e o número positivo r dado pela fórmula

$$r^2 = \frac{\int_0^a x^2\rho(x)\,dx}{\int_0^a \rho(x)\,dx}$$

é o *raio de giração* da vara, igualmente relativo a 0. Neste caso a função de que está a ser calculada a média é o quadrado da função distância $f(x) = x^2$, com a densidade de massa como função peso.

Médias pesadas análogas a estas aparecem também no Cálculo das Probabilidades, onde os conceitos de *esperança* e *variância* desempenham o mesmo papel que centro de gravidade o momento de inèrcia.

2.17 Exercícios

Nos exercícios 1 a 10, calcular a média $A(f)$ para a função dada f, no intervalo correspondente.

1. $f(x) = x^2, \quad a \leq x \leq b.$
2. $f(x) = x^2 + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$
3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$
4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \leq x \leq 8.$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$
7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
8. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
11. (a) Se $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq a$, determinar um número c satisfazendo a $0 < c < a$ tal que $f(c)$ seja igual à média de f em $[0, a]$. (b) O mesmo problema da alínea anterior se $f(x) = x^n$, com n um inteiro positivo qualquer.

12. Seja $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$. O valor médio de f em $[0, 1]$ é $1/3$. Determinar uma função peso w, não negativa, tal que a média pesada de f em $[0, 1]$, quando definida por (2.19), seja (a) $1/2$; (b) $3/5$; (c) $2/3$.
13. Seja $A(f)$ a média de f sobre um intervalo $[a, b]$. Provar que a média tem as seguintes propriedades:
    (a) *Propriedade aditiva:* $A(f + g) = A(f) + A(g)$
    (b) *Propriedade homogénea:* $A(cf) = cA(f)$ se c é qualquer número real.
    (c) *Propriedade monotona:* $A(f) \leq A(g)$ se $f \leq g$ em $[a, b]$.
14. Quais as propriedades do Exercício 13 que são válidas para a média pesada, definida por (2.19)?
15. Designe-se por $A_a^b(f)$ a média de f em $[a, b]$.
    (a) Se $a < c < b$, provar que existe um número t, $0 < t < 1$, tal que $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (1-t)A_c^b(f)$. Deste modo, $A_a^b(f)$ é uma média aritmética pesada de $A_a^c(f)$ e $A_a^b(f)$.
    (b) Provar que o resultado da alínea anterior é igualmente válido para médias pesadas definidas por (2.19).

Cada um dos Exercícios 16 e 21 refere-se a uma vara de comprimento L, colocada sobre OX e com uma extremidade na origem 0. Para a densidade de massa ρ definida em cada caso, calcular (a) o centro de massa da vara, (b) o momento de inércia relativamente a 0, e (c) o raio de giração

16. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq L$.
17. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = 2$ para $\frac{L}{2} < x \leq L$.
18. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq L$.
19. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \frac{L}{2}$ para $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.
20. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq L$.
21. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \frac{L^2}{4}$ para $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.
22. Determinar uma densidade de massa ρ de maneira que o centro de massa da vara de comprimento L esteja a uma distância $L/4$ duma das extremidades da vara.
23. Num circuito elétrico, a voltagem $e(t)$ no instante t é definida pela fórmula $e(t) = 3$ sen $2t$. Calcular: (a) a voltagem média no intervalo de tempo $[0, \pi/2]$; (b) a raíz média quadrática da voltagem, isto é, a raíz quadrada da média da função e^2 no intervalo de tempo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
24. Num circuito elétrico, a voltagem $e(t)$ e a intensidade da corrente $i(t)$ num instante t são dadas pelas fórmulas $e(t) = 160$ sen t, $i(t) = 2\text{sen}(t - \pi/6)$. A potência média define-se por

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)i(t)\,dt\,,$$

onde T é o periodo da voltagem e da intensidade. Determinar T e calcular a potência média.

2.18 O integral como função do limite superior. Integrais indefinidos

Nesta Seção vamos supor que f é uma função tal que o integral $\int_a^x f(t)\,dt$ existe para cada x do intervalo $[a, b]$. Conservando a e f fixos, vamos estudar o integral como uma função de x. Representamos o valor do integral por $A(x)$, de modo que temos

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{se} \quad a \leq x \leq b\,. \tag{2.20}$$

Uma equação como esta permite-nos construir uma nova função A a partir duma dada função f, sendo o valor de A em cada ponto de $[a, b]$ determinado por (2.20). A função A é algumas vezes designada como um *integral indefinido* de f e diz-se ser obtida de f por integração. Nós dizemos *um* integral indefinido, em vez de *o* integral indefinido, porque A também depende do limite inferior a. Diferentes valores de a conduzirão a diferentes funções A. Se utilizamos um limite inferior diferente, por exemplo c, e designamos outro integral indefinido F por

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,,$$

então a propriedade aditiva diz-nos que

$$A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt\,,$$

e por isso a diferença $A(x) - F(x)$ é *independente* de x. Portanto dois quaisquer integrais indefinidos da mesma função diferem unicamente por uma constante (a constante depende da escolha de a e c).

Quando se conhece um integral indefinido de f, o valor de um integral tal como $\int_a^b f(t)\,dt$ pode ser calculado mediante uma simples subtração. Por exemplo, se n é um inteiro não negativo, temos a fórmula do teorema 1.15.

$$\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,$$

e a propriedade aditiva implica que

$$\int_a^b t^n\,dt = \int_0^b t^n\,dt - \int_0^a t^n\,dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\,.$$

Em geral, se $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, temos

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,. \tag{2.21}$$

Uma escolha diferente de c altera unicamente $F(x)$ por um valor constante, o qual não altera a diferença $F(b) - F(a)$, porque a constante se anula na subtração.

Se utilizamos o símbolo

$$F(x)\Big|_a^b$$

para representar a diferença $F(b) - F(a)$, a igualdade (2.21) pode escrever-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Existe uma relação geométrica simples entre uma função f e os seus integrais indefinidos. Na fig. 2.15(a) considera-se um exemplo; f é uma função não negativa e o número $A(x)$ é igual à área da parte sombreada, situada abaixo do gráfico de f desde a até x. Se f toma valores positivos e negativos, como na fig. 2.15(b), o integral $A(x)$ dá-nos a soma das áreas das regiões acima do eixo $0X$ menos a soma das áreas abaixo deste eixo.

Muitas das funções que ocorrem em vários ramos da ciência aparecem exatamente deste modo, como integrais indefinidos de outras funções. Esta é uma das razões pela qual uma grande parte do cálculo está dedicada ao estudo de integrais indefinidos.

Às vezes o conhecimento duma propriedade particular de f implica uma correspondente propriedade particular do integral indefinido. Por exemplo, se f é não negativa em $[a, b]$, então o integral indefinido A é crescente, uma vez que se tem

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt \geq 0\,,$$

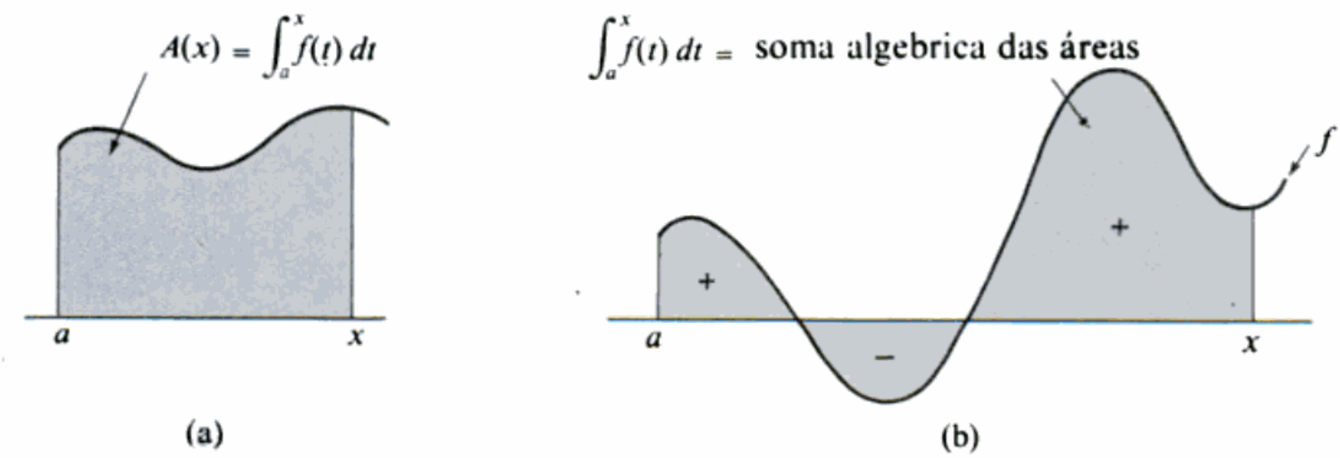
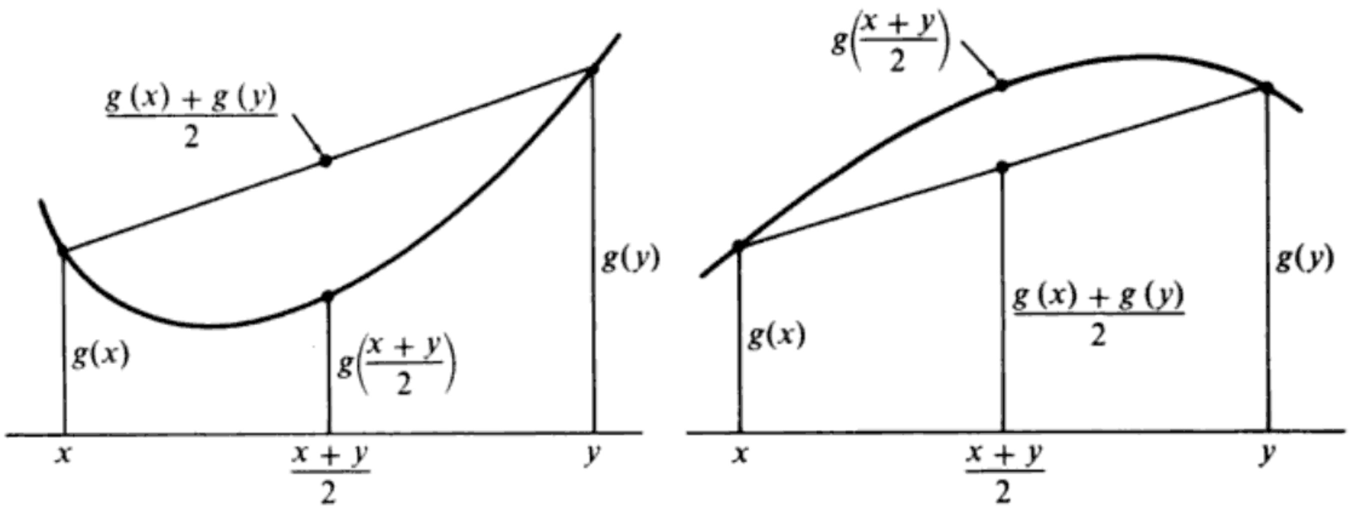


Fig. 2.15 — Integrais indefinidos interpretados geometricamente em termos de área.

sempre que $a \leq x \leq y \leq b$. *Interpretado geomètricamente, isto significa que a área limitada pelo gráfico de uma função não negativa de a* e x não pode descrever quando x aumenta.

Vamos em seguida analisar outra propriedade que não é imediatamente evidente geomètricamente. Suponhamos f crescente em $[a, b]$. Pode então provar-se que o integral indefinido A possui uma propriedade chamada *convexidade*. O seu gráfico curva-se para cima, como se



(a) Função convexa (b) Função concava

Fig. 2.16 — Interpretação geométrica da convexidade e concavidade.

indica na fig. 2.16 (a), isto é, a corda unindo dois pontos quaisquer do gráfico fica sempre acima deste. Pode definir-se analiticamente a convexidade do modo seguinte:

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO CONVEXA. *Uma função g diz-se convexa num intervalo* $[a, b]$ *se, para todo o par* x *e* y *de* $[a, b]$ *e para qualquer* α *tal que* $0 < \alpha < 1$, *se tem*

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \qquad \textit{onde} \quad z = \alpha y + (1-\alpha)x\,. \tag{2.22}$$

Diz-se que g é concava em $[a, b]$ *se é válida a desigualdade em sentido contrário,*

$$g(z) \geq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \qquad \textit{onde} \quad z = \alpha y + (1-\alpha)x\,.$$

Estas desigualdades são suscetíveis duma interpretação geométrica simples. O ponto $z = \alpha y + (1-\alpha)x$ verifica $z - x = \alpha(y - x)$. Se $x < y$, esse ponto divide o intervalo $[x, y]$ em dois subintervalos $[x, z]$ e $[z, y]$, sendo a amplitude de $[x, z]$ o produto da de $[x, y]$ por α. Quando α varia de 0 a 1, o ponto $\alpha g(y) + (1-\alpha)g(x)$ descreve o segmento de reta que une os pontos $[x, g(x)]$ e $[y, g(y)]$ do gráfico de g. A desigualdade (2.22) estabelece que o gráfico de g nunca passa acima daquela reta. A fig. 2.16(a) representa um exemplo com $\alpha = \frac{1}{2}$. Para uma função côncava, o gráfico nunca desce abaixo do segmento de reta, como se vê no exemplo da fig. 2.16(b).

TEOREMA 2.9. *Seja* $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. *A função A é convexa em cada intervalo em que f é crescente, e côncava em todo o intervalo em que f é decrescente.*

Demonstração. Suponhamos f crescente em $[a, b]$, seja $x < y$ e $z = \alpha y + (1-\alpha)x$. Vamos demonstrar que $A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x)$ e uma vez que $A(z) = \alpha A(z) + (1-\alpha)A(z)$, será o mesmo demonstrar que $\alpha A(z) + (1-\alpha)A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x)$, ou que

$$(1-\alpha)[A(z) - A(x)] \leq \alpha[A(y) - A(z)]\,.$$

Por ser $A(z) - A(x) = \int_x^z f(t)\,dt$ e $A(y) - A(z) = \int_x^y f(t)\,dt$, temos que demonstrar que

$$(1-\alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leq \alpha \int_z^y f(t)\,dt\,. \tag{2.23}$$

Mas f é crescente, de modo que são verificadas as desigualdades $f(t) \leq f(z)$ se $x \leq t \leq z$, e $f(z) \leq f(t)$ se $z \leq t \leq y$.
Integrando estas desigualdades encontramos

$$\int_x^z f(t)\,dt \leq f(z)(z-x), \qquad \text{e} \qquad f(z)(y-z) \leq \int_z^y f(t)\,dt\,.$$

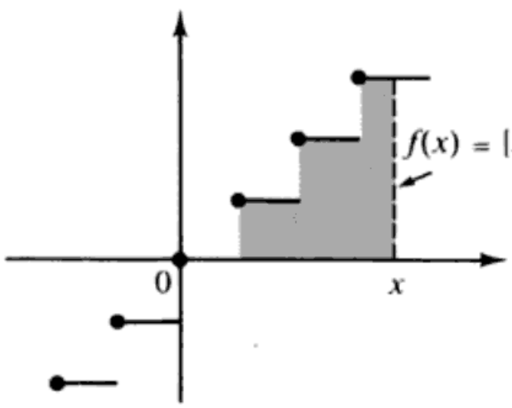
Mas $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$ e deste modo as desigualdades dão-nos

$$(1-\alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leq (1-\alpha)f(z)(z-x) = \alpha f(z)(y-z) \leq \alpha\int_z^y f(t)\,dt\,,$$

o que prova (2.23). Isto demonstra que A é convexa quando $f(t)$ é crescente. Quando f é decrescente, podemos aplicar a $-f$ o resultado acabado de demonstrar.

EXEMPLO. A função cosseno decresce no intervalo $[0, \pi]$. Uma vez que sen $x = \int_0^x \cos t\,dt$, o gráfico da função seno é côncavo no intervalo $[0, \pi]$. No intervalo $[\pi, 2\pi]$ o cosseno é crescente e a função seno é convexa.

A fig. 2.17 representa outras propriedades dos integrais indefinidos. O gráfico da esquerda é o da função parte inteira, $f(x) = [x]$; o gráfico da direita é o do integral indefinido



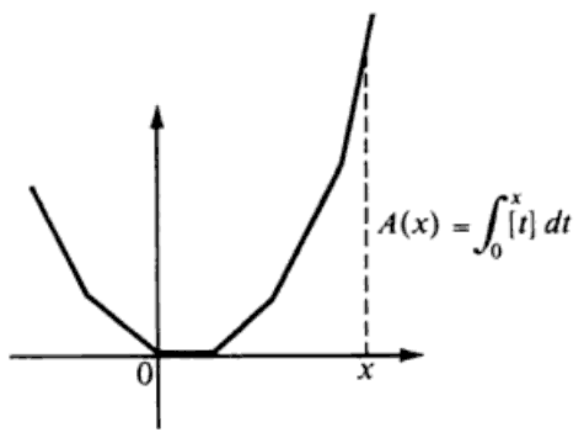


Fig. 2.17 — O integral indefinido de uma função em escada é linear por intervalos.

$A(x) = \int_0^x [t]\, dt$. Nos intervalos em que f é constante, a função A é linear. Exprime-se isto dizendo que *o integral da função em escada é linear por intervalos.*
Observe-se que o gráfico de f é constituído por segmentos de reta "desligados". Existem pontos do gráfico de f onde uma pequena mudança em x provoca um salto no valor da função. Note-se, porém, que o correspondente integral indefinido não se comporta do mesmo modo. Uma pequena variação de x produz ùnicamente uma pequena variação em $A(x)$. Isto é assim porque o gráfico de A não é formado de partes desligadas. Exprime-se nesta argumentação uma propriedade dos integrais indefinidos conhecida por *continuidade.* No capítulo que se segue discutiremos o conceito de continuidade com algum pormenor e provaremos que o integral indefinido é sempre uma função contínua.

2.19 Exercícios

Calcular os integrais dos Exercícios 1 a 16.

1. $\int_0^x (1 + t + t^2)\, dt.$
2. $\int_0^{2y} (1 + t + t^2)\, dt.$
3. $\int_{-1}^{2x} (1 + t + t^2)\, dt.$
4. $\int_1^{1-x} (1 - 2t + 3t^2)\, dt.$
5. $\int_{-2}^x t^2(t^2 + 1)\, dt.$
6. $\int_x^{x^2} (t^2 + 1)^2\, dt.$
7. $\int_1^x (t^{1/2} + 1)\, dt, \qquad x > 0.$
8. $\int_x^{x^2} (t^{1/2} + t^{1/4})\, dt, \qquad x > 0.$
9. $\int_{-\pi}^x \cos t\, dt.$
10. $\int_0^{x^2} (\frac{1}{2} + \cos t)\, dt.$
11. $\int_x^{x^2} (\frac{1}{2} - \operatorname{sen} t)\, dt.$
12. $\int_0^x (u^2 + \operatorname{sen} 3u)\, du.$
13. $\int_x^{x^2} (v^2 + \operatorname{sen} 3v)\, dv.$
14. $\int_0^y (\operatorname{sen}^2 x + x)\, dx.$
15. $\int_0^x \left(\operatorname{sen} 2w + \cos \frac{w}{2}\right) dw.$
16. $\int_{-\pi}^x (\frac{1}{2} + \cos t)^2\, dt.$
17. Achar todos os valores reais de x para os quais

$$\int_0^x (t^3 - t)\, dt = \tfrac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^x (t - t^3)\, dt\,.$$

Traçar uma figura adequada e interpretar geometricamente a igualdade.

18. Seja $f(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$ se x não é inteiro, e $f(x) = 0$ se x é inteiro. (Como habitualmente $[x]$ representa o maior inteiro $\leq x$). Defina-se uma nova função P como se indica:

$$P(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{para todo o } x \text{ real.}$$

(a) Traçar o gráfico de f relativo ao intervalo $[-3, 3]$ e provar que f é periódica com período 1: $f(x + 1) = f(x)$ para todo o x.

(b) Demonstrar que $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, se $0 \leq x \leq 1$ e que P é periódica do período 1.

(c) Exprimir $P(x)$ em função de $[x]$.

(d) Determinar uma constante c tal que $\int_0^1 (P(t) + c)dt = 0$.

(e) Para a constante c da alínea (d) seja $Q(x) = \int_0^x (P(t) + c)dt$. Provar que Q é periódica com período 1 e que

$$Q(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \qquad \text{se } 0 \leq x \leq 1 .$$

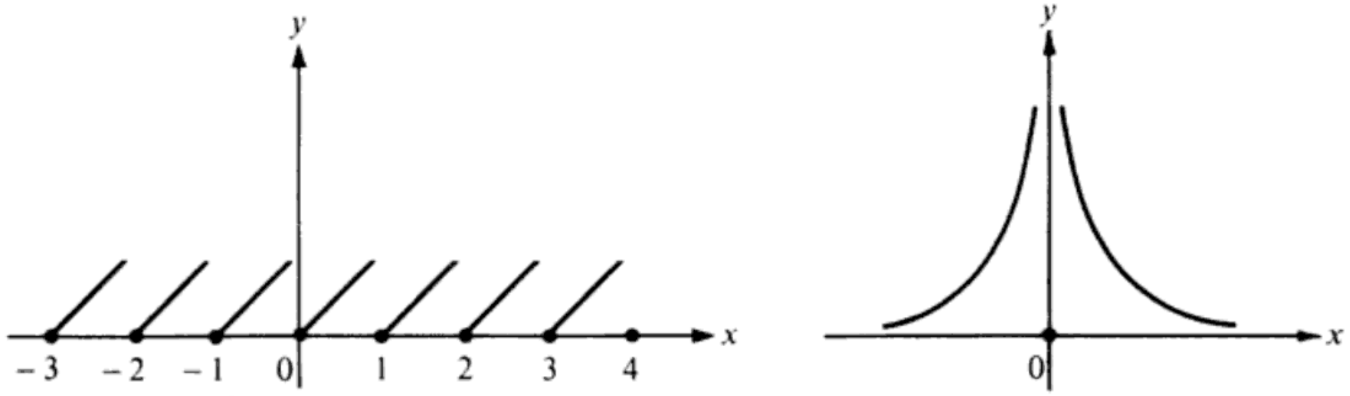
19. É dada uma função ímpar f, definida para todo o valor de x, com período 2, e integrável em qualquer intervalo. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.
    (a) Demonstrar que $g(2n) = 0$ para todo o inteiro n.
    (b) Demonstrar que g é par e periódica de período 2.
20. Seja f uma função definida para todo o x, periódica de período 2 e integrável em qualquer intervalo. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ e seja $A = g(1)$.
    (a) Provar que g é par e que $g(x + 2) - g(x) = g(2)$.
    (b) Calcular $g(2)$ e $g(5)$ em termos de A.
    (c) Para que valor de A será g periódica de período 2?
21. São dadas duas funções f e g, integráveis em qualquer intervalo e com as propriedades seguintes: f é ímpar, g é par, $f(5) = 7$, $f(0) = 0$, $g(x) = f(x + 5)$, $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ para todo o x. Demonstrar que (a) $f(x - 5) = -g(x)$ para todo o x; (b) $\int_0^5 f(t)\,dt = 7$; (c) $\int_0^x f(t)\,dt = g(0) - g(x)$.

3
FUNÇÕES CONTÍNUAS

3.1 Ideia intuitiva de continuidade

Neste capítulo analisa-se o conceito de continuidade, uma das mais importantes e também das mais fascinantes ideias de toda a Matemática. Antes de apresentarmos uma definição rigorosa de continuidade, discutiremos resumidamente o conceito duma maneira informal e intuitiva para dar ao leitor alguma sensibilidade sobre o seu significado.

Falando sem preocupação de rigor, a situação é a seguinte: Suponhamos uma função f que toma o valor $f(p)$ num certo ponto p. Então f diz-se contínua em p se em todo o ponto x vizinho de p a função toma o valor $f(x)$ próximo de $f(p)$. Outra maneira de apresentar a questão é a seguinte: Se x se move para p, o correspondente valor da função $f(x)$ deve aproimar-se de $f(p)$ tanto quanto se queira, independentemente do modo segundo o qual se aproxima de p. Quando uma função é contínua, não podem verificar-se saltos nos valores da função, como se mostra na fig. 3.1.



(a) Discontinuidade em salto para cada inteiro

(b) Uma discontinuidade infinita em 0.

Fig. 3.1 — Duas formas de discontinuidade.

A fig. 3.1 (a) representa o gráfico de uma função f definida pela equação $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa o maior inteiro $\leq x$. Em cada valor inteiro de x tem-se o que se chama *uma discontinuidade em salto.* Por exemplo $f(2) = 0$, mas quando x se aproxima de 2 *por valores à esquerda*, $f(x)$ aproxima-se do valor 1, que não coincide com $f(2)$. Portanto temos uma discontinuidade em 2. Observe-se porém que $f(x)$ *tende* para $f(2)$ quando x tende para 2 *por valores à direita*, mas isto não é suficiente para estabelecer a continuidade em 2. Num caso como este, a função diz-se *contínua à direita* de 2 e *descontínua à esquerda* de 2. A continuidade num ponto exige a continuidade à esquerda e à direita.

No desenvolvimento primitivo do cálculo, a maior parte das funções com que se lidava eram contínuas e não havia, naquele tempo, necessidade real de penetrar no significado exacto de continuidade. Foi já no século XVIII que as funções descontínuas começaram a aparecer em conexão com diferentes tipos de problemas físicos. Em particular, os trabalhos de J. B. J. Fourier (1758-1830) sobre a teoria do calor forçaram os matemáticos do início do século XIX a examinar com mais cuidado o significado exato de conceitos tais como *função* e *continuidade.* Embora o significado da palavra "contínuo" pareça intuitivamente claro a muita gente, não é fácil formular uma boa desta ideia. Um dicionário popular dá a seguinte definição de continuidade:

Continuidade: qualidade de ser contínuo.

Contínuo: que tem continuidade entre as partes.

Tentando apreender o significado de continuidade unicamente a partir destas duas definições é o mesmo que tentar aprender chinês somente com um dicionário chinês. Uma definição matemática satisfatória de continuidade, expressa unicamente em termos de propriedades do sistema dos números reais, foi primeiramente formulada em 1821 pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). A sua definição, que é ainda usada hoje, pode expôr-se mais facilmente recorrendo ao conceito de limite que analisaremos a seguir.

3.2 Definição de limite de uma função

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo um ponto p, embora não se exija que f seja definida no próprio ponto p. Sendo A um número real, a igualdade

$$\lim_{x \to p} f(x) = A$$

lê-se: "O limite de $f(x)$, quando x tende para p, é igual a A" ou "$f(x)$ tende para A quando x tende para p". Também se escreve, sem recurso ao símbolo de limite:

$$f(x) \to A \text{ quando } x \to p\,.$$

Este símbolismo implica a ideia de que $f(x)$ pode fazer-se tão próximo de A quanto se queira, contanto que se escolha x suficientemente próximo de p.

A nossa primeira tarefa consiste em expôr o significado destes símbolos inteiramente em termos de números reais, o que se fará em duas etapas. Em primeiro lugar introduzimos o conceito de *vizinhança* de um ponto, e em seguida definimos limites recorrendo a esse conceito de vizinhança.

DEFINIÇÃO DE VIZINHANÇA DE UM PONTO. *Qualquer intervalo aberto contendo um ponto p como seu ponto médio diz-se uma vizinhança de p.*

Notação. Representamos as vizinhanças por $N(p)$, $N_1(p)$, $N_2(p)$, etc. Uma vez que uma vizinhança $N(p)$ é um intervalo aberto simétrico relativamente a p, é formada por todos os números reais x satisfazendo a $p-r < x < r+p$ para um certo $r > 0$. O número positivo r é chamado o *raio* da vizinhança. Designamos $N(p)$ por $N(p; r)$ se desejarmos especificar o seu raio. As desigualdades $p-r < x < p+r$ são equivalentes a $-r < x-p < r$, e a $|x-p| < r$. Deste modo, $N(p; r)$ é formado por todos os pontos x cuja distância a p é menor que r.

Na definição dada a seguir, supomos que A é um número real e que f é uma função definida numa certa vizinhança de um ponto p (excepto possivelmente em p). A função f pode também ser definida em p, mas este pormenor é sem significado para a definição.

Definição de limite de uma função. *O simbolismo*

$$\lim_{x\to p} f(x) = A \qquad [\text{ou} \quad f(x) \to A \text{ quando } x \to p]$$

significa que para toda a vizinhança $N_1(A)$ existe numa vizinhança $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \quad \textit{sempre que } x \in N_2(p) \qquad e \quad x \neq p\,. \tag{3.1}$$

O primeiro fato a ter em consideração acerca da definição é que ela inclui *duas* vizinhanças, $N_1(A)$ e $N_2(p)$. A vizinhança $N_1(A)$ é referida em *primeiro lugar;* diz-nos quanto desejamos que $f(x)$ esteja próxima do limite A. A segunda vizinhança, $N_2(p)$, diz-nos quanto x deve aproximar-se de p, de maneira que $f(x)$ seja interior à primeira vizinhança $N_1(A)$. A parte fundamental da definição é que, para cada $N_1(A)$, por *pequeno que seja*, existe *uma certa* vizinhança $N_2(p)$ que satisfaz a (3.1). Em geral, a vizinhança $N_2(p)$ dependerá da

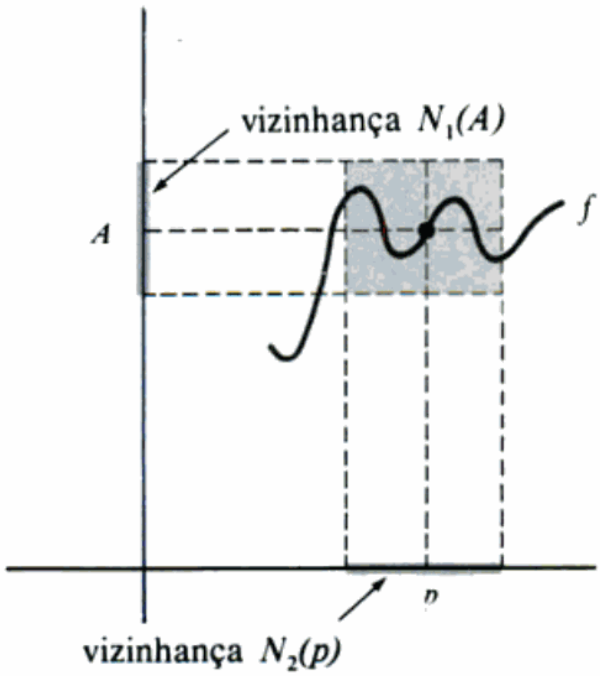


Fig. 3.2 — Existe $\lim_{x\to p} f(x) = A$, mas nada se diz de f em p.

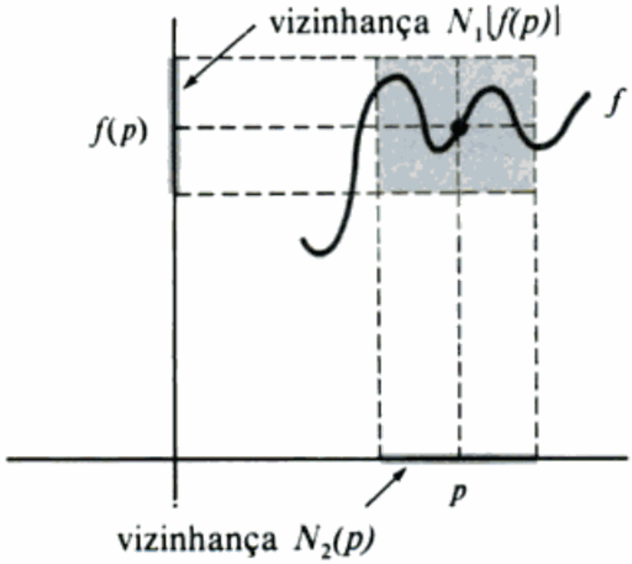


Fig. 3.3 — f está definida em p e $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$, e portanto f é contínua em p.

escolha de $N_1(A)$. Uma vizinhança $N_2(p)$ que sirva para um $N_1(A)$, servirá também, sem dúvida, para qualquer vizinhança maior que $N_1(A)$, mas pode não ser adequada para qualquer vizinhança menor que $N_1(A)$.

A definição de limite pode ilustrar-se geometricamente como se indica na fig. 3.2. No eixo OY está marcada uma vizinhança $N_1(A)$. A vizinhança correspondente $N_2(p)$ está representada no eixo OX. O retângulo sombreado é formado por todos os pontos (x, y) para os quais $x \in N_2(p)$ e $y \in N_1(A)$. A definição de limite assegura que o gráfico de f correspondente ao intervalo $N_2(p)$ é interior ao retângulo, excepto possivelmente para o ponto do gráfico relativo ao próprio p.

A definição de limite pode também formular-se em termos dos *raios* das vizinhanças $N_1(A)$ e $N_2(p)$. É habitual representar o raio de $N_1(A)$ por ϵ (letra grega *epsilon*) e o raio de $N_2(p)$ por δ (letra grega *delta*). A afirmação $f(x) \in N_1(A)$ é equivalente à desigualdade $|f(x) - A| < \epsilon$, e a afirmação $x \in N_2(p)$, $x \neq p$, é equivalente às desigualdades $0 < |x - p| < \delta$. Portanto, a definição de limite pode também ser expressada como segue:

O símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ *significa que para todo o* $\epsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textbf{\textit{sempre que}} \quad 0 < |x - p| < \delta . \tag{3.2}$$

Observamos que as três afirmações

$$\lim_{x \to p} f(x) = A , \qquad \lim_{x \to p} (f(x) - A) = 0 , \qquad \lim_{x \to p} |f(x) - A| = 0 ,$$

são equivalentes. Esta equivalência torna-se evidente quando escrevemos cada uma delas na terminologia ε, δ usada em (3.2).

Ao considerar limites quando $x \to p$, algumas vezes encontra-se ser conveniente representar a diferença $x - p$ por um novo símbolo, por exemplo h e fazer $h \to 0$. Tal implica simplesmente uma mudança na notação, porque, como pode facilmente verificar-se, as duas afirmações seguintes são equivalentes:

$$\lim_{x \to p} f(x) = A , \qquad \lim_{h \to 0} f(p + h) = A .$$

Exemplo 1. *Limite de uma função constante.* Seja $f(x) = c$ para x qualquer. É fácil provar que para cada p, temos $\lim_{x \to p} f(x) = c$. Com efeito, dada qualquer vizinhança $N_1(c)$, a verificação de (3.1) é trivial para qualquer escolha de $N_2(p)$ porque $f(x) = c$ para todo o x e $c \in N_1(c)$ para todas as vizinhanças $N_1(c)$. Na notação de limite, escrevemos

$$\lim_{x \to p} c = c .$$

Exemplo 2. *Limite da função identidade.* Seja $f(x) = x$ para x qualquer. Prova-se facilmente que $\lim_{x\to p} f(x) = p$. Escolhamos qualquer vizinhança $N_1(p)$ e façamos $N_2(p) = N_1(p)$. Então, a relação (3.1) é trivialmente satisfeita. Na notação de limite, escremos

$$\lim_{x\to p} x = p\,.$$

Os "limites laterais" podem ser definidos duma maneira semelhante. Por exemplo, se $f(x) \to A$ quando $x \to p$ por valores maiores que p, dizemos que A é o *limite à direita* de f em p e exprimimo-lo analiticamente escrevendo

$$\lim_{x\to p+} f(x) = A\,.$$

Na terminologia de vizinhanças isto significa que para cada vizinhança $N_1(A)$ existe uma certa vizinhança $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \quad \text{sempre que} \quad x \in N_2(p) \qquad \text{e} \quad x > p. \tag{3.3}$$

Os limites à esquerda, que se representam escrevendo $x \to p-$, definem-se do mesmo modo, apenas restringindo x a valores menores que p.

Se f possui limite A em p, então também possui limites à esquerda e à direita de p, sendo ambos iguais a A. Mas uma função pode ter em p o limite à direita diferente do limite à esquerda, como se refere no exemplo que se segue.

Exemplo 3. Seja $f(x) = [x]$ para todo o x e seja p um inteiro qualquer. Para x vizinho de p, $x < p$, tem-se $f(x) = p - 1$, e para x vizinho de p, $x > p$, tem-se $f(x) = p$. Portanto conclui-se que

$$\lim_{x\to p-} f(x) = p - 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p+} f(x) = p\,.$$

Num exemplo como este, em que os limites à esquerda e à direita existem mas são distintos, o limite de f em p *não existe*.

Exemplo 4. Seja $f(x) = 1/x^2$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. O gráfico de f nas vizinhanças da origem está representado na fig. 3.1(b). Neste exemplo f toma valores arbitrariamente grandes nas proximidades de 0 e assim não tem limite à direita nem limite à esquerda, no ponto 0. Para provarmos rigorosamente que não existe qualquer número real A tal que $\lim_{x\to 0+} f(x) = A$, argumentamos do modo seguinte: Suponhamos que existia um tal A, por ejemplo $A \geq 0$. Escolhamos uma vizinhança $N_1(A)$ de raio 1. No intervalo $0 < x < \dfrac{1}{A+2}$, temos $f(x)$ $1/x^2 > (A+2)^2 > A + 2$, pelo que $f(x)$ não pode estar na vizinhança $N_1(A)$. Consequentemente, cada vizinhança $N(0)$ contém pontos $x > 0$ para os quais $f(x)$ é exterior a $N_1(A)$, e assim (3.3) não se verifica para esta escolha de $N_1(A)$. Portanto f não tem limite à direita em 0.

Exemplo 5. Seja $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta função toma o valor constante 1 para todos os valores reais de x, excepto para $x = 0$ em que o seu valor é 0. Ambos os limites à esquerda e à direita são 1 para cada ponto p, pelo que o limite de $f(x)$, quando x tende para p, existe e é igual a 1. Chama-se a atenção de que o limite de f é 1 no ponto 0, muito embora $f(0) = 0$.

3.3 Definição de continuidade de uma função

Na definição de limite não se faz qualquer afirmação relativa ao comportamento de f no próprio ponto p. A afirmação (3.1) refere-se aos pontos $x \neq p$ que pertencem a $N_2(p)$, de maneira que não é necessário que f seja definida em p. Além disso, mesmo se f é definida em p, o seu valor não necessita ser igual ao limite A. Contudo, se acontecer que f seja definida em p e se acontecer igualmente que $f(p) = A$, então dizemos que a função f é contínua em p. Por outras palavras, temos a seguinte definição.

Definição de continuidade de uma função num ponto. *Uma função f diz-se ser contínua num ponto p se*

(a) *f é definida em p, e*

(b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Esta definição pode igualmente ser dada recorrendo ao conceito de vizinhança. Uma função f é contínua em p se para cada vizinhança $N_1[f(p)]$ existe uma vizinhança $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1[f(p)] \quad \text{sempre que} \quad x \in N_2(p). \tag{3.4}$$

Uma vez que $f(p)$ pertence a $N_1[f(p)]$, não é necessária a condição $x \neq p$ em (3.4). Na terminologia δ e ϵ, em que se especificam os raios das vizinhanças, a definição de continuidade por ser dada novamente como segue:

Uma função f é contínua em p se para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - p| < \delta.$$

A definição de continuidade é ilustrada geometricamente na fig. 3.3. Esta é semelhante à fig. 3.2, excepto em que o valor limite A é igual ao valor da função $f(p)$, de modo que o gráfico completo de f relativo a $N_2(p)$ está no retângulo sombreado.

Exemplo 1. *Funções constantes são contínuas.* Se $f(x) = c$ para todo o x, então

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} c = c = f(p)$$

qualquer que seja p, e portanto f é sempre contínua.

EXEMPLO 2. *A função identidade é contínua para todo o x.* Se $f(x) = x$ para todo o x, tem-se

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} x = p = f(p)$$

para p qualquer, e portanto a função identidade é sempre contínua.

EXEMPLO 3. Seja $f(x) = [x]$ para qualquer x. Esta função é contínua em cada ponto p que não seja inteiro. Para p inteiro ela é descontínua, uma vez que o limite de f não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes. Uma descontinuidade deste tipo, em que os limites à esquerda e à direita existem mas são diferentes, chama-se *descontinuidade em salto* (descontinuidade de primeira espécie). Contudo, uma vez que o limite à direita é igual a $f(p)$ para todo o inteiro p, diz-se que f é *contínua à direita* de p.

EXEMPLO 4. A função f para a qual $f(x) = 1/x^2$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é descontínua em 0. [Ver fig. 3.1(b)]. Diz-se que existe uma *descontinuidade infinita* em 0 porque a função torna valores arbitrariamente grandes próximo de 0.

EXEMPLO 5. Seja $f(x) = 1$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta função é contínua por toda a parte, excepto em 0. É descontínua em 0 porque $f(0)$ não é igual ao limite de $f(x)$ quando $x \to 0$. Neste exemplo, a discontinuidade pode ser eliminada, definindo a função em 0 de modo a ter o valor 1 em vez de 0. Por esta razão, uma descontinuidade deste tipo chama-se uma *descontinuidade eliminável.* Repare-se que as descontinuidades em salto, tais como as que apresenta a função maior inteiro, não podem eliminar-se por simples mudança do valor de f num ponto.

3.4 Teoremas fundamentais sobre limites. Mais exemplos de funções contínuas

O cálculo com limites pode muitas vezes ser simplificado pelo uso do seguinte teorema que fornece regras básicas para operar com limites.

TEOREMA 3.1 *Sejam f e g duas funções tais que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = B$$

Tem-se então:

(i) $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = A + B$,

(ii) $\lim_{x \to p} [f(x) - g(x)] = A - B$,

(iii) $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,

(iv) $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = A/B \quad$ se $\quad B \neq 0$.

Nota: Um caso particular importante de (iii) ocorre quando f é constante, por exemplo $f(x) = A$ para todo o x. Neste caso, (iii) escreve-se $\lim_{x \to p} A \cdot g(x) = A \cdot B$.

A demonstração do teorema 3.1 não é difícil, mas é bastante extensa, pelo que a apresentamos numa Seção separada (Seção 3.5). Apresentamos aqui algumas consequências simples do teorema.

Em primeiro lugar observamos que as afirmações do teorema podem apresentar-se de maneira ligeiramente diferente. Por exemplo, (i) pode escrever-se:

$$\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x) .$$

que significa ser o limite da soma igual à soma dos limites das parcelas.

É costume representar por $f + g, f - g, f \cdot g$ e f/g as funções cujos valores para cada x são

$$f(x) + g(x), \qquad f(x) - g(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \text{e} \qquad f(x)/g(x) ,$$

respectivamente. Estas funções são chamadas a *soma, diferença, produto e quociente* de f e g. Subentende-se que o quociente de f/g só será definido nos pontos em que $g(x) \neq 0$. O seguinte corolário do teorema 3.1 está formulado com esta terminologia e notação e refere-se a funções contínuas.

TEOREMA 3.2 *Sejam f e g duas funções contínuas num ponto p. A soma $f + g$, a diferença $f - g$ e o produto $f \cdot g$ são também contínuas em p. Se $g(p) \neq 0$, também o quociente f/g é contínuo em p.*

Demonstração. Uma vez que f e g são contínuas em p, temos $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ e $\lim_{x \to p} g(x) = g(p)$. Portanto podemos aplicar as fórmulas para os limites dadas no Teorema 3.1 com $A = f(p)$ e $B = g(p)$ para demonstrar o Teorema 3.2.

Já vimos que a função identidade e funções constantes são contínuas para qualquer valor de x. Usando estes exemplos e o teorema 3.2, podemos construir muitos mais exemplos de funções contínuas.

EXEMPLO 1. *Continuidade de polinómios.* Se tomarmos $f(x) = g(x) = x$, o resultado sobre a continuidade do produto prova a continuidade em cada ponto para a função cujo valor em cada x, é x^2. Por indução matemática, resulta que para todo o real c e todo o inteiro e positivo n, a função f para a qual $f(x) = cx^n$ é contínua para todo o x. Uma vez que a soma de duas funções contínuas é, ela própria, uma função contínua, por indução resulta que o mesmo é verdadeiro para a soma de qualquer número finito de funções contínuas. Portanto *qualquer polinómio* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ é contínuo em todos os pontos.

EXEMPLO 2. *Continuidade de funções racionais.* O cociente de dois polinómios chama-se uma *função racional.* Se r é uma função racional, então tem-se

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

com p e q polinómios. A função r é definida para todo o real x, para o qual $q(x) \neq 0$. Uma vez que quocientes de funções contínuas são funções contínuas, vemos que cada função racional é contínua sempre que esteja definida. Um exemplo simples é $r(x) = 1/x$ se $x \neq 0$. Esta função é contínua para todo o x excepto para $x = 0$, em que não está definida.

O teorema seguinte mostra que se uma função g está enquadrada entre duas outras funções que tem limites iguais quando $x \to p$, então g tem também o mesmo limite quando $x \to p$.

TEOREMA 3.3. *Princípio de enquadramento. Sejam $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo o $x \neq p$, numa certa vizinhança $N(p)$. Suponhamos também que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = a .$$

Tem-se então $\lim_{x \to p} g(x) = a$.

Demonstração. Sejam $G(x) = g(x) - f(x)$ e $H(x) = h(x) - f(x)$.
As desigualdades $f \leq g \leq h$ implicam $0 \leq g - f \leq h - f$, ou

$$0 \leq G(x) \leq H(x)$$

para todo o $x \neq p$ em $N(p)$. Para provar o teorema basta mostrar que $G(x) \to 0$ quando $x \to p$, dado que $H(x) \to 0$ quando $x \to p$.

Seja $N_1(0)$ qualquer vizinhança de 0. Uma vez que $H(x) \to 0$ quando $x \to p$, existe uma vizinhança $N_2(p)$ tal que

$$H(x) \in N_1(0) \quad \text{sempre que} \quad x \in N_2(p) \qquad \text{e} \qquad x \neq p .$$

Podemos supor que $N_2(p) \subseteq N(p)$. Então a desigualdade $0 \leq G \leq H$ estabelece que $G(x)$ não está mais longe de 0 que $H(x)$ se x está em $N_2(p)$, $x \neq p$. Por conseguinte $G(x) \in N_1(0)$ para tal valor de x e portanto $G(x) \to 0$ quando $x \to p$, o que demonstra o teorema. A mesma demonstração é válida se todos os limites são limites laterais.

O princípio de enquadramento é útil na prática porque é muitas vezes possível determinar funções tais como f e h enquadrando g e para as quais é mais fácil analisar a continuidade. Usaremos este princípio para demonstrar que cada integral indefinido é uma função contínua.

TEOREMA 3.4. CONTINUIDADE DE INTEGRAIS INDEFINIDOS. *Seja f integrável em $[a, x]$ para todo o x pertencente a $[a, b]$ e seja*

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt .$$

O integral indefinido A é uma função contínua em cada ponto de $[a, b]$. (Em cada extremo a e b temos continuidade à direita e à esquerda, respectivamente).

Demonstração. Escolhamos p em $[a, b]$. Temos que provar que $A(x) \to A(p)$ quando $x \to p$. Temos

$$A(x) - A(p) = \int_p^x f(t)\, dt\ . \tag{3.5}$$

Calculemos agora o valor deste integral. Uma vez que f está limitada em $[a, b]$, existe uma constante $M > 0$ tal que $-M \le f(t) \le M$, qualquer que seja t de $[a, b]$. Se $x > p$, integramos estas desigualdades ao longo do intervalo $[p, x]$ para obtermos

$$-M(x - p) \le A(x) - A(p) \le M(x - p)\,.$$

Se $x < p$, obtemos as mesmas desigualdades com $x - p$ substituido por $p - x$. Portanto, em qualquer caso podemos fazer $x \to p$ e aplicarmos o princípio de enquadramento para encontrar que $A(x) \to A(p)$. Isto prova o teorema. Se p é um ponto extremo de $[a, b]$, fazemos $x \to p$ por valores pertencentes ao intervalo, e aí os limites são laterais.

EXEMPLO 3. *Continuidade do seno e do cosseno.* Uma vez que a função é um integral indefinido, $\operatorname{sen} x = \int_0^x \cos t\, dt$, o teorema anterior diz-nos que o seno é contínuo para todo o valor de x. De modo análogo, o cosseno é contínuo para todo o x, pois que $\cos x = 1 - \int_0^x \operatorname{sen} t\, dt$. A continuidade destas funções pode também ser provada sem recorrer aos integrais indefinidos. Essa demonstração é apresentada no exercício 26 da Seção 3.6.

EXEMPLO 4. Neste exemplo demonstramos uma importante fórmula sobre limites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\ , \tag{3.6}$$

a qual será necessária mais tarde, no estudo do cálculo diferencial. Uma vez que o denominador do quociente $(\operatorname{sen} x)/x$ tende para 0 quando $x \to 0$, não podemos aplicar o teorema do quociente de limites para provar (3.6). Em vez dêste utilizamos o princípio de enquadramento. Da Seção 2.5 resultam as desigualdades fundamentais

$$0 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}\ ,$$

válidas para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. São igualmente verdadeiras para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ uma vez que $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -x$ e assim são válidas para todo o $x \neq 0$ numa vizinhança $N(0; \frac{\pi}{2})$. Quando $x \to 0$, encontra-se $\cos x \to 1$, uma vez que o cosseno é contínuo em $x = 0$ e portanto $1/(\cos x) \to 1$. Portanto, pelo princípio do enquadramento, deduzimos (3.6). Se definimos $f(x) = (\text{sen } x)/x$ para $x \neq 0, f(0) = 1$, então f é contínua para todo o valor real de x. O seu gráfico está representado na fig. 3.4.

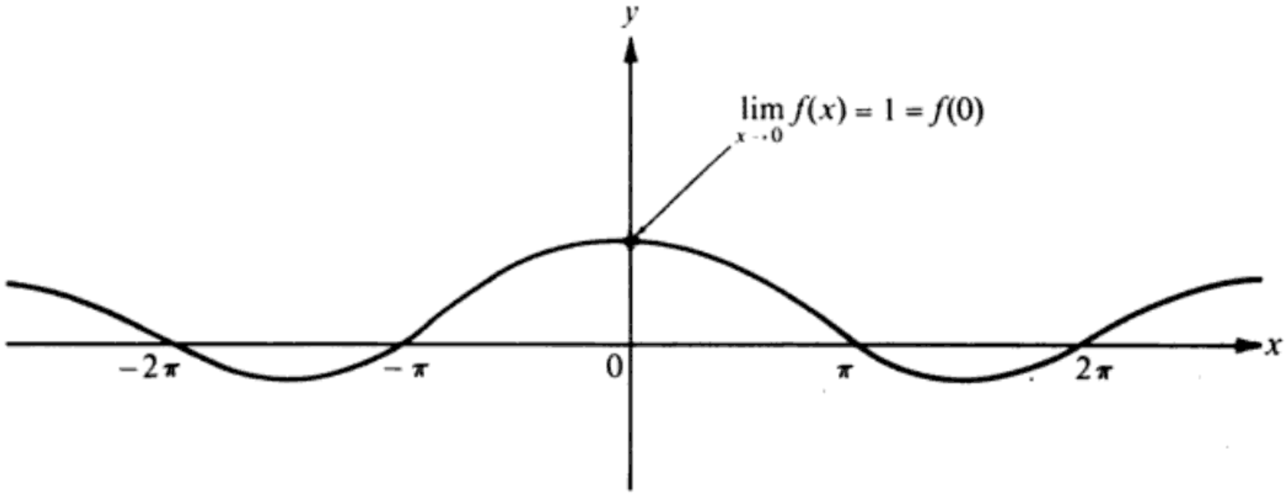


Fig. 3.4 $f(x) = (\text{sen x})/x$, se $x \neq 0, f(0) = 1$. Esta função é contínua para todo o x.

EXEMPLO 5. *Continuidade de f quando $f(x) = x^r$, para $x > 0$, com r um número racional e positivo.*

Do teorema 2.2 resulta a seguinte fórmula de integração

$$\int_0^x t^{1/n}\, dt = \frac{x^{1+1/n}}{1 + 1/n},$$

válida para todo o $x > 0$ e todo o inteiro $n \geq 1$. Usando os teoremas 3.4 e 3.1, verificamos que a função A dada por $A(x) = x^{1+1/n}$ é contínua em todos os pontos $p > 0$. Seja agora $g(x) = x^{1/n} = A(x)/x$ para $x > 0$. Uma vez que g é o quociente de duas funções contínuas, é igualmente contínua em todos os pontos $p > 0$. Mais geralmente se $f(x) = x^{m/n}$, onde m é um inteiro positivo, então f é um produto de funções contínuas e assim é contínua em todos os pontos $p > 0$. Prova-se assim a continuidade da potência de ordem $r, f(x) = x^r$, quando r é qualquer número racional positivo, em todos os pontos $p > 0$. Em $p = 0$ define-se a continuidade à direita.

A continuidade da função potência de expoente r para r racional, pode também deduzir-se sem recorrer a integrais. Na secção 3.13 será dada outra demonstração.

3.5 Demonstrações dos teoremas fundamentais sobre limites

Nesta Seção demonstramos o teorema 3.1, o qual nos dá as regras fundamentais para o cálculo de limites de somas, produtos e quocientes. As principais noções algébricas usadas na demonstração são duas propriedades dos valores absolutos que foram mencionados nas Seções 14.8 e 14.9. São elas (1) a desigualdade triangular que estabelece que $|a + b| \leq |a| + b$ para todos os reais a e b e (2) a igualdade $|ab| = |a|\,|b|$ que estabelece que o valor absoluto de produto é o produto dos valores absolutos.

Demonstrações de (i) e (ii). Visto que as duas igualdades

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to p} [f(x) - A] = 0$$

são equivalentes e ainda porque

$$f(x) + g(x) - (A + B) = [f(x) - A] + [g(x) - B],$$

basta demonstrar a alínea (i) do teorema quando os limites A e B são ambos nulos.

Suponhamos, então, que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to p$. Devemos provar que $f(x) + g(x) \to 0$ quando $x \to p$. Significa isto ter que demonstrar-se que para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) + g(x)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta. \tag{3.7}$$

Seja ϵ dado. Uma vez que $f(x) \to 0$ quando $x \to p$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_1. \tag{3.8}$$

De modo análogo, uma vez que $g(x) \to 0$ quando $x \to p$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_2. \tag{3.9}$$

Se representarmos por δ o menor de dois números δ_1 e δ_2, então ambas as desigualdades (3.8) e (3.9) são válidas se $0 < |x-p| < \delta$ e portanto, pela desigualdade triangular, temos que

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Provámos (3.7) a qual, por sua vez, demonstra (i). A demonstração de (ii) é inteiramente semelhante, excepto em que na última fase da demonstração usamos a desigualdade $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

Demonstração de (iii). Suponhamos que provámos (iii) no caso particular em que um dos limites é 0. Então o caso geral resulta facilmente deste caso particular, como se conclui da seguinte igualdade

$$f(x)g(x) - AB = f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A].$$

O caso particular implica que cada termo no segundo membro tende para 0 quando $x \to p$ e, pela propriedade (i), a soma dos dois termos também tende para 0. Portanto resta provar (iii) no caso especial em que um dos limites, por exemplo B, é 0.

Suponhamos que $f(x) \to A$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to p$. Trata-se de provar que $f(x)\,g(x) \to 0$ quando $x \to p$. Para tal devemos mostrar que dado um número positivo ϵ, existe em $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)g(x)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta\,. \tag{3.10}$$

Uma vez que $f(x) \to A$ quando $x \to p$, existe um δ_1 tal que

$$|f(x) - A| < 1 \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_1\,. \tag{3.11}$$

Para tal x, temos $|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$ e da qui

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < (1 + |A|)\,|g(x)|. \tag{3.12}$$

Já que $g(x) \to 0$ quando $x \to p$, para todo o $\epsilon > 0$ existe um δ_2 tal que

$$|g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |A|} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_2\,. \tag{3.13}$$

Portanto, se designamos por δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2, então ambas as desigualdades (3.12) e (3.13) são válidas sempre que $0 < |x - p| < \delta$, e para tal valor de x, deduzimos (3.10), o que completa a demonstração de (iii).

Demonstração de (iv). Sendo o quociente $f(x)/g(x)$ o produto de $f(x)/B$ por $B/g(x)$ basta provar que $B/g(x) \to 1$ quando $x \to p$ e depois aplicar (iii). Seja $h(x) = g(x)/B$; então $h(x) \to 1$ quando $x \to p$ e desejamos provar que $1/h(x) \to 1$ quando $x \to p$.

Dado $\epsilon > 0$, necessita demonstrar-se que existem um $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta\,. \tag{3.14}$$

A diferença do primeiro membro pode escrever-se

$$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| = \frac{|h(x) - 1|}{|h(x)|}\,. \tag{3.15}$$

Uma vez que $h(x) \to 1$ quando $x \to p$, podemos escolher um $\delta > 0$ tal que ambas as desigualdades

$$|h(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |h(x) - 1| < \frac{1}{2} \tag{3.16}$$

sejam satisfeitas quando $0 < |x - p| < \delta$. A segunda destas desigualdades implica que $h(x) >$

$> \dfrac{1}{2}$ e deste modo $1/|h(x)| = 1/h(x) < 2$ para tal valor de x. Utilizando esta conclusão em (3.15) juntamente com a primeira desigualdade em (3.16) obtemos (3.14), o que completa a demonstração de (iv).

3.6 Exercícios

Nos Exercícios 1 a 14 calcular os limites e explicar quais os teoremas utilizados na resolução de cada um.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2}$.
3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.
4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.
5. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(t + h)^2 - t^2}{h}$.
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \quad a \neq 0$.
7. $\lim_{a\to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \quad x \neq 0$.
8. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \quad a \neq 0$.
9. $\lim_{t\to 0} \operatorname{tg} t$.
10. $\lim_{t\to 0} (\operatorname{sen} 2t + t^2 \cos 5t)$.
11. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{|x|}{x}$.
12. $\lim_{x\to 0-} \dfrac{|x|}{x}$.
13. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.
14. $\lim_{x\to 0-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Servir-se da relação $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$ para establecer as igualdades dos Exercicios 15 a 20.

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$.
16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x} = 2$.
17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = 5$.
18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x} = 2$.
19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \cos a$.
20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

21. Mostrar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ [*Sugestão:* $(1 - \sqrt{u})(1 + \sqrt{u}) = 1 - u$.]
22. A função f define-se do modo seguinte

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq c, \\ ax + b & \text{se } x > c, \end{cases}$$

onde a, b, c são constantes. Se b e c são dados, encontrar todos os valores de a (se existir algum) para os quais f é contínua no ponto $x = c$.

23. Resolver o Exercício 22 se f é definida como segue

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{se } x \leq c\,, \\ ax^2 + b & \text{se } x > c\,. \end{cases}$$

24. Em que pontos são funções contínuas a tangente e a cotangente?
25. Seja $f(x) = (\operatorname{tg} x)/x$ com $x \neq 0$. Traçar o gráfico de f relativo aos intervalos semi-abertos $[-\frac{1}{4}\pi, 0)$ e $(0, \frac{1}{4}\pi]$. O que acontece a $f(x)$ quando $x \to 0$? Pode definir-se $f(0)$ de tal modo que f venha contínua em 0?
26. Este exercício esboça uma outra demonstração da continuidade do seno e do cosseno.

(a) A desigualdade $|\operatorname{sen} x| < |x|$, válida para $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ foi demonstrada no Exercício 34 da Seção 2.8. Utilizar esta desigualdade para provar que a função é contínua em 0.
(b) Servir-se da alínea (a) e da identidade $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ para demonstrar que o cosseno é contínuo em 0.
(c) Usar as fórmulas de adição para $\operatorname{sen}(x + h)$ e $\cos(x + h)$ para provar que o seno e o cosseno são contínuas para qualquer real x.

27. A fig. 3.5 mostra uma parte do gráfico da função f definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad \text{se} \quad x \neq 0\,.$$

Para $x = \frac{1}{n\pi}$, com n um inteiro, temos $\operatorname{sen}(1/x) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$. Entre dois tais pontos, a função cresce até atingir o valor $+1$, decresce até tomar o valor zero e anula até -1, e volta a crescer até atingir 0. Por conseguinte entre um qualquer desses pontos e a origem, a curva tem um número infinito de oscilações. Isto sugere-nos que os valores da função não se aproximam de nenhum valor fixo quando $x \to 0$.

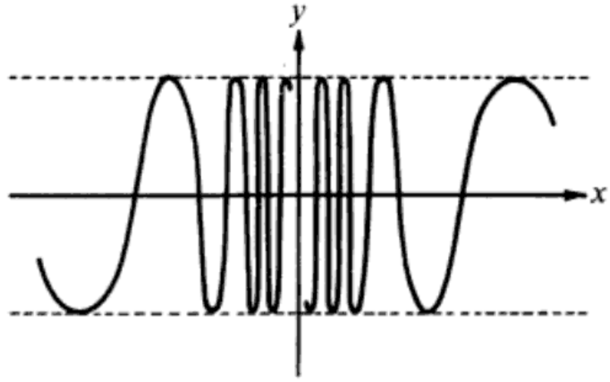


Fig. 3.5 — $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Esta função é descontínua em 0 embora se defina $f(0)$.

Provar que não existe nemhum valor real A tal que $f(x) \to A$ quando $x \to 0$. Istomostra que não é possível definir $f(0)$ de modo que f seja contínua em 0.

[*Sugestão:* supor que existe um tal A e concluir com uma contradição.]

28. Para $x \neq 0$, seja $f(x) = [1/x]$, designando por $[t]$ o maior inteiro $\leq t$. Traçar o gráfico de f para os intervalos $[-2, -\frac{1}{5}]$ e $[\frac{1}{5}, 2]$. Que se verifica para $f(x)$ quando $x \to 0$ por valores positivos? e por valores negativos? Poderá definir-se $f(0)$ de tal modo que f seja contínua em 0?
29. O mesmo que no Exercício 28, quando $f(x) = (-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.
30. O mesmo que no Exercício 28, quando $f(x) = (-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.
31. Dar um exemplo de uma função que é contínua num ponto de um intervalo e descontínua em todos os outros pontos do intervalo, ou provar que não existe uma tal função.
32. Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Definir $f(0)$ de tal modo que f seja contínua em 0.
33. Seja f uma função tal que $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$ para todos os valores de u e v no intervalo $[a, b]$.
    (a) Provar que f é contínua em cada ponto de $[a, b]$.
    (b) Supor que f é integrável em $[a, b]$. Provar que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b - a)f(a) \right| \leq \frac{(b - a)^2}{2}.$$

    (c) Demonstrar a propriedade mais geral de que, qualquer que seja $c \in [a, b]$ se tem

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b - a)f(c) \right| \leq \frac{(b - a)^2}{2}.$$

3.7 Funções compostas e continuidade

A partir de funções dadas vimos já que podem definir-se novas funções por adição, subtração, multiplicação e divisão. Veremos a seguir novo processo de construir funções por meio de uma operação conhecida por composição. Começaremos por ilustrar o método com um exemplo.

Seja $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Para calcular $f(x)$, quadramos em primeiro lugar x e em seguida determinamos o seno de x^2. Então $f(x)$ obtém-se pela combinação de duas outras funções, a função potência de x de expoente dois e a função seno. Se fizermos $v(x) = x^2$ e $u(x) = \operatorname{sen} x$, podemos exprimir $f(x)$ em termos de u e v escrevendo

$$f(x) = u[v(x)].$$

Dizemos que f é a *composição* de u e v (por esta ordem). Se compomos u e v pela ordem inversa, obtemos um resultado diferente, $v[u(x)] = (\text{sen } x)^2$, isto é, para calcular $v[u(x)]$ tomamos o seno de x em primeiro lugar e em seguida quadramos sen x.

Podemos agora desenvolver este processo com mais generalidade. Sejam u e v duas funções quaisquer. A função composta de u e v (por esta ordem) define-se como sendo a função f para a qual

$$f(x) = u[v(x)] \qquad \text{(leia-se "}u\text{ de }v\text{ de }x\text{")}.$$

Quer dizer, para calcular o valor de f em x calculamos primeiramente $v(x)$ e em seguida calculamos u no ponto $v(x)$. Sem dúvida que tal pressupõe que faz sentido calcular u em $v(x)$ e portanto f será definida unicamente naqueles pontos x para os quais $v(x)$ pertence ao domínio de u.

Por exemplo, se $u(x) = \sqrt{x}$ e $v(x) = 1 - x^2$, então a função composta f é definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Notar que v é definida para todo o real x, enquanto que u é definida unicamente para $x \geq 0$. Portanto a função composta f é definida unicamente para aqueles valores de x satisfazendo a $1 - x^2 \geq 0$.

Formalmente, $f(x)$ obtém-se substituindo x por $v(x)$ na expressão $u(x)$. Por esta razão, a função f é algumas vezes representada pelo símbolo $f = u(v)$ (leia-se "u de v"). Outra notação usada para representar a composição é $f = u \circ v$ (leia-se "u comporta com v"). Esta notação é semelhante à do produto $u \cdot v$ e veremos a seguir que a operação de composição tem algumas das propriedades possuídas pela multiplicação.

A composição de três ou mais funções pode efetuar-se compondo duas, o resultado com a terceira e assim sucessivamente. Deste modo, a função f dada por

$$f(x) = \cos [\text{sen } (x^2)]$$

é uma composição, $f = u \circ (v \circ w)$, onde

$$u(x) = \cos x, \qquad v(x) = \text{sen } x, \qquad \text{e} \qquad w(x) = x^2.$$

Observe-se que o mesmo f pode ser obtido compondo u e v em primeiro lugar e depois compondo $u \circ v$ com w ou seja: $f = (u \circ v) \circ w$. Concluímos, por este exemplo, ser válida a *propriedade associativa* para a composição, a qual estabelece que

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w \tag{3.17}$$

para todas as funções u, v, w desde que as diferentes composições em questão formem sentido. Deixa-se ao leitor o cuidado de verificar que a demonstração de (3.17) é imediata.

Deve pôr-se em destaque que a *propriedade comutativa* $u \circ v = v \circ u$ nem sempre é válida para a composição de funções. Por exemplo, se $u(x) = \text{sen } x$ e $v(x) = x^2$ a função composta $f = u \circ v$ é dada por $f(x) = \text{sen } x^2$ (que significa $\text{sen}(x^2)$), enquanto que a função composta $g = v \circ u$ é dada por $g(x) = \text{sen}^2 x$ [que significa $(\text{sen } x)^2$].

Demonstramos a seguir um teorema que nos diz que a propriedade de continuidade se mantém face à operação de composição. Mais exatamente temos o

TEOREMA 3.5. *Seja v contínua em p e u contínua em q, com $q = v(p)$. A função composta $f = u \circ v$ é contínua em p.*

Demonstração. Uma vez que u é contínua em q, para toda a vizinhança $N_1[u(q)]$ existe uma vizinhança $N_2(q)$ tal que

$$u(y) \in N_1[u(q)] \quad \text{sempre que} \quad y \in N_2(q)\,. \tag{3.18}$$

Mas $q = v(p)$ e v é contínua em p, de maneira que à vizinhança $N_2(q)$ corresponde outra $N_3(p)$ tal que

$$v(x) \in N_2(q) \quad \text{sempre que} \quad x \in N_3(p)\,. \tag{3.19}$$

Se escrevemos $y = v(x)$ e combinamos (3.18) e (3.19), encontramos que para cada vizinhança $N_1(u[v(p)])$ existe uma vizinhança $N_3(p)$ tal que

$$u[v(x)] \in N_1(u[v(p)]) \quad \text{sempre que} \quad x \in N_3(p)\,,$$

ou, por outras palavras, uma vez que $f(x) = u[v(x)]$,

$$f(x) \in N_1[f(p)] \quad \text{sempre que} \quad x \in N_3(p)\,.$$

o que significa que f é contínua em p, como se pretendia provar.

EXEMPLO 1. Seja $f(x) = \text{sen } x^2$. Esta é uma função composta de duas funções contínuas para todo o valor da variável, pelo que f é contínua.

EXEMPLO 2. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2} = u[v(x)]$, com $u(x) = \sqrt{x}$, e $v(x) = 1 - x^2$. A função v é contínua para todo o valor da variável, mas u é contínua unicamente para pontos $x \geq 0$. Daqui f é contínua naqueles pontos x para os quais $v(x) \geq 0$, isto é todos os pontos verificando $x^2 \leq 1$.

3.8 Exercícios

Nos Exercícios 1 a 10 as funções f e g são definidas pelas fórmulas dadas. A menos que seja dito o contrário, os domínios de f e g são o conjunto dos números reais. Seja $h(x) = f[g(x)]$ sempre que $g(x)$ pertence ao domínio de f. Em cada caso, definir o domínio de h e dar uma ou mais fórmulas determinando $h(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 2x, \qquad g(x) = x + 1.$
2. $f(x) = x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2x.$
3. $f(x) = \sqrt{x} \quad \text{se} \quad x \geq 0, \qquad g(x) = x^2.$
4. $f(x) = \sqrt{x} \quad \text{se} \quad x \geq 0, \qquad g(x) = -x^2.$

5. $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$.
6. $f(x) = -x^2$, $\quad g(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$.
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$. $\quad g(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$.
8. $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$, $\quad g(x) = \operatorname{sen} x$,
9. $f(x) = \sqrt{x}$ se $x > 0$, $\quad g(x) = x + \sqrt{x}$ se $x > 0$.
10. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ se $x > 0$, $\quad g(x) = x + \sqrt{x}$ se $x > 0$.

Calcular os limites nos Exercícios 11 a 20 e explicar que teoremas se utilizam para cada exemplo

11. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$.
12. $\lim_{x \to 4} \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.
13. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} t)}{\operatorname{sen} t}$.
14. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$.
15. $\lim_{t \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(t - \pi)}{t - \pi}$.
16. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$.
17. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.
18. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$.
19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$.
20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$.

21. Sejam f e g duas funções definidas por:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{para todo } x, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < 0\,, \\ x^2 & \text{for } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Determinar uma fórmula (ou fórmulas) para o cálculo da função composta $h(x) = f[g(x)]$. Para que valores de x é h contínua?

22. Resolver o Exercício 21 quando f e g são definidos por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1\,, \\ 0 & \text{se } |x| > 1\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } |x| \leq 2\,, \\ 2 & \text{se } |x| > 2\,. \end{cases}$$

23. Resolver o Exercício 21 quando $h(x) = g[f(x)]$.

3.9 Teorema de Bolzano para funções contínuas

Até final do capítulo discutiremos certas propriedades especiais das funções contínuas que serão usadas frequentemente. Muitas destas propriedades parecem triviais quando interpretados geometricamente, e, em consequência, muitas pessoas se inclinam a aceitá-las como evidentes. Contudo é importante pôr em destaque que estas afirmações não são mais evidentes do que a própria definição de continuidade e portanto devem ser demonstradas se pretendemos utilizá-las com qualquer grau de generalidade. A demonstração de muitas destas propriedades fazem apelo ao axioma da completude para o sistema dos números reais.

Bernardo Bolzano (1781-1848), sacerdote católico que deu importante contribuição à

Matemática na primeira metade do século XIX, foi um dos primeiros a reconhecer que muitas afirmações "evidentes" acerca das funções contínuas necessitavam de demonstração. As suas observações acerca da continuidade foram publicadas posteriormente, em 1850, num livro notável *"Paradoxien des Unendlichen"*. Um destes resultados, actualmente conhecido como o teorema de Bolzano, está representado na fig. 3.6, no qual se mostra o gráfico duma função contínua. O gráfico está situado abaixo de $0X$ para $x = a$ e acima deste eixo para $x = b$. O teorema de Bolzano afirma que a curva há-de intersetar algures este eixo entre a e b. Esta propriedade, publicada pela primeira vez por Bolzano em 1817, pode ser enunciada rigorosamente do modo seguinte.

TEOREMA 3.6. TEOREMA DE BOLZANO. *Seja f uma função contínua em cada ponto do intervalo fechado $[a, b]$, a qual toma valores $f(a)$ e $f(b)$ de sinais contrários. Então existe pelo menos um c no intervalo aberto (a, b), tal que $f(c) = 0$.*

Basearemos a demonstração do teorema de Bolzano na seguinte propriedade das funções contínuas que será aqui apresentada como um teorema.

TEOREMA 3.7. CONSERVAÇÃO DO SINAL DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS. *Seja f contínua em c e admita-se que $f(c) \neq 0$. Existe então um intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ no qual f tem o mesmo sinal que $f(c)$.*

Demonstração do teorema 3.7. Suponhamos $f(c) > 0$. Devido à continuidade, para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon \quad \text{sempre que} \quad c - \delta < x < c + \delta . \tag{3.20}$$

Se tomamos o δ correspondente a $\epsilon = f(c)/2$ (isto é, ϵ *positivo*), então (3.20) vem

$$\tfrac{1}{2}f(c) < f(x) < \tfrac{3}{2}f(c) \quad \text{sempre que} \quad c - \delta < x < c + \delta .$$

Portanto $f(x) > 0$ neste intervalo e por isso $f(x)$ e $f(c)$ têm o mesmo sinal. Se $f(c) < 0$, toma-se δ correspondente a $\varepsilon = -\dfrac{1}{2}f(c)$ e chega-se à mesma conclusão.

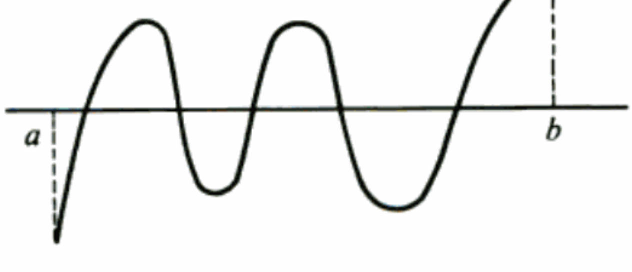


Fig. 3.6. Teorema de Bolzano

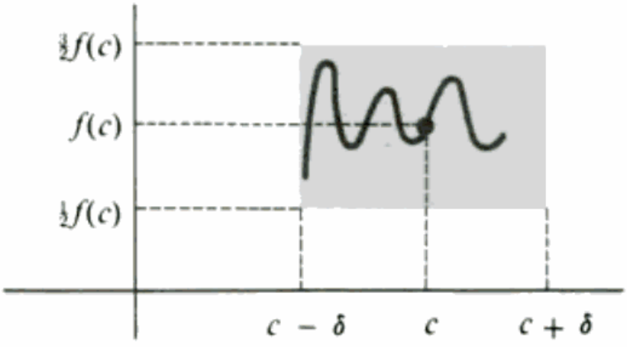


Fig. 3.7. Aqui $f(x) > 0$ para x próximo de c porque $f(c) > 0$.

Nota: Se existe continuidade lateral em c, então existe um intervalo semi-fechado $[c, c+\delta)$ ou $(c-\delta, c]$ no qual f tem o mesmo sinal que $f(c)$.

Demonstração do teorema de Bolzano. Para fixar ideias suponhamos $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, tal como se mostra na fig. 3.6. Podem existir diferentes valores de x entre a e b para os quais $f(x) = 0$. O nosso problema é encontrar *um* e isto será feito determinando o maior x para o qual $f(x) = 0$. Com esta finalidade, designamos por S o conjunto de todos os pontos x do intervalo $[a, b]$ para os quais $f(x) \leq 0$. Existe pelo menos um desses pontos em S porque $f(a) < 0$. Por conseguinte S é não vazio. Também S é limitado superiormente, uma vez que todos os elementos de S pertencem a $[a, b]$ e deste modo S tem supremo. Seja sup $S = c$. Pretendemos provar que $f(c) = 0$.

Existem unicamente três hipóteses: $f(c) > 0$, $f(c) < 0$ ou $f(c) = 0$. Se $f(c) > 0$ há um intervalo $(c-\delta, c+\delta)$, ou $(c-\delta, c]$ se $c = b$, no qual f é positiva. Portanto nenhum ponto de S pode estar à direita de $c-\delta$ e deste modo $c-\delta$ é um limite superior de S. Mas $c-\delta < c$ e c é o *menor* limite superior de S, o que nos leva a concluir ser impossível a desigualdade $f(c) > 0$. Se $f(c) < 0$, existe um intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ ou $[c, c+\delta)$ se $c = a$, no qual f é negativa. Portanto $f(x) < 0$ para algum $x > c$, o que contradiz o fato de que c é o supremo de S, logo $f(c) < 0$ é também impossível e a única possibilidade e a hipótese restante $f(c) = 0$. Além disso $a < c < b$ porque $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Está pois demonstrado o teorema de Bolzano.

3.10 O teorema do valor intermédio para funções contínuas

Uma consequência imediata do teorema de Bolzano é o *teorema do valor intermédio* para funções contínuas (fig. 3.8).

TEOREMA 3.8. *Seja f contínua em cada ponto do intervalo fechado $[a, b]$. Se x_1 e x_2 são dois pontos arbitrários de $[a, b]$ com $x_1 < x_2$ e tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$, a função f toma todos os valores compreendidos entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, pelo menos uma vez, no intervalo (x_1, x_2).*

Demonstração. Suponhamos $f(x_1) < f(x_2)$ e seja k um valor qualquer compreendido entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Seja g uma função definida em $[x_1, x_2]$ por

$$g(x) = f(x) - k\,.$$

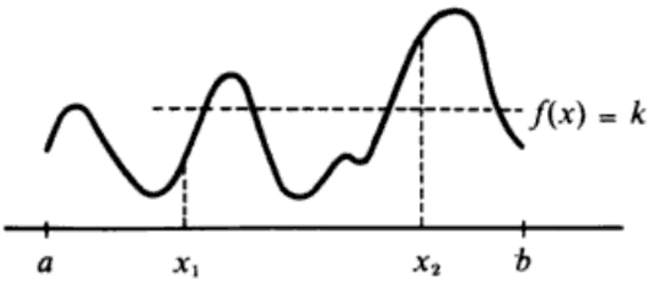


Fig. 3.8 Teorema do valor intermédio

Fig. 3.9 Um exemplo de função para a qual não é aplicável o teorema de Bolzano.

Então g é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ e temos

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0\,, \qquad g(x_2) = f(x_2) - k > 0\,.$$

Aplicando à função g o teorema de Bolzano, temos $g(c) = 0$ para certo c entre x_1 e x_2. Mas isto significa que $f(c) = k$, como se pretendia demonstrar.

Nota: Quer no teorema de Bolzano, quer no teorema do valor intermédio supõe-se que f é contínua em cada ponto de $[a, b]$, incluindo os pontos extremos. Para se compreender porque é necessária a continuidade nestes pontos chamamos a atenção para o gráfico da função representado na fig. 3.9. Aqui f é contínua em todo o intervalo $[a, b]$ exceto no ponto a. Embora $f(a)$ seja negativa e $f(b)$ positiva, não existe nenhum x em $[a, b]$ para o qual seja $f(x) = 0$.

Concluímos esta Seção com uma aplicação do teorema do valor intermédio na qual demonstramos que cada número real e positivo possui uma raíz n-enesima positiva, como já fora referido na Seção I 3.14. O enunciado rigoroso desta propriedade é o seguinte:

TEOREMA 3.9. *Se n é um inteiro positivo e se $a > 0$, existe um e um só número positivo b tal que $b^n = a$.*

Demonstração. Seja $c > 1$ e tal que $0 < a < c$ e consideremos a função f definida no intervalo $[0, c]$ por $f(x) = x^n$. Esta função é contínua em $[0, c]$ e nos pontos extremos tem-se $f(0) = 0, f(c) = c^n$. Uma vez que $0 < a < c < c^n$, o número dado a está compreendido entre os valores $f(0)$ e $f(c)$ da função f. Portanto, pelo teorema do valor intermédio, tem-se $f(x) = a$ para algum x em $(0, c)$, por exemplo $x = b$. Isto prova a existência de pelo menos um positivo b tal que $b^n = a$. Não existirá mais do que um tal número b, porque f é estritamente crescente em $[0, c]$ e o teorema está, pois, demonstrado.

3.11 Exercícios

1. Seja f um polinómio de grau n, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, tal que o primeiro e o último dos coeficientes, c_0 e c_n, tenham sinais opostos. Provar que $f(x) = 0$ para, pelo menos, um valor positivo de x.
2. Um número real x_1 que verifique $f(x_1) = 0$ chama-se uma raíz real da equação $f(x) = 0$. Diz-se que uma raíz real de uma equação foi *separada* quando se determinou um intervalo $[a, b]$ contendo esta raíz e nenhuma outra. Recorrendo ao teorema de Bolzano, separar as raizes reais de cada uma das seguintes equações (cada uma tem quatro raízes reais).
   (a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$.
   (b) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$.
   (c) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0$.
3. Se n é um inteiro positivo para e $a < 0$, provar que existe um e um só número negativo b tal que $b^n = a$.

4. Seja $f(x) = \text{tg } x$. Embora $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ e $f(3\pi/4) = -1$ não existe nenhum x no intervalo $[\pi/4, \frac{3\pi}{4}]$ para o qual $f(x) = 0$. Explicar qual o motivo porque esta afirmação não contradiz o teorema de Bolzano.
5. Dada uma função f de valores reais e contínua no intervalo fechado $[0, 1]$, suponha-se que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o x em $[0, 1]$. Provar que existe pelo menos um ponto c em $[0, 1]$ para o qual $f(c) = c$. Tal ponto chama-se um *ponto fixo* de f. O resultado deste Exercício é um caso particular do *teorema do ponto fixo de Brouwer*. [*Sugestão:* Aplicar o teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$].
6. Dada a função real f, contínua no intervalo fechado $[a, b]$, admita-se que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Provar que f tem um ponto fixo em $[a, b]$. (Ver Exercício 5).

3.12 O processo de inversão

A seguir apresentamos um outro importante método muitas vezes utilizado para construir novas funções a partir de funções dadas. Antes de descrevermos o método em pormenor, vamos ilustrá-lo com um exemplo simples.

Consideremos a função f definida no intervalo $[0, 2]$ por $f(x) = 2x + 1$. O contradomínio de f é o intervalo $[1, 5]$. Cada ponto x em $[0, 2]$ é transformado por f em um único ponto y de $[1, 5]$, a saber

$$y = 2x + 1. \tag{3.21}$$

Inversamente, para cada y do intervalo $[1, 5]$, existe um único x de $[0, 2]$ para o qual $y = f(x)$. Para determinar este x resolvemos (3.21) relativamente a x, obtendo

$$x = \tfrac{1}{2}(y - 1).$$

Esta equação define x como uma função de y. Se representarmos esta função por g, temos

$$g(y) = \tfrac{1}{2}(y - 1)$$

para todo o y pertencente a $[1, 5]$. A função g chama-se a *inversa* de f. Notemos que $g[f(x)] = x$ para todo o x pertencente a $[0, 2]$ e que $f[g(y)] = y$ para todo o y de $[1, 5]$.

Consideremos agora uma função mais geral f com domínio A e contradomínio B. Para todo o x de A, existe um e um só y de B tal que $y = f(x)$. Para cada y de B existe pelo menos um x de A tal que $f(x) = y$. Admitamos que *existe um só* x. Então podemos definir uma nova função g em B do modo seguinte:

$$g(y) = x \quad \text{significa} \quad y = f(x).$$

Por outras palavras, o valor de g em cada ponto y de B é o único x de A tal que $f(x) = y$. Esta nova função g chama-se a *inversa* de f. O processo segundo o qual se obtém g de f é chamado *inversão*. Note-se que $g[f(x)] = x$, para todo o x de A e que $f[g(y)] = y$ para todo o y de B.

O processo de inversão pode aplicar-se a qualquer função f gozando da propriedade de para cada y no contradomínio de f existir um só x no domínio de f tal que $f(x) = y$. Em particular, uma função contínua e estritamente monótona no intervalo $[a, b]$ goza dessa propriedade. Na fig. 3.10 apresenta-se um exemplo de uma função deste tipo. Seja $c = f(a)$, $d = f(b)$. O teorema do valor intermédio para funções contínuas diz-nos que, no intervalo $[a, b]$, f toma todos os valores compreendidos entre c e d. Além disso f não pode tomar o mesmo valor duas vezes porque $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$. Portanto, toda a função contínua estritamente monótona admite função inversa.

A relação entre uma função f e a sua inversa g pode também explicar-se de modo simples com a formulação do conceito de função por pares ordenados. Na Seção 1.3 definimos uma função f como um conjunto de pares ordenados (x, y) não podendo dois quaisquer deles possuir o mesmo primeiro elemento. A função inversa g é formada pelos pares (x, y) de f, trocando entre si os elementos x e y. Quer dizer $(y, x) \in g$ se é só se $(x, y) \in f$. Se f é estritamente monótona, dois pares quaisquer f também não têm o mesmo primeiro elemento. Deste modo g é, na verdade, uma função.

EXEMPLO. *Função raiz n-enesima.* Se n é um inteiro positivo, façamos $f(x) = x^n$ para $x \geqq 0$. Então f é estritamente crescente para todo o intervalo $[a, b]$ como $0 \leqq a \leqq b$. A função inversa g é a função raiz n-enesima, defininda para $y \geqq 0$ por

$$g(y) = y^{1/n}.$$

3.13 Propriedades de funções preservadas por inversão

Muitas das propriedades duma função f são transmitidas à inversa g. Na figura 3.11 damos uma ideia da relação entre os respetivos gráficos. Um deles pode ser obtido do outro por simples simetria a respeito da reta $y = x$, porque o ponto (u, v) está situado sobre o gráfico de f se e somente se o ponto (v, u) está sobre o gráfico de g.

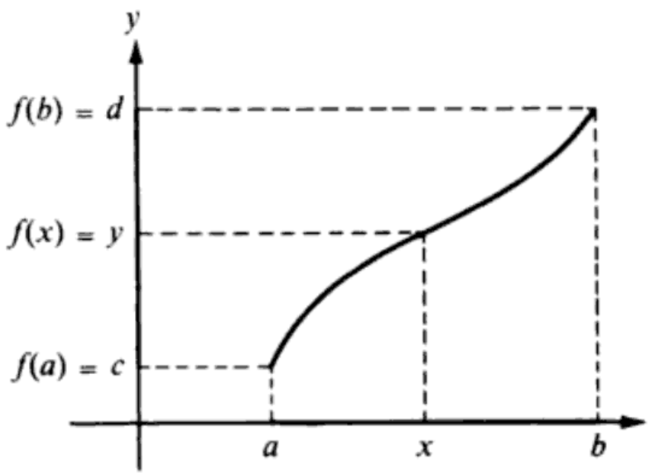


Fig. 3.10 Uma função contínua estritamente crescente.

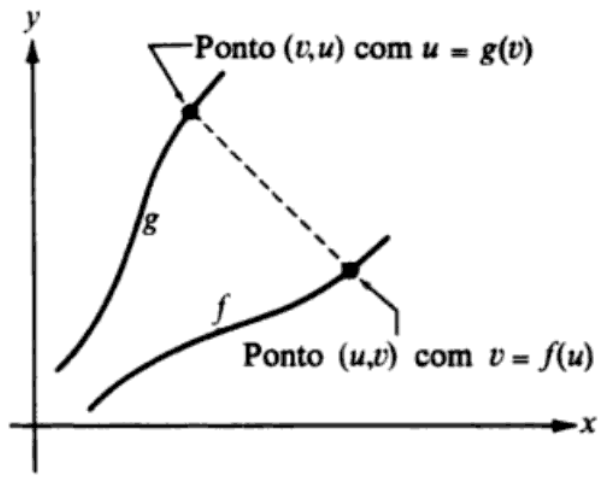


Fig. 3.11. Representação do processo de inversão.

As propriedades de continuidade e monotonia possuídas por f transmitem-se à função inversa g, da maneira que a seguir se indica.

TEOREMA 3.10. *Seja f estritamente crescente e contínua no intervalo $[a, b]$. Sejam $c = f(a)$ e $d = f(b)$ e g a inversa de f, isto é, para cada y em $[c, d]$ seja $g(y)$ aquele x de $[a, b]$ tal que $y = f(x)$. Então*

(a) g é estritamente crescente em $[c, d]$.

(b) g é contínua em $[c, d]$.

Demonstração. Escolhamos $y_1 < y_2$ em $[c, d]$ e sejam $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Então $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Uma vez que f é estritamente crescente, a relação $y_1 < y_2$ implica $x_1 < x_2$, a qual, por sua vez, implica ser g estritamente crescente em $[c, d]$. Está assim demonstrada (a).

A demonstração de (b) está representada na fig. 3.12. Escolhamos um ponto y_0 no intervalo aberto (c, d). Para provar que g é contínua em y_0, devemos provar que para todo o $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$g(y_0) - \epsilon < g(y) < g(y_0) + \epsilon \quad \text{sempre que} \quad y_0 - \delta < y < y_0 + \delta . \tag{3.22}$$

Façamos $x_0 = g(y_0)$, de modo que $y_0 = f(x_0)$. Suponhamos ϵ dado. (Não há perda de generalidade considerando unicamente aqueles valores de ϵ de tal maneira pequenos que ambos $x_0 - \epsilon$ e $x_0 + \epsilon$ e estejam em $[a, b]$). Seja δ o menor dos dois números.

$$f(x_0) - f(x_0 - \epsilon) \qquad \text{e} \qquad f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) .$$

É fácil provar que com este δ se verifica (3.22). Uma ligeira modificação no raciocínio conduz à demonstração de que g é contínua à direita de c e à esquerda de d.

Existe um teorema análogo para funções decrescentes, isto é, a inversa duma função

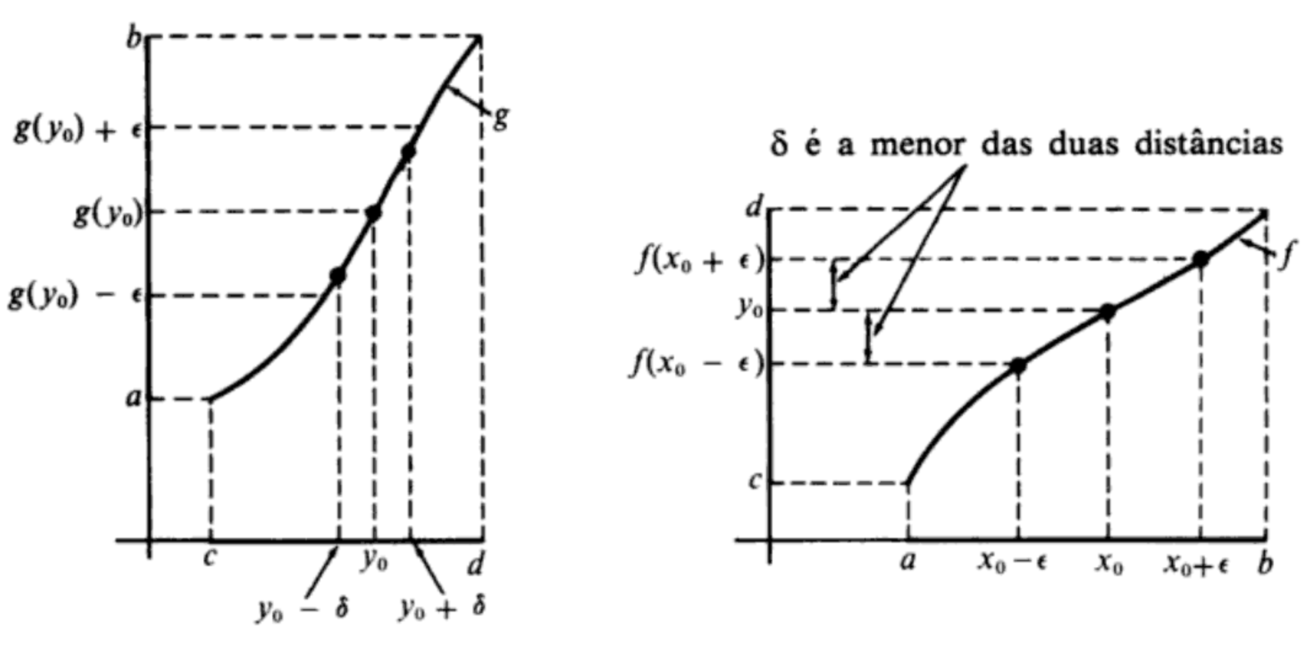


Fig. 3.12. Demonstração da continuidade da função inversa.

contínua estritamente decrescente f é estritamente decrescente e contínua. Para se provar isto, basta aplicar o teorema 3.10 a $-f$.

EXEMPLO. *Continuidade da função raíz n-enesima.* A função g, raíz n-enesima, definida para $y \geqq 0$ por $g(y) = y^{1/n}$ é estritamente crescente e contínua em cada intervalo $[c, d]$ com $0 \leqq c < d$, uma vez que é a função inversa duma função contínua estritamente crescente. Este fato permite-nos outra demonstração da continuidade da função raíz n-enesima independentemente da teoria de integração. Visto que o produto de funções contínuas é uma função contínua, deduzimos a continuidade da função potência, $h(y) = y^r$, sendo $r = m/n$ um número racional positivo e $y \geq 0$.

3.14 Inversas de funções monótonas por partes (ou "por intervalos")

Suponhamos que desejamos aplicar o processo de inversão a uma função que não é monótona em $[a, b]$. Por exemplo admitamos $f(x) = x^2$ definida num intervalo $[-c, c]$ do eixo OX. Cada ponto x deste intervalo é transformado por f num só ponto y do intervalo $[0, c^2]$, a saber,

$$y = x^2 . \tag{3.23}$$

Podemos resolver (3.23) relativamente a x, mas existirão *dois* valores de x correspondendo a cada y em $[0, c^2]$, a saber.

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad x = -\sqrt{y}.$$

Como já referimos anteriormente, tempos houve em que os matemáticos diziam que a função inversa g, neste caso, era uma *função bivalente* definida por

$$g(y) = \pm\sqrt{y}\,.$$

Uma vez, porem, que o moderno ponto de vista não admite a bivalência como uma propriedade de funções, num caso semelhante a este dizemos que o processo de inversão dá lugar a *duas* novas funções, g_1 e g_2, com

$$g_1(y) = \sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad g_2(y) = -\sqrt{y} \quad \text{para cada } y \text{ em } [0, c^2]\,. \tag{3.24}$$

Para ajustar isto com a noção de inversa, tal como foi exposta atrás, podemos considerar a equação $y = x^2$ como definindo não *uma* função f, mas *duas* funções f_1 e f_2, a saber

$$f_1(x) = x^2 \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq c \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = x^2 \quad \text{se} \quad -c \leq x \leq 0\,.$$

Estas podem considerar-se como funções *distintas* porque têm diferentes domínios. Cada uma delas é monótona no respetivo domínio e cada uma admite uma função inversa, sendo g_1 a inversa de f_1 e g_2 a inversa de f_2, com g_1 e g_2 definidas por (3.24).

O que acábamos de referir elucida-nos acerca do modo como o processo de inversão pode ser aplicado a funções monótonas "por intervalos". Consideramos muito simplesmente uma tal função como uma união de funções monótonas e invertemos por cada intervalo.

Faremos largo uso deste processo de inversão no Cap. 6.

3.15 Exercícios

Em cada um dos Exercícios 1 a 5, mostrar que f é estritamente monótona em todo o eixo real. Representando g a função inversa de f definir, em cada exemplo, o domínio de g. Escrever $y = f(x)$ e deduzir x em função de y; determinar ainda uma fórmula (ou fórmulas) para o cálculo de $g(y)$, para cada y no domínio de g.

1. $f(x) = x + 1$.
2. $f(x) = 2x + 5$.
3. $f(x) = 1 - x$.
4. $f(x) = x^3$.
5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1, \\ x^2 & \text{se } 1 \le x \le 4, \\ 8x^{1/2} & \text{se } x > 4. \end{cases}$

Valores médios. Seja f uma função contínua e estritamente monótona em todo o semi-eixo real positivo e represente g a função inversa de f. Se $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ são n números reais positivos dados, chama-se *valor médio (ou média) com respeito a f* ao número M_f definido por:

$$M_f = g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right).$$

Em particular quando $f(x) = x^p$ para $p \neq 0$, M_f chama-se *média de potências* de ordem p (Ver também a Seção 1 4.10). Os exercícios que se seguem referem-se a propriedades dos valores médios.

6. Provar que $f(M_f) = (1/n)\,\Sigma_{i=1}^{n} f(a_i)$. Por outras palavras, o valor de f para a média M_f é a média aritmética dos valores da função $f(a_1), \ldots, f(a_n)$.
7. Provar que $a_1 < M_f < a_n$. Por outras palavras, a média de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ está entre o maior e o menor dos valores a_i.
8. Se $h(x) = af(x) + b$ com $a \neq 0$, mostrar que $M_h = M_f$. Prova este fato que diferentes funções podem conduzir ao mesmo valor médio. Interpretar este teorema geometricamente, comparando os gráficos de h e f.

3.16 O teorema dos valores extremos para funções contínuas

Seja f uma função real definida num conjunto S de números reais. Diz-se que a função f possui *um máximo absoluto* no conjunto S se existe pelo menos um ponto c, em S, tal que

$$f(x) \le f(c) \quad \text{para cada } x \text{ em } S.$$

O número $f(c)$ é o máximo absoluto de f em S. Dizemos que f tem um *mínimo absoluto* em S se existe um ponto d em S tal que

$$f(x) \ge f(d) \quad \text{para cada } x \text{ em } S.$$

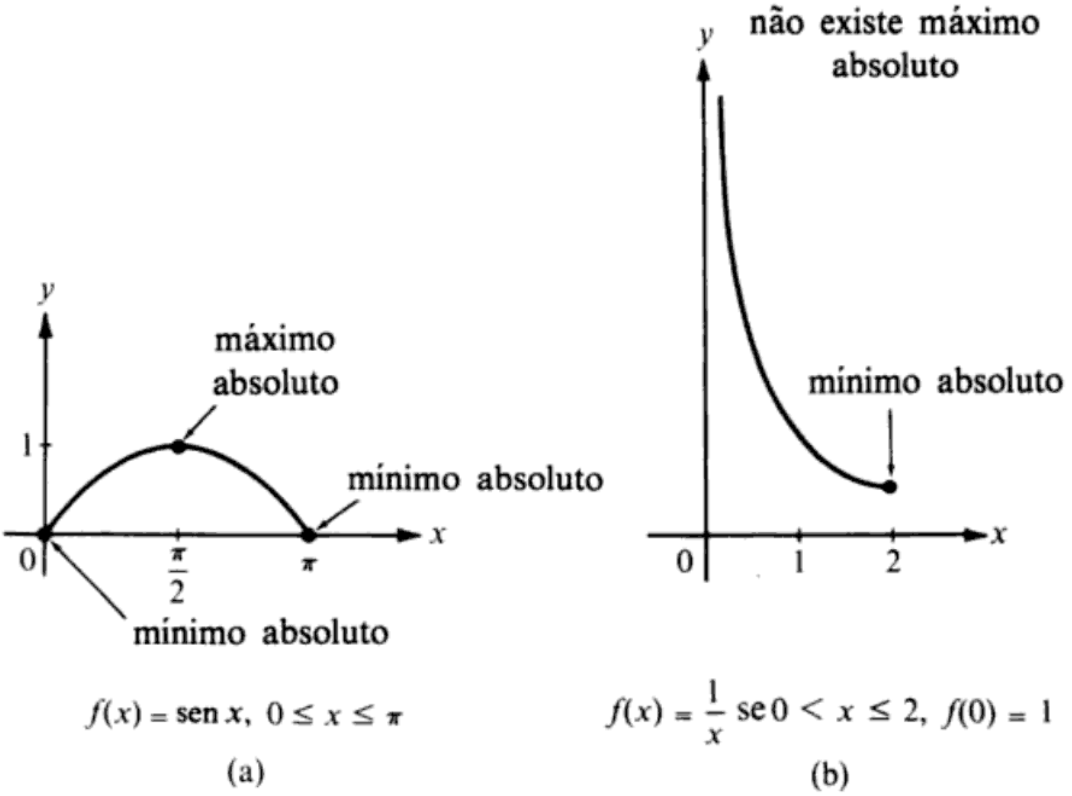


Fig. 3.13. Valores máximos e mínimos de funções.

Estes conceitos estão representados na fig. 3.13. Na figura 3.13(a), S é o intervalo fechado $[0,\pi]$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$. O mínimo absoluto, que é atingido em ambos os extremos do intervalo, é 0. O máximo absoluto é $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Na fig. 3.13(b), S é o intervalo fechado $[0, 2]$ e $f(x) = 1/x$ se $x > 0$, $f(0) = 1$. Neste exemplo, f admite um mínimo absoluto em $x = 2$, mas não tem máximo absoluto, isto devido a uma discontinuidade num ponto de S.

Desejamos provar que se S é um intervalo fechado e se f é contínua em S, então f admite um máximo e um mínimo absolutos em S. Este resultado conhecido como o teorema dos valores extremos para funções contínuas será apresentado como simples consequência do seguinte teorema

TEOREMA 3.11. TEOREMA DE MAJORAÇÃO DO MODULO PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS. *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada em $[a, b]$, isto é, existe um número $C \geqq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo o x pertencente a $[a, b]$.*

Demonstração. Raciocinamos por redução ao absurdo, servindo-nos duma ténica chamada o método da bisseção. Admitimos que f é *ilimitada* (não limitada) em $[a, b]$. Seja c o ponto médio de $[a, b]$. Visto que f é ilimitada em $[a, b]$ é ilimitada em pelo menos um dos subintervalos $[a, c]$ ou $[c, b]$. Seja $[a_1, b_1]$ a metade de $[a, b]$ em que f é não limitada. Se f é ilimitada em ambas as metades seja $[a_1, b_1]$ a metade esquerda, $[a, c]$. Continuamos agora o processo de bisseção repetidamente, designando por $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ aquela metade de $[a_n, b_n]$ na qual f é ilimitada, subentendendo-se que escolhemos a parte da esquerda se for ilimitada em ambas. Uma vez que a medida de cada intervalo é metade da medida do precedente, concluímos que a medida de $[a_n, b_n]$ é $(b-a)/2^n$.

Designe A o conjunto dos extremos esquerdos $a, a_1, a_2, \ldots$ dos intervalos assim construídos e seja α o supremo de A. Então α está em $[a, b]$. Pela continuidade de f em α existe um intervalo da forma $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ no qual

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1 . \tag{3.25}$$

Se $\alpha = a$ este intervalo tem a forma $[a, a + \delta)$ e se $\alpha = b$ tem a forma $(b - \delta, b]$. A desigualdade (3.25) implica

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)| ,$$

de modo que f é limitado por $1 + |f(\alpha)|$ neste intervalo. Porém o intervalo $[a_n, b_n]$ está contido em $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ quando n é suficientemente grande para que $(b - a)/2^n < \delta$. Portanto f é também limitada em $[a_n, b_n]$, o que contradiz a hipótese admitida de que f é ilimitada em $[a_n, b_n]$. Esta contradição completa a demonstração.

Se f é limitada em $[a, b]$, então o conjunto de todos os valores de $f(x)$ é limitado superiormente e inferiormente. Por conseguinte, este conjunto tem supremo e ínfimo que representamos por $\sup f$ e $\inf f$, respectivamente. Quer dizer que podemos escrever

$$\sup f = \sup \{f(x) \mid a \le x \le b\}, \qquad \inf f = \inf \{f(x) \mid a \le x \le b\} .$$

Para qualquer função limitada temos $\inf f \le f(x) \le \sup f$ para todo o x em $[a, b]$. Demonstramos a seguir que uma função contínua assume ambos os valores $\inf f$ e $\sup f$ em pontos de $[a, b]$.

TEOREMA 3.12. TEOREMA DOS VALORES EXTREMOS PARA FUNCÕES CONTÍNUAS. *Se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, existem pontos c e d em $[a, b]$ tais que*

$$f(c) = \sup f \qquad \text{e} \qquad f(d) = \inf f.$$

Demonstração. Basta provar que f assume o seu supremo em $[a, b]$. A demonstração para o ínfimo é uma consequência da anterior porque o ínfimo de f é o supremo de $-f$.

Seja $M = \sup f$. Suponhamos que não existe nenhum x em $[a, b]$ para o qual $f(x) = M$ e chegaremos a uma contradição. Seja $g(x) = M - f(x)$. Então $g(x) > 0$ para todo o x em $[a, b]$, de modo que a função recíproca $1/g$ é contínua em $[a, b]$. Pelo teorema 3.11, $1/g$ é limitada em $[a, b]$, isto é $1/g(x) < C$ para todo o x em $[a, b]$, com $C > 0$. Isto implica que $M - f(x) > 1/C$, de tal modo que $f(x) < M - 1/C$ para todo o x em $[a, b]$, o que contradiz o fato de que M é o menor limite superior de f em $[a, b]$. Por conseguinte, $f(x) = M$ para, pelo menos, um x em $[a, b]$.

Nota: Este teorema mostra que se f é contínua em $[a, b]$, então $\sup f$ é o seu máximo absoluto e $\inf f$ é o seu mínimo absoluto. Logo pelo teorema do valor intermédio o contradomínio de f é o intervalo fechado $[\inf f, \sup f]$.

3.17 Teorema da continuidade uniforme

Seja f uma função real e contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e sejam $M(f)$ e $m(f)$ respetivamente os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$. Chamamos à diferença

$$M(f) - m(f)$$

a *oscilação* de f no intervalo $[a, b]$. Alguns autores usam o termo *extensão* em vez de *oscilação* já que esta palavra tem a desvantagem de sugerir funções ondulantes ou do tipo onda. Em textos antigos aparece *saltus*, palavra latina que significa *salto*; por ser a de uso mais generalizado conservaremos o termo *oscilação*. Observe-se que a oscilação de f em qualquer subintervalo de $[a, b]$ não pode exceder a oscilação de f em $[a, b]$.

Provamos a seguir que o intervalo $[a, b]$ pode subdividir-se de tal maneira que a oscilação de f em cada subintervalo seja arbitrariamente pequena. Mais precisamente temos o seguinte teorema, que chamamos o teorema *da continuidade uniforme.*

TEOREMA 3.13. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Para todo o $\epsilon > 0$ existe uma partição de $[a, b]$ num número finito de subintervalos tais que a oscilação de f em cada subintervalo é menor que ϵ.*

Demonstração. Seguiremos o método de redução ao absurdo, utilizando o método das bisseções sucessivas. Admitamos que o teorema é *falso*, isto é, admitamos que para um certo ϵ, por exemplo $\epsilon = \epsilon_0$, o intervalo $[a, b]$ não pode ser subdividido em um número finito de subintervalos em cada um dos quais a oscilação de f é menor que ϵ_0. Seja c o ponto médio de $[a, b]$. Então para aquele ϵ_0, o teorema é falso em pelo menos um dos dois subintervalos $[a, c]$ ou $[c, b]$. (Se o teorema fosse verdadeiro nos dois subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$ seria também verdadeiro no intervalo completo $[a, b]$). Seja $[a_1, b_1]$ aquela metade de $[a, b]$ na qual o teorema é falso para ϵ_0. Se for falso em ambos os subintervalos, designamos por $[a_1, b_1]$ a metade esquerda, $[a, c]$. Continuamos repetidamente o processo de bisseção, representando por $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ aquela metade de $[a_n, b_n]$ na qual o teorema é falso para ϵ_0, subentendendo que escolhemos a metade da esquerda se o teorema for falso em ambas as metades de $[a_n, b_n]$. Note-se que a oscilação de f em cada subintervalo $[a_n, b_n]$ assim construido é, pelo menos, ϵ_0.

Seja A o conjunto dos (pontos) extremos esquerdos $a, a_1, a_2, ...,$ dos intervalos atrás referidos e seja α o supremo de A. Então α está em $[a, b]$. Devido à continuidade de f em α, existe um intervalo $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ no qual a oscilação de f é menor que ϵ_0. (Se $\alpha = a$, este intervalo é $[a, a + \delta)$, e se $\alpha = b$, ele é $(b - \delta, b]$.). Todavia, o intervalo $[a_n, b_n]$ é interior a $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ quando n é suficientemente grande para que $(b - a)/2^n < \delta$, de maneira que a oscilação de f em $[a_n, b_n]$ é também menor que ϵ_0, contradizendo a hipótese de que a oscilação de f é, pelo menos, ϵ_0 em $[a_n, b_n]$. Esta contradição completa a demonstração do teorema 3.13.

3.18 Teorema da integrabilidade para funções contínuas

O teorema da continuidade uniforme pode utilizar-se para provar que uma função que é contínua em $[a, b]$ é também integrável nesse intervalo.

TEOREMA 3.14. INTEGRABILIDADE DE FUNÇÕES CONTÍNUAS. *Se uma função f é contínua em todos os pontos dum intervalo fechado $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. O teorema 3.11 prova que f é limitada em $[a, b]$, e assim f tem un integral superior $\bar{I}(f)$ e um integral inferior $\underline{I}(f)$. Pretendemos provar que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

Escolhamos un inteiro $N \geq 1$ e seja $\epsilon = 1/N$. Pelo teorema da continuidade uniforme, para esta escolha de ϵ existe uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ em n subintervalos tais que a oscilação de f em qualquer subintervalo é menor que ϵ. Designemos por $M_k(f)$ e $m_k(f)$, respectivamente, o máximo e o mínimo absolutos de f no subintervalo de ordem k, $[x_{k-1}, x_k]$. Temos então

$$M_k(f) - m_k(f) < \epsilon$$

para cada $k = 1, 2, ..., n$. Sejam s_n e t_n duas funçõs em escada definidas em $[a, b]$ do modo seguinte:

$$s_n(x) = m_k(f) \quad \text{se} \quad x_{k-1} < x \leq x_k\,, \qquad s_n(a) = m_1(f),$$

$$t_n(x) = M_k(f) \quad \text{se} \quad x_{k-1} \leq x < x_k\,, \qquad t_n(b) = M_n(f).$$

Temos pois $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$, para todo o x de $[a, b]$. Temos ainda

$$\int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{e} \qquad \int_a^b t_n = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}).$$

A diferença destes integrais é

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)](x_k - x_{k-1}) < \epsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b - a)\,.$$

Uma vez que $\epsilon = 1/N$, a desigualdade anterior pode escrever-se

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n < \frac{b-a}{N}\,. \tag{3.26}$$

Por outro lado, os integrais superior e inferior de f verificam as desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \qquad \text{e} \qquad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n\,.$$

Multiplicando o primeiro conjunto de desigualdades por (−1) e somando ao segundo conjunto obtemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n .$$

Considerando (3.26) e a relação $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$, temos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) < \frac{b-a}{N}$$

para todo o inteiro $N \geq 1$. Por conseguinte, pelo teorema I.31, deve ser $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, o que prova ser f integrável em $[a, b]$.

3.19 Teoremas da média para integrais de funções contínuas

Na Seção 2.16 definimos o valor médio $A(f)$ de uma função f num intervalo $[a, b]$ como sendo o quociente $\int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Quando f é contínua, podemos provar que este valor médio é igual ao valor de f em certo ponto de $[a, b]$.

TEOREMA 3.15. TEOREMA DA MÉDIA. *Se f é contínua em $[a, b]$, então para um determinado c de $[a, b]$ tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) .$$

Demonstração. Sejam m e M, respetivamente, os valores mínimo e máximo de f em $[a, b]$. Então $m \leq f(x) \leq M$ para todo o x de $[a, b]$. Integrando estas desigualdades e dividindo por $b-a$, encontramos $m \leq A(f) \leq M$, onde $A(f) = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$. Mas o teorema do valor intermédio assegura-nos que $A(f) = f(c)$ para certo c de $[a, b]$, o que completa a demonstração.

Para valores médios pesados é possível um resultado equivalente.

TEOREMA 3.16. TEOREMA DA MÉDIA PESADA. *Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$. Se g nunca muda de sinal em $[a, b]$, então, para certo c em $[a, b]$, tem-se*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx . \tag{3.27}$$

Demonstração. Uma vez que g nunca muda de sinal em $[a, b]$, g é sempre não negativa ou sempre não positiva em $[a, b]$. Admitamos que g é não negativa em $[a, b]$. Então é válido o raciocínio feito na demonstração do teorema 3.15, exceto que as desigualdades a integrar são $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, obtendo-se

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3.28}$$

Se $\int_a^b g(x)dx = 0$, esta desigualdade mostra que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Neste caso (3.27) verifica-se para qualquer c, uma vez que ambos os membros são nulos. Por outro lado o integral de g é positivo, e podemos dividir por este integral em (3.28) e aplicar o teorema do valor intermédio, como anteriormente, para completar a demonstração. Se g é não positiva, aplicamos o mesmo raciocínio a $-g$.

Este teorema da média pesada conduz algumas vezes a cálculos úteis para o integral dum produto de duas funções, especialmente se o integral dum dos fatores é fácil de calcular. Nos exercícios que se seguem dão-se alguns exemplos disto.

3.20 Exercícios

1. Com auxílio do teorema 3.16 estabelecer as seguintes desigualdades:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}.$$

2. Notar que $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$ e usar o teorema 3.16 para obter as desigualdades

$$\frac{11}{24} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. Servir-se da identidade $1 + x^6 = (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)$ e do teorema 3.16 para provar que, para $a > 0$, se tem

$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

Tomar $a = \dfrac{1}{10}$ e calcular o valor do integral até à sexta casa decimal.

4. Uma das duas afirmações seguintes é incorreta. Explicar porque está errada.

(a) O integral $\int_{2\pi}^{4\pi} (\operatorname{sen} t)/t\,dt > 0$ porque $\int_{2\pi}^{3\pi} (\operatorname{sen} t)/t\,dt > \int_{3\pi}^{4\pi} |\operatorname{sen} t|/t\,dt$.

(b) O integral $\int_{2\pi}^{4\pi} (\operatorname{sen} t)/t\,dt = 0$ porque, segundo o teorema 3.16, para um certo c entre 2π e 4π se tem

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{1}{c}\int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} t\,dt = \frac{\cos(2\pi) - \cos(4\pi)}{c} = 0.$$

5. Se n é um inteiro positivo, usar o teorema 3.16 para demonstrar que

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{(-1)^n}{c}, \qquad \text{onde } \sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}.$$

6. Supondo que f é contínua em $[a, b]$, e que $\int_a^b f(x)dx = 0$, provar que $f(c) = 0$ para, pelo menos, um c de $[a, b]$.
7. Supondo que f é integrável e não negativa em $[a, b]$ e que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, provar que $f(x) = 0$ em cada ponto de continuidade de f. [*Sugestão:* Se $f(c) > 0$ num ponto de continuidade c, existe uma vizinhança de c na qual $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$].
8. Supor f contínua em $[a, b]$. Supor também que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ para cada função g que é contínua em $[a, b]$. Provar que $f(x) = 0$ para todo o x de $[a, b]$.

4
CÁLCULO DIFERENCIAL

4.1 Introdução histórica

Newton e Leibniz, independentemente um do outro, foram largamente responsáveis pelo desenvolvimento das ideias do cálculo integral, a tal ponto que problemas até aí irresolúveis passaram a ser resolvidos por métodos mais ou menos rotineiros. A auspiciosa realização destes homens foi devida principalmente ao fato de terem sido capazes de fundir o Cálculo integral com o segundo ramo importante do Cálculo, o Cálculo diferencial.

A ideia central do Cálculo diferencial é a noção de *derivada*. Tal como o integral, a derivada foi originada por um problema de geometria – o problema da determinação da tangente a uma curva num dos seus pontos. Contrariamente ao integral, porém, a noção de derivada desenvolveu-se muito tarde na história da Matemática. O conceito não tinha ainda sido formulado até ao início do séc. XVII, quando o matemático francês Pierre de Fermat procurou determinar os máximos e mínimos de certas funções especiais.

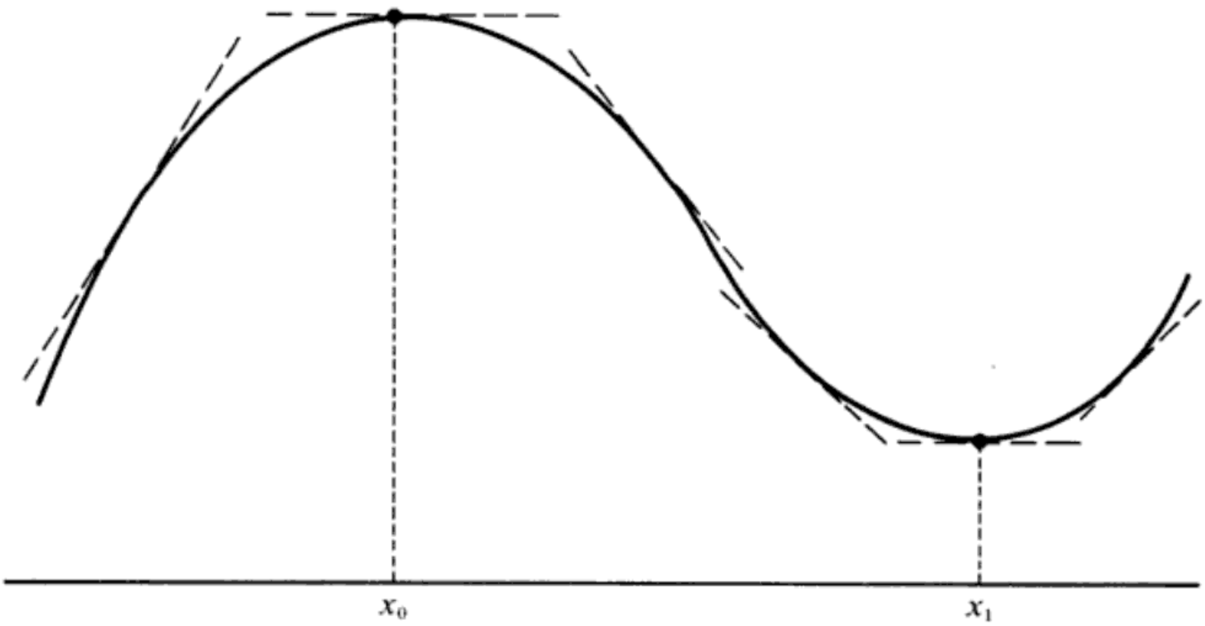


Fig. 4.1 – A curva admite tangentes paralelas a 0X nos pontos x_0 e x_1.

A ideia de Fermat, basicamente muito simples, pode ser melhor compreendida se nos referirmos à curva da fig. 4.1. Supõe-se que em cada um dos seus pontos esta curva tem uma direção determinada, a qual pode ser definida pela tangente à curva. Algumas dessas tangentes estão indicadas na figura por linhas a tracejado. Fermat notou que em certos pontos, em que a curva tem um máximo ou um mínimo, tais como os representados na figura com abcissas x_0 e x_1, a tangente será paralela a OX. Deste modo o problema de localizar tais valores extremos parece depender da resolução de outro problema, o da localização de pontos da curva cuja tangente é paralela a OX.

Este, por sua vez, conduz à questão mais geral da determinação da direção da tangente um *ponto arbitrário* da curva. Foi a intenção de resolver este problema geral que conduziu Fermat à descoberta de algumas das ideias rudimentares relativas à noção de derivada.

À primeira vista parece que não haverá qualquer ligação entre o problema do cálculo da área de determinada região limitada por uma curva e o problema da determinação da tangente à curva num dos seus pontos. O primeiro a descobrir que estas duas questões, aparentemente sem conexão, estavam intimamente ligadas parece ter sido o professor de Newton, Isaac Barrow (1630-1677). Contudo Newton e Leibniz foram os primeiros a compreender a verdadeira importância desta relação e a explorá-la tão completamente que iniciaram uma era sem precedente no desenvolvimento da Matemática.

Embora a derivada tivesse sido inicialmente formulada para estudar o problema das tangentes a curvas, logo se verificou que também conduzia a um modo de cálculo da *velocidade* e, mais geralmente, ao estudo da *variação* de uma função. Na seção seguinte consideramos um problema particular implicando o cálculo de uma velocidade. A resolução deste problema contém todos os aspectos essenciais do conceito de derivada e pode auxiliar-nos no estabelecimento da definição geral de derivada que será dada na Seção 4.3.

4.2. Um problema relativo à velocidade

Suponhamos um projétil lançado do solo, verticalmente, com uma velocidade inicial de 144 pés por segundo. Desprezando o atrito, admitamos que o projétil está sujeito unicamente à ação da gravidade, de tal modo que ele se move para cima e para baixo ao longo de uma reta. Seja $f(t)$ a altura, em pés, que o projétil alcançã ao fim de t segundos depois do lançamento. Se a força da gravidade não estivesse a atuar sobre ele, o projétil continuaria a mover-se sempre com movimento ascendente e com velocidade constante, percorrendo uma distância de 144 pés em cada segundo, e ao fim do tempo t teria percorrido $f(t) = 144t$. Mas, devido à gravidade, o projétil vai retardando o seu movimento até que a velocidade se anula e a partir desse instante inicia a queda para o solo. Experimentalmente constata-se que enquanto o projétil sobe, a sua altura $f(t)$ é definida por

$$f(t) = 144t - 16t^2 . \tag{4.1}$$

O termo $-16t^2$ é devido à influência da gravidade. Note-se que $f(t) = 0$ quando $t = 0$ e quando $t = 9$. Quer isto dizer que o projétil volta à terra depois de 9 segundos e portanto (4.1) só é válida para $0 \leq t \leq 9$.

O problema que pretendemos resolver é este: *Determinar a velocidade do projétil em cada instante do seu movimento.* Antes que possamos compreender este problema, devemos precisar o que se *entende* por velocidade em cada instante. Para o fazer, introduzimos em primeiro lugar a noção de *velocidade média durante um intervalo de tempo*, por exemplo de t a $t + h$. Esta define-se pelo quociente

$$\frac{\text{variação da distância no intervalo de tempo}}{\text{medida do intervalo de tempo}} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Este quociente, chamado *razão incremental*, é um número que pode ser calculado sempre que ambos t e $t + h$ pertençam ao intervalo $[0, 9]$. O número h pode ser positivo ou negativo, mas não nulo. Fixemos t e vejamos o que acontece à razão incremental quando tomamos valores de h com cada vez menor valor absoluto.

Por exemplo, consideremos o instante $t = 2$. A distância percorrida depois de 2 segundos é

$$f(2) = 288 - 64 = 224.$$

No instante $t = 2 + h$ a distância percorrida é

$$f(2 + h) = 144(2 + h) - 16(2 + h)^2 = 224 + 80h - 16h^2 .$$

Portanto a velocidade média durante o intervalo de $t = 2$ a $t = 2+h$ é

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{80h - 16h^2}{h} = 80 - 16h .$$

Quando tomamos valores de h com cada vez menor valor absoluto esta velocidade média aproxima-se cada vez mais de 80. Por exemplo, se $h = 0{,}1$ obtemos uma velocidade média de 78,4; quando $h = 0{,}001$, obtemos 79,984; quando $h = 0{,}00001$, obtemos o valor 79,99984; e quando $h = -0{,}00001$, obtemos 80,00016. O fato importante é que nós podemos fazer a velocidade média tão próxima de 80 quanto o desejarmos, tomando para tal $|h|$ suficientemente pequeno. Por outras palavras, a velocidade média aproxima-se de 80 como limite quando h tende para zero. Parece natural chamar este valor limite a *velocidade instantânea* no instante $t = 2$.

O mesmo tipo de cálculos pode ser efetuado para outro instante. A velocidade média para um intervalo de tempo arbitrário de t a $t + h$ é dada pelo quociente

$$\frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \frac{[144(t + h) - 16(t + h)^2] - [144t - 16t^2]}{h} = 144 - 32t - 16h .$$

Quando h tende para zero a expressão do segundo membro tende para $144-32t$ e este limite define a *velocidade instantânea* no instante t. Se representarmos a velocidade instantânea por $v(t)$, podemos escrever

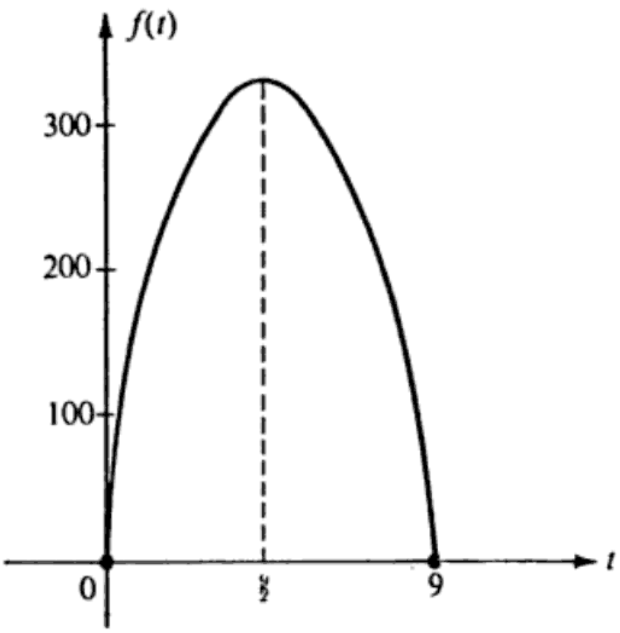
$$v(t) = 144 - 32t. \tag{4.2}$$

A fórmula (4.1) para a distância $f(t)$ define uma função f que nos diz a que altura está o projetil em cada instante do seu movimento. Podemos referir-nos a f como *função posição* ou *lei do movimento*. O seu domínio é o intervalo fechado $[0, 9]$ e o seu gráfico está traçado na fig. 4.2(a). [A escala sobre o eixo vertical foi modificada, quer na fig. 4.2(a), quer na fig. 4.2(b)]. A fórmula (4.2) para a velocidade $v(t)$ define uma nova função v que nos define a rapidez com que o projétil está a mover-se em cada instante. Esta é chamada *função velocidade* e o seu gráfico está traçado na fig. 4.2(b). Quando t cresce de 0 a 9, $v(t)$ decresce constantemente de $v(0) = 144$ a $v(9) = -144$. Para determinar o instante t para o qual $v(t) = 0$, resolvemos a equação $144 = 32t$ e obtemos $t = 9/2$. Portanto, no instante médio do movimento a influência da gravidade reduz a velocidade a zero e o projéctil está aí momentâneamente em repouso. A altura neste instante é $f(9/2) = 324$. Quando $t > 9/2$ a velocidade é negativa indicando que a altura está a decrescer.

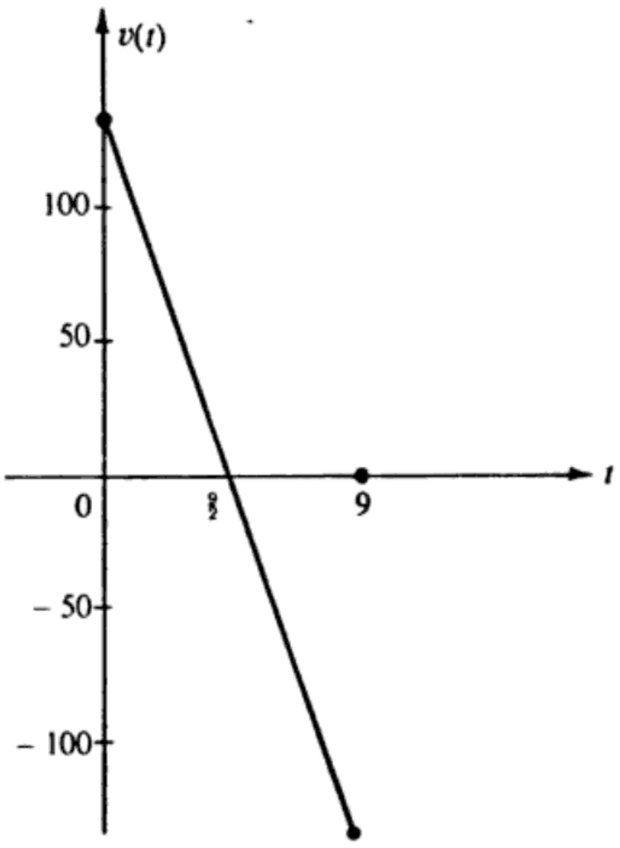
O processo segundo o qual $v(t)$ é obtida pelo limite da razão incremental escreve-se simbolicamente:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} . \tag{4.3}$$

Esta expressão é usada para definir a velocidade não somente para este exemplo particular mas, mais geralmente, para qualquer partícula movendo-se ao longo duma dada reta, desde que a lei do movimento f seja tal que a razão incremental tenda para um limite definido quando h tende para zero.



(a)



(b)

Fig. 4.2 — (a) Gráfico da função de posição $f(t) = 144t - 16t^2$. (b) Gráfico da função velocidade $v(t) = 144 - 32t$.

4.3 A derivada duma função

O exemplo descrito na seção precedente aponta um método para introduzir o conceito de derivada. Começamos com uma função f definida, pelo menos, num dado intervalo aberto *(a, b)*. Escolhe-se um ponto fixo x neste intervalo e formamos a razão incremental

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

onde o número h, que pode ser positivo ou negativo (mas não nulo), é tal que $x + h$ também pertence a (a, b). O numerador da fração mede a variação da função quando x varia de x a $x+h$. O quociente representa a *variação média* de f no intervalo definido por x e $x + h$.

Seguidamente fazemos tender h para zero e analisamos o que se verifica para este quociente. Se o quociente tende para algum valor limite definido (o que implica que o limite é o mesmo qualquer que seja o modo como h tende para zero), então este limite chama-se a *derivada* de f no ponto x e representa-se pelo símbolo $f'(x)$ (lê-se "f linha de x"). Deste modo a definição formal de $f'(x)$ pode ser estabelecida no modo seguinte:

DEFINIÇÃO DE DERIVADA. *A derivada $f'(x)$ define-se pela igualdade*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{4.4}$$

desde que o limite exista. O número $f'(x)$ chama-se também a coeficiente de variação de f com x.

Comparando (4.4) com (4.3), vemos que o conceito de velocidade instantânea é simplesmente um exemplo do conceito de derivada. A velocidade $v(t)$ é igual à derivada $f'(t)$ quando f é a função que define a posição, pelo que muitas vezes se diz que a velocidade é a derivada da posição relativamente ao tempo. No exemplo apresentado na Seção 4.2, a função posição f é dada pela equação

$$f(t)=144t-16t^2,$$

e a sua derivada f' é uma nova função (velocidade) dada por

$$f'(t)=144-32t.$$

Em geral, o processo de passagem ao limite segundo o qual se obtém $f'(x)$ a partir de $f(x)$ define um modo de obtenção de uma nova função f' a partir de uma dada função f. Este processo chama-se *derivação* e f' é chamada a *primeira derivada* de f. Se f', por sua vez, está definida num intervalo aberto, pode calcular-se a *sua* primeira derivada, representada por f'' e chamada a *segunda derivada de f*. De modo análogo a derivada de ordem n de f, representada por $f^{(n)}$, define-se como o sendo a (primeira) derivada de $f^{(n-1)}$. Convenciona-se que $f^{(0)}=f$, isto é, derivada de ordem zero é a própria função.

No caso do movimento, a primeira derivada da velocidade (segunda derivada da função de posição) chama-se *aceleração*. Por exemplo para calcular a aceleração no exemplo da Seção 4.2 podemos utilizar (4.2) para formar a razão incremental.

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=\frac{[144-32(t+h)]-[144-32t]}{h}=\frac{-32h}{h}=-32\,.$$

Uma vez que a razão incremental tem o valor constante -32, para qualquer valor de $h \neq 0$, o seu limite quando $h \to 0$ é também -32. Então, neste problema a aceleração é constante e igual a -32. Este resultado diz-nos que a velocidade decresce na razão de 32 pés por segundo em cada segundo. Em 9 segundos o decréscimo total da velocidade é $9 \times 32 = 288$ pés por segundo. Isto está de acordo com o fato que durante os 9 segundos do movimento a velocidade varia de $v(0) = 144$ a $v(9) = -144$.

4.4 Exemplos de derivadas

Exemplo 1. *Derivada duma função constante.* Suponhamos f uma função constante, por exemplo $f(x) = c$ para todo o x. A razão incremental é

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0\,.$$

Uma vez que a razão incremental é zero para todo o $h \neq 0$, o seu limite, $f'(x)$, é também zero para todo o x. Por outras palavras, uma função constante tem derivada nula para todo o valor de x.

Exemplo 2. *Derivada de uma função linear.* Suponhamos f linear, isto é $f(x) = mx + b$ para todo o real x. Se $h \neq 0$, tem-se

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}=\frac{mh}{h}=m\,.$$

Uma vez que a razão incremental não varia quando h tende para zero, concluímos que

$$f'(x) = m \qquad \text{para cada } x.$$

Então a derivada duma função linear é uma função constante.

Exemplo 3. *Derivada de uma função potência de expoente inteiro e positivo.* Consideremos a seguir o caso $f(x) = x^n$, com n inteiro e positivo. A razão incremental vem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\,.$$

Para estudar o limite deste cociente, quando h tende para zero, podemos proceder de duas maneiras: ou pela decomposição fatorial do numerador considerado como diferença de duas potências de grau n, ou utilizando o teorema do binómio para o desenvolvimento de $(x + h)^n$. Seguiremos o primeiro método e deixaremos o segundo como exercício para o leitor (Ver Exercício 39 da Seção 4.6). Na álgebra elementar tem-se a identidade*

$$a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Se fizermos $a = x + h$ e $b = x$ e dividirmos ambos os membros por h, a identidade escrever-se

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x + h)^k x^{n-1-k}.$$

A soma tem n termos. Quando h tende para zero, $(x + h)^k$ tende para x^k e o termo de ordem k tende para $x^k\, x^{n-1-k} = x^{n-1}$ e portanto a soma de todos os n termos tende para nx^{n-1}. Daqui resulta que

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{para todo o } x.$$

EXEMPLO 4. *Derivada da função seno.* Seja $s(x) = \operatorname{sen} x$. A razão incremental é

$$\frac{s(x + h) - s(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}.$$

Para transformar o numerador de modo que seja possível calcular o limite quando $h \to 0$ vamos utilizar a identidade

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{y - x}{2} \cos \frac{y + x}{2}$$

com $y = x + h$. Isto conduz-nos à formula

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quando $h \to 0$ o fator $\cos(x + \frac{1}{2} h) \longrightarrow \cos x$ devido à continuidade do cosseno. Também, porque

* Esta identidade é uma consequência imediata da propriedade A (pg. 48) das somas finitas. Com efeito, multiplicando cada termo da soma por $(a-b)$ vem

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}) = a^n - b^n.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 ,$$

como se demonstrou na Seção 3.4, temos que

$$\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \to 1 \quad \text{quando } h \to 0. \tag{4.5}$$

Portanto o limite da razão incremental quando $h \to 0$ é $\cos x$. Por outras palavras $s'(x) = \cos x$ para todo o x; a derivada da função seno é a função cosseno.

EXEMPLO 5. *A derivada da função cosseno.* Seja $c(x) = \cos x$. Vamos provar que $c'(x) = -\operatorname{sen} x$, isto é, que a derivada da função cosseno é menos a função seno. Consideremos a identidade

$$\cos y - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{y - x}{2} \operatorname{sen} \frac{y + x}{2}$$

e façamos $y = x + h$. Da identidade anterior podemos passar à formula

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) .$$

A continuidade do seno implica que $\operatorname{sen}(x + h/2) \to \operatorname{sen} x$ quando $h \to 0$; a partir de (4.5) obtemos $c'(x) = -\operatorname{sen} x$.

EXEMPLO 6. *Derivada da função raíz n-enésima.* Se n é um inteiro e positivo seja $f(x) = x^{1/n}$ para $x > 0$. A razão incremental para f é

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^{1/n} - x^{1/n}}{h} .$$

Façamos $u = (x + h)^{1/n}$ e $v = x^{1/n}$. Temos então $u^n = x + h$ e $v^n = x$, pelo que $h = u^n - v^n$ e a razão incremental escreve-se

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1}} .$$

A continuidade da função raíz n-enésima prova que $u \to v$ quando $h \to 0$. Portanto cada termo no denominador do segundo membro tem o limite v^{n-1} quando $h \to 0$. Existem n termos no total, de modo que a razão incremental admite o limite v^{1-n}/n. Uma vez que $v = x^{1/n}$, isto prova que

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1} .$$

EXEMPLO 7. *Continuidade das funções que admitem derivada.* Se uma função f admite derivada num ponto x, então também é contínua nesse ponto x. Para provar esta afirmação utilizamos a identidade

$$f(x + h) = f(x) + h\left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right),$$

a qual é válida para $h \neq 0$. Se fazemos tender $h \to 0$, a razão incremental do segundo membro tende para $f'(x)$ e, uma vez que esta razão incremental está multiplicada por um fator que tende para 0, o segundo termo do segundo membro tende para 0. $f'(x) = 0$. Tal fator prova que $f(x + h) \to f(x)$ quando $h \to 0$ e por isso f é contínua em x.

Este exemplo dá-nos uma nova possibilidade de provar a continuidade de funções. Cada vez que estabelecemos a existência de derivada $f'(x)$, estabelecemos, ao mesmo tempo, a continuidade de f em x. Deve observar-se, contudo, que a inversa não é verdadeira. A continuidade de uma função em x não significa, necessariamente que a derivada $f'(x)$ exista. Por exemplo, quando $f(x) = |x|$, o ponto $x = 0$ *é um ponto de continuidade* de f visto que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0$, mas não existe derivada nesse ponto (Ver fig. 4.3). A razão incremental $[f(0 + h) - f(0)]/h$ é igual a $|h|/h$ e vale $+1$ se $h > 0$ e -1 se $h < 0$ e por conseguinte não tende para *um* limite quando $h \to 0$.

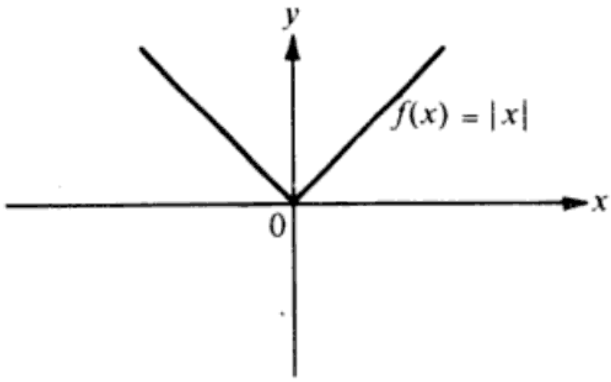


Fig. 4.3. A função é contínua em 0 mas $f'(0)$ não existe

4.5 A álgebra das derivadas

Tal como os teoremas sobre limites da Seção 4.3 nos ensinam a calcular limites da soma, diferença, produto e quociente de duas funções, do mesmo modo o teorema seguinte nos permitirá o estabelecimento dum conjunto de regras para o cálculo de derivadas.

TEOREMA 4.1. *Sejam f e g duas funções definidas num mesmo intervalo. Em cada ponto em que f e g admitem derivadas, também admitem derivadas a soma $f + g$, a diferença $f - g$, o produto $f \cdot g$ e o quociente f/g (Para f/g há que juntar a condição suplementar de que g seja*

não nula no ponto em questão). As derivadas destas funções são definidas pelas seguintes fórmulas:

(i) $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $(f-g)' = f' - g'$,

(iii) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ *nos pontos x onde $g(x) \neq 0$.*

Antes de demonstrarmos este teorema é interessante referir algumas das suas consequencias. Um caso particular de (iii) ocorre quando uma das duas funções é constante, por exemplo $g(x) = c$, para qualquer valor de x do intervalo em que a função se define. Neste caso, (iii) vêm $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, por outras palavras, a derivada do produto duma constante por uma função é igual à constante vezes a derivada da função. Combinando este resultado com o fato de que a derivada da soma é a soma das derivadas [propriedade (i)], tem-se para todo o par de constantes c_1 e c_2 tem-se

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'.$$

Esta é chamada *propriedade de linearidade* da derivada e é análoga à propriedade de linearidade do integral. Por indução matemática podemos generalizar a propriedade de linearidade a somas dum número finito de parcelas:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i' ,$$

com $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes e $f_1, f_2, ..., f_n$ funções cujas derivadas são $f_1', f_2', ..., f_n'$.

Cada fórmula relativa a derivadas pode escrever-se de duas maneiras: ou como uma igualdade entre duas *funções* ou como uma igualdade entre *números*. As propriedades do Teorema 4.1, tal como foram escritas atrás, são igualdades entre funções. Por exemplo, a propriedade (i) afirma que a derivada da função $f + g$ é a soma de duas funções f' e g'. Quando estas funções são calculadas num ponto x, obtém-se fórmulas referentes a números; assim a fórmula (i) implica

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Passamos agora à demonstração do Teorema 4.1.

Demonstração de (i). Seja x um ponto no qual existem as derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$. A razão incremental para $f + g$ é

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Quando $h\to 0$, o primeiro quociente do segundo membro tende para $f'(x)$ e o segundo quociente tende para $g'(x)$, e portanto a soma tende para $f'(x) + g'(x)$. Está assim demonstrada (i), sendo análoga a demonstração de (ii).

Demonstração de (iii): A razão incremental para o produto $f\cdot g$ é

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}. \tag{4.6}$$

Para estudar o limite deste cociente quando $h\to 0$, somamos e subtraímos ao numerador um termo conveniente que nos permita escrever (4.6) como uma soma de dois termos nos quais apareçam as razões incrementais relativas a f e g. Somando e subtraindo $g(x)f(x+h)$, (4.6) pode escrever-se

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Quando $h\to 0$ o primeiro termo do segundo membro tende para $g(x)f'(x)$. Uma vez que f é contínua em x, temos que $f(x+h)\to f(x)$ e o segundo termo tende para $f(x)g'(x)$, ficando assim demonstrada (iii).

Demonstração de (iv). Um caso particular de (iv) verifica-se quando $f(x) = 1$ para todo o x. Neste caso $f'(x) = 0$ para todo o x e (iv) reduz-se à formula

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2} \tag{4.7}$$

desde que $g(x)\neq 0$. A partir deste caso particular podemos deduzir a fórmula geral (iv) considerando f/g como um produto e usando (iii), pois que

$$\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'=\frac{1}{g}\cdot f'+f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{f'}{g}-\frac{f\cdot g'}{g^2}=\frac{g\cdot f'-f\cdot g'}{g^2}.$$

Portanto resta provar (4.7). A razão incremental para $1/g$ é

$$\frac{[1/g(x+h)]-[1/g(x)]}{h}=-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x+h)}. \tag{4.8}$$

Quando $h\to 0$, o primeiro quociente do segundo membro tende para $g'(x)$ e o terceiro fator para $\dfrac{1}{g(x)}$. É necessária a hipótese de continuidade de g em x para que possamos concluir que $g(x+h)\to g(x)$ quando $h\to 0$. Deste modo o quociente em (4.8) tende para $-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$, ficando assim demonstrada (4.7).

Nota: Para se poder escrever (4.8) é necessário supor que $g(x+h)\neq 0$, para todo o h suficientemente pequeno. Isto resulta do teorema 3.7.

O Teorema 4.1, quando usado em conjunção com os exemplos expostos na Seção 4.4, permite-nos deduzir novas fórmulas de derivação.

EXEMPLO 1. *Polinómios.* No Exemplo 3 da Seção 4.4 mostrámos que se $f(x)=x^n$ quando n é um inteiro positivo, então $f'(x)=nx^{n-1}$. Será interessante que o leitor estabeleça de novo este resultado como uma consequência do caso particular $n=1$, usando o método de indução matemática em conjunção com a fórmula de derivação do produto.

Combinando este resultado com a propriedade de linearidade, podemos derivar qualquer polinómio calculando a derivada de cada termo e adicionando as derivadas. Assim, se

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,,$$

então, derivando termo a termo, obtemos

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n} k c_k x^{k-1}\,.$$

Observe-se que a derivada de um polinómio de grau n é um novo polinómio de grau $n-1$. Por exemplo, se $f(x)=2x^3+5x^2-7x+8$, então $f'(x)=6x^2+10x-7$.

EXEMPLO 2. *Funções racionais.* Se r é o quociente de dois polinómios, seja $r(x)=p(x)/q(x)$, então a derivada $r'(x)$ pode calcular-se pela fórmula (iv) do Teorema 4.1. A derivada $r'(x)$ existe para todo o x que não anule $q(x)$. Repare-se que a função $r'(x)$ assim definida é ela própria uma função racional. Em particular, quando $r(x)=1/x^m$ com m um inteiro positivo e $x\neq 0$, temos

$$r'(x)=\frac{x^m\cdot 0-mx^{m-1}}{x^{2m}}=\frac{-m}{x^{m+1}}\,.$$

Escrevendo este resultado na forma $r'(x)=-mx^{-m-1}$, obtem-se uma generalização, para expoentes negativos, da fórmula de derivação de potências de grau n, com n positivo.

EXEMPLO 3. *Potências de expoente racional.* Seja $f(x)=x^r$ com $x>0$, onde r é um número racional. Já demonstrámos a fórmula de derivação

$$f'(x) = rx^{r-1} \tag{4.9}$$

para $r = \dfrac{1}{n}$ com n inteiro e positivo. Vamos agora generalizá-la a todas as potências de expoente racional. A fórmula de derivação de um produto mostra que a igualdade (4.9) é também válida para $r = 2/n$ e, por indução, para $r = m/n$ com m um inteiro positivo qualquer (O raciocínio por indução refere-se a m). Deste modo a igualdade (4.9) é válida para qualquer racional positivo r. A fórmula de derivação do quociente mostra-nos que (4.9) também é válida para r racional negativo. Assim, se $f(x) = x^{2/3}$, tem-se $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$; se $f(x) = x^{-1/2}$, então $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$. Em qualquer dos casos é necessário que $x > 0$.

4.6 Exercícios

1. Se $f(x) = 2 + x - x^2$, calcular $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(-10)$.

2. Se $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$, determinar todos os valores de x para os quais (a) $f'(x) = 0$; (b) $f'(x) = -2$; (c) $f'(x) = 10$.

Nos Exercícios 3 a 12 determinar $f'(x)$ se $f(x)$ é a função que se indica.

3. $f(x) = x^2 + 3x + 2$.
4. $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x$.
5. $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad x \neq -1$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + x^5 \cos x$.
8. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad x \neq 1$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x}$.
10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}$.
11. $f(x) = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.
12. $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 + x^2}$.

13. Supõe-se que a altura $f(t)$ de um projétil, t segundos depois de ter sido lançado verticalmente para cima a partir do solo com uma velocidade inicial v_0 pés/seg, é definida por

$$f(t) = v_0 t - 16t^2.$$

(a) Seguir o método descrito na Seção 4.2 para mostrar que a velocidade média do projétil, no intervalo de tempo $[t, t + h]$, é $v_0 - 32t - 16h$ pés/seg., e que a velocidade instantânea no instante t, é $v_0 - 10\ t$ pés/seg.
(b) Calcular (em função de v_0) o tempo necessário para que a velocidade se anule.
(c) Qual é a velocidade de regresso à Terra?
(d) Qual deve ser a velocidade inicial do projétil para que este volte à Terra ao fim de 1

segundo? Ao fim de 10 segundos? Ao fim de T segundos?

(e) Provar que o projétil se move com aceleração constante.

(f) Dar um exemplo de outra fórmula para a altura, que origine uma aceleração de –20 pés/seg./seg.

14. Qual é o coeficiente de variação do volume dum cubo em função do comprimento da aresta?

15. (a) A área de um círculo de raio r é πr^2 e o perímetro da correspondente circunferência é $2\pi r$. Mostrar que o coeficiente de variação da área relativamente ao raio é igual ao perímetro da circunferência correspondente.

(b) O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$ e a sua área é $4\pi r^2$. Mostrar que o coeficiente de variação do volume da esfera a respeito do raio é igual a sua área.

Nos Exercícios 16 a 23 calcular $f'(x)$ para a função $f(x)$ que se indica.

16. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0.$

17. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad x > 0.$

18. $f(x) = x^{3/2}, \quad x > 0.$

19. $f(x) = x^{-3/2}, \quad x > 0.$

20. $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}, \quad x > 0.$

21. $f(x) = x^{-1/2} + x^{-1/3} + x^{-1/4}, \quad x > 0.$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}, \quad x > 0.$

23. $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, \quad x > 0.$

24. Sejam $f_1, ..., f_n$ n funções admitindo derivadas $f_1', \ldots, f_n'$. Enunciar uma regra para a derivação do produto $g = f_1 \ldots f_n$ e demonstrá-la por indução matemática. Mostrar que para aqueles pontos x para os quais nenhum dos valores $f_1(x), ..., f_n(x)$ é zero, se tem

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

25. Verificar a tabela de derivadas que a seguir se apresenta. Subentende-se que cada fórmula é válida para aqueles valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$	$\sec x$	$\operatorname{tg} x \sec x$
$\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{cosec}^2 x$	$\csc x$	$-\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x$

Nos Exercícios 26 a 35 calcular a derivada $f'(x)$. Subentende-se que cada fórmula é válida para os valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

26. $f(x) = \operatorname{tg} x \sec x.$

27. $f(x) = x \operatorname{tg} x.$

28. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}.$

29. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}.$

30. $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

31. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$.

32. $f(x) = \dfrac{1}{x + \text{sen}\, x}$.

33. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

34. $f(x) = \dfrac{\cos x}{2x^2 + 3}$.

35. $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\text{sen}\, x + \cos x}$.

36. Se $f(x) = (ax + b)\,\text{sen}\, x + (cx + d)\cos x$, determinar os valores das constantes a, b, c, d tais que $f'(x) = x\cos x$.
37. Se $g(x) = (ax^2 + bx + c)\,\text{sen}\, x + (dx^2 + ex + f)\cos x$, determinar os valores das constantes a, b, c, d, e, f tais que $g'(x) = x^2\ \text{sen}\ x$.
38. Dada a fórmula

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

(válida para $x \neq 1$), determinar, por derivação, fórmulas para as seguintes somas:
(a) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$,
(b) $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$.

39. Seja $f(x) = x^n$, com n inteiro positivo. Utilizar o teorema do binómio para desenvolver $(x + h)^n$ e deduzir a fórmula

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}.$$

Exprimir a soma do segundo membro recorrendo ao símbolo somatório. Faça-se $h \to 0$ e concluir que $f'(x) = nx^{n-1}$. Indicar os teoremas relativos a limites que se utilizaram. (Este resultado foi derivado doutro modo no Exemplo 3 da Seção 4.4).

4.7 Interpretação geométrica da derivada como um declive

O processo utilizado para definir a derivada é susceptível duma interpretação geométrica, a qual conduz duma maneira natural à ideia de tangente a uma curva. Na fig. 4.4 está representada uma parte do gráfico duma dada função f. Nele se consideram dois pontos P e Q, com as coordenadas $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$ respectivamente. No triângulo retângulo de hipotenusa PQ, a altura mede $f(x + h) - f(x)$ e representa a diferença das ordenadas dos dois pontos Q e P. Deste modo a razão incremental

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{4.10}$$

representa a tangente trigonométrica do ângulo α que QP faz com OX. O número real $tg\ \alpha$ chama-se o *declive* da |reta| passando por P e Q e dá um caminho para medir a "inclinação" desta reta. Por exemplo, se f é uma função linear, $f(x) = mx + b$, a razão incremental

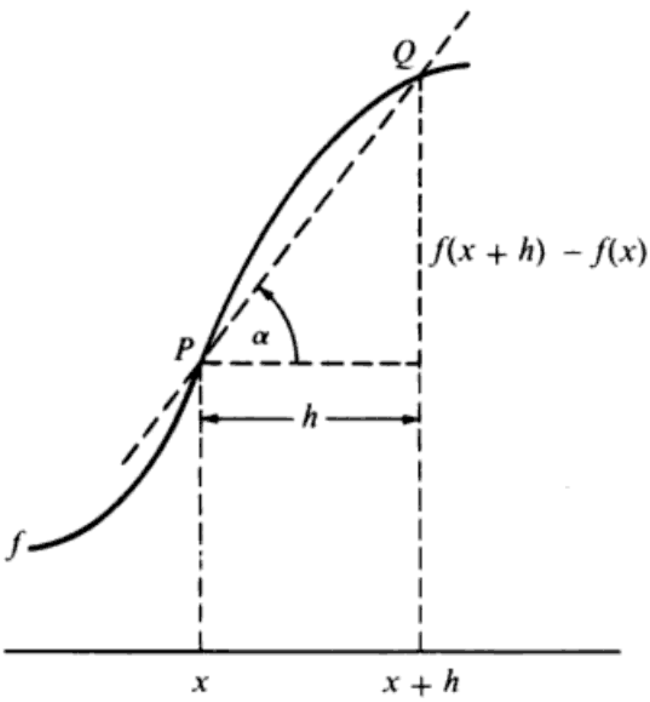


Fig. 4.4. Interpretação geométrica da razão incremental como a tangente de um ângulo.

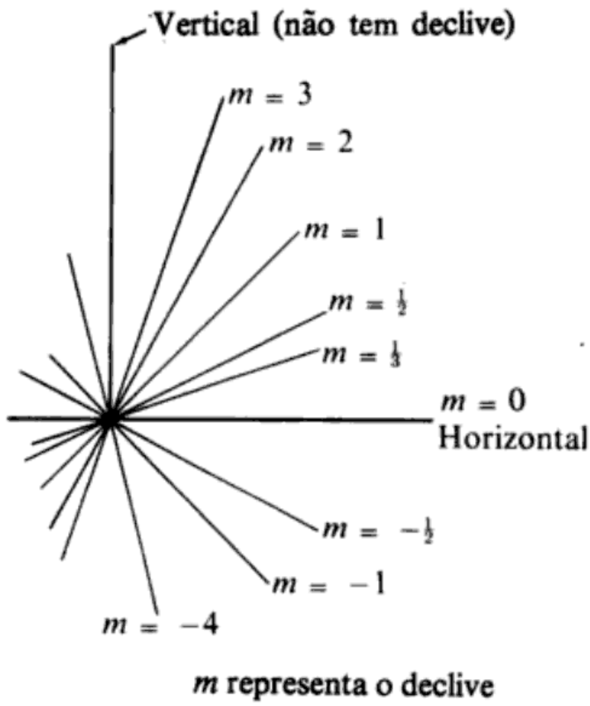


Fig. 4.5. Retas de diferentes declives.

(4.10) vale m e portanto é m o *declive* da reta.

Na fig. 4.5 estão representados alguns exemplos de retas com diferentes declives. Para uma reta paralela a OX $\alpha = 0$ e o declive, tg α, é também 0. Se α está compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ a reta é ascendente quando percorrida da esquerda para a direita e o declive é positivo. Se α está compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π a reta é descendente quando percorrida da esquerda para a direita e o declive é negativo. Uma reta para a qual $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ tem declive 1. Quando α cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, tg α cresce indefinidamente e as correspondentes retas cujo declive é tg α aproximam-se do eixo OY. Uma vez que tg $\frac{\pi}{2}$ não é definida, dizemos que *paralelas a OY não têm declive.*

Suponhamos agora que f admite derivada no ponto x. Quer isto dizer que a razão incremental tende para um certo limite $f'(x)$ quando h tende para 0. Quando isto é interpretado geometricamente diz-nos que, quando h se aproxima de 0, permanecendo o ponto P fixo, o ponto Q se move para P ao longo da curva, e a reta passando por P e Q muda de direção de tal modo que o seu declive, a tangente do ângulo α, tende para o limite $f'(x)$. Por esta razão, parece natural definir o *declive da curva* em P como sendo o número $f'(x)$. A reta pasando por P e tendo este declive é a *tangente* à curva em P.

Nota: O conceito de tangente a uma circunferência (e a algumas outras curvas especiais) já tinha sido estabelecido pelo antigos matemáticos gregos. Eles definiram a tangente a uma circunferência como sendo a reta que tinha um ponto comum com a circunferência e todos os outros fora dela. A partir desta definição podem deduzir-se muitas das propriedades das retas tangentes à circunferência. Por exemplo, pode demonstrar-se que a tangente à circunferência em qualquer dos seus pontos é perpendicular ao raio dirigido para esse ponto. Contudo, esta definição de tangente dada pelos matemáticos gregos para a circunferência não se pode facilmente generalizar para curvas mais gerais. O método descrito atrás, em que a tangente é definida em termos de derivada, provou ser muito mais satisfatório. Usando esta definição, pode provar-se que, para uma circunferência, a tangente possui todas as propriedades que lhe eram atribuidas pelos geómetras gregos. Conceitos tais como perpendicularidade e paralelismo podem ser expostos muito facilmente em termos analíticos recorrendo ao declive de retas. Por exemplo, da identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

resulta que duas retas, não paralelas a OY, com o mesmo declive são paralelas. De igual modo, da identidade

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta},$$

concluímos que duas retas cujo produto dos declives é igual a -1, sem que nenhuma delas seja paralela a OY, são perpendiculares.

O sinal da derivada duma função dá-nos completa informação acerca do correspondente gráfico da função. Por exemplo, se num ponto x de um intervalo aberto a derivada é *positiva*, então a curva, na vizinhança de x, é ascendente quando percorrida da esquerda de x para a sua direita. É o que acontece no ponto x_3 da fig. 4.6. Uma derivada *negativa* num intervalo significa que a porção do gráfico correspondente é descendente como se exemplifica em x_1, enquanto que uma derivada nula num ponto significa que a tangente é paralela a OX. Num máximo ou mínimo, tal como se exemplifica em x_2, x_5 e x_6, o declive da tangente há-de ser nulo. Fermat foi o primeiro a observar que pontos tais como x_2, x_5 e x_6, em que f é máxima ou mínima, hão-de encontrar-se entre as raízes da equação $f'(x) = 0$. É importante ter presente que $f'(x)$ pode igualmente anular-se em pontos em que não existe máximo ou mínimo tal como, por exemplo, em x_4. Repare-se que neste caso particular a tangente interseta a curva, o que constitui um exemplo de uma situação não incluída na definição de tangência dada pelos gregos.

As observações anteriores respeitantes ao sinal da derivada podem considerar-se como evidentes se interpretadas geometricamente. As respectivas demonstrações analíticas, baseadas nas propriedades gerais das derivadas, serão apresentadas na Seção 4.16.

4.8. Outras notações para as derivadas

As notações sempre desempenharam um papel extremamente importante no desenvolvi-

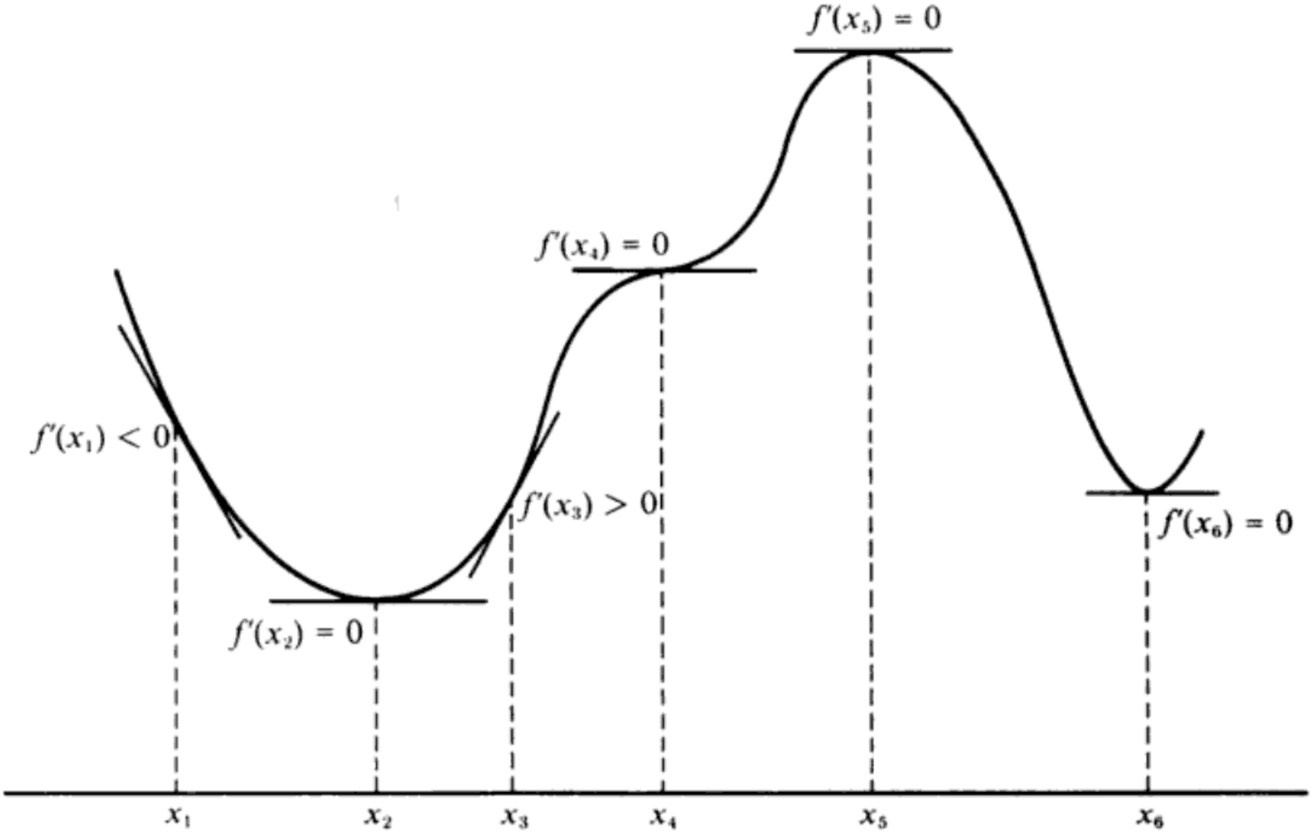


Fig. 4.6. Significado geométrico do sinal de derivada.

mento da Matemática. Alguns símbolos matemáticos, tais como x^n ou $n!$ são simples abreviações que permitem escrever longas proposições ou fórmulas duma maneira compacta. Outras, tais como o símbolo de integração $\int_a^b f(x)\,dx$, não só nos lembram o processo que representam, mas igualmente nos ajudam a efetuar o seu cálculo.

Algumas vezes usam-se diferentes notações para um mesmo conceito, dependendo a preferência, por uma ou outra, das circunstâncias que acompanham a utilização do símbolo. Isto é particularmente notável no cálculo diferencial, onde diferentes notações são usadas para as derivadas. A derivada duma função f representou-se, nas anteriores Seções, pelo símbolo f', notação introduzida por J. L. Lagrange (1736-1813) no final do século XVIII. Esta notação faz ressaltar o fato de que f' é uma nova função obtida por derivação de f, indicando-se o seu valor em x por $f'(x)$. Cada ponto (x, y) do gráfico de f tem as respetivas coordenadas relacionadas por $y = f(x)$ e, por isso, o símbolo y' utiliza-se também para representar a derivada $f'(x)$. De modo análogo, y'', ..., $y^{(n)}$ representam as derivadas de ordens superiores $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$. Por exemplo, se $y = \operatorname{sen} x$, então $y' = \cos x$, $y'' = - \operatorname{sen} x$, etc. A notação de Lagrange não caiu em desuso, tal como aconteceu com a utilizada por Newton que escrevia $\dot{y}$ e $\ddot{y}$ em vez de y' e y''. Os *pontos* de Newton, contudo, são ainda usados por alguns autores, especialmente para representar a velocidade e a aceleração.

Outro símbolo foi introduzido em 1800 por L. Arbogast (1759-1803), o qual representava a derivada de f por Df, um símbolo com largo uso hoje em dia. O símbolo D chama-se *operador derivação* e sugere-nos que Df é uma nova função obtida de f pela operação de derivação. As derivadas de ordem superior f'', f''', ..., $f^{(n)}$ escrevem-se, respetivamente, D^2f, D^3f, ...,

$D^n f$, e os valores destas derivadas no ponto x representam-se por $D^2f(x)$, $D^3f(x)$, ... $D^nf(x)$. Deste modo, escrevemos $D\operatorname{sen}x = \cos x$ e $D^2\operatorname{sen}x = D\cos x = -\operatorname{sen}\ x$. A regra para a derivação da soma de duas ou mais funções vem, na notação D, $D(f + g) = Df + Dg$ e o cálculo das derivadas no ponto x exprime-se por $[D(f + g)](x) = Df(x) + Dg(x)$, a qual pode também escrever-se na forma $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$. Deixa-se ao leitor a formulação das regras de derivação do produto e do quociente na notação D.

Entre os pioneiros da análise matemática, Leibniz, mais do que qualquer outro, compreendeu a importância da conveniente escolha dos símbolos. Estabelecida uma notação, experimentava-a largamente e trocava extensa correspondência com outros matemáticos debatendo os méritos ou inconvenientes daquela. O formidável impacto que o cálculo teve no desenvolvimento da matemática moderna deveu-se em parte à escolha adequada e sugestiva dos símbolos, muitos deles devidos a Leibniz.

Leibniz desenvolveu para as derivadas uma notação completamente diferente das referidas atrás. Utilizando y em vez de $f(x)$, escreveu a razão incremental

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

na forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

em que Δx (leia-se "delta x") aparece em vez de h e Δy em vez de $f(x + h) - f(x)$. O símbolo Δ chama-se *operador diferença*. Para o limite da razão incremental, isto é, para a derivada $f'(x)$, Leibniz escreveu $\dfrac{dy}{dx}$. Nesta notação a definição de derivada escreve-se

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Não somente a notação de Leibniz para a derivada era diferente, como era diferente a sua ideia relativa à derivada, pois Leibniz considerava o limite dy/dx como um quociente de quantidades "infinitesimais" dy e dx chamadas "diferenciais" e referia-se à derivada dy/dx como um "quociente diferencial". Leibniz considerava os infinitesimais como um novo tipo de números que, embora não nulos, eram menores que qualquer número real positivo.

Muito embora Leibniz não tivesse sido capaz de dar uma definição satisfatória de infinitesimais, ele próprio e os seus discípulos usaram-nos livremente na seus estudos do cálculo. Em consequência disso, muitos consideraram o Cálculo como algo de misterioso dando-se início à questão da validade dos métodos que se utilizavam. Os trabalhos de Cauchy e outros, no Século XIX, operaram a substituição gradual dos infinitesimais pela teoria clássica dos limites. Contudo, muita gente considera útil continuar a raciocinar, como Leibniz o fez, em termos de infinitesimais. Este tipo de raciocínio é dotado duma atração intuitiva e não raras vezes conduz fàcilmente a resultados, os quais por sua vez podem ser demonstrados de maneira rigorosa por métodos adequados.

Recentemente Abraham Robinson mostrou que o sistema dos números reais pode ser alargado de forma a incorporar os infinitesimais tal como Leibniz os concebeu. Uma discussão deste alargamento e o seu impacto em muitos ramos da Matemática encontra-se no livro de Robinson *Non-standard Analysis*, North-Holland Pub., Amsterdam, 1966.

Embora algumas ideias de Leibniz não tivessem passado à posteridade, o mesmo não se pode dizer das suas notações. O símbolo $\frac{dy}{dx}$ para a derivada tem a vantagem evidente de resumir todo o processo de formação da razão incremental e passagem ao limite. Mais adiante mostrar-se-á evidente a vantagem de que certas fórmulas são mais facilmente memorizáveis e operáveis quando as derivadas que nelas intervêm se escrevem na notação de Leibniz.

4.9. Exercícios

1. Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3x + 1$ para todo o x. Determinar os pontos do gráfico de f para os quais a tangente é paralela a OX.
2. Seja $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ para todo o x. Determinar os pontos do gráfico de f para os quais o declive é: (a) 0; (b) -1; (c) 5.
3. Seja $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo o x. Determinar todos os pontos x para os quais o gráfico de f em $(x, f(x))$ tem declive nulo.
4. Seja $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo o x. Determine os valores de tais que a reta $y = 2x$ seja tangente à curva de f no ponto (2, 4).
5. Determinar os valores das constantes a, b e c para os quais os gráficos dos dois polinómios $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 - c$ se intersectem no ponto (1, 2) e admitam a mesma tangente naquele ponto.
6. Considerar o gráfico da função f definida pela equação $f(x) = x^2 + ax + b$, em que a e b são constantes.
   (a) Determinar o declive da corda unindo os pontos do gráfico para os quais $x = x_1$ e $x = x_2$.
   (b) Determinar, em função de x_1 e x_2, todos os valores de x para as quais a tangente em $(x, f(x))$ tem o mesmo declive que a corda da alínea (a).
7. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva definida pela equação $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Determinar o ponto de tangência. Intersectará esta tangente a curva em qualquer outro ponto?
8. Traçar o gráfico do polinómio $f(x) = x - x^3$, relativo ao intervalo $-2 \leq x \leq 2$. Determinar as constantes m e b de modo que a reta $y = mx + b$ seja tangente à curva de f no ponto $(-1, 0)$. Uma segunda reta que passa por $(-1, 0)$ é também tangente ao gráfico de f no ponto (a, c). Determinar as coordenadas a e c.
9. A função f é definida do modo seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c, \\ ax + b & \text{se } x > c, \end{cases} \qquad (a, b, c \text{ constantes}).$$

   Achar os valores de a e b (em função de c) de modo que $f'(c)$ exista.

10. Resolver o exercício anterior para a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{se } |x| > c\,, \\ a + bx^2 & \text{se } |x| \le c\,. \end{cases}$$

11. Resolver o Exercício 9 quando f é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \le c\,, \\ ax + b & \text{se } x > c\,. \end{cases}$$

12. Se $f(x) = (1 - \sqrt{x})/(1 + \sqrt{x})$ para $x > 0$, determinar $Df(x)$, $D^2f(x)$ e $D^3f(x)$.
13. O polinómio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$ e $P''(0) = 10$. Determinar a, b, c, d.
14. Duas funções f e g admitem primeira e segunda derivada em 0 e verificam as relações

$$f(0) = 2/g(0)\,, \qquad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0)\,, \qquad g''(0) = 5f''(0) = 6f(0) = 3\,.$$

(a). Se $h(x) = f(x)/g(x)$ calcular $h'(0)$.
(b). Se $k(x) = f(x)g(x)$ sen x calcular $k'(0)$.
(c) Calcular o limite de $g'(x)/f'(x)$ quando $x \to 0$.

15. Supondo que a derivada $f'(a)$ existe, estabelecer quais das seguintes igualdades são verdadeiras e quais as falsas. Justificar a resposta dada para cada caso.

(a) $f'(a) = \lim_{h \to a} \dfrac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

(b) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a) - f(a - h)}{h}$.

(c) $f'(a) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(a + 2t) - f(a)}{t}$.

(d) $f'(a) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(a + 2t) - f(a + t)}{2t}$.

16. Suponhamos que em vez da definição usual de derivada $Df(x)$, se defina nova espécie de derivada, $D^*f(x)$, pela fórmula

$$D^*f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^2(x + h) - f^2(x)}{h}\,,$$

onde $f^2(x)$ significa $[f(x)]^2$.
(a) Derivar fórmulas para o cálculo da derivada D^* da soma, diferença, produto e quociente de duas funções.
(b) Exprimir $D^*f(x)$ em função de $Df(x)$.
(c) Para que funções será $D^*f = Df$?

4.10. A regra de derivação de funções compostas

Com as fórmulas de derivação já deduzidas, podemos calcular derivadas de funções f para as quais $f(x)$ é uma soma finita de produtos ou quocientes de constantes multiplicadas por sen x, cos x e x^r (r racional). Até agora, contudo, ainda não aprendemos a tratar com funções tais como $f(x) = \text{sen}(x^2)$, sem aplicar diretamente a definição de derivada. Nesta Seção vamos estudar um teorema que nos permitirá derivar funções compostas tais como $f(x) = \text{sen}(x^2)$, o que aumentará substancialmente o número de funções que poderemos derivar.

Lembramos que se u e v são funções tais que o domínio de u inclui o contradomínio de v podemos definir a função composta $f = u \circ v$ mediante a igualdade

$$f(x) = u[v(x)]\,.$$

A regra da *derivação de funções compostas* diz-nos como exprimir a derivada de f em função das derivadas u' e v'.

TEOREMA 4.2. REGRA DE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES COMPOSTAS. *Seja f a função composta de duas funções u e v, $f = u \circ v$. Se existirem as derivadas $v'(x)$ e $u'(y)$, com $y = v(x)$, então a derivada $f'(x)$ existe e é dada pela fórmula*

$$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x)\,. \tag{4.11}$$

Quer isto dizer que para calcular a derivada de $u \circ v$ em x, calculamos em primeiro lugar a derivada de u no ponto y, com $y = v(x)$, e multiplicamos esta por $v'(x)$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 4.2 vamos apresentar outras maneiras de exprimir esta regra de derivação. Se escrevermos (4.11) referida unicamente à variável x, obtemos a fórmula

$$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)\,.$$

Expressada como uma igualdade entre *funções* de preferência a uma igualdade entre números, a regra da derivação toma a forma seguinte

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'.$$

Na notação $u(v)$, se $u(v)'$ representa a derivada da função composta $u(v)$, e $u'(v)$ a derivada para a composição $u' \circ v$, então a fórmula anterior escreve-se

$$u(v)' = u'(v) \cdot v'.$$

Demonstração do teorema 4.2. Passamos agora à demonstração de (4.11). Admitimos que v possui derivada em x e que u possui derivada em $v(x)$ e pretendemos provar que f admitirá derivada em x definida pelo produto $u'[v(x)] \cdot v'(x)$. A razão incremental para f é

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)] - u[v(x)]}{h}\,. \tag{4.12}$$

É conveniente introduzir agora a seguinte notação: Sejam $y = v(x)$ e $k = v(x+h) - v(x)$. (É importante ter presente que k depende de h). Então temos $v(x+h) = y + k$ e (4.12) vem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{h}. \tag{4.13}$$

O segundo membro de (4.13) é semelhante à razão incremental cujo limite define $u'(y)$, exceto que no denominador aparece k em vez de h. Se $k \neq 0$ é fácil completar a demonstração, bastando para tanto multiplicar e dividir o segundo membro de (4.13) por k, pelo que de (4.13) se escreve

$$\frac{u(y+k)-u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k)-u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}. \tag{4.14}$$

Quando $h \to 0$, a última razão incremental do segundo membro tende para $v'(x)$. Uma vez que $k = v(x+h) - v(x)$ e v é contínua em x, então ao tender $h \to 0$ também $k \to 0$; deste modo a primeira razão incremental do segundo membro de (4.14) tende para $u'(y)$ quando $h \to 0$ e portanto fica demonstrada (4.11).

Embora o raciocínio anterior pareça ser o caminho mais natural para a demonstração, ele não é, contudo, completamente geral. Posto que $k = v(x+h) - v(x)$, pode acontecer que $k = 0$ para infinitos valores de h quando $h \to 0$, e neste caso a passagem de (4.13) a (4.14) não é válida. Para ultrapassar esta dificuldade, é necessária uma ligeira modificação na demonstração.

Voltemos de novo a (4.13) e exprimamos o quociente do segundo membro de modo que k não apareça em denominador, bastando para tanto introduzir a diferença entre a derivada $u'(y)$ e a razão incremental cujo limite é $u'(y)$. Quer dizer, nós definimos uma nova função g do modo seguinte:

$$g(t) = \frac{u(y+t)-u(y)}{t} - u'(y) \qquad \text{se} \quad t \neq 0. \tag{4.15}$$

Esta igualdade define $g(t)$ somente se $t \neq 0$. Multiplicando por t e transpondo termos, podemos escrever (4.15) na forma

$$u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)]. \tag{4.16}$$

Embora (4.16) tenha sido estabelecida sob a hipótese de $t \neq 0$, é igualmente válida para $t = 0$ desde que se atribua algum valor definido a $g(0)$. Uma vez que $g(t) \to 0$ quando $t \to 0$, é conveniente que o valor atribuido a $g(0)$ seja 0. Isto assegura-nos a continuidade de g em 0. Se substituímos agora t em (4.16) por k, com $k = v(x+h) - v(x)$, e substituímos o segundo membro de (4.16) em (4.13), obtemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k}{h}[g(k) + u'(y)], \tag{4.17}$$

fórmula que ainda é válida se $k=0$. Quando $h \to 0$ o quociente $k/h \to v'(x)$ e $g(k) \to 0$ e deste modo o segundo membro de (4.17) tende para o limite $u'(y) \cdot v'(x)$, ficando assim demonstrada (4.11) com toda a generalidade.

4.11 Aplicações da regra de derivação duma função composta. Coeficientes de variação ligados e derivação implícita

A regra de derivação da função composta é um excelente exemplo para ilustrar a utilidade da notação de Leibniz para as derivadas, pois que (4.11) nesta notação toma o aspecto de uma identidade algébrica trivial. Em primeiro lugar introduzimos novos símbolos, a saber

$$y = v(x) \qquad \text{e} \qquad z = u(y) .$$

Então, escrevendo $\frac{dy}{dx}$ para a derivada $v'(x)$ e $\frac{dz}{dy}$ para $u'(y)$, a função composta fica representada por

$$z = u(y) = u[v(x)] = f(x) ,$$

e representando $\frac{dz}{dx}$ a derivada $f'(x)$, então a regra de derivação tal como estava expressa em (4.11) escreve-se agora

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} . \tag{4.18}$$

O grande poder sugestivo desta fórmula é evidente, sendo especialmente atrativa quando se aplica o Cálculo a problemas físicos. Por exemplo, suponhamos que o anterior símbolo z representa uma quantidade física medida em função de outras quantidades físicas x e y. A igualdade $z = f(x)$ indica como determinar z dado o x e $z = u(y)$ indica como determinar z dado o y. A relação entre x e y é expressa por $y = v(x)$. A regra de derivação, tal como foi expressa em (4.18), diz-nos que o coeficiente de variação de z com respeito a x é igual ao produto do coeficiente de variação de z a respeito de y pelo coeficiente de variação de y com respeito a x. O exemplo seguinte mostra como se pode aplicar a regra de derivação (4.18) a um problema físico particular

EXEMPLO 1. Suponhamos que um gás é bombeado para dentro de um balão esférico na razão de 50 c.c. por segundo. Admitamos que a pressão do gás no interior permanece constante e que o balão conserva sempre a forma esférica. Como varia com o tempo o raio do balão quando medir 5 cm?

Resolução. Representemos por r o raio e V o volume do balão num instante t. Conhecemos $\frac{dV}{dt}$, isto é, a variação com o tempo do volume do balão e pretendemos determinar $\frac{dr}{dt}$, ou seja a variação com o tempo do raio do balão esférico, no instante em que $r = 5$. A regra de derivação (4.18) dá-nos a ligação entre o dado e o pedido. Com efeito, temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} . \tag{4.19}$$

Para calcularmos $\frac{dV}{dr}$ utilizamos a formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ que define o volume da esfera em função do raio. Derivando, obtemos $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ e portanto (4.19) pode escrever-se

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Fazendo $\frac{dV}{dt} = 50$ e $r = 5$, obtemos $\frac{dr}{dt} = 1/(2\pi)$. Quer isto dizer que o raio aumenta de $1/(2\pi)$ centímetros por segundo no instante em que $r = 5$ cm.

O exemplo precedente corresponde ao tipo de problemas ditos de *coeficientes de variação ligados*. Chama-se a atenção para o fato que não é necessário exprimir r em função de t para se poder calcular a derivada $\frac{dr}{dt}$. É precisamente este aspecto que torna a regra de derivação da função composta especialmente útil em problemas sobre coeficientes de variação ligados.

Os dois exemplos que se seguem são destinados a mostrar como pode utilizar-se a regra (4.18) para se estabelecerem novas fórmulas de derivação.

EXEMPLO 2. Dada $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ calcular $f'(x)$.

Resolução. A função f é uma composição, $f(x) = u[v(x)]$, com $v(x) = x^2$ e $u(x) = \operatorname{sen} x$. Para aplicar a regra necessitamos determinar $u'[v(x)] = u'(x^2)$. Uma vez que $u'(x) = \cos x$, temos $u'(x^3) = \cos(x^2)$ e portanto de (4.11) resulta

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot v'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x .$$

Podemos também resolver o problema usando a notação de Leibniz. Se escrevermos $y = x^2$ e $z = f(x)$, então $z = \operatorname{sen} y$ e $\frac{dz}{dx} = f'(x)$. A regra de derivação (4.18) permite escrever

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (\cos y)(2x) = \cos(x^2) \cdot 2x ,$$

que coincide com a expressão obtida anteriormente para $f'(x)$.

EXEMPLO 3. Se $f(x) = [v(x)]^n$ com n inteiro positivo, calcular $f'(x)$ em função de $v(x)$ e $v'(x)$.

Resolução. A função f é uma composição, $f(x) = u[v(x)]$, onde $u(x) = x^n$. Uma vez que $u'(x) = nx^{n-1}$, temos $u'[v(x)] = n[v(x)]^{n-1}$, e a regra de derivação da função composta conduz-nos a

$$f'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x) .$$

Se omitirmos a referência a x e escrevermos a igualdade anterior como referente a funções, obtemos a importante fórmula

$$(v^n)' = nv^{n-1}v'$$

que nos diz como derivar a potência de grau n de v quando v' existe. A fórmula é igualmente verdadeira para potências *racionais* se v^n e v^{n-1} estão definidas. Para resolver o problema na notação de Leibniz, fazemos $y = v(x)$ e $z = f(x)$. Assim $z = y^n$, $\frac{dz}{dx} = f'(x)$ e a regra (4.18) dá-nos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}v'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x)\,,$$

que está de acordo com a primeira solução.

EXEMPLO 4. A equação $x^2 + y^2 = r^2$ representa uma circunferência de raio r e centro na origem. Se resolvermos a equação em ordem a y, obtemos duas soluções as quais servem para definir duas funções f e g dadas no intervalo $[-r, r]$ pelas fórmulas

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

O gráfico de f é a semi-circunferência superior e o de g a semi-circunferência inferior). Podem calcular-se as derivadas de f e g pela regra de derivação da função composta. Para f servimo-nos do resultado do Exemplo 3, com $v(x) = r^2 - x^2$ e $n = 1/2$, e obtemos

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{f(x)} \tag{4.20}$$

sempre que $f(x) \neq 0$. O mesmo método, aplicado a g, dá-nos

$$g'(x) = -\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{g(x)} \tag{4.21}$$

sempre que $g(x) \neq 0$. Observe-se que se y indicar quer $f(x)$, quer $g(x)$, ambas as fórmulas (4.20) e (4.21) podem fundir-se numa só, a saber,

$$y' = \frac{-x}{y} \quad \text{se} \quad y \neq 0\,. \tag{4.22}$$

Outra aplicação útil da regra de derivação da função composta encontra-se na regra de *derivação implícita*. Vamos explicar o método e pôr em evidência as suas vantagens, resolvendo novamente o Exemplo 4 duma maneira mais simples.

EXEMPLO 5. *Derivação implícita.* A fórmula (4.22) pode deduzir-se diretamente da equação $x^2 + y^2 = r^2$, sem necessidade de resolver esta relativamente a y. Tendo presente que y é uma função de x [quer seja $y = f(x)$ ou $y = g(x)$] e supondo que y' existe, derivamos ambos os membros da equação $x^2 + y^2 = r^2$ e obtemos

$$2x + 2yy' = 0 . \tag{4.23}$$

(O termo $2yy'$ resulta da derivação de y^2 conforme exposto no Exemplo 3). Resolvendo (4.23) relativamente a y' obtém-se (4.22).

A equação $x^2 + y^2 = r^2$ diz-se que define y *implicitamente* como função de x (no caso presente define *duas* funções), e o processo segundo o qual se obteve (4.23) a partir daquela equação é designado por *derivação implícita*. O resultado final é válido para ambas as funções f e g assim definidas. Observe-se que num ponto (x, y) da circunferência com $x \neq 0$ e $y \neq 0$ o declive da tangente é $-x/y$, enquanto que o raio dirigido para (x, y) tem o declive y/x. O produto dos dois declives é -1, pelo que a tangente é perpendicular ao raio dirigido para o ponto de tangência.

4.12 Exercícios

Nos Exercícios 1 a 14, calcular a derivada $f'(x)$. Em cada caso subentende-se que x toma unicamente os valores para os quais a fórmula que define $f(x)$ tem significado.

1. $f(x) = \cos 2x - 2 \operatorname{sen} x.$
2. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$
3. $f(x) = (2 - x^2) \cos x^2 + 2x \operatorname{sen} x^3.$
4. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x).$
5. $f(x) = \operatorname{sen}^n x \cdot \cos nx.$
6. $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)].$
7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}.$
8. $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \operatorname{cotg} \dfrac{x}{2}.$
9. $f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x.$
10. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}.$
11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$
12. $f(x) = \left(\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}\right)^{1/3}.$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}\,(x + \sqrt{1 + x^2})}.$
14. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$
15. Calcular $f'(x)$ se $f(x) = (1 + x)(2 + x^2)^{1/2}(3 + x^3)^{1/3}, \quad x^3 \neq -3.$
16. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1 + 1/x}$ se $x \neq 0$, e s let $g(x) = \dfrac{1}{1 + 1/f(x)}$. Calcular $f'(x)$ e $g'(x)$.
17. A seguinte tabela de valores calculou-se para um par de funções f e g e suas derivadas f' e g'. Construir a correspondente tabela para as duas funções compostas h e k definidas por $h(x) = f[g(x)]$, $k(x) = g[f(x)]$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	5	2	-5
1	3	-2	0	1
2	0	2	3	1
3	2	4	1	-6

18. Uma função f e suas derivadas das duas primeiras ordens foram tabuladas como se indica a seguir. Sendo $g(x) = xf(x^2)$, construir uma tabela para g e suas derivadas das duas primeiras ordens, para $x = 0, 1, 2$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
4	6	3	0

19. Determinar a derivada $g'(x)$ em função de $f'(x)$ se:
(a) $g(x) = f(x^2)$;
(b) $g(x) = f(\text{sen}^2 x) + f(\cos^2 x)$;
(c) $g(x) = f[f(x)]$;
(d) $g(x) = f\{f[f(x)]\}$.

Coeficientes de variação ligados e derivação implícita.

20. Cada aresta dum cubo dilata-se na razão de 1 centímetro por segundo. Qual será a variação do volume com o tempo quando o comprimento de cada aresta é (a) 5 cm?; (b) 10 cm?; (c) x cm?
21. Um avião desloca-se em voo horizontal, 8 milhas acima do solo (supôr que a Terra é plana). A rota do voo passa sobre um ponto P do solo. A distância entre o avião e o ponto P decresce na razão de 4 milhas por minuto, no instante em que essa distância é de 10 milhas. Determinar a velocidade do avião em milhas por hora.
22. Um campo de baseball é um quadrado cujo lado mede 90 pés. Uma bola é lançada pelo batedor ao longo de uma linha que passa pela terceira base com uma velocidade constante de 100 pés por segundo. Qual é a rapidez com que varia a distância da bola à primeira base, (a) quando a bola se encontra a metade do caminho da terceira base? (b) quando a bola alcança a terceira base?
23. Um barco navega paralelamente à costa, suposta retilínea, com uma velocidade de 12 milhas por hora e a uma distância da costa de 4 milhas. Qual é a sua velocidade de aproximação a um farol da costa no instante em que diste 5 milhas do farol?
24. Um recipiente tem a forma de cone circular reto. A altura é 10 pés e o raio da base 4 pés. Lança-se água no recipiente, na razão de 5 pés cúbicos por minuto. Com que velocidade se eleva o nível da água quando a profundidade da água é de 5 pés se (a) o vértice do cone está para cima? (b) o vértice dó cone está para baixo?
25. Um recipiente de água tem a forma dum cone circular reto com o vértice para baixo. A altura mede 10 pés e o raio da base 15 pés. A água sai pelo fundo à razão de 1 pé cúbico por segundo. Por outro lado lança-se água no depósito à razão de c pés cúbicos por segundo. Calcular c de modo que o nível da água suba com uma velocidade de 4 pés por segundo no instante em que a profundidade da água é de 2 pés.
26. A água corre para um tanque de forma hemisférica com 10 pés de raio (a parte plana

para cima). Em qualquer instante seja h a altura da água medida do fundo, r o raio da superfície livre da água, e V o volume da água no tanque. Calcular dV/dh no instante em que $h = 5$ pés. Se a água corre na razão de $5\sqrt{3}$ pés cúbicos por segundo, calcular dr/dt no instante t em que $h = 5$ pés.

27. Um triângulo retângulo variável ABC no plano XOY tem o ângulo reto no vértice B, o vértice A fixo na origem e o terceiro vértice C obrigado a permanecer sobre a parábola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. O ponto B parte do ponto $(0,1)$ no instante $t = 0$ e desloca-se no semi-eixo positivo OY com uma velocidade constante de 2 cm/seg. Com que rapidez varia a área do triângulo quando $t = 7/2$ segundo?
28. O raio dum cilindro circular reto cresce segundo um coeficiente de variação constante. A sua altura é uma função linear do raio e aumenta três vezes mais rapidamente que este. Quando o raio mede 1 pé, a altura mede 6 pés. Quando o raio mede 6 pés, o volume está aumentando na razão de 1 pé cúbico por segundo. Quando o raio mede 36 pés, o volume aumenta na razão de n pés cúbicos por segundo, com n inteiro. Determinar n.
29. Uma partícula é obrigada a mover-se ao longo duma parábola de equação $y = x^2$. (a) Em que ponto da curva estarão a abcissa e a ordenada variando com o tempo do mesmo modo? (b) Determinar esse coeficiente de variação se o movimento é tal que no instante t se tem $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \operatorname{sen}^2 t$.
30. A equação $x^3 + y^3 = 1$ define y como uma ou mais funções de x. (a) Supondo que a derivada y' existe, e sem resolver a equação relativamente a y, provar que y' verifica a equação $x^2 + y^2y' = 0$. (b) Supondo que a segunda derivada y'' existe, mostrar que $y'' = -2xy^{-5}$ sempre que $y \neq 0$.
31. Se $0 < x < 5$, a equação $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$ define y como uma função de x. Sem a resolver em ordem a y, mostrar que a derivada y' tem um sinal fixo. (Supõe-se que y' existe).
32. A equação $3x^2 + 4y^2 = 12$ define y implicitamente como duas funções de x se $|x| \leq 2$. Admitindo que a segunda derivada y'' existe, mostrar que ela satisfaz à equação $4y^3y'' = -9$.
33. A equação $x \operatorname{sen} xy + 2x^2 = 0$ define y implicitamente como uma função de x. Admitindo que a derivada y' existe, mostrar que ela satisfaz à equação $y'x^2\cos xy + xy\cos xy + \operatorname{sen} xy + 4x = 0$.
34. Se $y = x^r$, com r um número racional, $r = m/n$, então $y^n = x^m$. Admitindo a existência da derivada y' derivar a fórmula $y' = rx^{r-1}$ usando a derivação implícita e a correspondente fórmula para expoentes inteiros.

4.13. Aplicações da derivação à determinação dos extremos de funções

A derivação pode servir para localizar os máximos e mínimos de funções. Na realidade, existem no Cálculo dois significados diferentes da palavra "máximo", e distinguem-se um do outro mediante os qualificativos *absoluto* e *relativo*. O conceito de máximo absoluto foi analisado no capítulo 3. Lembramos que uma função real f diz-se possuir um máximo absoluto num conjunto S se existe pelo menos um ponto c em S tal que

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ em } S.$$

O conceito de máximo relativo define-se do modo seguinte:

DEFINAÇÃO DE MÁXIMO RELATIVO. *Uma função f, definida num conjunto S admite um máximo relativo num ponto c de S, se existe um certo intervalo aberto I que contém c tal que*

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \cap S.$$

O conceito de mínimo relativo define-se do mesmo modo, com o sentido da desigualdade invertido.

Por outras palavras, um máximo relativo em c é um máximo absoluto numa certa vizinhança de c, embora não seja necessariamente um máximo absoluto em todo o conjunto S. Na fig. 4.7 apresentam-se alguns exemplos. Evidentemente cada máximo absoluto é, em particular, um máximo relativo.

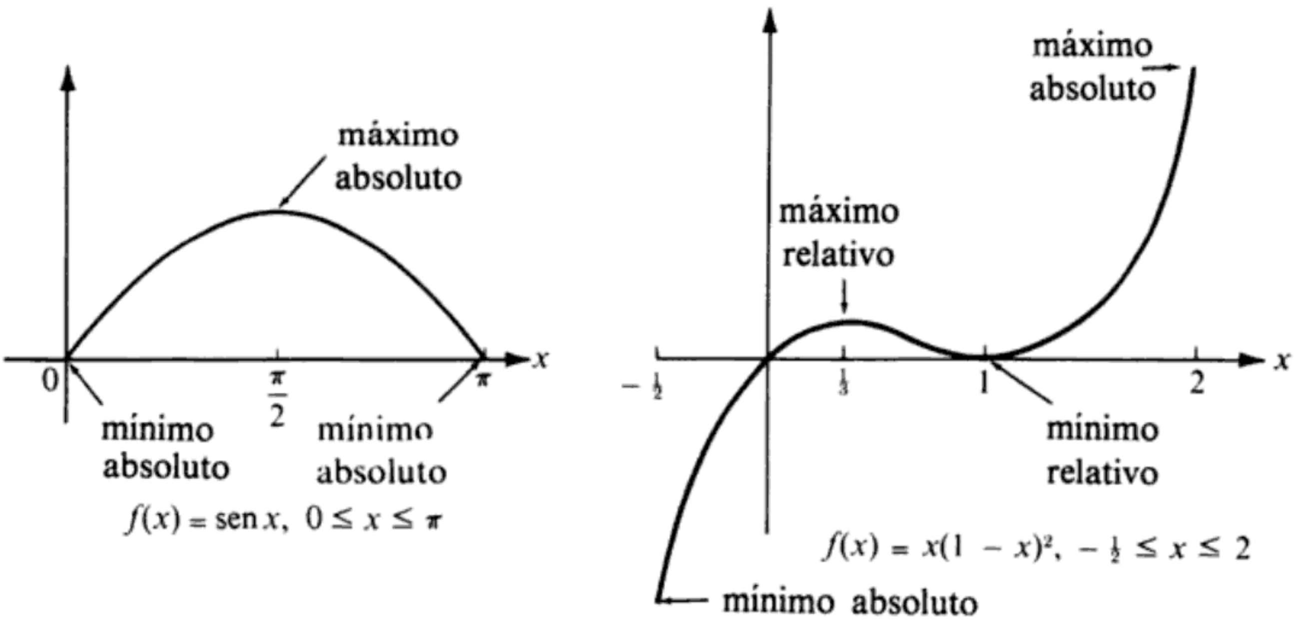


Fig. 4.7. Extremos de funções.

DEFINIÇÃO DE EXTREMO. *Um número que é ou um máximo relativo ou um mínimo relativo de uma função f, chama-se valor extremo ou extremo de f.*

O teorema seguinte, ilustrado na fig. 4.7, relaciona os extremos de uma função com as tangentes ao respetivo gráfico paralelas a OX.

TEOREMA 4.3. ANULAMENTO DA DERIVADA NUM PONTO EXTREMO INTERIOR. *Seja f definida num intervalo aberto I e admita-se que f tem um máximo relativo ou um mínimo relativo num ponto interior c de I. Se a derivada f′(c) existe, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Definamos em I uma função Q do modo seguinte:

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{se} \quad x \neq c, \qquad Q(c) = f'(c).$$

Uma vez que $f'(c)$ existe, $Q(x) \to Q(c)$ quando $x \to c$, de modo que Q é contínua em c. Queremos provar que $Q(c) = 0$, o que se conseguirá demonstrando que cada uma das desigualdades $Q(c) > 0$ e $Q(c) < 0$ conduz a uma contradição.

Admitamos $Q(c) > 0$. Pela propriedade de conservação do sinal das funções contínuas, existe um intervalo que contém c no qual $Q(x)$ é positiva. Deste modo o numerador do quociente $Q(x)$ tem o mesmo sinal que o denominador para todo $x \neq c$ neste intervalo. Quer isto dizer que $f(x) > f(c)$ quando $x > c$ e $f(x) < f(c)$ quando $x < c$. Esta conclusão contradiz, porém, a hipótese de que f tem um extremo em c. Por conseguinte, a desigualdade $Q(c) > 0$ é impossível. Um argumento semelhante mostra que não pode ser $Q(c) < 0$ e portanto será $Q(c) = 0$, como afirmámos. Uma vez que $Q(c) = f'(c)$, está o teorema demonstrado.

É importante notar que uma derivada nula em c não implica a existência dum extremo nesse ponto. Por exemplo, seja $f(x) = x^3$. O gráfico de f está representado na fig. 3.8. Porque $f'(x)$ $3x^2$, resulta que $f'(0) = 0$. Contudo esta função é crescente em todo o intervalo contendo 0, pelo que não existe extremo neste ponto. Este exemplo mostra que o anulamento da derivada em *c não é condição suficiente* para a existência dum extremo nesse ponto.

Outro exemplo, $f(x) = |x|$, mostra que nem sempre num extremo a função apresenta derivada nula. Neste caso existe um mínimo relativo em 0, como se mostra na fig. 4.9, mas

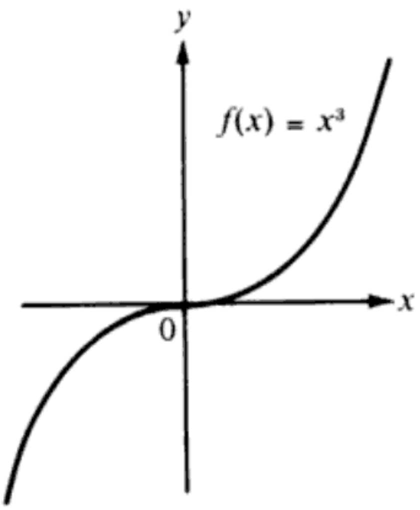


Fig. 4.8. $f'(0) = 0$, porém não existe extremo em 0.

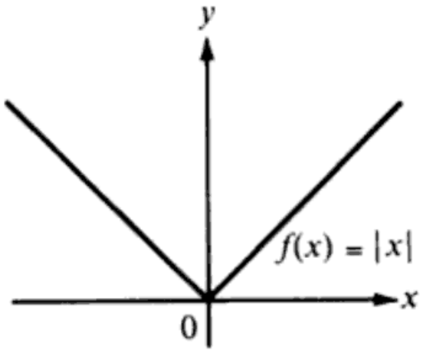


Fig. 4.9. Existe um extremo em 0, mas $f'(0)$ não existe.

naquele ponto 0 o gráfico apresenta um vértice e não existe derivada. O teorema 4.3 pressupõe que a derivada *$f'(c)$ existe* num extremo, quer dizer, o Teorema 4.3 diz-nos que, *na ausência de pontos angulosos*, a derivada será necessáriamente nula num extremo, se este ocorre no interior dum intervalo.

Numa seção posterior descreveremos um critério para a determinação de extremoso, o qual é suficientemente amplo para incluir ambos os exemplos da fig. 4.7 e também o da fig. 4.9. Este critério, exposto através do Teorema 4.8, diz-nos que um extremo ocorrerá num ponto sempre que a derivada muda aí de sinal. Embora este fato possa parecer geometricamente evidente, não é fácil demonstrá-lo com os conhecimentos adquiridos até aqui. Estabeleceremos este resultado como uma consequência do teorema do valor médio para derivadas que estudamos a seguir.

4.14. O teorema dos acréscimos finitos

O teorema dos acréscimos finitos é importante no cálculo, porque muitas propriedades de funções podem facilmente deduzir-se a partir dele. Antes de estabelecermos o teorema, analisaremos um dos seus casos particulares a partir do qual se poderá estabelecer o teorema mais geral. Este resultado particular foi estabelecido em 1690 por Michel Rolle (1652-1719), matemático francês.

TEOREMA 4.4. TEOREMA DE ROLLE. *Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em cada ponto do intervalo aberto (a, b). Admita-se também que*

$$f(a) = f(b) .$$

Então existe pelo menos um ponto c no intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

O significado geométrico do teorema de Rolle está representado na fig. 4.10. O teorema afirma muito simplesmente que a curva de $f(x)$ deve admitir pelo menos uma tangente paralela a OX em algum ponto entre a e b.

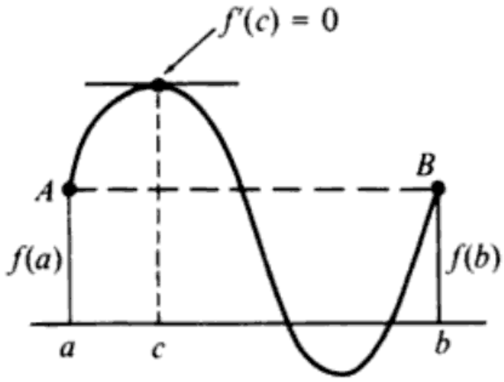


Fig. 4.10. Interpretação geométrica do teorema de Rolle.

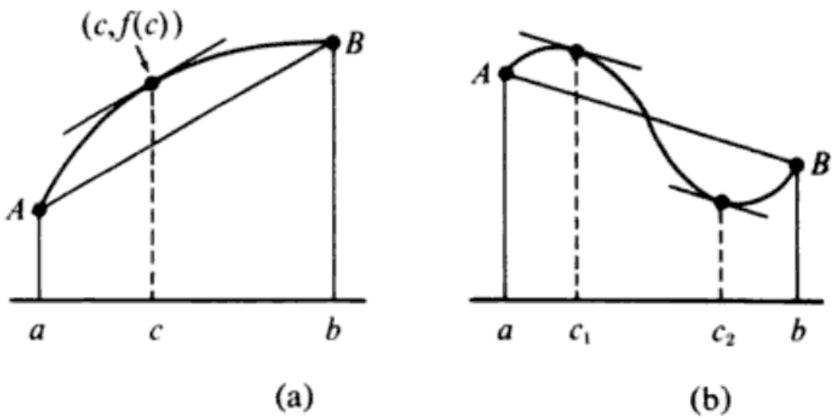


Fig. 4.11. Interpretação geométrica do teorema do valor médio.

Demonstração. Admitindo que $f'(x) \neq 0$ para todo o x no intervalo aberto (a, b) chegaremos a uma contradição: segundo o teorema do valor extremo para funções continuas f deve alcançar o seu máximo absoluto M, e o mínimo absoluto m, algures no intervalo fechado $[a, b]$. Pelo Teorema 4.3 nenhum valor extremo pode ser alcançado em qualquer ponto interior (caso contrário a derivada seria aí nula). Por conseguinte, ambos os valores extremos serão assumidos nos pontos extremos a e b do intervalo. Mas, uma vez que $f(a) = f(b)$, isto significa que será $m = M$ e portanto f constante em $[a, b]$. Todavia esta conclusão vai contra a hipótese de que $f'(x) \neq 0$ para todo o x de (a, b). Resulta pois que $f'(c) = 0$ para pelo menos um c satisfazendo a $a < c < b$, o que demonstra o teorema.

Podemos usar o teorema de Rolle para demonstrar o teorema do valor médio. Porém, antes de o demonstrarmos, será útil examinar o seu significado geométrico. Cada uma das curvas traçadas na fig. 4.11 é o gráfico de uma função contínua f admitindo tangente em cada ponto do intervalo aberto (a, b). No ponto $(c, f(c))$ representado na fig. 4.11 (a) *a tangente é paralela à corda* AB. Na fig. 4.11 (b) existem dois pontos onde a tangente é paralela à corda AB. O teorema dos acréscimos finitos garante a existência de *pelo menos um ponto* com esta propriedade.

Para traduzir analiticamente esta propriedade geométrica, necessitamos unicamente ter presente que o paralelismo de duas retas implica a igualdade dos respetivos declives. Uma vez que o declive da corda AB é o quociente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ e ainda porque o declive da tangente à curva no ponto c é definido pela derivada $f'(c)$, a afirmação anterior significa que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{4.24}$$

para *algum* c no intervalo aberto (a, b).

Para pôr ainda mais em destaque a evidência intuitiva de (4.24), podemos imaginar $f(t)$ como definindo a distância percorrida por uma partícula em movimento, no tempo t. Então o quociente do primeiro membro de (4.24) representa a velocidade *média* durante o intervalo de tempo $[a, b]$, e a derivada $f'(t)$ representa a velocidade instântanea no instante t. A igualdade significa que deve existir um instante para o qual a velocidade instantânea iguala a velocidade média. Por exemplo, se a velocidade média dum automóvel durante um curto trajeto é de 45 km/hora, então o velocímetro deve registar 45 km/hora *pelo menos uma vez* durante a viagem.

O teorema pode enunciar-se do modo seguinte:

TEOREMA 4.5. TEOREMA DOS ADRÉSCIMOS FINITOS*. *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ tendo derivada em todo o ponto do intervalo aberto (a, b), então existe pelo menos um ponto interior c de (a, b) para o qual*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,. \tag{4.25}$$

Demonstração. Para se poder aplicar o teorema de Rolle necessitamos duma função que tenha valores iguais nos pontos extremos a e b. Afim de construirmos uma tal função, modificamos f da maneira seguinte:

$$h(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)]\,.$$

*Frequentemente designado por teorema de Lagrange.

Então $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. Além disso h é contínua em $[a, b]$ e admite derivada no intervalo (a, b). Aplicando o teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c) = 0$ para um certo c em (a, b). Mas

$$h'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)] .$$

e quando $x = c$, obtem-se a igualdade (4.25).

Observe-se que o teorema não faz qualquer afirmação acerca da localização exata de um ou mais valores c, afirmando apenas que eles existem *algures* entre a e b. Para algumas funções a posição desses valores pode ser especificada com rigor, mas em muitos casos é muito difícil efetuar uma determinação precisa desses pontos. Contudo, o interesse real do teorema reside no fato de que muitas conclusões podem ser extraídas do mero conhecimento da *existência* de, pelo menos, um tal valor c.

Nota: É importante referir que a conclusão do teorema anterior pode deixar de verificar-se se existe algum ponto entre a e b no qual não exista derivada. Por exemplo, a função f definida pela equação $f(x) = |x|$ é contínua em todo o eixo real e tem derivada em todos os pontos do mesmo, exceto em 0. Sejam $A = (-1, f(-1))$ e $B = (2, f(2))$. O declive da corda unindo A a B é

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3} \quad ,$$

mas a derivada não é igual a $\frac{1}{3}$ em nenhum ponto.

É frequentemente útil a seguinte generalização:

TEOREMA 4.6. TEOREMA DE CAUCHY. *Sejam f e g duras funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a, b). Então para um certo c em (a, b), tem-se certo c em (a, b), tem-se*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] .$$

Demonstração. A demonstração é semelhante à do teorema 4.5. Façamos

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] .$$

Então $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Aplicando o teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c) = 0$ para algum c em (a, b). Calculando $h'(c)$ a partir da fórmula que define h encontramos o teorema de Cauchy. O Teorema 4.5 é um caso particular deste fazendo $g(x) = x$.

4.15. Exercícios

1. Mostrar que no gráfico de qualquer polinómio quadrático, a corda unindo os pontos para os quais $x = a$ e $x = b$ é paralela à tangente à curva no ponto em que $x = \frac{a+b}{2}$.
2. Usar o teorema de Rolle para demonstrar que, qualquer que seja b, existe no máximo um ponto x no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ para o qual $x^3-3x+b = 0$.
3. Definida a função f do modo seguinte:

$$f(x) = \frac{3-x^2}{2} \quad \text{se} \quad x \leq 1, \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \geq 1\,.$$

   (a) Traçar o gráfico de f para x no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2$.
   (b) Mostrar que f verifica as condições do teorema de Lagrange no intervalo $[0, 2]$ e determinar todos os pontos dados pelo teorema.
4. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostrar que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo $[-1, 1]$. Explicar como é isto possível, em face do teorema de Rolle.
5. Mostrar que $x^2 = x \text{ sen } x + \cos x$ se verifica exatamente para dois valores reais de x.
6. Provar que o teorema de Cauchy pode escrever-se na fôrma

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \qquad \text{onde} \quad 0 < \theta < 1\,.$$

   Determinar θ em função de x e h quando: (a) $f(x) = x^2$; (b) $f(x) = x^3$. Fixar x, $x \neq 0$, e calcular, em cada caso, o limite de θ quando $h \to 0$.
7. Seja f um polinómio. Um número α diz-se um *zero* de multiplicidade m se $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$.
   (a) Se f tem r zeros no intervalo $[a, b]$, provar que f' tem pelo menos $r-1$ zeros e que, em geral, a derivada de ordem k, $f^{(k)}$, tem pelo menos $r-k$ zeros em $[a, b]$. (Cada zero é contado tantas vezes quantas as unidades do seu grau de multiplicidade.)
   (b) Se a derivada de ordem k, $f^{(k)}$, tem *exactamente* r zeros em $[a, b]$, o que se pode concluir relativamente ao número de zeros de f em $[a, b]$?
8. Utilizar o teorema de Lagrange para deduzir as seguintes igualdades:
   (a) $|\text{sen } x - \text{sen } y| \leqslant |x-y|$
   (b) $ny^{n-1}(x-y) \leqslant x^n - y^n \leqslant nx^{n-1}(x-y)$ se $0 < y \leqslant x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
9. Uma função f, contínua em $[a, b]$, admite segunda derivada f'' em todo o ponto do intervalo aberto (a, b). O segmento de reta que une $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ interseta o gráfico de f num ponto $(c, f(c))$, sendo $a < c < b$. Provar que $f''(t) = 0$ para pelo menos um ponto t em (a, b).
10. Neste Exercício está delineada uma demonstração do teorema do valor intermédio para derivadas. *Admitamos que f possui derivada em todo o ponto do intervalo aberto I. Escolhamos $a < b$ em I: Então a derivada f' toma todos os valores compreendidos entre $f'(a)$ e $f'(b)$ em (a, b).*
   (a) Definir uma nova função g em $[a, b]$ do modo seguinte:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad \text{se} \quad x \neq a, \qquad g(a) = f'(a)\,.$$

Demonstrar que g toma qualquer valor compreendido entre $f'(a)$ e $g(b)$ no intervalo aberto (a, b). Utilizar o teorema de Lagrange, para demonstrar que f' toma qualquer valor compreendido entre $f'(a)$ e $g(b)$ no intervalo aberto (a, b).

(b) Definir em $[a, b]$ uma nova função h do modo seguinte

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \text{se} \quad x \neq b, \qquad h(b) = f'(b)\,.$$

Raciocinando de forma análoga à que seguiu na alínea (a), demonstrar que f' toma qualquer valor compreendido entre $f'(b)$ e $h(a)$ em (a, b). Uma vez que $h(a) = g(b)$, fica demonstrado o teorema.

4.16. Aplicacões do teorema de Lagrange a propriedades geométricas das funções

O teorema de Lagrange pode utilizar-se para deduzir propriedades duma função a partir do conhecimento do sinal da respetiva derivada. É o que se prova pelo teorema seguinte.

TEOREMA 4.7. Se *f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e admitindo derivada f em cada ponto do intervalo aberto (a, b), então tem-se:*

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo o x de (a, b), f é estritamente crescente em $[a, b]$;

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo o x de (a, b), f é estritamente decrescente em $[a, b]$;

(c) Se $f'(x) = 0$ para todo o x de (a, b), f é constante em $[a, b]$.

Demonstração. Para demonstrar (a) temos que provar que $f(x) < f(y)$ sempre que $a \leq x < y \leq b$. Por conseguinte, suponhamos $x < y$ e apliquemos o teorema de Lagrange ao subintervalo fechado $[x, y]$. Obtemos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), \qquad \text{onde} \quad x < c < y\,. \tag{4.26}$$

Uma vez que $f'(c)$ e $y - x$ são positivos, o mesmo se verifica para $f(y) - f(x)$, e isto significa que $f(x) < f(y)$, como se afirmara. Está assim demonstrada a alínea (a) sendo a demonstração de (b) semelhante. Para demonstrar (c), utilizamos a igualdade (4.26) com $x = a$. Visto que $f'(c) = 0$, temos $f(y) = f(a)$ para todo o x de $[a, b]$ e portanto f é constante em $[a, b]$.

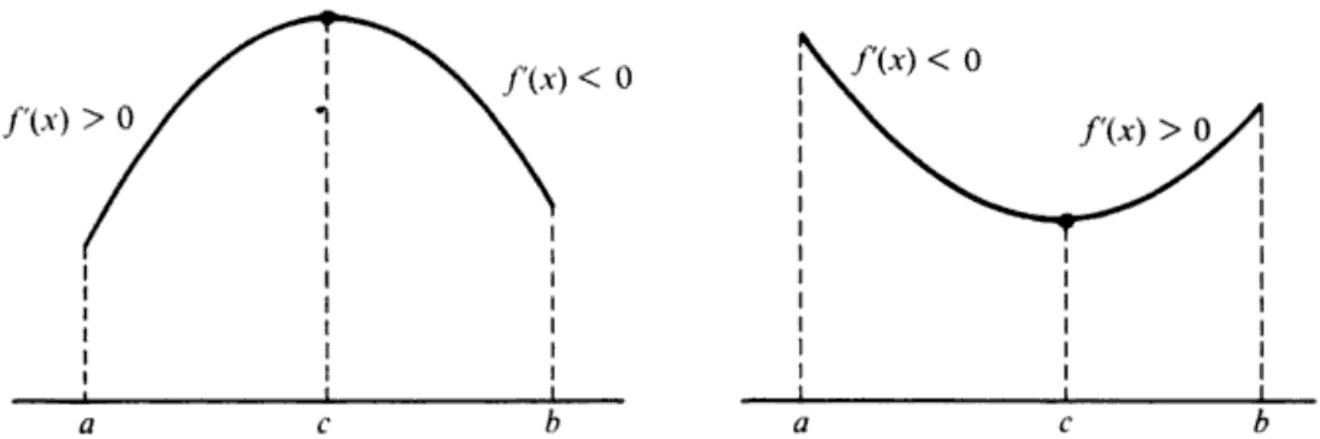
O Teorema 4.7 pode servir para demonstrar que a função admite um extremo sempre que a derivada muda de sinal.

TEOREMA 4.8. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ a qual admite derivada f' em todo o ponto do intervalo aberto (a, b), excepto possivelmente num ponto c.*

(a) *Se $f'(x)$ é positiva para todo o $x < c$ e negativa para todo o $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.*

(b) *Se, pelo contrário, $f'(x)$ é negativa para todo o $x < c$ e positiva para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.*

Demonstração. Para a alínea (a), o Teorema 4.7(a) permite-nos concluir que f é estritamente crescente em $[a, c]$ e estritamente decrescente em $[c, b]$. Portanto $f(x) < f(c)$ para todo o $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c, ficando demonstrada (a); a demonstração de (b) é completamente análoga. Na fig. 4.12 representam-se as duas hipóteses.



(a) Máximo relativo em c (b) Mínimo relativo em c.

Fig. 4.12. Os extremos da função ocorrem quando a derivada muda de sinal.

4.17. Critério da derivada de segunda ordem para a determinação de extremos

Se uma função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, o teorema dos valores extremos diz-nos que ela possui um máximo absoluto e um mínimo absoluto algures em $[a, b]$. Se f admite derivada em cada ponto interior, então os únicos pontos em que podem aparecer os extremos são:

(1) os extremos a e b do intervalo.

(2) aqueles pontos interiores x para os quais $f'(x) = 0$.

Os pontos do tipo (2) chamam-se frequentemente *ponto críticos* de f. Para decidir se um ponto crítico c corresponde a um máximo ou um mínimo (ou nem um nem noutro) necessitamos de mais informação acerca da função f. Habitualmente o comportamento de f num ponto crítico pode estudar-se a partir do sinal da derivada de f na vizinhança de c. O teorema que apresentamos a seguir mostra que o estudo do sinal da segunda derivada, nas proximidades de c, pode também ser de utilidade como critério para a existência de extremos.

TEOREMA 4.9. CRITÉRIO DA SEGUNDA DERIVADA PARA A EXISTÊNCIA DE EXTREMOS NUM PONTO CRÍTICO. *Seja* c *um ponto crítico de* f *num intervalo aberto* (a, b), *isto é,* $f'(c) = 0$, *com* $a < c < b$. *Se* f *admite segunda derivada* f'' *em* (a, b) *tem-se:*

(a) *Se* f'' *é negativa em* (a, b), f *tem um máximo relativo em* c.

(b) *Se* f'' *é positiva em* (a, b), f *tem um mínimo relativo em* c.

As duas hipóteses estão representadas na fig. 4.12.

Demonstração. Consideremos o caso da alínea (a), $f'' < 0$ em (a, b). Pelo Teorema 4.7 (aplicado a f'), a função f' é estritamente decrescente em (a, b). Mas $f'(c) = 0$ e, consequentemente, f' muda de sinal, passando de positiva a negativa, em c, como se indica na fig. 4.12(a).

Portanto, segundo o Teorema 4.8, f tem em c um máximo relativo. A demonstração da alínea (b) é inteiramente análoga.

Se f'' é contínua em c, e $f''(c) \neq 0$, existirá uma vizinhança de c na qual f'' tem o mesmo sinal que $f''(c)$. Por conseguinte, se $f'(c) = 0$, a função f admite um máximo relativo em c se $f''(c)$ é negativa, e um mínimo relativo se $f''(c)$ é positiva. Este critério é suficiente para muitos exemplos que aparecem na prática.

O sinal da segunda derivada está também relacionado com a concavidade e convexidade de f. O teorema que apresentamos a seguir mostra que a função é convexa nos intervalos em que f'' é positiva, como é o caso da fig. 4.12(b). Na fig. 4.12(a) f é côncava e f'' é negativa. Basta discutir o caso da convexidade, porque se f é convexa então $-f$ é côncava.

TEOREMA 4.10. CRITÉRIO DA DERIVADA PARA A CONVEXIDADE. *Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e admitindo derivada em todo o ponto do intervalo aberto (a, b). Se f' é crescente em (a, b) então f é convexa em $[a, b]$. Em particular, f é convexa se f'' existe e é não negativa em (a, b).*

Demonstração. Consideremos $x < y$ em $[a, b]$ e seja $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$, com $0 < \alpha < 1$. Desejamos provar que $f(z) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha) f(x)$, mas visto que $f(z) = \alpha f(z) + (1 - \alpha) f(z)$, então é o mesmo que demonstrar

$$(1 - \alpha)[f(z) - f(x)] \leq \alpha[f(y) - f(z)] .$$

Pelo teorema do valor médio (aplicado duas vezes), existem pontos c e d verificando $x < c < z$ e $z < d < y$ tais que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x), \qquad \text{e} \qquad f(y) - f(z) = f'(d)(y - z) .$$

Já que f' é crescente, temos $f'(c) \leq f'(d)$. Temos igualmente $(1 - \alpha)(z - x) = \alpha(y - z)$, e deste modo podemos escrever

$$(1 - \alpha)[f(z) - f(x)] = (1 - \alpha)f'(c)(z - x) \leq \alpha f'(d)(y - z) = \alpha[f(y) - f(z)] ,$$

o que demonstra a desigualdade exigida para a convexidade.

4.18. Traçado de curvas

A informação reunida nos teoremas das últimas seções é muitas vezes útil no traçado de curvas. Ao desenhar o gráfico de uma função f, devemos determinar em primeiro lugar o domínio de f [o conjunto dos pontos x para os quais está definida $f(x)$] e, se for fácil fazê-lo, devemos determinar o contradomínio de f (o conjunto dos valores assumidos por f). O conhecimento do domínio e do contradomínio dão-nos uma ideia da extensão da curva $y = f(x)$, uma vez que tal conhecimento especifica a porção do plano XOY em que está situada a curva. Seguidamente é aconselhável determinar os pontos (se existirem) em que a curva intersecta os eixos coordenados. O ponto de intersecção com OY é simplesmente $(0, f(0))$, admitindo que 0 pertence ao domínio de f e as interseções com $0X$ são os pontos $(x, 0)$ para os quais $f(x) = 0$. O cálculo destes pontos pode ser difícil na prática e, por vezes, teremos que contentar-nos com valores aproximados.

Devemos igualmente determinar os intervalos em que f é monótona pela análise do sinal de f', e determinar os intervalos de convexidade e concavidade pela análise do sinál de f'', devendo merecer atenção especial a determinação dos pontos em que as tangentes ao gráfico são paralelas a $0X$.

EXEMPLO 1. *O gráfico de* $y = f(x)$, *com* $f(x) = x + 1/x$ *com* $x \neq 0$.

Neste caso não existem pontos de interseção com os eixos. As duas primeiras derivadas são dadas por

$$f'(x) = 1 - 1/x^2\,, \qquad f''(x) = 2/x^3\,.$$

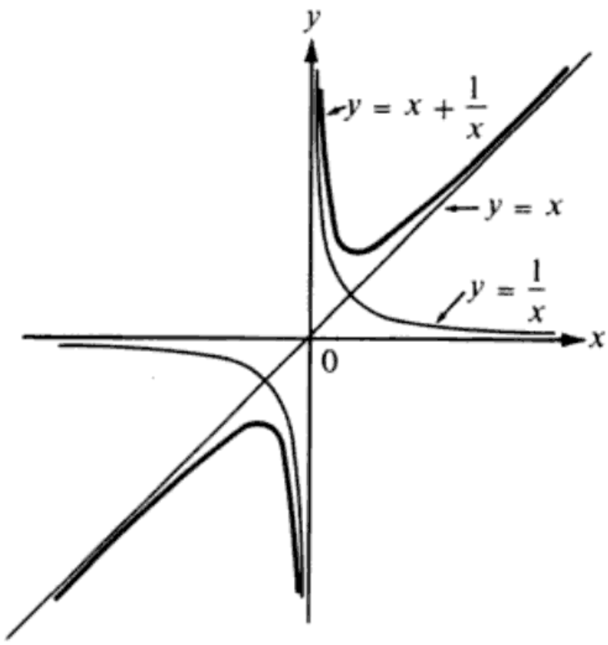


Fig. 4.13. Gráfico de $f(x) = x + 1/x$.

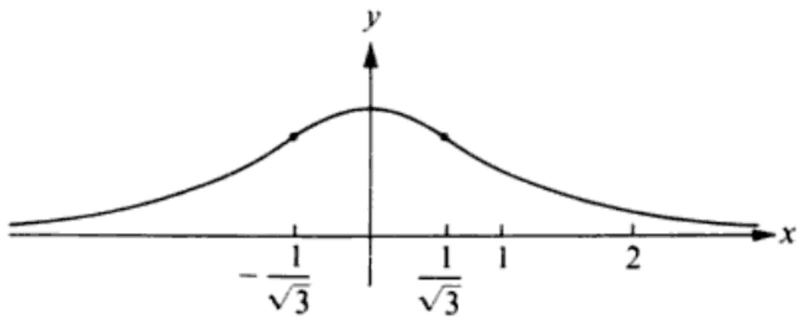


Fig. 4.14. Gráfico de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.

A primeira derivada é positiva para $x^2 > 1$, negativa para $x^2 < 1$, e nula se $x^2 = 1$. Daqui se conclui que existe um mínimo relativo em $x = 1$ e um máximo relativo em $x = -1$. Para $x > 0$ a segunda derivada é positiva pelo que a primeira derivada é estritamente crescente. Para $x < 0$, a segunda derivada é negativa e portanto a primeira derivada é estritamente decrescente. Para x próximo de 0, o termo x é pequeno comparado com $1/x$ e a curva comporta-se como o gráfico de $y = 1/x$ (Ver fig. 4.13). Por outro lado, para grandes valores de x(positivos ou negativos), o termo $1/x$ é pequeno comparado com x, e a curva é muito semelhante à reta $y = x$. Neste exemplo a função é ímpar $f(-x) = -f(x)$, pelo que o gráfico é simétrico relativamente à origem.

No exemplo anterior a reta $y = x$ é uma assíntota da curva. Em geral uma reta, não paralela a 0Y, de equação $y = mx + b$ diz-se *assíntota* do gráfico de $y = f(x)$ se a diferença $f(x) - (mx + b)$ tende para 0 quando x toma valores arbitrariamente grandes quer positivos, quer negativos. Uma paralela a $0Y$, $x = a$, diz-se *assíntota "vertical"* se $|f(x)|$ toma valores arbitrariamente grandes quando $x \to a$ por valores à esquerda ou à direita de a. No exemplo anterior $0Y$ é uma *assíntota "vertical"*.

EXEMPLO 2. *O gráfico de $y = f(x)$, com $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.*

Esta é uma função par, positiva para todo o valor de x e admite o eixo $0X$ como assíntota. A primeira derivada é dada por

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2},$$

e assim $f'(x) < 0$ se $x > 0$, $f'(x) > 0$ se $x < 0$, e $f'(x) = 0$ quando $x = 0$. Portanto a função cresce para valores de x negativos e decresce para valores de x positivos e tem um máximo relativo em $x = 0$. Derivando segunda vez encontramos

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(-2) - (-2x)2(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Então $f''(x) > 0$ se $3x^2 > 1$, e $f''(x) < 0$ se $3x^2 < 1$. Consequentemente a primeira derivada cresce quando $x^2 > \frac{1}{3}$ e decresce quando $x^2 < \frac{1}{3}$. Esta informação basta para traçar a curva da fig. 4.14. Os dois pontos do gráfico correspondentes a $x^2 = \frac{1}{3}$, onde a segunda derivada muda de sinal, chamam-se *pontos de inflexão.*

4.19. Exercícios

Nos exercícios que se seguem: (a) determinar todos os pontos x tais que $f'(x) = 0$; (b) analisar o sinal de f' e determinar os intervalos em que f é monótona; (c) analisar o sinal de f'' e determinar os intervalos em que f' é monótona; (d) traçar o gráfico de f. Em cada caso, a função está definida para todos os valores de x para os quais a fórmula de $f(x)$ é provida de significado.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. $f(x) = x^3 - 4x$.
3. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
5. $f(x) = 2 + (x - 1)^4$.
6. $f(x) = 1/x^2$.
7. $f(x) = x + 1/x^2$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 3)}$
9. $f(x) = x/(1 + x^2)$.
10. $f(x) = (x^2 - 4)/(x^2 - 9)$.
11. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.
12. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.
13. $f(x) = x + \cos x$.
14. $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}\cos 2x$.

4.20. Exemplos resolvidos de problemas de extremos

Muitos problemas de extremos, em Matemática Pura ou Aplicada, podem ser sistematicamente resolvidos com recurso ao cálculo diferencial. Na realidade, os primeiros rudimentos de cálculo diferencial foram desenvolvidos quando Fermat tentou encontrar métodos gerais de determinação de máximos e mínimos. Nesta seção vamos resolver alguns exemplos, dando ao leitor a possibilidade de resolver outros, apresentados no conjunto de exercícios da Seção 4.21.

Em primeiro lugar formulamos dois principios simples que podem ser usados para resolver grande número de problemas de extremos.

EXEMPLO 1. *Princípio do produto máximo, com soma constante.* Dado o número positivo S, provar que entre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $x + y = S$, o produto xy é máximo quando $x = y = \frac{1}{2}S$.

Demonstração. Se $x + y = S$, então $y = S - x$ e o produto xy é igual a $x(S - x) = xS - x^2$. Seja $f(x) = xS - x^2$. Este polinómio do 2.º grau tem como primeira derivada $f'(x) = S - 2x$, a qual é positiva para $x < \frac{1}{2}S$ e negativa para $x > \frac{1}{2}S$. Deste modo o máximo de xy ocorre quando $x = \frac{1}{2}S$ e $y = S - x = \frac{1}{2}S$. Pode obter-se a mesma conclusão sem recorrer ao cálculo. Escreve-se muito simplesmente $f(x) = \frac{1}{4}S^2 - (x - \frac{1}{2}S)^2$ e observa-se que $f(x)$ é máxima quando $x = \frac{1}{2}S$.

EXEMPLO 2. *Princípio da soma mínima, com produto constante.* Dado o número positivo P, demonstrar que entre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $xy = P$, a soma $x + y$ é mínima quando $x = y = \sqrt{P}$.

Demonstração. Temos que determinar o mínimo da função $f(x) = x + P/x$ para $x > 0$. A primeira derivada, é $f'(x) = 1 - P/x^2$, a qual é negativa para $x^2 < P$ e positiva para $x^2 > P$, de modo que $f(x)$ é mínima para $x = \sqrt{P}$. Daqui resulta que a soma $x + y$ é mínima quando $x = y = \sqrt{P}$.

EXEMPLO 3. Entre todos os retângulos com um dado perímetro, o quadrado é o de maior área.

Demonstração. Usamos o resultado do Exemplo 1. Sejam x e y as medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos. Se o perímetro é fixo, então $x + y$ é constante, de maneira que a área xy é máxima quando $x = y$. Logo, o retângulo maximizante relativamente à área é o quadrado.

EXEMPLO 4. A média geométrica de dois números positivos não excede a sua média aritmética, isto é, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$:

Demonstração. Dados $a > 0$ e $b > 0$, seja $P = ab$. Entre todos os números positivos x e y com $xy = P$, a soma é mínima quando $x = y = \sqrt{P}$. Por outras palavras, se $xy = P$, então $x + y \geq \sqrt{P} + \sqrt{P} = 2\sqrt{P}$. Em particular, $a + b \geq 2\sqrt{P} = 2\sqrt{ab}$ pelo que $\sqrt{ab} \leq \leq \frac{1}{2}(a + b)$. A igualdade verifica-se se e só se $a = b$.

EXEMPLO 5. Um bloco de peso W move-se sobre um plano horizontal por ação duma força que faz um ângulo θ com a reta da direção do movimento, sendo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, como se indica na fig. 4.15. Admite-se a existência duma força de atrito que é proporcional a força normal com que o bloco pressiona perpendicularmente o plano em que se desloca. Determinar o ângulo para o qual a força propulsora necessária para vencer o atrito é a menor possível.

Resolução. Seja $F(\theta)$ a força que produz o movimento, a qual admite uma componente vertical $F(\theta)$ sen θ, de modo que a resultante das forças normais à superfície do plano é $N = W - F(\theta)\,\text{sen}\,\theta$. A força de atrito é μN, com μ uma constante chamada coeficiente de atrito. A componente horizontal da força $F(\theta)$ é $F(\theta)\cos\theta$. Quando se iguala à força de atrito temos $F\cos\theta = \mu[W - F(\theta)\,\text{sen}\,\theta]$, donde resulta

$$F(\theta) = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta}.$$

Para minimizar $F(\theta)$, maximizamos o denominador $g(\theta) = \cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Nos pontos extremos temos $g(0) = 1$ e $g(\frac{\pi}{2}) = \mu$. No interior do intervalo temos

$$g'(\theta) = -\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta,$$

de modo que g tem um ponto crítico em $\theta = \alpha$, onde sen $\alpha = \mu\cos\alpha$. Isto dá $g(\alpha) = \cos\alpha +$

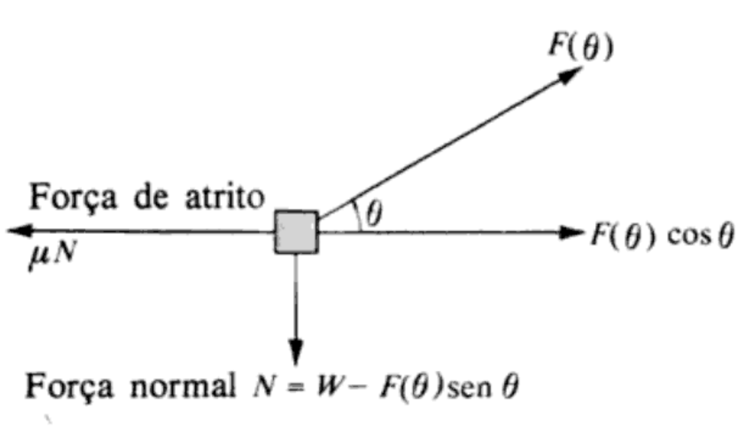


Fig. 4.15. Exemplo 5.

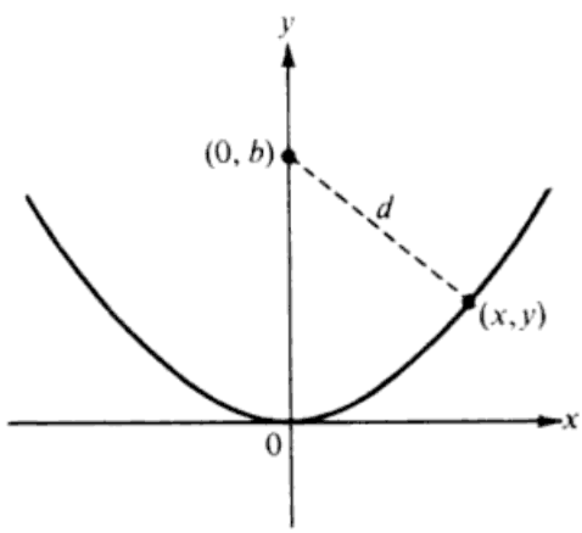


Fig. 4.16. Exemplo 6.

$+ \mu^2\cos\alpha = (1+\mu^2)\cos\alpha$. Podemos exprimir $\cos\alpha$ em função de μ. Uma vez que $\mu^2\cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, encontramos $(1+\mu^2)\cos^2\alpha = 1$, e assim $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mu^2}$. Então $g(\alpha) = \sqrt{1+\mu^2}$. Visto que $g(\alpha)$ excede $g(0)$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ o máximo de g ocorre no ponto crítico. Portanto a força mínima requerida é

$$F(\alpha) = \frac{\mu W}{g(\alpha)} = \frac{\mu W}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Exemplo 6. Determinar a mais curta distância de um dado ponto $(0, b)$ sobre OY à parábola $x^2 = 4y$. (O número b pode tomar qualquer valor real.)

Resolução. A parábola está traçada na fig. 4.16. A quantidade a ser minimizada é a distância d definida por

$$d = \sqrt{x^2 + (y-b)^2},$$

com a restrição $x^2 = 4y$. Da figura ressalta imediatamente que quando b é *negativo* a distância mínima é $|b|$. Quando o ponto $(0, b)$ se desloca para cima ao longo do semi-eixo positivo $0Y$ o mínimo é b até que o ponto alcança uma certa posição especial e a partir da qual a distância d é menor que b. Vamos agora determinar essa posição especial.

Em primeiro lugar, observa-se que o ponto (x, y) que minimiza d também minimiza d^2. (Esta nota permite-nos eliminar a derivação da raíz quadrada). Em seguida podemos exprimir d^2 em função unicamente de x ou de y. Exprimiremos d^2 em função de y e deixamos ao leitor o exercício de efetivação dos cálculos quando d^2 é expresso em função de x.

Deste modo a função a ser minimizada é

$$f(y) = d^2 = 4y + (y-b)^2.$$

Embora $f(y)$ seja definida para todo o real y, a natureza do problema exige que procuremos o mínimo unicamente entre aqueles valores de y tais que $y \geq 0$. A derivada é $f'(y) = 4 + 2(y - b)$ que se anula quando $y = b - 2$. Para $b < 2$ isto conduz-nos a um ponto crítico y, negativo, o qual deve ser excluído devido a restrição $y \geq 0$, isto é, se $b < 2$ o mínimo não ocorre num ponto crítico. Com efeito, quando $b < 2$, vemos que $f'(y) > 0$ quando $y \geq 0$, e por isso f é estritamente crescente para $y \geq 0$. Portanto o mínimo absoluto ocorre no ponto $y = 0$. O correspondente mínimo d é $\sqrt{b^2} = |b|$.

Se $b \geq 2$, existe um ponto crítico legítimo em $y = b - 2$. Visto que $f''(y) = 2$ para todo o y, a derivada f' é crescente, e portanto o *mínimo absoluto* de f ocorre neste ponto crítico. O mínimo d é $\sqrt{4(b-2)+4} = 2\sqrt{b-1}$. Fica assim provado que a distância mínima é $|b|$ se $b < 2$ e é $2\sqrt{b-1}$ se $b \geq 2$. (O valor $b = 2$ é o valor especial referido atrás).

4.21. Exercícios

1. Provar que entre todos os retângulos de determinada área, o quadrado é o que tem menor perímetro.

2. Um agricultor dispõe de L metros de rêde para cercar uma pastagem de forma retangular, adjacente a uma longa parede de pedra. Que dimensões darão a área máxima da pastagem.
3. Um agricultor deseja cercar uma pastagem rectangular de àrea A, adjacente a uma longa parede de pedra. Quais as dimensões convenientes de modo a gastar o menos possível de rêde.
4. Dado $S > 0$, provar que entre todos os pares de números positivos x e y com $x + y = S$, a soma $x^2 + y^2$ é mínima quando $x = y$.
5. Dado $R > 0$, provar que entre todos os pares de números positivos x e y com $x^2 + y^2 = R$, a soma $x + y$ é máxima quando $x = y$.
6. O lado de um quadrado tem comprimento L. Provar que entre todos os quadrados inscritos no quadrado dado, o de área mínima tem o lado de comprimento $\frac{L\sqrt{2}}{2}$.
7. O lado dum quadrado mede L. Determinar o quadrado de área máxima que pode ser circunscrito no quadrado dado.
8. Demonstrar que entre todos os retângulos que podem inscrever-se numa circunferência dada, o quadrado é o que tem área máxima.
9. Demonstrar que entre todos os retângulos de área dada, o quadrado tem o círculo inscrito mínimo.
10. Dada uma esfera de raio R, determinar o raio r e a altura h do cilindro circular reto de maior superfície lateral $2\pi rh$ que pode ser inscrito na esfera.
11. Entre todos os cilindros circulares retos com dada superfície lateral, provar que a menor esfera circunscrita tem um raio igual ao raio do cilindro multiplicado por $\sqrt{2}$.
12. Dado um cone circular reto de raio R e altura h, determinar o raio e a altura do cilindro circular reto de maior área lateral que pode inscrever-se no cone.
13. Determinar as dimensões do cilindro circular reto de volume máximo que pode ser inscrito num cone circular recto de raio R e altura h.
14. Dada uma esfera de raio R calcular, em função de R, o raio r e a altura h do cone circular reto de volume máximo que pode ser inscrito nessa esfera.
15. Determinar o rectângulo de área máxima que pode inscrever-se num semicírculo, tendo um dos lados sobre o diâmetro.
16. Determinar o trapézio de área máxima que pode ser inscrito num semicírculo, a base inferior estando sobre um diâmetro.
17. Uma caixa aberta foi construída com um retângulo de cartão, retirando quadrados iguais em cada vértice e dobrando para cima os lados. Achar as dimensões da caixa de maior volume que pode construir-se deste modo se o retângulo tem lados (a) 10 e 10; (b) 12 e 18.
18. Se a e b são os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 1, determinar o maior valor de $2a + b$.
19. Um camião tem que percorrer 300 milhas numa estrada com uma velocidade constante de x milhas por hora. As leis do circulação impõem $30 \le x \le 60$. Admita-se que o combustível custa 30 cêntimos por galão e é consumido na razão de $2 + x^2/600$ galões por hora. Se o condutor recebe D dólares por hora e se cumprem as restrições do trânsito, determinar a velocidade mais económica e o custo da viagem se: (a) $D = 0$; (b) $D = 1$; (c) $D = 2$; (d) $D = 3$; (e) $D = 4$.

20. Um cilindro é definido pela revolução de um retângulo em torno do eixo $0X$, estando a base do retângulo sobre este eixo e todo o retângulo estando na área limitada por $0X$ e a curva $y = x/(x^2 + 1)$. Determinar o volume máximo possível para o cilindro.
21. Dobra-se uma folha de maneira que o canto inferior direito fique situado sobre o lado esquerdo da mesma (ver fig. 4.17). Se a largura da página é de 6 polegadas determinar o comprimento mínimo da dobra. Qual é o ângulo que forma esta dobra de comprimento mínimo com o lado direito da folha de papel? Supõe-se que a folha é suficientemente larga para evitar que a dobra alcance o cimo da folha.

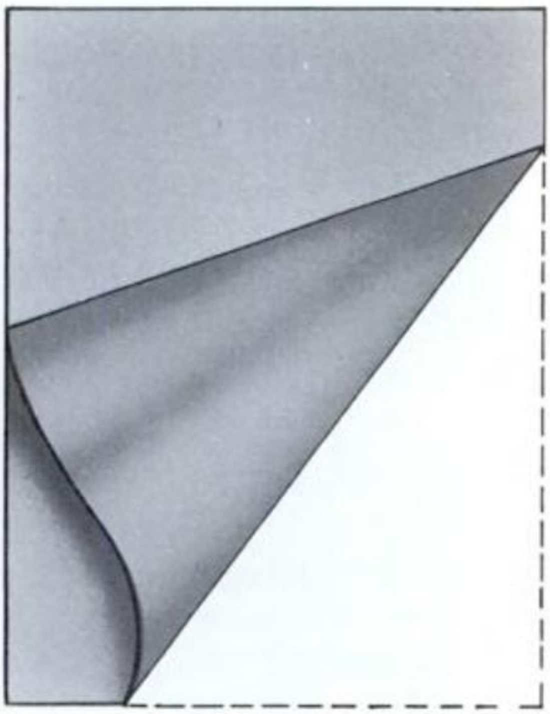


Fig. 4.17. Exercício 21.

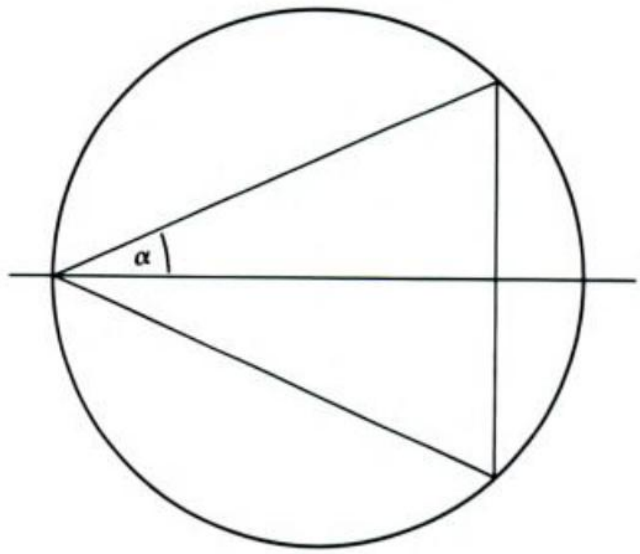


Fig. 4.18. Exercício 22.

22. (a) Um triângulo isósceles está inscrito numa circunferência de raio r, como se indica na fig. 4.18. Se o ângulo 2α no vértice é obrigado a tomar valores entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, determinar os valores máximos e mínimos do perímetro do triângulo. Explicar em pormenor o raciocínio efectuado.

    (b) Qual é o raio do menor disco circular suficientemente grande para cobrir *todo* o triângulo isósceles de perímetro dado L? Dar todos os pormenores do raciocínio seguido.
23. Uma janela tem a forma dum retângulo encimado por um semicírculo com o diâmetro igual à base do retângulo. A parte retangular há-de ser de vidro transparente e a parte circular de vidro de cor que admite unicamente por pé quadrado metade da luz do vidro transparente. O perímetro total da janela é P. Determinar, em função de P, as dimensões da janela que deixará entrar mais luz.
24. Um tronco de madeira com 12 pés de comprimento tem a forma dum tronco de cone circular reto com diâmetros nas extremidades de 4 e $(4 + h)$ pés, com $h \geq 0$. Determi-

nar, em função de h, o volume do maior cilindro circular reto que pode ser extraído do tronco, coincidindo o seu eixo com o eixo do tronco de cone.

25. Dados n números reais $a_1, a_2, ..., a_n$, provar que a soma $\Sigma_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$ é mínima quando x é a média aritmética de $a_1, a_2, ..., a_n$.

26. Se $x > 0$, seja $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$, em que A é uma constante positiva. Determinar o menor valor de A tal que $f(x) \geq 24$ para todo o $x > 0$.

27. Para cada real t, seja $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2x$ e represente $m(t)$ o mínimo de $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Determinar o valor de $m(t)$ para cada t no intervalo $-1 \leq t \leq 1$. Ter presente que para certos valores de t o mínimo de $f(x)$ pode ocorrer nos pontos extremos do intervalo $0 \leq x \leq 1$.

28. Sabe-se que x está no intervalo $a \leq x \leq b$, com $a > 0$. Queremos aproximar x por meio de outro número t em $[a, b]$ de maneira que o erro relativo $|t - x|/x$ seja tão pequeno quanto possível. Represente $M(t)$ o valor máximo de $|t - x|/x$ quando x varia de a a b. (a) Provar que este máximo ocorre num dos pontos extremos $x = a$ ou $x = b$. (b) Provar que $M(t)$ é mínimo quando t é a média harmónica de a e b, isto é, quando $1/t = \frac{1}{2}(1/a + 1/b)$.

*4.22. Derivadas parciais

Nesta seção introduz-se o conceito de derivada parcial e inicia-se o leitor nas respetivas notação e terminologia. Não faremos uso das noções aqui expostas em nenhuma parte deste volume I, pelo que o seu estudo pode ser omitido ou deixado para mais tarde sem que haja perda de continuidade.

No Capítulo I definiu-se uma função como uma correspondência que associa a cada elemento de um conjunto X um e um só elemento dum conjunto Y; o conjunto X designou-se por *domínio* da função. Até ao momento, tratámos com funções cujo domínio era um conjunto de pontos do eixo real $0X$. Tais funções designam-se genericamente por *funções duma variável real*. Não é difícil generalizar muitas das noções do cálculo a funções com duas ou mais variáveis reais.

Uma *função real de duas variáveis reais* é uma função cujo domínio X é um conjunto de pontos do plano $X0Y$. Se a representamos por f, o seu valor em (x, y) é um número real que se representa por $f(x, y)$. É fácil imaginar como é que uma tal função pode aparecer num problema físico. Por exemplo, suponhamos uma placa de metal plana com a forma dum disco circular de raio 4 cm situada no plano $X0Y$, com o centro na origem 0 e aquecida de tal maneira que a temperatura em cada um dos seus pontos (x, y) é $16 - x^2 - y^2$ graus centígrados. Se representamos a temperatura em (x, y) por $f(x, y)$, então f é uma função de duas variáveis definida pela equação

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2. \tag{4.27}$$

O domínio desta função é o conjunto de todos os pontos (x, y) cujas distâncias à origem não excedem 4 cm. O teorema de Pitágoras diz-nos que todos os pontos (x, y) situados a uma distância r da origem satisfazem à equação

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4.28}$$

Portanto o domínio, neste caso, é formado por todos os pontos (x, y) que verificam $x^2 + y^2 \leq 16$. Note-se que sobre a circunferência definida por (4.28) a temperatura é $f(x, y) = 16 - r^2$, isto é, a função f é constante sobre cada circunferência com centro na origem (Ver fig. 4.19).

Vamos referir dois métodos úteis para obter um quadro geométrico duma função de duas variáveis. Um é por meio de uma *superfície* no espaço. Para construir esta superfície, introduzimos um terceiro eixo coordenado (chamado o eixo $0Z$) que passa pela origem e é perpendicular ao plano $X0Y$. Sobre a paralela ao eixo $0Z$ que passa pelo ponto (x, y) marcamos o ponto (x, y, z) cuja coordenada z é definida pela equação $z = f(x, y)$.

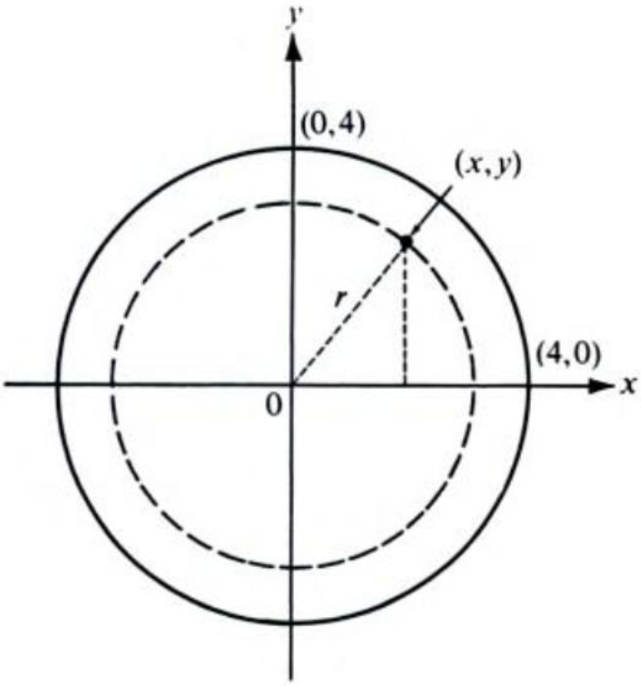


Fig. 4.19. A temperatura é constante sobre cada circunferência com centro na origem.

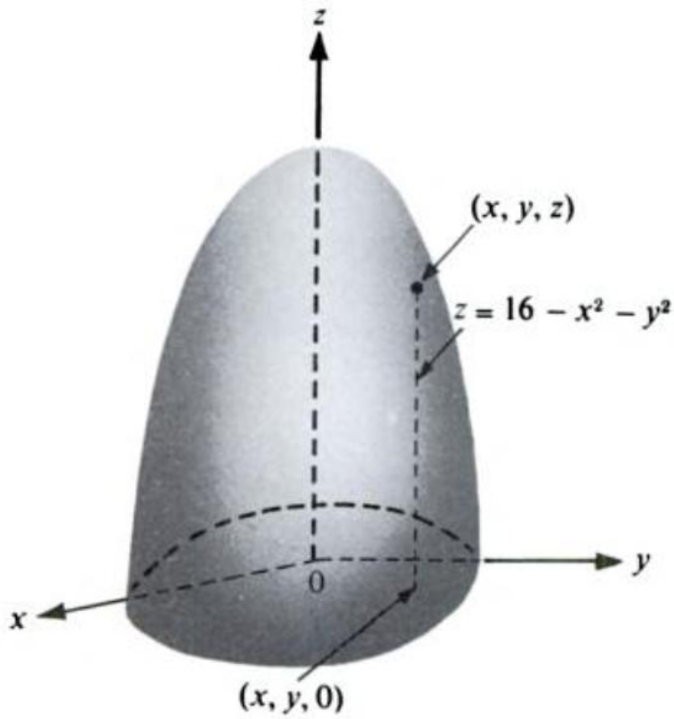
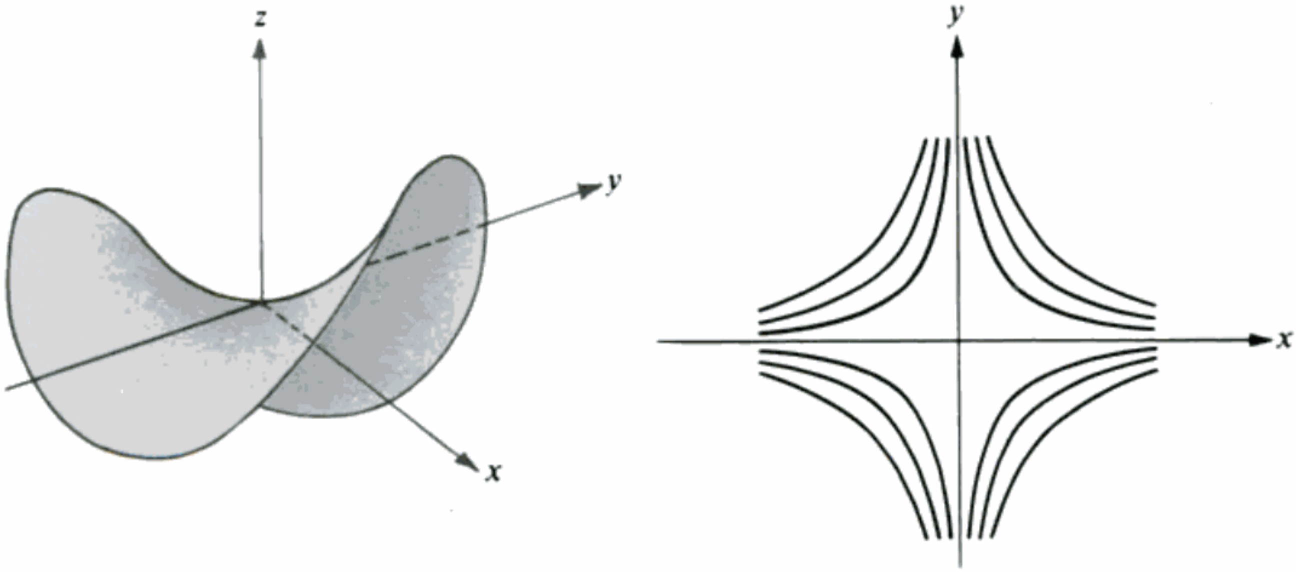


Fig. 4.20. A superfície definida pela equação $z = 16 - x^2 - y^2$

A superfície correspondente ao exemplo atrás exposto está representada na fig. 4.20. Se tivessemos colocado um termómetro em cada ponto (x, y) da placa, a extremidade do filamento de mercúrio tocaria esta superfície precisamente no ponto (x, y, z) com $z = f(x, y)$ desde que, evidentemente, a unidade de comprimento sobre o eixo $0Z$ fosse escolhida de maneira adequada.

Um outro tipo de imagem geométrica duma função de duas variáveis pode ser completamente desenhado no plano $X0Y$. Este é o método das *curvas de nível* utilizado pelos cartógrafos para representar uma superfície do terreno tridimensional por um traçado a duas dimensões. Imaginemos que a superfície atrás referida foi secionada por diferentes planos paralelos a XOY. Cada um interseta a superfície segundo curvas formadas de pontos (x, y, z) para os quais a coordenada z é constante. Projetando essas curvas sobre o plano XOY, obtém-se uma família de *curvas de nível*. Cada curva de nível é formada por todos e só por aqueles pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem à equação $f(x, y) = c$ em que c é a altura (cota) para aquela curva particular. No exemplo atrás referido, as curvas de nível são circunferências concêntricas as quais representam as curvas de temperatura constante, ou *isotérmicas*, como são traçadas numa carta meteorológica. Outro exemplo duma superfície e res-



(a) $z = xy$

(b) curvas de nível: $xy = c$

Fig. 4.21 (a) Superfície de equação $z = xy$.
(b) As correspondentes curvas de nível xy = constante.

petivas curvas de nível é apresentado na fig. 4.21. A sua equação é $z = xy$, chama-se *paraboloide hiperbólico*, e tem a forma duma "sela de montar".

As curvas de nível nos mapas topográficos desenham-se muitas vezes para cada 50 m de altura. Quando aparecem muito juntas, a altura está a variar rapidamente ao passar de uma curva de nível à outra; é o que acontece numa montanha escarpada. Quando as curvas de nível estão bastantes distanciadas então a altura está variando lentamente. Podemos pois ter uma ideia da inclinação do terreno pela análise do espaçamento das curvas de nível. Contudo, para obtermos uma informação rigorosa sobre o coeficiente de variação da altura (cota), devemos descrever a superfície por intermédio de uma função à qual possamos aplicar os conceitos do cálculo diferencial.

O coeficiente de variação da altura num ponto (x_0, y_0) depende da direção segundo a qual nos movemos a partir desse ponto. Por uma questão de comodidade consideraremos aqui precisamente as duas direções particulares paralelas respectivamente aos eixos OX e OY. Suponhamos que estamos a analisar uma superfície definida por uma equação da forma $z = f(x, y)$ e que se interseta esta superfície por um plano perpendicular ao eixo OY, como se indica na fig. 4.22. Pertencem a este plano todos os pontos (x, y, z) do espaço para os quais a coordenada y é constante, seja $y = y_0$. (A equação $y = y_0$ é a equação deste plano). A

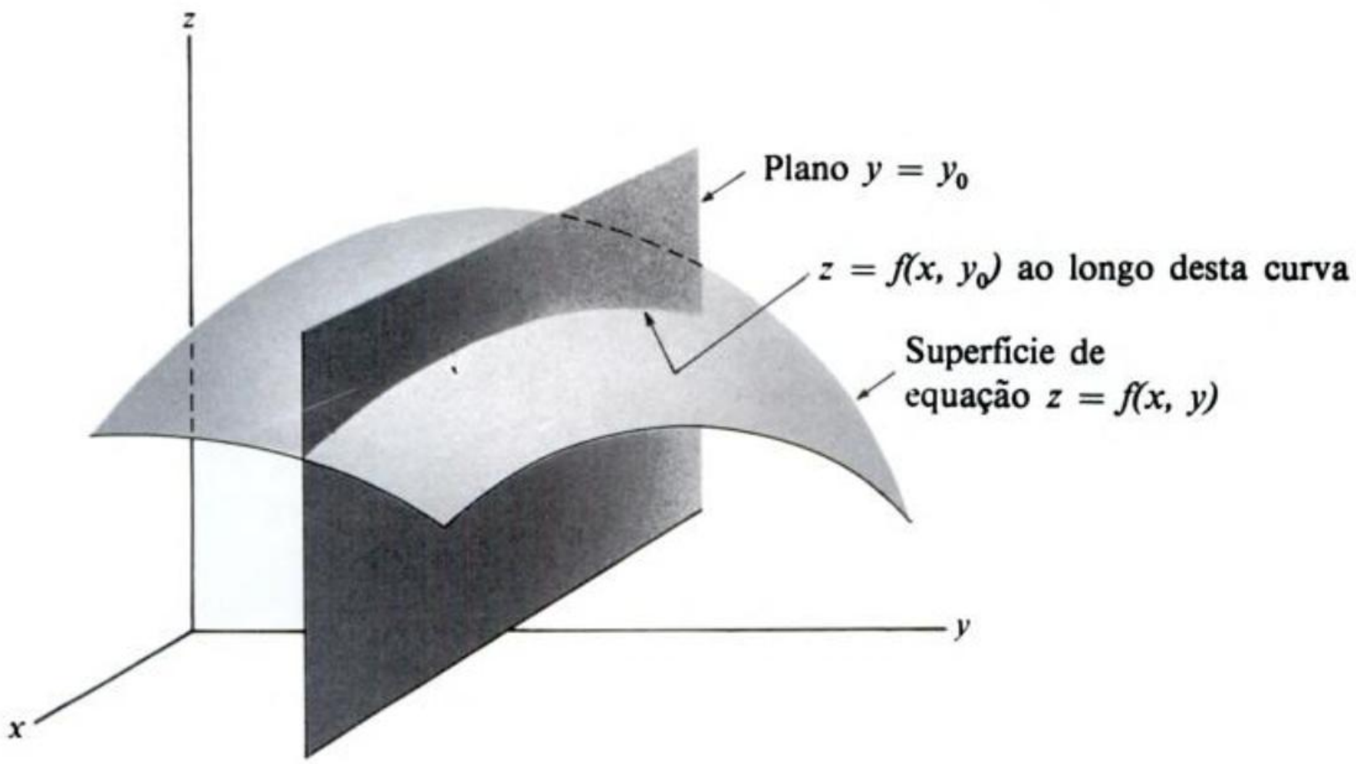


Fig. 4.22. Curva de intersecção de uma superfície $z = f(x, y)$ com um plano $y = y_0$.

interseção do plano com a superfície é uma curva plana, cujos pontos satisfazem à equação $z = f(x, y_0)$. Sobre esta curva a coordenada $z = f(x, y_0)$ é função unicamente de x.

Suponhamos agora que se passa dum ponto (x_0, y_0) a um ponto $(x_0 + h, y_0)$. A correspondente variação da altura é $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$. Isto sugere que se forme a razão incremental

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{4.29}$$

e se faça tender $h \to 0$. Se este quociente tende para um limite quando $h \to 0$, chamamos este limite *a derivada parcial de f relativamente a x* em (x_0, y_0). Para representar esta derivada parcial existem vários símbolos, sendo os mais comuns os seguintes

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad f_1(x_0, y_0), \quad D_1 f(x_0, y_0).$$

O índice 1 nas duas últimas notações significa que somente a primeira coordenada varia quando se forma a razão incremental (4.29). Assim temos

$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

De modo análogo se define a *derivada parcial relativamente a y* em (x_0, y_0)

$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

sendo outras notações para este caso as seguintes

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad f'_y(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0), \qquad D_2 f(x_0, y_0).$$

Se escrevemos $z = f(x, y)$, estão $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são igualmente utilizados para representar as derivadas parciais.

A derivação parcial não é um conceito novo. Se consideramos outra função g duma variável definida por

$$g(x) = f(x, y_0),$$

então a derivada ordinária $g'(x_0)$ é exatamente a mesma que a derivada parcial $f_1(x_0, y_0)$. Geometricamente, a derivada parcial $f_1(x, y_0)$ representa o declive da tangente num ponto da curva representada na fig. 4.22. Do mesmo modo, quando x é constante, por exemplo $x = x_0$, a equação $z = f(x_0, y)$ define a curva de interseção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x,y)$. A derivada parcial $f_2(x_0, y)$ define o declive da tangente a esta curva. Das considerações formuladas, concluímos que para calcular a derivada parcial de $f(x, y)$ relativamente a x consideramos o y como constante e aplicamos as regras da derivação ordinária. Assim, por exemplo, se $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, temos que $f_1(x, y) = -2x$. De modo análogo, suposto x fixo, encontramos $f_2(x, y) = -2y$.

Outro exemplo é a função definida por

$$f(x, y) = x \operatorname{sen} y + y^2 \cos xy. \tag{4.30}$$

As suas derivadas parciais são:

$$f_1(x, y) = \operatorname{sen} y - y^3 \operatorname{sen} xy, \qquad f_2(x, y) = x \cos y - xy^2 \operatorname{sen} xy + 2y \cos xy.$$

A derivação parcial dá lugar a novas funções $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$, obtidas a partir da função dada f. Uma vez que f_1 e f_2 são também funções de duas variáveis, podemos considerar as *suas* derivadas parciais. Elas são as derivadas parciais de *segunda ordem* de f e representam-se por:

$$f_{1,1} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{1,2} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \qquad f_{2,1} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad f_{2,2} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Chama-se a atenção para o fato de que $f_{1,2}$ significa $(f_1)_2$, a derivada parcial de f_1 relativamente a y. Na notação ∂ representamos a ordem de derivação escrevendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Nem sempre esta derivada coincide com a que se obtém por inversão da ordem de derivação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Contudo, a igualdade destas duas derivadas parciais mistas é válida sob certas condições que são habitualmente satisfeitas por muitas das funções que aparecem na prática. Essas condições serão estudadas no volume II.

Voltando ao exemplo de (4.27) encontramos para as suas derivadas parciais de segunda ordem as expressões:

$$f_{1,1}(x, y) = -2, \qquad f_{1,2}(x, y) = f_{2,1}(x, y) = 0, \qquad f_{2,2}(x, y) = -2\,.$$

Para o exemplo (4.30) obtemos

$$\begin{aligned}
f_{1,1}(x, y) &= -y^4 \cos xy\,,\\
f_{1,2}(x, y) &= \cos y - xy^3 \cos xy - 3y^2 \operatorname{sen} xy\,,\\
f_{2,1}(x, y) &= \cos y - xy^3 \cos xy - y^2 \operatorname{sen} xy - 2y^2 \operatorname{sen} xy = f_{1,2}(x, y)\,,\\
f_{2,2}(x, y) &= -x \operatorname{sen} y - x^2y^2 \cos xy - 2xy \operatorname{sen} xy - 2xy \operatorname{sen} xy + 2 \cos xy\\
&= -x \operatorname{sen} y - x^2y^2 \cos xy - 4xy \operatorname{sen} xy + 2 \cos xy\,.
\end{aligned}$$

No volume II far-se-á um estudo mais pormenorizado das derivadas parciais.

*4.23. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 8, calcular todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem. Verificar, em cada caso, que as derivadas parciais $f_{1,2}(x, y)$ e $f_{2,1}(x, y)$ são iguais.

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.
2. $f(x, y) = x \operatorname{sen}(x + y)$.
3. $f(x, y) = xy + \dfrac{x}{y}$ $\quad (y \neq 0)$.
4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2y^3)$.
6. $f(x, y) = \operatorname{sen}[\cos(2x - 3y)]$.
7. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ $\quad (x \neq y)$.
8. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\quad (x, y) \neq (0, 0)$.
9. Provar que $x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 2z$ se: (a) $z = (x - 2y)^2$, (b) $z = (x^4 + y^4)^{1/2}$.
10. Se $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

5

RELAÇÃO ENTRE INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO

5.1. A derivada de um integral indefinido. O primeiro teorema fundamental do cálculo

Vamos passar em seguida à análise da importante ligação que existe entre integração e derivação. O tipo de relação entre estas duas técnicas é algo de semelhante ao que se verifica entre "elevar ao quadrado" e "extrair a raíz quadrada". Se quadrarmos um número positivo e em seguida calcularmos a raíz quadrada positiva, obtemos o número donde partimos. De maneira semelhante, se integramos uma função contínua f, obtemos uma nova função (o integral indefinido de f) da qual, depois de derivada, se obtém a função inicial f. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então um integral indefinido A de f é

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3},$$

com c uma constante. Derivando, obtemos $A'(x) = x^2 = f(x)$. Este exemplo muito simples ilustra um resultado geral, chamado o primeiro teorema fundamental do cálculo, o qual pode enunciar-se do modo seguinte:

TEOREMA 5.1. PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. *Seja f uma função integrável em $[a, x]$ para qualquer x de $[a, b]$. Seja c tal que $a \le c \le b$ e defina-se uma nova função A como segue:*

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \text{se} \qquad a \le x \le b\,.$$

Então a derivada $A'(x)$ existe em cada ponto x do intervalo aberto (a, b) em que f é contínua e, para tal x, tem-se

$$A'(x) = f(x)\,. \tag{5.1}$$

Em primeiro lugar vamos apresentar uma justificação de caráter geométrico que sugere porque deve ser o teorema verdadeiro, para depois efetuarmos a demonstração analítica.

Interpretação geométrica. A fig. 5.1 representa o gráfico de uma função f referente ao intervalo $[a, b]$. Na figura h é positivo e

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = A(x+h) - A(x)\,.$$

Neste exemplo a função f é contínua no intervalo $[x, x+h]$. Deste modo, pelo teorema da média para integrais, tem-se

$$A(x+h) - A(x) = hf(z), \qquad \text{com} \qquad x \leq z \leq x+h\,.$$

Em consequência podemos escrever

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(z)\,, \tag{5.2}$$

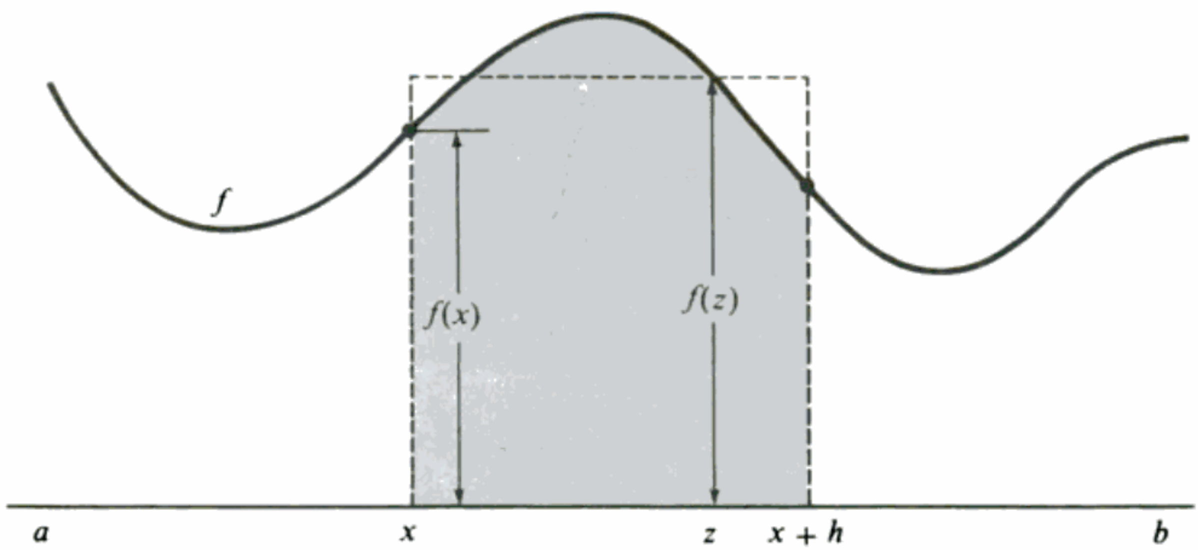


Fig. 5.1. Interpretação geométrica do primeiro teorema fundamental do cálculo.

e, uma vez que $x \leq z \leq x+h$, concluímos que $f(z) \to f(x)$ quando $h \to 0$, através de valores positivos. Um argumento semelhante é ainda válido se $h \to 0$ através de valores negativos. Portanto $A'(x)$ existe e é igual a $f(x)$.

Esta argumentação pressupõe que a função f é contínua em certa *vizinhança* do ponto x. Todavia, a hipótese do teorema refere-se unicamente à continuidade de f no *próprio ponto* x. Por conseguinte, seguiremos um método diferente para demonstrar o teorema sob esta hipótese mais fraca.

Demonstração analítica. Seja x um ponto de continuidade de f, suposto fixo, e formemos a razão incremental

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}.$$

Para demonstrarmos o teorema provaremos que este quociente tende para o limite $f(x)$ quando $h \to 0$. O numerador vale

$$A(x+h)-A(x)=\int_c^{x+h} f(t)\,dt-\int_c^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Se no último integral escrevermos $f(t)=f(x)+[f(t)-f(x)]$, obtemos

$$\begin{aligned}A(x+h)-A(x)&=\int_x^{x+h} f(x)\,dt+\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt\\&=hf(x)+\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt,\end{aligned}$$

donde se conclui

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt. \tag{5.3}$$

Ficará completada a demonstração de (5.1) quando tivermos provado que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt=0.$$

Nesta fase de demonstração faremos uso de continuidade de f em x.

Representando o segundo termo do segundo membro de (5.3) por $G(h)$, pretendemos provar que $G(h)\to 0$ quando $h \to 0$. Usando a definição de limite, devemos mostrar que para todo o $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|G(h)|<\epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0<|h|<\delta. \tag{5.4}$$

Em virtude da continuidade de f em x, dado um ϵ existe um positivo δ tal que:

$$|f(t)-f(x)|<\tfrac{1}{2}\epsilon \tag{5.5}$$

sempre que

$$x-\delta<t<x+\delta. \tag{5.6}$$

Se escolhermos h de maneira que $0<h<\delta$, então cada t do intervalo $[x, x+h]$ satisfaz (5.6) e por isso (5.5) é válida para cada t desse intervalo. Recorrendo à propriedade $|\int_x^{x+h} g(t)\,dt| \leq$

$\leq \int_x^{x+h} |g(t)|\, dt$ com $g(t) = f(t) - f(x)$, vê-se que a desigualdade (5.5) conduz à relação

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \int_x^{x+h} \tfrac{1}{2}\epsilon\, dt = \tfrac{1}{2}h\epsilon < h\epsilon\, .$$

Se dividimos por h vemos que (5.4) é válida para $0 < h < \delta$. Se $h < 0$, um raciocínio análogo prova que (5.4) é válida sempre que $0 < |h| < \delta$, estando assim completada a demonstração.

5.2. Teorema da derivada nula

Se uma função f é constante num intervalo aberto (a, b) a sua derivada é identicamente nula em todo o intervalo (a, b). Provámos já esta afirmação como uma consequência imediata da definição de derivada. Também demonstrámos, na alínea (c) do Teorema 4.7, a recíproca desta afirmação a qual apresentamos de novo como um teorema independente.

TEOREMA 5.2. TEOREMA DA DERIVADA NULA. *Se $f'(x) = 0$ para todo o x pertencente a um intervalo aberto I, então f é constante em I.*

Este teorema, combinado com o primeiro teorema fundamental do cálculo, conduz ao segundo teorema fundamental que vai ser tratado na seção seguinte.

5.3. Funções primitivas e o segundo teorema fundamental do cálculo

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO PRIMITIVA. *Uma função P diz-se uma primitiva (ou uma antiderivada) duma função f num intervalo aberto I, se a derivada de P é f, isto é, se $P'(x) = f(x)$ para todo o x de I.*

Por exemplo, a função seno é uma primitiva de função cosseno em todo o intervalo, porque a derivada da função seno é o cosseno. Falamos de *uma* primitiva, em vez de *a* primitiva, porque se P é primitiva de f, então também $P + k$ o é, qualquer que seja a constante k. Inversamente, duas quaisquer primitivas P e Q duma mesma função f podem diferir unicamente por uma constante porque a sua diferença $P - Q$ tem a derivada

$$P'(x) - Q'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ ,$$

qualquer que seja x em I e por consequência, pelo Teorema 5.2, $P - Q$ é constante em I.

O primeiro teorema fundamental do cálculo diz-nos que podemos sempre construir uma primitiva duma função contínua por integração. Quando associamos este fato com o de que duas primitivas da mesma função podem, quando muito, diferir por uma constante, obtemos o segundo teorema fundamental do cálculo.

TEOREMA 5.3. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. *Se f é contínua num intervalo aberto I e P é qualquer primitiva de f em I, então, para cada c e cada x em I, tem-se*

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\, dt\, . \tag{5.7}$$

Demonstração. Seja $A(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Uma vez que f é contínua em cada x de I, o primeiro teorema fundamental diz-nos que $A'(x) = f(x)$, para todo o x em I. Quer dizer que A é uma primitiva de f em I. Sabido que duas primitivas de f podem diferir unicamente por uma constante, teremos $A(x) - P(x) = k$ para uma certa constante k. Quando $x = c$, a fórmula anterior implica que $-P(c) = k$, já que $A(c) = 0$. Daqui resulta que $A(x) - P(x) = -P(c)$, que não é mais do que (5.7).

O Teorema (5.3) ensina-nos a calcular uma primitiva P duma função contínua f. Muito simplesmente integramos f desde um ponto fixo c até um ponto arbitrário x e adicionamos-lhe $P(c)$ para obtermos $P(x)$. Mas a importância real do teorema torna-se mais evidente quando escrevemos (5.7) na forma

$$\int_c^x f(t)\,dt = P(x) - P(c)\,. \tag{5.8}$$

a qual nos diz que podemos calcular o valor dum integral mediante uma simples subtração desde que conheçamos uma primitiva P. O problema do cálculo dum integral transformou-se pois noutro problema — o do cálculo duma primitiva P da função f. Na prática, o segundo problema é mais fácil de resolver que o primeiro. Cada fórmula de derivação, quando lida em sentido inverso, dá-nos o exemplo duma primitiva de certa função f e desta, por sua vez, resulta imediata uma fórmula de integração para esta função.

Das fórmulas de derivação já estudadas, e como consequência do segundo teorema fundamental, podem deduzir-se as seguintes fórmulas de integração.

EXEMPLO 1. *Integração de potências racionais.* A fórmula de integração

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.9}$$

foi demonstrada na Seção 1.23 dire a partir da definição do integral. O resultado pode ser de novo estabelecido e mesmo generalizado para expoentes racionais, aplicando o segundo teorema fundamental. Em primeiro lugar, observemos que a função P definida pela igualdade

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{5.10}$$

admite a derivada $P'(x) = x^n$, se n é qualquer inteiro não negativo. Uma vez que (5.10) é válida para todo o real x, podemos servir-nos de (5.8) para escrevermos

$$\int_a^b x^n\,dx = P(b) - P(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

qualquer que seja o intervalo $[a, b]$. Esta fórmula, demonstrada para todo o inteiro $n \geq 0$, também é válida para todo o inteiro negativo excepto $n = -1$, porque $n + 1$ figura em denominador. Para demonstrar (5.9) para n negativo, basta mostrar que (5.10) implica $P'(x) = x^n$ [quando n é negativo e $\neq -1$, fato que é facilmente verificável derivando P como função racional. Evidentemente que, quando n é negativo, nem $P(x)$ nem $P'(x)$ são definidas para $x = 0$, e quando aplicamos (5.9) com n negativo é importante excluir os intervalos $[a, b]$ que contenham o ponto $x = 0$.

O resultado do Exemplo 3 da Seção 4.5 permite-nos generalizar (5.9) a todos os expoentes *racionais* (exceto -1), desde que a função integranda esteja definida em todos os pontos do intervalo $[a, b]$ sob consideração. Por exemplo, se $0 < a < b$ e $n = -\frac{1}{2}$, *temos que*

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_a^b x^{-1/2} dx = \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})\,.$$

Este resultado já fora obtido recorrendo aos axiomas da área. A demonstração que acabou de efetuar-se não faz qualquer apêlo a esses axiomas.

No capítulo que se segue vai definir-se uma função potência geral f tal que $f(x) = x^c$ para *todo o expoente real* c. Demonstrar-se-á que tal função tem a derivada $f'(x) = cx^{c-1}$ e a primitiva $P(x) = \dfrac{x^{c+1}}{c+1}$ se $c \neq -1$ o que nos permitirá generalizar (5.9) a qualquer expoente, real, exceto -1.

Chama-se a atenção para o fato de que $P'(x) = 1/x$ não pode ser obtida por derivação de nenhuma função da forma $P(x) = x^n$. Todavia, existe uma função P cuja derivada é $P'(x) = 1/x$. Uma tal função pode ser expressa por meio de um integral indefinido de $1/x$, por exemplo,

$$P(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{se} \qquad x > 0\,.$$

Este integral existe, uma vez que a função integranda é monótona. A função assim definida chama-se o *logaritmo* (mais concretamente, o *logaritmo natural*). As suas propriedades serão analisadas em pormenor no capítulo 6.

EXEMPLO 2. *Integração do seno e do cosseno.* Uma vez que a derivada do seno é o cosseno e a derivada do cosseno é menos o seno, o segundo teorema fundamental permite-nos escrever:

$$\int_a^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a\,,$$

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = (-\cos x)\Big|_a^b = \cos a - \cos b\,.$$

fórmulas estas já conhecidas, pois foram demonstradas no Cap. 2 diretamente a partir da definição de integral.

Outros exemplos de fórmulas de integração podem ser obtidos a partir dos Exemplos 1 e 2, considerando somas finitas de termos da forma Ax^n, $B\operatorname{sen} x$, $C\cos x$, com A, B e C constantes.

5.4. Propriedades duma função estabelecidas a partir de propriedades da sua derivada

Se uma função admite uma derivada contínua f' um intervalo aberto I, o segundo teorema fundamental diz-nos que

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,dt \tag{5.11}$$

quaisquer que sejam c e x em I. Esta fórmula, que exprime f por intermédio da sua derivada f', permite-nos estabelecer propriedades duma função a partir das propriedades da sua derivada. Embora as propriedades que se vão referir já tenham sido estabelecidas no capítulo 4, pode ter interesse mostrar como podem ser deduzidas como simples consequências de (5.11).

Suponhamos f' contínua e não negativa em I. Se $x > c$, então $\int_c^x f'(t)\,dt \geq 0$ e portanto $f(x) \geq f(c)$. Por outras palavras, se a derivada duma função é contínua e não negativa em I, a função é crescente em I.

No Teorema 2.9 provou-se que o integral indefinido duma função crescente é uma função convexa. Por conseguinte, se f' é contínua e crescente em I, a igualdade (5.11) mostra que f é convexa em I. Do mesmo modo f é côncava em I se f' é contínua e decrescente naquele intervalo.

5.5. Exercícios

Em cada um dos Exercícios 1 a 10, calcular uma primitiva de f, isto é, determinar uma função P tal que $P'(x) = f(x)$ e aplicar o segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)dx$.

1. $f(x) = 5x^3$.
2. $f(x) = 4x^4 - 12x$.
3. $f(x) = (x+1)(x^3-2)$.
4. $f(x) = \dfrac{x^4 + x - 3}{x^3}$, $\quad x \neq 0$.
5. $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$, $\quad x > 0$.
6. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}$, $\quad x > 0$.
7. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{x}}$, $\quad x > 0$.
8. $f(x) = 2x^{1/3} - x^{-1/3}$, $\quad x > 0$.
9. $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 2x^5$.
10. $f(x) = x^{4/3} - 5\cos x$.
11. Provar que não existe nenhum polinómio f cuja derivada seja dada por $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
12. Mostrar que $\int_0^x |t|\,dt = \dfrac{1}{2}x|x|$ para todo o real x.

13. Mostrar que $$\int_0^x (t + |t|)^2\, dt = \frac{2x^2}{3}(x + |x|) \quad \text{para todo o real } x.$$

14. Uma função f é contínua e verifica a igualdade

$$\int_0^x f(t)\, dt = -\tfrac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

para todo o x. Calcular $f(\frac{\pi}{4})$ e $f'(\frac{\pi}{4})$.

15. Determinar a função f e a constante c, tal que:

$$\int_c^x f(t)\, dt = \cos x - \tfrac{1}{2} \qquad \text{para todo o real } x.$$

16. Determinar a função f e a constante c, tal que:

$$\int_c^x tf(t)\, dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - \tfrac{1}{2}x^2 \qquad \text{para todo o real } x.$$

17. Existe uma função f, definida e contínua para todo o real x, que verifica a igualdade

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_x^1 t^2 f(t)\, dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c\,,$$

com c constante. Determinar uma expressão explícita de $f(x)$ e achar o valor da constante c.

18. Uma função f está definida para todo o real x pela fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin t}{2 + t^2}\, dt\,.$$

Sem tentar o cálculo deste integral, determinar um polinómio do segundo grau $p(x) = a + bx + cx^2$, tal que $p(0) = f(0) = p'(0) = f'(0)$ e $p''(0) = f''(0)$.

19. Dada a função g, contínua em todo o eixo real, tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)\, dt = 2$. Seja $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2 g(t)\, dt$. Provar que

$$f'(x) = x\int_0^x g(t)\, dt - \int_0^x tg(t)\, dt\,,$$

e calcular $f''(1)$ e $f'''(1)$.

20. Sem calcular os seguintes integrais indefinidos, determinar a derivada $f'(x)$ nos casos em que $f(x)$ é igual a:

(a) $\int_0^x (1 + t^2)^{-3}\, dt$, (b) $\int_0^{x^2} (1 + t^2)^{-3}\, dt$, (c) $\int_{x^3}^{x^2} (1 + t^2)^{-3}\, dt$.

21. Sem calcular o integral, determinar $f'(x)$ sendo f definida por

$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1 + t^4}\, dt\,.$$

22. Em cada caso, calcular $f(2)$ se f é contínua e verifica a fórmula dada para todo o $x \geq 0$.

(a) $\int_0^x f(t)\, dt = x^2(1 + x)\,.$

(b) $\int_0^{x^2} f(t)\, dt = x^2(1 + x)\,.$

(c) $\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x^2(1 + x)\,.$

(d) $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\, dt = x\,.$

23. A base dum sólido é o conjunto de ordenadas duma função f não negativa no intervalo $[0, a]$. Todas as seções perpendiculares a $0X$ são quadrados. O volume do sólido é

$$a^3 - 2a \cos a + (2 - a^2) \operatorname{sen} a$$

para todo o $a \geq 0$. Supondo que f é contínua em $[0, a]$, calcular $f(a)$.

24. Um mecanismo impele uma partícula ao longo de uma reta. O movimento é tal que a posição da partícula num instante t, a partir duma posição inicial em 0, é dada por $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t \operatorname{sen} t$. O mecanismo trabalha perfeitamente até ao instante $t = \pi$, em que surge uma avaria inesperada. A partir daí a partícula move-se com velocidade constante (a velocidade que possuia em $t = \pi$). Calcular: (a) a sua velocidade no instante $t = \pi$; (b) a sua aceleração no instante $t = \pi/2$; (c) a sua aceleração no instante $t = \frac{3\pi}{2}$; (d) o seu deslocamento de $t = 0$ até $t = \frac{5}{2}\pi$; (e) Determinar um instante $t > \pi$ em que a partícula volta à sua posição inicial 0, ou então demonstrar que nunca volta a 0.

25. Uma partícula move-se ao longo de uma reta. A sua posição num instante t é $f(t)$. Quando $0 \leq t \leq 1$, a posição é definida por

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x}{1 + x^2}\, dx\,.$$

(Não tentar o cálculo do integral). Para $t \geq 1$ a partícula move-se com aceleração constante (a aceleração adquirida no instante $t = 1$). Calcular: (a) a sua aceleração no instante $t = 2$; (b) a sua velocidade quando $t = 1$; (c) a sua velocidade quando $t > 1$; (d) a diferença $f(t) - f(1)$ quando $t > 1$.

26. Em cada um dos casos seguintes determinar uma função f (com segunda derivada f'' contínua) que satisfaça a todas as condições indicadas, ou então explicar porque não é possível determinar uma tal função.

(a) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$.
(b) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 3$.
(c) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f(x) \leq 100$ para todo $x > 0$.
(d) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f(x) \leq 100$ para todo $x < 0$.

27. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, sendo a sua posição num instante t defi-

nida por $f(t)$. Inicia o movimento com uma velocidade $f'(0) = 0$ e tem uma aceleração contínua $f''(t) \geq 6$ para todo o t do intervalo $0 \leq t \leq 1$. Provar que a velocidade $f'(t) \geq 3$ para todo o t em certo intervalo $[a, b]$, onde $0 \leq a < b \leq 1$, com $b - a = \frac{1}{2}$.

28. Dada uma função f tal que o integral $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ exista para cada x do intervalo $[a, b]$. Seja c um ponto do intervalo (a, b). Considere as dez seguintes afirmações relativas a f e A:

(a) f é contínua em c.
(b) f é descontínua em c.
(c) f é crescente em (a, b)
(d) $f'(c)$ existe.
(e) f' é contínua em c.

(α) A é contínua em c.
(β) A é descontínua em c.
(γ) A é convexa em (a, b).
(δ) $A'(c)$ existe.
(ϵ) A' é contínua em c.

Numa tabela igual à desenhada aqui, escrever um T no quadrado correspondende se a afirmação assinalada com uma letra latina implica sempre a assinalada com uma letra grega. Deixar os restantes quadrados em branco. Por exemplo, se a) implica α), escreveremos um T no canto superior esquerdo, etc.

	α	β	γ	δ	ϵ
a					
b					
c					
d					
e					

5.6. A notação de Leibniz para as primitivas

Voltamos agora a um estudo adicional da relação entre integração e derivação. Em primeiro lugar analisamos a notação introduzida por Leibniz.

Definimos uma primitiva P duma função f como sendo qualquer função para a qual $P'(x) = f(x)$. Se f é contínua num intervalo, uma primitiva é dada pela fórmula

$$P(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,,$$

e todas as outras primitivas defirirão desta unicamente por uma constante. Leibniz usou o símbolo $\int f(x)dx$ para representar uma primitiva qualquer de f. Com esta notação, a igualdade

$$\int f(x)\,dx = P(x) + C \tag{5.12}$$

considera-se uma maneira alternativa de escrever $P'(x) = f(x)$. Por exemplo, uma vez que a derivada do seno é o cosseno, podemos escrever

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C\,. \tag{5.13}$$

De modo análogo, uma vez que a derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ é x^n, podemos escrever

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, \tag{5.14}$$

para qualquer racional $n \neq -1$. O símbolo C representa uma constante arbitrária, de modo que cada uma das igualdades (5.13) e (5.14) é realmente uma afirmação relativa a um conjunto completo de funções.

A despeito da aparente semelhança, o símbolo $\int f(x)dx$, é conceitualmente distinto do símbolo de integração $\int_a^b f(x)dx$. Os dois símbolos resultam de dois processos por completo diferentes – derivação e integração. Uma vez que, porém, ambos os processos estão relacionados pelos teoremas fundamentais do cálculo, existem igualmente relações entre aqueles símbolos.

O primeiro teorema fundamental estabelece que qualquer integral indefinido de f é também uma primitiva de f. Assim sendo, podemos substituir $P(x)$, em (5.12), por $\int_c^x f(t)dt$, com c um certo limite inferior e escrever

$$\int f(x) \, dx = \int_c^x f(t) \, dt + C\,. \tag{5.15}$$

Significa isto que podemos considerar o símbolo $\int f(x)dx$ como representando algum integral indefinido de f, mais uma constante.

O segundo teorema fundamental diz-nos que para qualquer primitiva P de f e para qualquer constante C, temos

$$\int_a^b f(x) \, dx = [P(x) + C]\Big|_a^b\,.$$

Se substituimos $P(x) + C$ por $\int f(x)dx$, a fórmula anterior pode escrever-se

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int f(x) \, dx \Big|_a^b\,. \tag{5.16}$$

As duas fórmulas (5.15) e (5.16) podem considerar-se como expressões simbólicas do primeiro e segundo teoremas fundamentais do Cálculo.

Devido a uma larga tradição, muitos livros de cálculo referem o símbolo $\int f(x)dx$ como um "integral indefinido", em vez de o designarem como uma primitiva ou uma antiderivada. Tal fato está em parte justificado pela fórmula (5.15), a qual indica que o símbolo $\int f(x)dx$ é, a menos de uma constante aditiva C, um integral indefinido de f. Pelo mesmo motivo, muitos manuais de fórmulas matemáticas apresentam extensas listas de fórmulas designadas "tabelas de integrais indefinidos" as quais, na realidade, são tabelas de primitivas. Para distinguir o símbolo $\int f(x)dx$ de $\int_a^b f(x)dx$, chama-se ao último integral *definido*. Visto que o segundo teorema fundamental reduz o problema da integração ao da determinação duma primitiva, a expressão "técnica de integração" é usada para referir qualquer método sistemático de cálculo de primitivas. Esta terminologia está largamente difundida na literatura matemática e será também adoptada neste libro. Deste modo, quando se pede para "integrar" $\int f(x)dx$ deve entender-se que o que se pretende é o cálculo da primitiva mais geral de f.

São três as técnicas principais que são utilizadas para construir tabelas de integrais indefinidos e devem ser bem assimiladas por quem pretenda um bom conhecimento prático do cálculo. São elas (1) *integração por substituição* (a ser estudada na próxima seção), um método baseado na regra de derivação duma função composta; (2) *integração por partes*, um método baseado na fórmula de derivação do produto (a ser estudado na Seção 5.9); e (3) integração por *descomposição em fracções simples*, uma técnica que será apresentada no final do Capítulo 6. Estas técnicas não só explicam como se constroem as tabelas de integrais indefinidos, como também nos ensinam a transformar certos integrais en formas básicas que figuram nas tabelas.

5.7. Integração por substituição

Seja Q uma função composta das duas funções P e g, a saber $Q(x) = P[g(x)]$ para todo o x em dado intervalo I. Se conhecermos a derivada de P, seja $P'(x) = f(x)$, a regra da derivada da função composta diz-nos que a derivada de Q é dada pela fórmula $Q'(x) = P'[g(x)]g'(x)$. Uma vez que $P' = f$, isto determina que $Q'(x) = f[g(x)]g'(x)$. Por outras palavras,

$$P'(x) = f(x) \qquad \text{implica} \quad Q'(x) = f[g(x)]g'(x)\,. \tag{5.17}$$

Na notação de Leibniz, esta afirmação pode escrever-se: Se temos a fórmula de integração

$$\int f(x)\,dx = P(x) + C\,, \tag{5.18}$$

então temos também a fórmula mais geral

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = P[g(x)] + C\,. \tag{5.19}$$

Por exemplo se $f(x) = \cos x$, então (5.18) é verdadeira com $P(x) = \operatorname{sen} x$ e assim (5.19) vem

$$\int \cos g(x) \cdot g'(x)\,dx = \operatorname{sen} g(x) + C\,. \tag{5.20}$$

Em particular, se $g(x) = x^3$, isto dá-nos

$$\int \cos x^3 \cdot 3x^2\,dx = \operatorname{sen} x^3 + C\,,$$

um resultado facilmente verificável, pois a derivada de $\operatorname{sen} x^3$ é $3x^2 \cos x^3$.

Observemos agora que a fórmula geral (5.19) está relacionada com (5.18) por um simples processo mecânico. Suponhamos que substituímos $g(x)$ em (5.19) por um novo símbolo u e igualmente substituímos $g'(x)$ por $\frac{du}{dx}$, a notação de Leibniz para derivadas. Então (5.19) vem

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = P(u) + C\,.$$

Ao chegar aqui é-se tentado a substituir a combinação $\frac{du}{dx}\,dx$ por du. Se o fizermos, a última fórmula vem

$$\int f(u)\,du = P(u) + C\,. \tag{5.21}$$

Observe-se, porém, que esta é exatamente a fórmula (5.18), apenas com o símbolo x substituido por u. Quer isto dizer que cada fórmula de integração tal como (5.18) pode dar lugar a outra mais geral bastando uma simples substituição de símbolos. Substituímos x em (5.18) por um novo símbolo u para obtermos (5.21), e depois consideramos u como representando uma nova função de x, por exemplo $u = g(x)$. Substituímos então o símbolo du pela combinação $g'(x)dx$ e (5.21) reduz-se à formula geral (5.19).

Por exemplo, se substituimos x por u na fórmula $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$, obtemos

$$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C\,.$$

Nesta última fórmula u pode ser substituído por $g(x)$ e du por $g'(x)dx$ e resulta uma fórmula correta de integraçao, (5.20).

Usando este processo mecânico em *sentido inverso*, resulta o método de *integração por substituição*. A finalidade deste método é transformar um integral com uma função integranda complicada, tal como $\int 3x^2 \cos x^3 dx$, num integral mais simples, como $\int \cos u\,du$. O método é aplicável sempre que o integral original possa escrever-se na forma

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx\,,$$

uma vez que a substituição

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)\,dx\,,$$

o transforma em $\int f(u)du$. Se soubermos efetuar a integração de $\int f(u)du$, obtemos uma primitiva, seja $P(u)$, e então o integral original pode ser calculado pela substituição de u por $g(x)$ na expressão de $P(u)$.

O leitor verificará que não atribuímos qualquer significado especial aos símbolos dx e du. São usados como instrumentos meramente formais para nos auxiliarem a efetuar operações matemáticas de uma maneira mecânica. Cada vez que aplicamos o método, estamos realmente a aplicar a afirmação (5.17).

O êxito do método depende da habilidade de cada um em determinar qual a parte da função granda que deve ser substituída pelo símbolo u e esta habilidade adquire-se, em grande parte, com a experiência ganha na resolução de vários exemplos típicos. Os exemplos seguintes ilustran a forma como o método pode ser aplicado na prática.

EXEMPLO 1. Integrar $\int x^3 \cos x^4 dx$.

Resolução. Chama-se a atenção para o fato de que vamos tentar escrever $x^3 \cos x^4$ na forma $f[g(x)]g'(x)$, por uma escolha adequada de f e g. Uma vez que $\cos x^4$ é uma função composta, isso sugere que façamos $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^4$, de tal maneira que $\cos x^4$ venha expresso na forma $f[g(x)]$. Esta escolha de $g(x)$ define $g'(x) = 4x^3$ e por isso $f[g(x)]g'(x) = (\cos x^4)(4x^3)$. O fator 4 pode facilmente considerar-se, multiplicando e dividindo a função integranda inicial por 4. Podemos então escrever

$$x^3 \cos x^4 = \tfrac{1}{4}(\cos x^4)(4x^3) = \tfrac{1}{4} f[g(x)]g'(x) .$$

Fazendo agora a substituicão $u = g(x) = x^4$, $du = g'(x)dx = 4x^3 dx$, obtemos

$$\int x^3 \cos x^4 \, dx = \tfrac{1}{4} \int f(u) \, du = \tfrac{1}{4} \int \cos u \, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} u + C .$$

Substituindo u por x^4 no resultado final anterior, obtemos a fórmula

$$\int x^3 \cos x^4 \, dx = \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} x^4 + C ,$$

a qual pode ser verificada por derivação.

Com um pouco de prática, alguns dos passos da resolução atrás referidos efetuam-se mentalmente e o cálculo realiza-se duma maneira muito rápida, como segue: seja $u = x^4$, então $du = 4x^3 dx$ e obtém-se

$$\int x^3 \cos x^4 \, dx = \tfrac{1}{4} \int (\cos x^4)(4x^3 \, dx) = \tfrac{1}{4} \int \cos u \, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} u + C = \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} x^4 + C .$$

Chama-se a atenção para o pormenor de que o método é aplicável neste exemplo porque o fator x^3 tem um expoente inferior em uma unidade ao da potência de x que aparece em $\cos x^4$.

EXEMPLO 2. Integrar $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx$

Resolução. Faça-se $u = \cos x$, donde $du = -\operatorname{sen} x dx$ e

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\int (\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x \, dx) = -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C .$$

Mais uma vez se refere que o resultado pode ser verificado por derivação.

EXEMPLO 3. Integrar $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Resolução. Seja $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$, ou $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$.

Será pois

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \operatorname{sen} u\,du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C\,.$$

EXEMPLO 4. Integrar $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Resolução. Fazendo $u = 1+x^2$ vem $du = 2x\,dx$ ou $x\,dx = \frac{1}{2}du$ e portanto

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = u^{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C\,.$$

O método de substituição é, evidentemente, também aplicável a integrais definidos. Por exemplo, para calcular o integral definido $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$, determinamos em primeiro lugar o integral indefinido, como foi exposto no Exemplo 2, e depois recorremos ao segundo teorema fundamental para escrevermos

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{1}{3}\,.$$

Algumas vezes é preferível aplicar o segundo teorema fundamental ao integral expresso em função de u. Pode fazer-se isto definindo novos limites de integração. Mostraremos como isso é feito resolvendo o exemplo particular seguinte e depois justificaremos o processo com um teorema geral.

EXEMPLO 5. Calcular $\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Resolução. Seja $u = x^2 + 2x + 3$; então $du = (2x+2)dx$ e portanto

$$\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}\,.$$

Calculamos agora os novos limites de integração, definidos pelos valores de u correspondentes a $x = 2$ e $x = 3$ e que são $u = 11$ e $u = 18$. Podemos pois escrever

$$\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2}\int_{11}^{18} u^{-1/2}\,du = \sqrt{u}\,\Big|_{11}^{18} = \sqrt{18} - \sqrt{11}\,.$$

Quando se exprime tudo em função de x obtém-se o mesmo resultado

$$\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \sqrt{x^2+2x+3}\,\Big|_2^3 = \sqrt{18} - \sqrt{11}\,.$$

Enunciamos e demonstramos a seguir um teorema geral que justifica o processo seguido no Exemplo 5.

TEOREMA 5.4. O MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO PARA INTEGRAIS. *Supõe-se que g admite derivada contínua g′ no intervalo aberto I. Seja J o conjunto dos valores assumidos por g em I e admita-se que f é contínua em J. Então para cada x e c em I, tem-se*

$$\int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)\,du\,. \tag{5.22}$$

Demonstração. Seja $a = g(c)$ e definamos duas funções P e Q do modo seguinte:

$$P(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad \text{se} \quad x \in J, \qquad Q(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt \quad \text{se} \quad x \in I\,.$$

Porque P e Q são integrais indefinidos de funções contínuas admitem derivadas dadas pelas fórmulas

$$P'(x) = f(x), \qquad Q'(x) = f[g(x)]g'(x)\,.$$

Representando R a função composta $R(x) = P[g(x)]$ e aplicando a regra de derivação para aquela função obtemos

$$R'(x) = P'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x) = Q'(x)\,.$$

Aplicando duas vezes o segundo teorema fundamental, obtemos

$$\int_{g(c)}^{g(x)} f(u)\,du = \int_{g(c)}^{g(x)} P'(u)\,du = P[g(x)] - P[g(c)] = R(x) - R(c)\,,$$

e

$$\int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt = \int_c^x Q'(t)\,dt = \int_c^x R'(t)\,dt = R(x) - R(c)\,.$$

e portanto está demonstrado que os integrais (5.22) são iguais.

5.8. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 20, calcular os integrais pelo método de substituição.

1. $\int \sqrt{2x+1}\, dx.$
2. $\int x\sqrt{1+3x}\, dx.$
3. $\int x^2\sqrt{x+1}\, dx.$
4. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x\, dx}{\sqrt{2-3x}}.$
5. $\int \frac{(x+1)\, dx}{(x^2+2x+2)^3}.$
6. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx.$
7. $\int z(z-1)^{1/3}\, dz.$
8. $\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x}.$
9. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\sqrt{4-\operatorname{sen} 2x}\, dx.$
10. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(3+\cos x)^2}.$
11. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^3 x}}.$
12. $\int_3^8 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\, dx}{\sqrt{x+1}}.$
13. $\int x^{n-1} \operatorname{sen} x^n\, dx, \qquad n \neq 0.$
14. $\int \frac{x^5\, dx}{\sqrt{1-x^6}}.$
15. $\int t(1+t)^{1/4}\, dt.$
16. $\int (x^2+1)^{-3/2}\, dx.$
17. $\int x^2(8x^3+27)^{2/3}\, dx.$
18. $\int \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^{1/3}}.$
19. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$
20. $\int \frac{(x^2+1-2x)^{1/5}\, dx}{1-x}.$
21. Deduzir as fórmulas dos teoremas 1.18 e 1.19 recorrendo ao método de substituição.
22. Seja

$$F(x, a) = \int_0^x \frac{t^p}{(t^2+a^2)^q}\, dt,$$

onde $a > 0$, e p e q são inteiros positivos. Mostrar que $F(x, a) = a^{p+1-2q}F(x/a, 1)$.

23. Provar que

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} \qquad \text{se} \quad x > 0.$$

24. Provar que se m e n são inteiros positivos

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\, dx.$$

25. Provar que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^m x \, dx = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x \, dx .$$

se m é um inteiro positivo.

26. (a) Provar que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx . \qquad [\textit{Sugestão: } u = \pi - x.]$$

(b) Com o resultado da alínea (a) demonstrar a igualdade

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} .$$

27. Provar que $\int_0^1 (1 - x^2)^{n-1/2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du$ se n é um inteiro positivo. [*Sugestão:* $x = \operatorname{sen} u$]. O integral do segundo membro pode ser calculado pelo método de integração por partes que será tratado a seguir.

5.9. Integração por partes

Provámos, no Capítulo 4, que a derivada de um produto de duas funções f e g é dada pela fórmula

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) ,$$

com $h(x) = f(x)g(x)$. Na notação de Leibniz para primitivas vem $\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) + C$, que habitualmente se escreve

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx + C . \tag{5.23}$$

Esta igualdade, conhecida por fórmula de *integração por partes*, conduz-nos a uma nova té- nica de integração.

Para calcular um integral, por exemplo $\int k(x)dx$, aplicando (5.23) tentamos determinar duas funções f e g tais que $k(x)$ possa ser escrita na forma $f(x)g'(x)$. Se conseguirmos fazer isso, então (5.23) diz-nos que

$$\int k(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx + C ,$$

e a dificuldade transfere-se para o cálculo de $\int g(x)f'(x)dx$. Se f e g forem convenientemente escolhidos, o último integral será mais fácil de calcular do que o integral donde partimos. Por vezes duas ou mais aplicações de (5.23) conduzem-nos a um integral que se calculará facilmente, ou que pode mesmo ser encontrado numa tabela. Os exemplos resolvidos, apresentados a seguir, foram escolhidos para evidenciarem as vantagens deste método. Para os integrais definidos, (5.23) escreve-se

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Fazendo $u = f(x)$, $v = g(x)$ resulta $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e a fórmula de integração por partes escreve-se na forma abreviada

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C\,. \tag{5.24}$$

Exemplo 1. Integrar $\int x \cos x\, dx$.

Resolução. Escolhemos $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$. Quer isto dizer que $f'(x) = 1$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, de maneira que (5.23) vem

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C\,. \tag{5.25}$$

Note-se que neste caso o segundo integral é já conhecido.

Para efetuar o mesmo cálculo utilizando a notação abreviada de (5.24), escrevemos

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx\,,$$

$$du = dx, \qquad v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,,$$

$$\int x \cos x\,dx = uv - \int v\,du = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C\,.$$

Se tivessemos escolhido $u = \cos x$ e $dv = x\,dx$, teríamos obtido $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$, e (5.24) dar-nos-ia

$$\int x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \cos x - \tfrac{1}{2}\int x^2(-\operatorname{sen} x)\,dx + C = \tfrac{1}{2}x^2 \cos x + \tfrac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx + C\,.$$

Uma vez que o último integral é um dos que ainda não foi calculado, esta escolha de u e v não é tão útil como a primeira. Observe-se, contudo, que esta última equação pode ser resolvida relativamente a $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$ e usar (5.25) para se obter

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x - x^2 \cos x + C\,.$$

EXEMPLO 2. Integrar $\int x^2 \cos x\, dx$.

Resolução. Seja $u = x^2$ e $dv = \cos x\, dx$. Então $du = 2x\, dx$ e $v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$, o que nos permite escrever:

$$\int x^2 \cos x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du + C = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x\, dx + C\,. \quad (5.26)$$

O último integral pode ser calculado por aplicação do método de integração por partes mais uma vez. Uma vez que é análogo ao Exemplo 1, escrevemos simplesmente o resultado:

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C\,.$$

Substituindo em (5.26) e agrupando as duas constantes arbitrárias numa só, obtemos

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C\,.$$

EXEMPLO 3. O método algumas vezes falha porque conduz de novo ao integral original. Por exemplo, tentemos calcular $\int x^{-1}\, dx$ por partes. Se fizermos $u = x$ e $dv = x^{-2}\, dx$, então $\int x^{-1} dx = \int u\, dv$. Com esta escolha de u e v tem-se $du = dx$ e $v = -x^{-1}$, de modo que (5.24) dá-nos

$$\int x^{-1}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du + C = -1 + \int x^{-1}\, dx + C\,, \qquad (5.27)$$

e voltamos ao integral donde partíramos. Além disso, a situação não melhora se fizermos $u = x^n$ e $dv = x^{-n-1}$.

Este exemplo é muitas vezes usado para ilustrar a importância que deve conceder-se à constante arbitrária C. Se a fórmula (5.27) fôr escrita sem C, obtemos a igualdade $\int x^{-1} dx = -1 + \int x^{-1} dx$, a qual é algumas vezes utilizada para dar uma demonstração viciada de que $0 = -1$.

Como uma aplicação do método de integração por partes, podemos obter outra versão do teorema da média pesada para integrais (Teorema 3.16).

TEOREMA 5.5. SEGUNDO TEOREMA DA MÉDIA PARA INTEGRAIS. *Seja g uma função contínua em $[a, b]$ e f uma função admitindo derivada contínua e que não muda de sinal em $[a, b]$. Então, para algum c em $[a, b]$ tem-se*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^c g(x)\, dx + f(b) \int_c^b g(x)\, dx\,. \qquad (5.28)$$

Demonstração. Seja $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$. Uma vez que g é contínua, temos $G'(x) = g(x)$. Portanto, a integração por partes dá-nos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx\,, \tag{5.29}$$

visto que $G(a) = 0$. Pelo teorema da média pesada temos

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(c)\int_a^b f'(x)\,dx = G(c)[f(b) - f(a)]$$

para certo c em $[a, b]$. Portanto (5.29) vem

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) - G(c)[f(b) - f(a)] = f(a)G(c) + f(b)[G(b) - G(c)]$$

o que prova (5.28), já que $G(c) = \int_a^c g(x)\,dx$ e $G(b) - G(c) = \int_c^b g(x)\,dx$.

5.10. Exercícios

Por aplicação do método de integração por partes, calcular os integrais dos Exercícios 1 a 6.

1. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.
2. $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.
3. $\int x^3 \cos x\,dx$.
4. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.
5. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$.
6. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$.
7. Por aplicação do método de integração por partes demonstrar

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\,dx\,.$$

No segundo integral, escrever $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e deste modo deduzir a fórmula

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\,.$$

8. Utilizar a integração por partes para deduzir a fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx\,.$$

No segundo integral, escrever $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e deduzir a fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx\,.$$

9. Com os resultados dos Exercícios 7 e 8 mostrar que

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{3\pi}{16}.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{5\pi}{32}.$

10. Recorrendo aos resultados dos Exercícios 7 e 8, deduzir as fórmulas.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{12}\cos 3x.$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\, dx = -\tfrac{5}{8}x + \tfrac{5}{48}\cos 3x - \tfrac{1}{80}\cos 5x.$

11. Usando o método de integração por partes e os resultados dos Exercícios 7 e 10, deduzir as seguintes fórmulas:

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{8}\cos 2x.$

(b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \tfrac{3}{4}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{36}\operatorname{sen} 3x - \tfrac{3}{4}x\cos x + \tfrac{1}{12}x\cos 3x.$

(c) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{6}x^3 + (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}x^2)\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{4}x\cos 2x.$

12. Integrando por partes deduzir a fórmula

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx\,.$$

13. Utilizar o resultado do Exercício 12 para obter a fórmula seguinte:

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$

(b) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx = \tfrac{3}{4}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{12}\operatorname{sen} 3x.$

(c) $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx = \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.$

14. Integrando por partes demonstrar que

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Escrever $x^2 = x^2 - 1 + 1$ na segundo integral e deduzir a fórmula

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

15. (a) Usar a integração por partes para deduzir a fórmula

$$\int (a^2 - x^2)^n \, dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n + 1} + \frac{2a^2 n}{2n + 1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} \, dx + C .$$

(b) Utilizar a alínea (a) para calcular $\int_0^a (a^2 - x^2)^{5/2} dx$.

16. (a) Se $I_n(x) = \int_0^x t^n (t^2 + a^2)^{-1/2} dt$, aplicar o método de integração por partes para demonstrar que

$$nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - (n - 1)a^2 I_{n-2}(x) \qquad \text{se} \quad n \geq 2 .$$

(b) Aplicando (a) demonstrar que $\int_0^2 x^5 (x^2 + 5)^{-1/2} dx = 168/5 - 40\sqrt{5}/3$

17. Calcular o integral $\int_{-1}^3 t^3 (4 + t^3)^{-1/2} dt$, sabendo que $\int_{-1}^3 (4 + t^3)^{1/2} dt = 11{,}35$. Exprimir o resultado em função de $\sqrt{3}$ e $\sqrt{31}$.

18. Usar o método de integração por partes para deduzir a fórmula

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x} \, dx = \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m} \int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} \, dx .$$

Utilizar a fórmula para integrar $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ e $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$.

19. Usar a integração por partes para derivar a fórmula

$$\int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} \, dx = -\frac{1}{n} \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} \, dx .$$

Utilizar a fórmula para integrar $\int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$ e $\int \operatorname{cotg}^4 x \, dx$.

20. (a) Determinar um inteiro n tal que $n\int_0^1 x f''(2x) dx = \int_0^2 t f''(t) dt$.
(b) Calcular $\int_0^1 x f''(2x) dx$, sabendo que $f(0) = 1, f(2) = e$, e $f'(2) = 5$.

21. (a) Se ϕ'' é contínua e não nula em $[a, b]$ e se existir uma constante $m > 0$ tal que $\phi'(t) \geqslant m$ para todo t em $[a, b]$, utilizar o teorema (5.5) para provar que

$$\left| \int_a^b \operatorname{sen} \phi(t) \, dt \right| \leq \frac{4}{m} .$$

[*Sugestão.* Multiplicar e dividir o integrando por $\phi'(t)$.]

(b) Se a > 0, mostrar que $\left|\int_a^x \operatorname{sen}(t^2) dt\right| \leq 2/a$ para todo o $x > a$.

*5.11. Exercícios de revisão

1. Seja f um polinómio com $f(0) = 1$ e seja $g(x) = x^n f(x)$. Calcular $g(0), g'(0), \ldots, g^{(n)}(0)$.
2. Determinar um polinómio P de grau ≤ 5 com $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P'(0) = P''(0) = P'(1) = P''(1) = 0$.
3. Se $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, provar que

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi) \qquad \text{e} \qquad g^{(n)}(x) = \text{sen}(x + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

4. Se $h(x) = f(x)g(x)$, provar que a derivada de ordem n de h é dada por

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

com $\binom{n}{k}$ representando o coeficiente binomial. Esta é a chamada *fórmula de Leibniz*.

5. Dadas duas funções f e g cujas derivadas f' e g' verificam as igualdades

$$f'(x) = g(x), \qquad g'(x) = -f(x), \qquad f(0) = 0, \qquad g(0) = 1, \tag{5.30}$$

para cada x em algum intervalo aberto J contendo 0.(Por exemplo, estas equações são verificadas quando $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$.)

(a) Provar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo o x em J.

(b) Seja F e G outro par de funções verificando (5.30). Provar que $F(x) = f(x)$ e $G(x) = g(x)$ para todo o x em J. [*Sugestão:* Considera-se $h(x) = [F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2$].

(c) Que mais se pode dizer acerca das funções f e g que verificam (5.30)?

6. Uma função f, definida para todos os reais positivos, verifica a equação $f(x^2) = x^3$ para cada $x > 0$. Determinar $f'(4)$.

7. Uma função g, definida para todos os números reais positivos, satisfaz às duas condições seguintes: $g(1) = 1$ e $g'(x^2) = x^3$ para todo o $x > 0$. Calcular $g(4)$.

8. Mostrar que

$$\int_0^x \frac{\text{sen } t}{t + 1}\, dt \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

9. Sejam C_1 e C_2 duas curvas passando pela origem como se indica na fig. 5.2. Uma curva C diz-se "bissectar a área" compreendida entre C_1 e C_2 se, para cada ponto P de C, as duas regiões sombreadas A e B, representadas na figura têm áreas iguais. Determinar a curva C_2 sabido que a curva C tem a equação $y = x^2$ e que a curva C_1 tem a equação $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

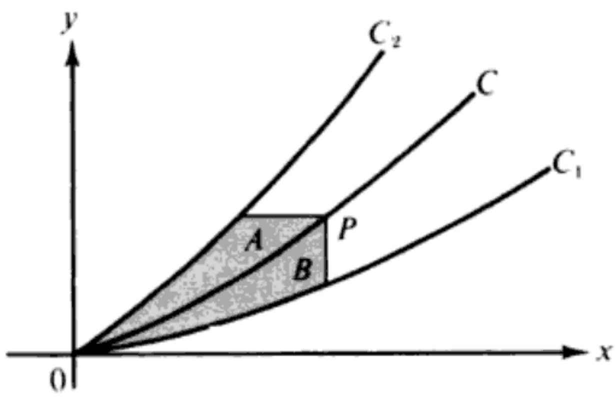


Fig. 5.2. Exercício 9.

10. Uma função é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Sejam $Q(h) = f(h)/h$ se $h \neq 0$. (a) Provar que $Q(h) \to 0$ quando $h \to 0$. (b) Provar que f admite derivada em (0) e calcular $f'(0)$.

Nos exercícios 11 a 20 calcular os integrais dados. Tentar simplificar os cálculos usando o método de substituição e/ou o método de integração por partes sempre que possível

11. $\int (2 + 3x) \operatorname{sen} 5x \, dx.$
12. $\int x\sqrt{1 + x^2} \, dx.$
13. $\int_{-2}^{1} x(x^2 - 1)^9 \, dx.$
14. $\int_0^1 \frac{2x + 3}{(6x + 7)^3} \, dx.$
15. $\int x^4(1 + x^5)^5 \, dx.$
16. $\int_0^1 x^4(1 - x)^{20} \, dx.$
17. $\int_1^2 x^{-2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx.$
18. $\int \operatorname{sen} \sqrt[4]{x - 1} \, dx.$
19. $\int x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \, dx.$
20. $\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x} \operatorname{sen} 2x \, dx.$
21. Demonstrar que o valor do integral $\int_0^2 375\, x^5 (x^2 + 1)^{-4} \, dx$ é 2^n para certo inteiro n.
22. Determinar um par de números a e b para os quais $\int_0^1 (ax + b)(x^2 + 3x + 2)^{-2} \, dx = 3/2$.
23. Seja $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$. Mostrar que $(2n + 1) I_n = 2n I_{n-1}$ e utilizar esta relação para calcular I_2, I_3, I_4 e I_5.
24. Seja $F(m, n) = \int_0^x t^m (1 + t)^n \, dt$, $m > 0$, $n > 0$. Mostrar que

$$(m + 1)F(m, n) + nF(m + 1, n - 1) = x^{m+1}(1 + x)^n.$$

Usar esta igualdade para calcular $F(10, 2)$.

25. Seja $f(n) = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x \, dx$ onde $n \geq 1$. Mostrar que
    (a) $f(n + 1) < f(n)$.
    (b) $f(n) + f(n - 2) = \dfrac{1}{n - 1}$ se $n > 2$.
    (c) $\dfrac{1}{n + 1} < 2f(n) < \dfrac{1}{n - 1}$ se $n > 2$.
26. Calcular $f(0)$, sabendo que $f(\pi) = 2$ e que $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \operatorname{sen} x \, dx = 5$.
27. Seja A o valor do integral $\int_0^\pi \frac{\cos x}{(x + 2)^2} \, dx$.

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{(x + 2)^2} \, dx.$$

Calcular o seguinte integral em função de A

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{x+1}\, dx .$$

As fórmulas dos Exercícios 28 a 33 foram extraídas duma tabela de integrais. Verificar cada uma delas, por qualquer método de integração

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\, dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} + C.$

29. $\displaystyle\int x^n\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{a(2n+3)}\left(x^n(ax+b)^{3/2} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx\right) + C \quad (n \neq -\tfrac{3}{2}).$

30. $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\, dx = \frac{2}{(2m+1)b}\left(x^m\sqrt{a+bx} - ma\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}\, dx\right) + C \quad (m \neq -\tfrac{1}{2}).$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} + C \quad (n \neq 1).$

32. $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx + C \quad (m \neq n).$

33. $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\, dx + C \quad (n \neq 1).$

34. (a) Determinar um polinómio $P(x)$ tal que $P'(x) - 3P(x) = 4 - 5x + 3x^2$. Provar que existe uma única solução.
(b) Se $Q(x)$ é um dado polinómio, provar que existe um e um só polinómio $P(x)$ tal que $P'(x) - 3P(x) = Q(x)$.

35. Uma sucessão de polinómios (chamados *polinómios de Bernoulli*) define-se, por indução, como segue:

$$P_0(x) = 1; \qquad P_n'(x) = nP_{n-1}(x) \qquad \text{e} \qquad \textstyle\int_0^1 P_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{se} \quad n \geq 1.$$

(a) Determinar fórmulas explícitas para $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_5(x)$.
(b) Demonstrar, por indução, que $P_n(x)$ é um polinómio em x de grau n, sendo o termo de maior grau x^n.
(c) Provar que $P_n(0) = P_n(1)$ se $n \geq 2$.
(d) Provar que $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ se $n \geq 1$.
(e) Provar que para $n \geq 2$ se tem

$$\sum_{r=1}^{k-1} r^n = \int_0^k P_n(x)\, dx = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

(f) Provar que $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ se $n \geq 1$.
(g) Provar que $P_{2n+1}(0) = 0$ e $P_{2n-1}(1/2) = 0$ se $n \geq 1$.

36. Supondo que $|f''(x)| \leq m$ para todo o x do intervalo $[0, a]$ e supondo ainda que f tem o seu maior valor num ponto interior deste intervalo, mostrar que $|f'(0)| + |f'(a)| \leq am$. Pode supôr-se que f'' é contínua em $[0, a]$.

6

FUNÇÃO LOGARITMO, FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

6.1. Introdução

Sempre que alguém fixa a sua atenção em tipos de relações quantitativas, está ou a analisar propriedades duma função conhecida, ou a tentar descobrir as propriedades duma função desconhecida. O conceito de função é tão amplo e tão geral que não supreende encontrar uma imensa variedade de funções ocorrendo na natureza. O que *é* surpreendente, é que um pequeno número de funções especiais interfiram numa grande variedade de fenómenos naturais, alguns completamente diferentes. Vamos estudar algumas dessas funções neste capítulo, primeiramente o logaritmo e a sua inversa (a função exponencial) e em segundo lugar as inversas das funções trigonométricas. Todo aquele que estude matemática, quer como uma disciplina abstrata, quer como instrumento de aplicação a outros domínios científicos, verificará ser indispensável um bom conhecimento destas funções e das suas propriedades.

O leitor provavelmente já teve oportunidade de trabalhar com logaritmos de base 10 no curso elementar de álgebra ou trigonometria. A definição habitualmente dada na álgebra elementar é: Se $x > 0$, o logaritmo de x na base 10, representado por $\log_{10}x$, é número real u tal que $10^u = x$. Se $x = 10^u$ e $y = 10^v$ sabe-se que $xy = 10^{u+v}$. Em termos de logaritmos tem-se

$$\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y\,. \tag{6.1}$$

É esta propriedade fundamental que torna os logaritmos particularmente uteis na aplicação a cálculos que contenham produtos. O número 10 é prático como base, porque os números reais escrevem-se habitualmente no sistema decimal e certos números importantes como 0,01, 0,1, 1, 10, 100, 1000,... admitem por logaritmos os inteiros $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$ respetivamente.

Não é contudo necessário que nos restrinjamos à base 10. Qualquer outra base positiva $b \neq 1$ deve igualmente servir. Assim

$$u = \log_b x \quad \text{significa} \quad x = b^u\,, \tag{6.2}$$

e a propriedade fundamental (6.1) vem

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y\,. \tag{6.3}$$

Examinando a definição (6.2) dum ponto de vista crítico, verificamos que ela sofre de várias falhas de lógica. Em primeiro lugar, para compreender (6.2) devemos saber o que significa b^u. Isso é fácil quando u é um número *inteiro* ou *racional* (o cociente de dois inteiros), mas não é uma questão trivial definir b^u quando u é *irracional*. Por exemplo, como definir $10^{\sqrt{2}}$? Ainda que se consiga obter uma definição satisfatória de b^u, existem outras dificuldades a vencer antes que possamos usar (6.2) como uma boa definição do logaritmo. Ter-se-á que demonstrar que para cada $x > 0$, *existe* um número u tal que $x = b^u$ e também a propriedade $b^u b^v = b^{u+v}$ deve verificar-se para quaisquer expoentes reais u e v para que se possa obter (6.3) de (6.2).

É possível vencer estas dificuldades e chegar a uma definição satisfatória do logaritmo por este método, mas o processo é longo e fastidioso. Felizmente, porém, o estudo dos logaritmos pode fazer-se duma maneira inteiramente diferente, a qual é muito mais simples e que além disso ilustra o poder e a elegância dos métodos do cálculo. A ideia consiste em introduzir em *primeiro lugar* o logaritmo e *depois* usar o logaritmo para definir b^u.

6.2. Motivação para a definição do logaritmo natural como um integral

O logaritmo é um exemplo de um conceito matemático que pode ser definido de várias maneiras diferentes. Quando um matemático tenta formular a definição de um conceito, tal como o de logaritmo, tem usualmente na ideia um certo número de propriedades que deseja que o conceito possua. Examinando estas propriedades é conduzido frequentemente a uma simples fórmula ou processo que pode servir como definição e da qual resultam aquelas propriedades desejadas como deduções lógicas. Vamos mostrar como este processo pode ser utilizado para chegar à definição de logaritmo que será apresentada na próxima seção.

Uma das propriedades que se deseja para os logaritmos é que o logaritmo dum produto seja igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores. Consideremos esta propriedade em si própria e vejamos onde ela nos pode conduzir. Se pensamos do logaritmo como uma função f, então deseja-se que esta função possua a propriedade expressa pela fórmula

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{6.4}$$

sempre que x, y e xy pertençam ao domínio de f.

Uma equação como (6.4), que exprime uma relação entre os valores duma função em dois ou mais pontos, diz-se uma *equação funcional*. Muitos problemas matemáticos podem reduzir-se à resolução duma equação funcional cuja solução é qualquer função que a verifique. Frequentemente uma equação deste tipo admite muitas soluções diferentes, sendo em geral muito difícil a determinação de todas elas. É mais fácil procurar só aquelas soluções que possuem alguma propriedade, tal como continuidade, ou derivabilidade. Para a maior parte dos problemas estas são as únicas soluções que geralmente interessam. Adoptemos este ponto de vista e determinemos todas as soluções deriváveis de (6.4). Porém será interessante analisar, em primeiro lugar, quais as concluções que poderemos obter de (6.4) sem qualquer outra restrição acerca de f.

Uma solução de (6.4) é a função identicamente nula em todo o eixo real Além disso, esta é a única solução de (6.4) que está definida para todos os números reais. Para provar isto, designemos por f qualquer função que verifique (6.4). Se 0 pertence ao domínio de f, então podemos fazer $y = 0$ em (6.4) para se obter $f(0) = f(x) + f(0)$, e isto implica que $f(x) = 0$ para todo o x no domínio de f. Por outras palavras, se 0 pertence ao domínio de f, então f deve ser idênticamente nula. Deste modo uma solução de (6.4) que não seja idênticamente nula não pode estar definida em 0.

Se f é uma solução de (6.4) e se o domínio de f contém o ponto 1, podemos fazer $x = y = 1$ em (6.4) para obtermos $f(1) = 2f(1)$ o que implica

$$f(1) = 0 .$$

Se 1 e -1 pertencem ao domínio de f podemos tomar $x = -1$ e $y = -1$ para concluírmos que $f(1) = 2f(-1)$ e portanto $f(-1) = 0$. Se agora $x, -x$, 1 e -1 pertencem ao domínio de f, podemos fazer $y = -1$ em (6.4) para se deduzir $f(-x) = f(-1) + f(x)$ e visto que $f(-1) = 0$ encontramos

$$f(-x) = f(x) .$$

Por outras palavras, qualquer solução de (6.4) é necessariamente uma função *par*.

Suponhamos, ainda, que se admite que f tem derivada $f'(x)$ para cada $x \neq 0$. Se conservamos y fixo em (6.4) e derivamos relativamente a x (pela regra da derivada da função composta), encontramos

$$yf'(xy) = f'(x) .$$

Quando $x = 1$, concluímos da equação anterior que $yf'(y) = f'(1)$ e daqui resulta

$$f'(y) = \frac{f'(1)}{y} \quad \text{para cada} \quad y \neq 0 .$$

Por esta equação vemos que a derivada f' é monótona e por conseguinte integrável em cada intervalo fechado não contendo a origem. Além disso, f' é contínua em cada um desses intervalos, e poder-se-á aplicar o segundo teorema fundamental do cálculo para escrever

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\, dt = f'(1) \int_c^x \frac{1}{t}\, dt .$$

Se $x > 0$ esta equação é verdadeira para qualquer positivo c, e se $x < 0$ ela é verdadeira para qualquer negativo c. Uma vez que $f(1) = 0$, a escolha de c dá-nos

$$f(x) = f'(1)\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{se} \qquad x > 0\,.$$

Se x é negativa então $-x$ é positiva e, uma vez que $f(x) = f(-x)$, encontramos

$$f(x) = f'(1)\int_1^{-x} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{se} \qquad x < 0\,.$$

Estas duas fórmulas para $f(x)$ podem reunir-se numa só, válida tanto para x positivo como para x negativo, a saber,

$$f(x) = f'(1)\int_1^{|x|} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{se} \quad x \neq 0\,. \tag{6.5}$$

Demonstrámos portanto que se existir uma solução de (6.4) que admita derivada em cada ponto $x \neq 0$, esta solução será necessariamente definida pela fórmula integral (6.5). Se $f'(1) = 0$, então (6.5) implica que $f(x) = 0$ para todo $x \neq 0$, e esta solução coincide com a solução identicamente nula. Por tanto, se f não e identicamente nula, devemos ter $f'(1) \neq$ $\neq 0$, hipótese em que se podem dividir ambos os membros de (6.5) por $f'(1)$, obtendo-se

$$g(x) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{se} \quad x \neq 0\,, \tag{6.6}$$

onde $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(1)}$. A função g é também uma solução de (6.4), pois que cf é solução sempre que f o seja. Isto prova que (6.4) admite uma solução que não é identicamente nula e se esta solução admite derivada em todo o eixo real, exceto na origem, então a função g definida por (6.6) é também uma solução e *todas* as soluções se podem obter desta por multiplicação de g por uma constante adequada.

Deve ser posto em destaque que este raciocínio não prova que a função g em (6.6) *seja* uma solução, porque deduzimos (6.6) na hipótese de que existia, pelo menos, uma solução que não era identicamente nula. A fórmula (6.6) sugere um caminho para construir uma tal solução, para o que basta muito simplesmente operar em sentido inverso, quer dizer, utilizamos o integral em (6.6) para definir uma função g e depois verificamos diretamente que esta função verifica (6.4). Isto sugere-nos que definamos o logaritmo pela função g definida por (6.6). Se procedermos deste modo, esta função terá a propriedade de $g(-x) = g(x)$ ou, por outras palavras, números diferentes teriam o mesmo logaritmo. Para os pontos de vista que nos interessarão mais tarde, é preferível definir o logaritmo de maneira que dois números distintos não possam ter o mesmo logaritmo. Esta propriedade pode ser conseguida definindo o logaritmo unicamente para números positivos. Por conseguinte tomaremos a seguinte definição:

6.3. A definição de logaritmo. Propriedades fundamentais

DEFINIÇÃO. *Se x é um número real positivo, define-se logaritmo natural de x, designado provisoriamente por $L(x)$, pelo integral*

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,. \tag{6.7}$$

Quando $x > 1$, $L(x)$ pode ser interpretada geometricamente como a área da parte sombreada da fig. 6.1.

TEOREMA 6.1. *A função logaritmo possui as seguintes propriedades:*

(a) $L(1) = 0$.

(b) $L'(x) = \dfrac{1}{x}$ para cada $x > 0$.

(c) $L(ab) = L(a) + L(b)$ para cada $a > 0, b > 0$.

Demonstração. A alínea (a) resulta imediatamente da definição. Para provar (b), chamamos a atenção para o fato de que L é um integral indefinido duma função contínua e aplicamos o primeiro teorema fundamental do cálculo. A propriedade (c) resulta da propriedade aditiva do integral. Escrevemos

$$L(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = L(a) + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}\,.$$

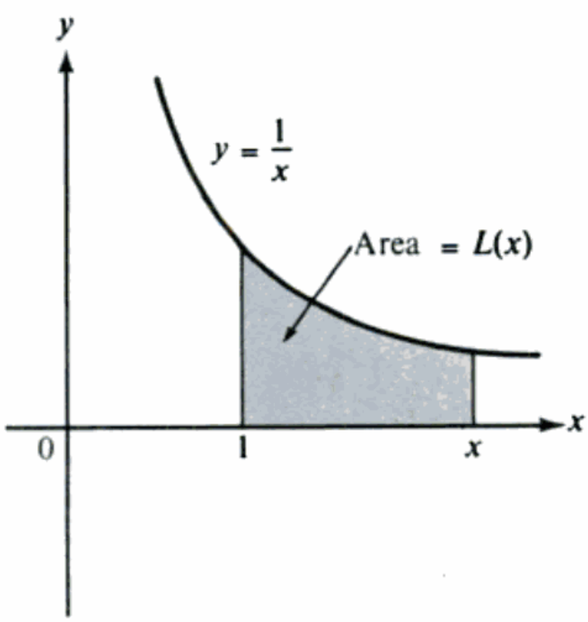


Fig. 6.1. Interpretação do logaritmo como uma área.

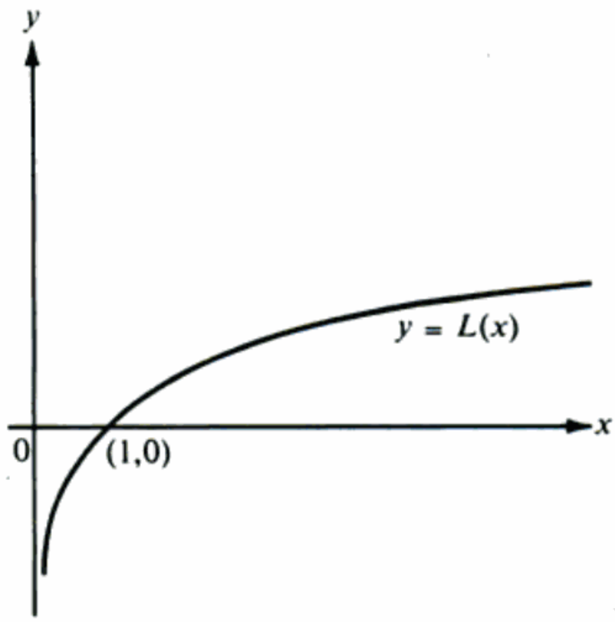


Fig. 6.2. O gráfico do logaritmo natural.

Se no último integral fizermos a substituição $u = t/a$, $du = dt/a$ verifica-se que o integral se reduz a $L(b)$, ficando pois demonstrada (c).

6.4. O gráfico do logaritmo natural

O gráfico da função logaritmo tem a forma geral apresentada na fig. 6.2. Muitas propriedades desta curva podem obter-se sem cálculos excessivos, bastando pelo contrário analisar as propriedades do Teorema 6.1. Por exemplo, de (b) vê-se que L admite derivada positiva para todo o $x > 0$, pelo que é estritamente crescente em todo o intervalo em que se define. Visto que $L(1) = 0$, o gráfico está situado acima do eixo OX se $x > 1$ e situado abaixo daquele eixo se $0 < x < 1$. A curva tem declive 1 quando $x = 1$. Para $x > 1$, o declive decresce gradualmente até atingir o valor zero quando x cresce indefinidamente. Para pequenos valores de x, o declive é grande e, além disso, cresce indefinidamente quando x tende para zero. A segunda derivada é $L''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ a qual é negativa para todo o x e portanto L é uma função côncava.

6.5. Consequências da equação funcional $L(ab) = L(a) + L(b)$

Visto o gráfico do logaritmo crescer até um limite quando x aumenta indefinidamente, pode pensar-se que os valores de L admitem um limite superior. Porém, a função é ilimitada superiormente, isto é, para cada positivo M (tão grande quanto se queira) existem valores de x tais que

$$L(x) > M \, . \tag{6.8}$$

Podemos prová-lo pela equação funcional. Quando $a = b$, obtemos $L(a^2) = 2L(a)$. Usando a equação funcional ainda mais uma vez com $b = a^2$, obtemos $L(a^3) = 3L(a)$. Por indução encontramos a fórmula geral

$$L(a^n) = nL(a)$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Quando $a = 2$, obtemos $L(2^n) = nL(2)$, donde se tira que

$$L(2^n) > M \quad \text{quando} \quad n > \frac{M}{L(2)} \, . \tag{6.9}$$

Isto prova a afirmação (6.8). Tomando $b = 1/a$ na equação funcional, encontramos $L(1/a) = -L(a)$. Em particular, quando $a = 2^n$, onde n é escolhido como em (6.9), tem-se

$$L\left(\frac{1}{2^n}\right) = -L(2^n) < -M \, ,$$

a qual mostra que também não existe limite inferior para os valores da função.

Finalmente observamos que o gráfico interseta cada reta paralela a OX uma única vez, isto é, dado um número real *arbitrário* b (positivo, negativo, ou nulo), existe *um e um só* $a > 0$ tal que

$$L(a) = b\,. \tag{6.10}$$

Para provar esta afirmação podemos raciocinar como segue: Se $b > 0$, escolhemos qualquer inteiro $n > b/L(2)$. Então $L(2^n) > b$, devido a (6.9). Examinemos agora a função L no intervalo fechado $[1, 2^n]$. O seu valor no extremo esquerdo é $L(1) = 0$, e no extremo direito é $L(2^n)$. Visto que $0 < b < L(2^n)$, o teorema do valor intermédio para funções contínuas (Teorema 3.8 da Seção 3.10) garante a existência de pelo menos um a tal que $L(a) = b$ e não pode existir outro valor a' tal que $L(a') = b$ porque tal significaria que $L(a) = L(a')$ para $a \neq a'$, o que vai contra a propriedade do logaritmo ser estritamente crescente. Portanto a proposição (6.10) está demonstrada para $b > 0$. A demonstração para valores negativos de b é consequência da anterior se usarmos a equação $L(1/a) = -L(a)$. Demonstramos assim o seguinte:

TEOREMA 6.2. *Para cada número real b existe exatamente um número real positivo a cujo logaritmo, L(a), é igual a b.*

Em particular, existe um só numero cujo logaritmo natural é igual a 1. Este número, tal como π, aparece tão repetidas vezes em tantas fórmulas matemáticas que era inevitável adoptar para ele um simbolo especial. Leonard Euler (1707-1783) parece ter sido o primeiro a reconhecer a importância deste número e modestamente designou-o por e, notação que se tornou usual.

DEFINIÇÃO. *Representa-se por* e *o número para o qual*

$$L(e) = 1\,. \tag{6.11}$$

No Capítulo 7 obteremos fórmulas que permitem calcular a expressão decimal de e, com qualquer grau de precisão desejado. O seu valor, com dez casas decimais, é 2,7182818285. No Capítulo 7 provaremos que e é um número irracional.

Os logaritmos naturais chamam-se também *logaritmos neperianos*, em homenagem ao seu inventor. J. Neper (1550-1617). É prática comum a utilização dos símbolos $\ln x$ ou $\log x$, em vez de $L(x)$, para representar o logaritmo de x.

6.6. Logaritmos referidos a qualquer base positiva b ≠ 1

Na seção 6.2 concluímos que a função mais geral f que é derivável no semi-eixo real positivo e que verifica a equação funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$ é da forma

$$f(x) = c \log x\,, \tag{6.12}$$

com c uma constante. Para cada c, chamaremos $f(x)$ o logaritmo de x associado com c conquanto, evidentemente, o seu valor não seja necessariamente o mesmo que o logaritmo natural de x. Quando $c = 0$, f é indenticamente nula, caso desprovido de interesse. Se $c \neq 0$, podemos indicar de outro modo a dependência de f em c introduzindo o conceito de *base* de logaritmos.

De (6.12) concluímos que, quando $c \neq 0$, existe um único número real $b > 0$ tal que $f(b) = 1$. Este valor de b está relacionado com c pela equação $c \log b = 1$; como $b \neq 1$, $c = 1/\log b$ e (6.12) escreve-se

$$f(x) = \frac{\log x}{\log b}.$$

Para esta escolha de c dizemos que $f(x)$ é o *logaritmo de x na base b* e escreve-se $\log_b x$ em vez de $f(x)$.

DEFINIÇÃO. *Se $b > 0$, $b \neq 1$ e se $x > 0$, o logaritmo de x na base b é o número*

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b},$$

em que os logaritmos do segundo membro são logaritmos naturais.

É evidente que $\log_b b = 1$ e se $b = e$, $\log_e x = \log x$, pelo que os logaritmos naturais são os que têm base e. Visto que os logaritmos de base e são tão frequentemente utilizados na Matemática, a palavra logaritmo significa quase sempre logaritmo *natural*. Mais adiante, na secção 6.15, definiremos b^u de tal maneira que a equação $b^u = x$ significará exactamente o mesmo que $u = \log_b x$.

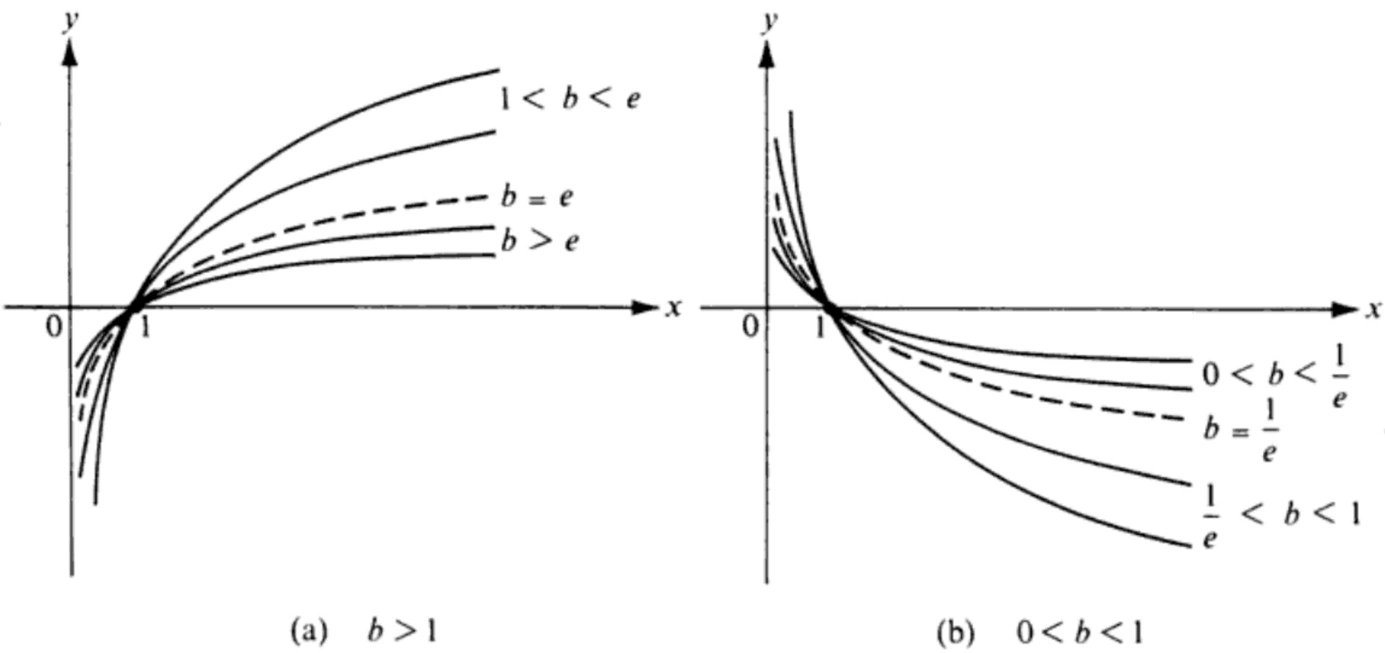


Fig. 6.3. Gráfico de $y = \log_b x$ para diferentes valores de b.

Uma vez que os logaritmos de base b se obtêm dos logaritmos naturais por multiplicação pelo fator constante $1/\log b$, o gráfico de $y = \log_b x$ pode ser obtido do gráfico de $y = \log x$ multiplicando todas as ordenadas pelo mesmo fator. Quando $b > 1$, este fator é positivo e, quando $b < 1$, é negativo. Exemplos em que $b > 1$ estão representados na fig. 6.3(a). Quando $b < 1$, então $1/b > 1$ e $\log b = -\log(1/b)$, de modo que o gráfico de $y = \log_b x$ pode ser obtido do gráfico de $y = \log_{1/b} x$ por simetria relativamente a OX; na fig. 6.3(b) apresentam-se alguns exemplos.

6.7. Fórmulas de derivação e integração contendo logaritmos

Visto que a derivada do logaritmo é dada pela fórmula $D \log x = 1/x$ para $x > 0$, resulta a seguinte fórmula de integração

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x + C .$$

Mais geralmente se $u = f(x)$, com f admitindo derivada contínua, temos

$$\int \frac{du}{u} = \log u + C \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x) + C . \tag{6.13}$$

Deve ter-se presente, ao utilizar-se (6.13), que o logaritmo não está definido para números negativos. Deste modo as fórmulas de integração em (6.13) são válidas somente se u, ou $f(x)$, é positiva.

Afortunadamente é fácil generalizar o campo de validade destas fórmulas de modo a incluirem funções negativas ou positivas (mas *não nulas*). Introduz-se simplesmente uma nova função L_0 definida para todos os reais $x \neq 0$ pela equação

$$L_0(x) = \log |x| = \int_1^{|x|} \frac{1}{t}\, dt , \tag{6.14}$$

uma definição sugerida pela equação (6.6) da seção 6.2. O gráfico de L_0 é simétrico relativamente a OY, como se mostra na fig. 6.4. A parte do gráfico à direita de OY é precisamente a mesma que a curva logaritmica da fig. 6.2.

Uma vez que $\log |xy| = \log (|x|\,|y|) = \log |x| + \log |y|$, a função L_0 também satisfaz à equação funcional fundamental (6.4); quer dizer que se tem

$$L_0(xy) = L_0(x) + L_0(y)$$

para quaisquer reais x e y não nulos. Para $x > 0$, tem-se $L_0'(x) = \dfrac{1}{x}$, já que $L_0(x)$ é, neste caso, a mesma função que $\log x$. A fórmula da derivada também é verdadeira para $x < 0$ porque, neste caso, $L_0(x) = L(-x)$ e por isso $L_0'(x) = -L'(-x) = -1/(-x) = \dfrac{1}{x}$. Temos pois

$$L_0'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{para todo o real } x \neq 0. \tag{6.15}$$

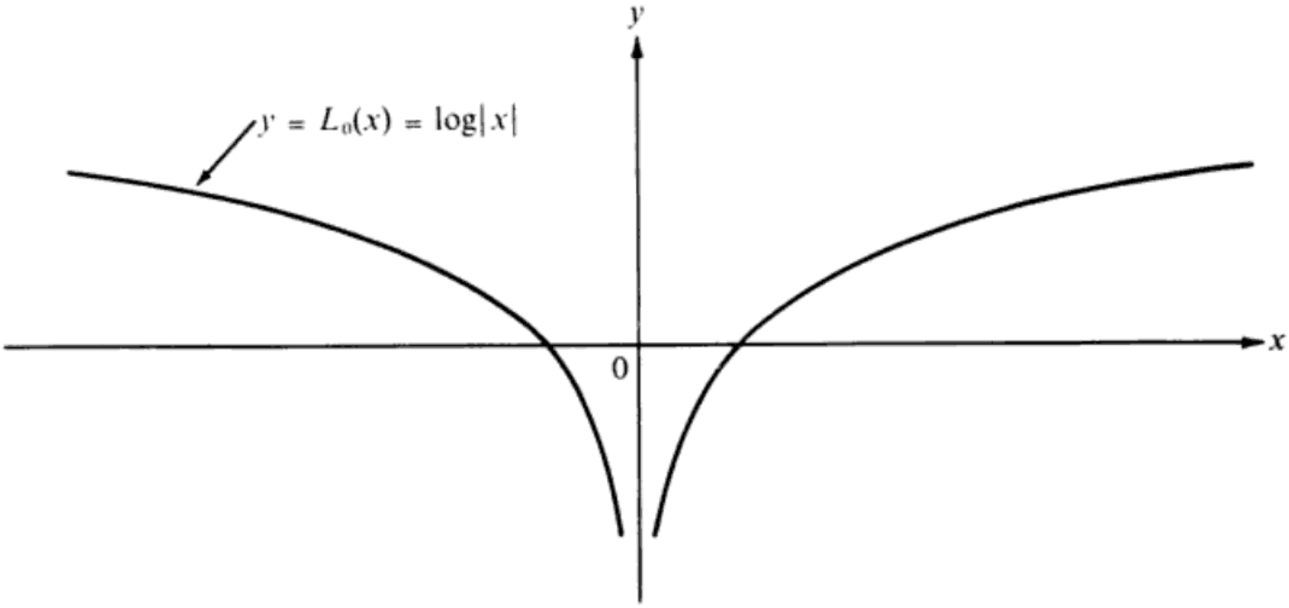


Fig. 6.4. O gráfico da função L_0.

Consequentemente, se usamos L_0 em vez de L nas precedentes fórmulas de integração, podemos estender o seu alcance para incluir funções que assumem tanto valores negativos como valores positivos. Por exemplo, (6.13) pode generalizar-se como segue:

$$\int \frac{du}{u} = \log|u| + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C\,. \tag{6.16}$$

Evidentemente que, quando usamos (6.16) juntamente com o segundo teorema fundamental do cálculo para calcular um integral definido, devem evitar-se intervalos que incluam pontos em que u ou $f(x)$ possam anular-se.

EXEMPLO 1. Integrar $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Resolução. O integral é da forma $-\int \frac{du}{u}$ onde $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Portanto podemos escrever

$$\int tg\ x\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C\,,$$

fórmula que é válida em qualquer intervalo no qual $\cos x \neq 0$.

Os dois exemplos que se seguem são aplicações do método de integração por partes.

EXEMPLO 2. Integrar $\int \log x\,dx$.

Resolução. Seja $u = \log x$, $dv = dx$. Então $du = dx/x$, $v = x$ e obtém-se

$$\int \log x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x \log x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \log x - x + C\,.$$

EXEMPLO 3. Integrar $\int \operatorname{sen}(\log x)dx$.

Resolução. Seja $u = \operatorname{sen}(\log x)$, $v = x$. Então $du = \cos(\log x)(1/x)dx$ e obtém-se

$$\int \operatorname{sen}(\log x)\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x \operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)\, dx\,.$$

No último integral recorremos à integração por partes, uma vez mais, para obtermos

$$\int \cos(\log x)\, dx = x \cos(\log x) + \int \operatorname{sen}(\log x)\, dx\,.$$

Substituindo na igualdade anterior, encontramos

$$\int \operatorname{sen}(\log x)\, dx = \tfrac{1}{2}x \operatorname{sen}(\log x) - \tfrac{1}{2}x \cos(\log x) + C\,,$$

$$\int \cos(\log x)\, dx = \tfrac{1}{2}x \operatorname{sen}(\log x) + \tfrac{1}{2}x \cos(\log x) + C\,.$$

6.8. Derivação logarítmica

Exporemos a seguir uma técnica conhecida por *derivação logarítmica,* a qual é muitas vezes um poderoso auxiliar no cálculo de derivadas. O método foi desenvolvido em 1697 por Johann Bernoulli (1667-1748), e o seu fundamento é uma simples aplicação de regra de derivação da função composta.

Suponhamos que formamos a composição de L_0 com qualquer função derivável f; seja

$$g(x) = L_0[f(x)] = \log |f(x)|$$

para os valores de x tais que $f(x) \neq 0$. A regra da derivação da função composta, usada em conjunção com (6.15), permite obter a fórmula

$$g'(x) = L_0'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,. \tag{6.17}$$

Se a derivada $g'(x)$ puder ser calculada de outro modo, então podemos utilizar (6.17) para obter $f'(x)$, por simples multiplicação de $g'(x)$ por $f(x)$. O processo é útil na prática porque em muitos casos $g'(x)$ é mais fácil de calcular do que $f'(x)$. Em particular, tal é verdadeiro quando f é um produto ou quociente de várias funções simples. O exemplo seguinte é elucidativo.

EXEMPLO. Calcular $f'(x)$ se $f(x) = x^2 \cos x\,(1 + x^4)^{-7}$.

Resolução. Tomamos o logaritmo do valor absoluto de $f(x)$ e derivamos. Seja então

$$g(x) = \log|f(x)| = \log x^2 + \log|\cos x| + \log(1 + x^4)^{-7}$$
$$= 2\log|x| + \log|\cos x| - 7\log(1 + x^4).$$

Derivando vem

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{28x^3}{1 + x^4}.$$

Multiplicando por $f(x)$, obtemos

$$f'(x) = \frac{2x\cos x}{(1 + x^4)^7} - \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^7} - \frac{28x^5 \cos x}{(1 + x^4)^8}$$

6.9. Exercícios

1. (a) Determinar todos os valores de c tais que $\log x = c + \int_e^x t^{-1}\, dt$ para todo $x > 0$.
   (b) Seja $f(x) = \log[(1 + x)/(1 - x)]$ se $x > 0$. Se a e b são números dados, com $ab \neq -1$, determinar todos os valores de x tais que $f(x) = f(a) + f(b)$.
2. Para cada alínea, determinar um número real x verificando a equação dada
   (a) $\log(1 + x) = \log(1 - x)$
   (b) $\log(1 + x) = 1 + \log(1 - x)$
   (c) $2\log x = x\log 2,\ x \neq 2$
   (d) $\log(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}) = 1$.
3. Seja $f(x) = (\log x)/x$ se $x > 0$. Descriminar os intervalos em que f é crescente, decrescente, convexa e côncava. Traçar o gráfico de f.

Nos Exercícios 4 a 15 calcular a derivada $f'(x)$. Em cada caso a função f supõese estar definida para aqueles valores reais de x para os quais a fórmula $f(x)$ tem significado.

4. $f(x) = \log(1 + x^2)$.
5. $f(x) = \log\sqrt{1 + x^2}$.
6. $f(x) = \log\sqrt{4 - x^2}$.
7. $f(x) = \log(\log x)$.
8. $f(x) = \log(x^2 \log x)$.
9. $f(x) = \frac{1}{4}\log\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
10. $f(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^n$
11. $f(x) = \sqrt{x + 1} - \log(1 + \sqrt{x + 1})$.
12. $f(x) = x\log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\log\dfrac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$.
14. $f(x) = x[\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)]$.
15. $f(x) = \log_x e$.

Nos Exercícios 16 a 26, calcular os integrais.

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 3x}$.
17. $\int \log^2 x\, dx$.
18. $\int x\log x\, dx$.
19. $\int x\log^2 x\, dx$.
20. $\displaystyle\int_0^{e^3-1} \frac{dt}{1 + t}$.
21. $\int \operatorname{cotg} x\, dx$.
22. $\int x^n \log(ax)\, dx$.
23. $\int x^2 \log^2 x\, dx$.

24. $\int \frac{dx}{x \log x}$.

25. $\int_0^{1-e^{-2}} \frac{\log(1-t)}{1-t}\, dt$.

26. $\int \frac{\log|x|}{x\sqrt{1+\log|x|}}\, dx$.

27. Deduzir a fórmula

$$\int x^m \log^n x\, dx = \frac{x^{m+1}\log^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x\, dx$$

e usá-la para integrar $\int x^3 \log^3 x\, dx$.

28. a) Se $x > 0$, seja $f(x) = x - 1 - \log x$, $g(x) = \log x - 1 + 1/x$. Examinar os sinais de f' e g' e demonstrar que as desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

são válidas para $x > 0$, $x \neq 1$. Quando $x = 1$, transformam-se em igualdades.
(b) Traçar os gráficos das funções A e B definidas por $A(x) = x - 1$ e $B(x) = 1 - 1/x$ para $x > 0$ e interpretar geometricamente as desigualdades da alínea a).

29. Provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

pelos seguintes métodos: (a) usando a definição de derivada $L'(1)$; b) usando o resultado do Exercício 28.

30. Se $a > 0$, usar a equação funcional para o logaritmo para provar que $\log(a^r) = r \log a$ para todo o racional r.

31. Seja $P = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ uma partição qualquer do intervalo $[1, x]$, com $x > 1$.

(a) Integrando funções escalonadas que são constantes nos subintervalos abertos de P, deduzir as seguintes desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k}\right) < \log x < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}}\right).$$

(b) Interpretar as desigualdades da alínea (a) geometricamente em termos de áreas.
(c) Refinar a partição para mostrar que para cada inteiro $n > 1$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

32. Demonstrar as seguintes fórmulas de mudança de base de logaritmos para outra

(a) $\log_b x = \log_b a \log_a x$; (b) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

33. Dado que $\log_e 10 = 2{,}302585$, aproximado à sexta casa decimal, calcular $\log_{10} e$ servindo-se duma das fórmulas do Exercício 32. Quantas casas decimais exatas se podem assegurar para o resultado? *Nota.* Uma tábua calculada com seis decimais dá $\log_{10} e = 0{,}434294$.
34. Uma função f, contínua no semi-eixo positivo OX, tem a propriedade de que quaisquer que sejam $x > 0$ e $y > 0$, o integral

$$\int_x^{xy} f(t)\, dt$$

é independente de x (e por isso depende só de y). Se $f(2) = 2$, calcular o valor do integral $A(x) = \int_1^x f(t)dt$ para todo o $x > 0$.
35. Uma função f, contínua no semi-eixo real positivo, tem a propriedade de

$$\int_1^{xy} f(t)\, dt = y\int_1^x f(t)\, dt + x\int_1^y f(t)\, dt$$

para todo $x > 0$ e $y > 0$. Se $f(1) = 3$, calcular $f(x)$ para todo $x > 0$.
36. A base dum sólido é o conjunto de ordenadas duma função f contínua no intervalo $[1, a]$. Todas as seções perpendiculares ao intervalo $[1, a]$ são quadradas. O volume do sólido é $\dfrac{1}{3}a^3 \log^2 a - \dfrac{2}{9}a^3 \log a + \dfrac{2}{27}a^3 - \dfrac{2}{27}$ para todo o $a \geq 1$. Calcular $f(a)$.

6.10. Aproximação polinomial para o logaritmo

Nesta seção vamos demonstrar que a função logaritmo pode ser aproximada por certos polinómios, os quais podem ser utilizados para o cálculo de logaritmos com qualquer grau de precisão desejada.

No sentido da simplificação das fórmulas resultantes substituímos, em primeiro lugar, x por $1 - x$ no integral definindo o logaritmo para obtermos

$$\log(1 - x) = \int_1^{1-x} \frac{dt}{t},$$

a qual é válida se $x < 1$. A mudança de variável $t = 1 - u$ transforma esta igualdade em

$$-\log(1 - x) = \int_0^x \frac{du}{1 - u}, \quad \text{válida para } x < 1.$$

Aproximamos agora o integrando $1/(1-u)$ por polinómios, os quais serão depois integrados para obtermos as correspondentes aproximações para o logaritmo. Para ilustrarmos o método começamos com a aproximação linear simples para a função integranda.

A partir da identidade $1 - u^2 = (1 - u)(1 + u)$ obtemos a fórmula

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + \frac{u^2}{1-u}, \tag{6.18}$$

válida para qualquer real $u \neq 1$. Integrando de 0 a x, com $x < 1$, obtemos

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{u^2}{1-u}\,du\,. \tag{6.19}$$

O gráfico do polinómio do 2.º grau $P(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ que aparece no segundo membro de (6.19) está representado na fig. 6.5, juntamente com a curva $y = -\log(1-x)$. Repare-se que para x próximo da origem o polinómio $P(x)$ é uma boa aproximação de $-\log(1-x)$. No teorema que se segue vamos utilizar um polinómio de grau $n-1$ para aproximar $1/(1-u)$ e deste modo obter um polinómio de grau n que aproxima $\log(1-x)$.

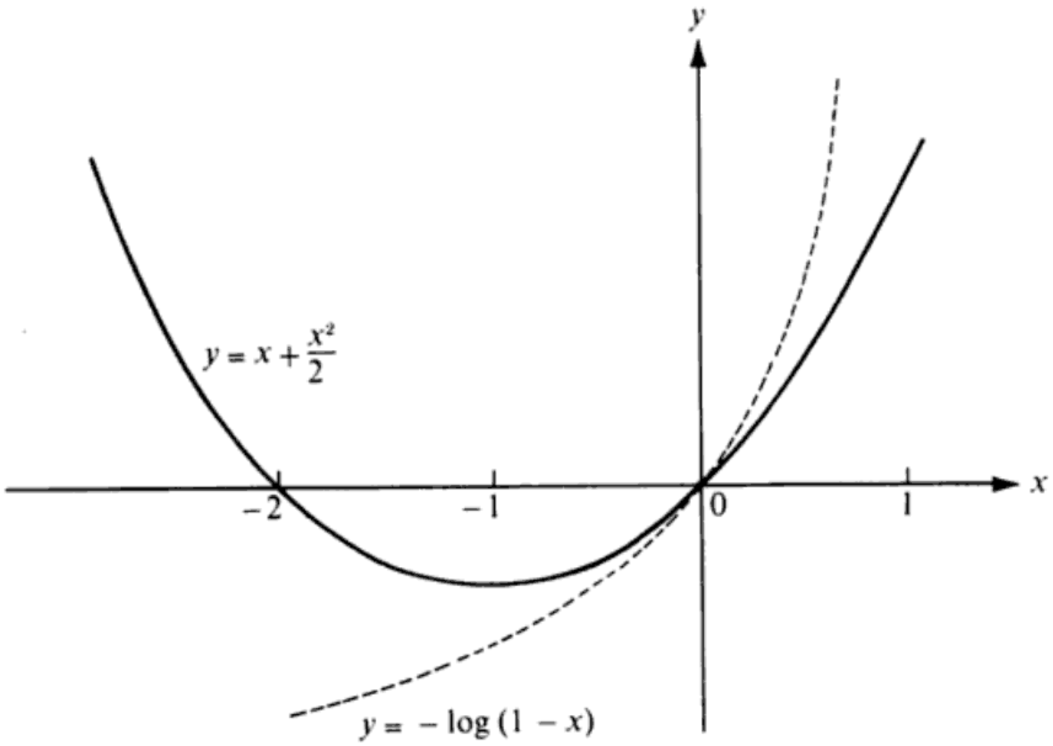


Fig. 6.5. Um polinómio quadrático de aproximação da curva $y = -\log(1-x)$

TEOREMA 6.3. *Se P_n é um polinómio de grau n dado por*

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

então, para todo $x < 1$ e todo $n \geq 1$, tem-se

$$-\log(1-x) = P_n(x) + \int_0^x \frac{u^n}{1-u}\,du\,. \tag{6.20}$$

Demonstração. A partir da identidade

$$1 - u^n = (1-u)(1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}),$$

obtemos a fórmula

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1-u}\,,$$

válida para $u \neq 1$. Integrando de 0 a x, com $x < 1$, obtemos (6.20).

Podemos escrever de novo (6.20) na forma

$$-\log(1-x) = P_n(x) + E_n(x), \tag{6.21}$$

em que $E_n(x)$ é o integral

$$E_n(x) = \int_0^x \frac{u^n}{1-u}\,du\,.$$

$E_n(x)$ representa o erro cometido quando aproximamos $-\log(1-x)$ pelo polinómio $P_n(x)$. Para utilizarmos (6.21) nos cálculos, necessitamos de saber se o erro é positivo ou negativo e qual a sua ordem de grandeza. O teorema que se segue diz-nos que para valores de x pequenos e positivos o erro $E_n(x)$ é positivo, mas para valores de x negativos o erro tem o mesmo sinal que $(-1)^{n+1}$, em que n é o grau do polinómio de aproximação. O teorema dá ainda limites superior e inferior para o erro.

TEOREMA 6.4. *Se $0 < x < 1$, verificam-se as desigualdades*

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq E_n(x) \leq \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,. \tag{6.22}$$

Se $x < 0$, o erro $E_n(x)$ tem o mesmo sinal que $(-1)^{n+1}$ e tem-se

$$0 < (-1)^{n+1}E_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,. \tag{6.23}$$

Demonstração. Suponhamos $0 < x < 1$. No integral que define $E_n(x)$ temos $0 \leq u \leq x$, pelo que $1 - x \leq 1 - u \leq 1$ e deste modo a função integranda satisfaz às desigualdades

$$u^n \leq \frac{u^n}{1-u} \leq \frac{u^n}{1-x}.$$

Integrando estas desigualdades, obtemos (6.22).

Para se demonstrar (6.23), supomos $x < 0$ e fazemos $t = -x = |x|$. Então $t > 0$ e tem-se

$$E_n(x) = E_n(-t) = \int_0^{-t} \frac{u^n}{1-u}\,du = -\int_0^t \frac{(-v)^n}{1+v}\,dv = (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{v^n}{1+v}\,dv\,,$$

o que prova ter $E_n(x)$ o mesmo sinal que $(-1)^{n+1}$. Além disso, temos

$$(-1)^{n+1}E_n(x) = \int_0^t \frac{v^n}{1+v}\,dv \leq \int_0^t v^n\,dv = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,,$$

a qual completa a demonstração de (6.23).

O teorema seguinte dá-nos uma fórmula que está particularmente bem adaptada ao cálculo de logaritmos.

TEOREMA 6.5. *Se $0 < x < 1$ e se $m \geq 1$, tem-se*

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right) + R_m(x)\,,$$

onde o erro, $R_m(x)$, satisfaz às desigualdades

$$\frac{x^{2m+1}}{2m+1} < R_m(x) \leq \frac{2-x}{1-x}\,\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\,. \tag{6.24}$$

Demonstração. A igualdade (6.21) é válida para qualquer $x < 1$. Se substituímos x por $-x$ em (6.21), tomando $x > -1$, obtemos a fórmula

$$-\log(1+x) = P_n(-x) + E_n(-x)\,. \tag{6.25}$$

Se $-1 < x < 1$, são válidas ambas as fórmulas (6.21) e (6.25). Subtraindo (6.25) de (6.21) encontramos

$$\log\frac{1+x}{1-x} = P_n(x) - P_n(-x) + E_n(x) - E_n(-x)\,. \tag{6.26}$$

Na diferença $P_n(x) - P_n(-x)$, as potências pares de x anulam-se e as potências ímpares são multiplicadas por dois. Portanto, se n é par, $n = 2m$, temos

$$P_{2m}(x) - P_{2m}(-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right),$$

e a igualdade (6.26) escreve-se

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right) + R_m(x),$$

onde $R_m(x) = E_{2m}(x) - E_{2m}(-x)$. Esta fórmula é válida se x pertence ao intervalo aberto $-1 < x < 1$. Restrinjamos agora x ao intervalo $0 < x < 1$. Então a estimativa fornecia pelo Teorema 6.4 dá-nos

$$\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \le E_{2m}(x) \le \frac{1}{1-x}\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \qquad \text{e} \qquad 0 < -E_{2m}(-x) \le \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Somando estas desigualdades, obtemos (6.24) visto que $1 + \frac{1}{1-x} = \frac{2-x}{1-x}$.

EXEMPLO. Fazendo $m = 2$ e $x = \frac{1}{3}$, vem $(1+x)/(1-x) = 2$ e

$$\log 2 = 2(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{81}) + R_2(\tfrac{1}{3}), \qquad \text{onde} \qquad \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 < R_2(\tfrac{1}{3}) \le \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^5 = \tfrac{1}{486}.$$

Daqui resultam as desigualdades $0{,}6921 < \log 2 < 0{,}6935$, por meio de cálculos simples.

6.11. Exercícios

1. Aplicar o Teorema 6.5 com $x = \frac{1}{3}$ e $m = 5$ para calcular valores aproximados do log 2. Conservar nove casas decimais nos cálculos e obter as desigualdades $0{,}6931460 < \log 2 < 0{,}6931476$.
2. Se $x = \frac{1}{5}$, então $(1+x)/(1-x) = \frac{3}{2}$. Deste modo o teorema 6.5 permite calcular log 3 em função de log 2. Tomar $x = \frac{1}{5}$ e $m = 5$ no Teorema 6.5 e usar o resultado do Exercício 1 para obter as desigualdades $1{,}098611 < \log 3 < 1{,}098617$.
Nota: Uma vez que $\log 2 < \log e < \log 3$, resulta que $2 < e < 3$.
3. Aplicar o Teorema 6.5 com $x = \frac{1}{9}$ para calcular log 5 em função de log 2. Escolher o grau do polinómio de aproximação suficientemente elevado para obter as desigualdades $1{,}609435 < \log 5 < 1{,}609438$.
4. Aplicar o Teorema 6.5, com $x = \frac{1}{6}$, para calcular log 7 em função de log 5. Escolher o

grau do polinómio de aproximação suficientemente elevado para obter as desigualdades $1{,}945907 < \log 7 < 1{,}945911$.

5. Usar os resultados dos Exercícios 1 a 4 para calcular uma pequena tábua contendo $\log n$ para $n = 2, 3, ..., 10$. Calcular tantas casas decimais *corretas* quantas as que sejam possíveis a partir das desigualdades dos Exercícios 1 a 4.

6.12. A função exponencial

O Teorema 6.2 mostra que para todo o real x existe um e um só y tal que $L(y) = x$. Portanto podemos aplicar o processo de inversão para definir y como função de x. A função inversa obtida é chamada a *função exponencial*, ou *o antilogaritmo* e representa-se por E.

DEFINIÇÃO. *Para todo o real x, define-se $E(x)$ como o número y cujo logaritmo é x, isto é, $y = E(x)$ significa que $L(y) = x$.*

O domínio de E é todo o eixo real; o seu contradomínio é o conjunto dos números reais e positivos. O gráfico de E, representado na fig. 6.6, obtém-se do gráfico do logaritmo por simetria em relação à reta $y = x$. Uma vez que L e E são inversas uma da outra, tem-se

$$L[E(x)] = x \quad \text{para todo } x \qquad \text{e} \qquad E[L(y)] = y \quad \text{para todo } y > 0.$$

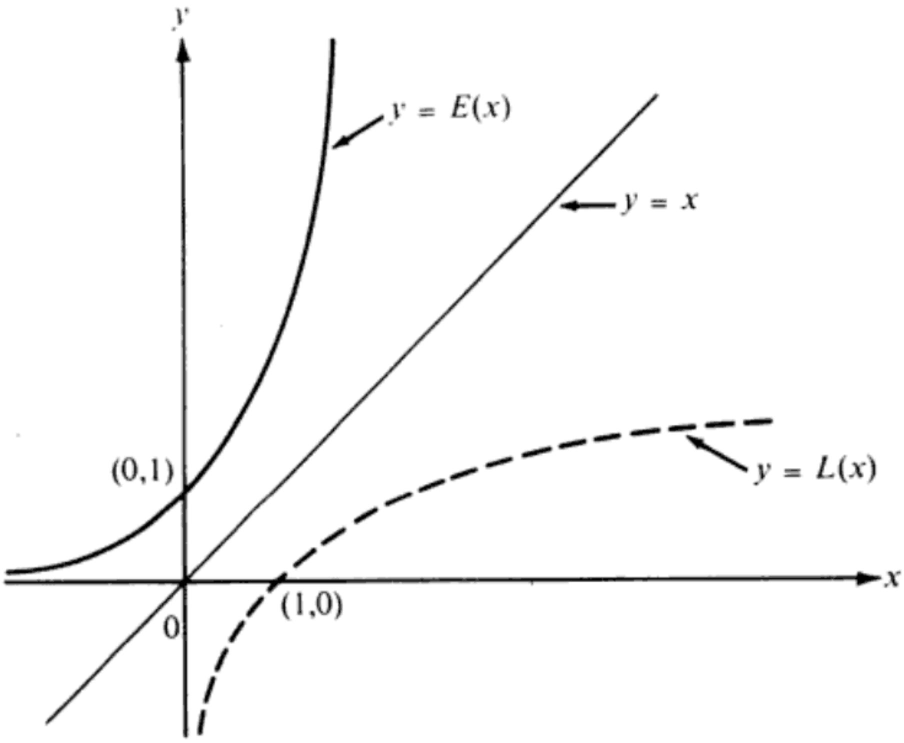


Fig. 6.6. O gráfico da função exponencial obtém-se do da função logaritmo por simetria relativamente à reta $y = x$.

Cada propriedade do logaritmo pode ser transformada numa propriedade da exponencial. Por exemplo, uma vez que o logaritmo é estritamente crescente e contínua em todo o semi-eixo real positivo, resulta do Teorema 3.10 que a exponencial é estritamente crescente e contínua em todo o eixo real. O teorema correspondente de 6.1 é o seguinte.

TEOREMA 6.6. *A função exponencial possui as seguintes propriedades:*
(a) $E(0) = 1$, $E(1) = e$.
(b) $E'(x) = E(x)$ *para qualquer* x.
(c) $E(a + b) = E(a)\ E(b)$ *para* a *e* b *quaisquer.*

Demonstração. A alínea (a) resulta das equações $L(1) = 0$ e $L(e) = 1$. Demonstramos seguidamente (c), a equação funcional para a exponencial. Admitamos que a e b são dados e seja

$$x = E(a)\,, \qquad y = E(b)\,, \qquad c = L(xy)\,.$$

Então temos

$$L(x) = a\,, \qquad L(y) = b\,, \qquad E(c) = xy\,.$$

Mas $c = L(xy) = L(x) + L(y) = a + b$, isto é, $c = a + b$. Daqui resulta $E(c) = E(a + b)$. Por outro lado, $E(c) = xy = E(a)E(b)$, pelo que so $E(a+b) = E(a)E(b)$, o que demonstra *(c)*.

Servimo-nos agora da equação funcional para a demonstração de (b). A razão incremental para a derivada $E'(x)$ é

$$\frac{E(x + h) - E(x)}{h} = \frac{E(x)E(h) - E(x)}{h} = E(x)\,\frac{E(h) - 1}{h}\,.$$

Por conseguinte, para demonstrar (b) devemos provar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = 1\,. \tag{6.27}$$

É conveniente exprimir o quociente de (6.27) em função do logaritmo. Seja $k = E(h) - 1$. Então $k + 1 = E(h)$, de maneira que $L(k + 1) = h$ e a razão incremental é igual a

$$\frac{E(h) - 1}{h} = \frac{k}{L(k + 1)}\,. \tag{6.28}$$

Quando $h \to 0$, $E(h) \to 1$, porque a função exponencial é contínua no ponto 1. Uma vez que $k = E(h) - 1$, temos $k \to 0$ quando $h \to 0$. Mas

$$\frac{L(k + 1)}{k} = \frac{L(k + 1) - L(1)}{k} \to L'(1) = 1 \text{ quando } k \to 0\,.$$

Considerando (6.28), isto demonstra (6.27) a qual, por sua vez, prova (b).

6.13. Exponenciais expressas como potências de e

A equação funcional $E(a + b) = E(a)E(b)$ tem muitas consequências de interesse. Por exemplo, podemos usá-la para demonstrar que

$$E(r) = e^r \tag{6.29}$$

qualquer que seja o número racional r.

Fazemos, em primeiro lugar, $b = -a$ na equação funcional obtendo

$$E(a)E(-a) = E(0) = 1\,,$$

e daqui resulta $E(-a) = 1/E(a)$ para todo o real a. Fazendo $b = a$, $b = 2a$, ..., $b = na$ na equação funcional obtém-se, sucessivamente, $E(2a) = E(a)^2$, $E(3a) = E(a)^3$ e, em geral, tem-se

$$E(na) = E(a)^n \tag{6.30}$$

para todo o inteiro positivo n. Em particular, quando $a = 1$, obtém-se

$$E(n) = e^n\,,$$

enquanto que para $a = 1/n$ se obtém $E(1) = E(1/n)^n$. Visto que $E(1/n) > 0$, isto implica

$$E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n}\,. \tag{6.31}$$

Portanto, se fizermos $a = 1/m$ em (6.30) e utilizarmos (6.31), encontramos

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(\frac{1}{m}\right)^n = e^{n/m}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos m e n. Por outras palavras demonstrámos (6.29) para todo o número racional positivo r. Sendo $E(-r) = 1/E(r) = e^{-r}$, também é verdadeira para todo o racional negativo r.

6.14. A definição de e^x para x real qualquer

Na seção precedente provou-se que $e^x = E(x)$ quando x é qualquer número *racional*. *Definimos* agora e^x, para x irracional, por

$$e^x = E(x) \tag{6.32}$$

Uma justificação desta definição é que podemos utilizá-la para demonstrar que

$$e^a e^b = e^{a+b} \tag{6.33}$$

é válida para todos os números reais a e b. Quando se toma a definição (6.32), a demonstração de (6.33) é trivial porque esta não é mais que a mesma afirmação da equação funcional.

A notação e^x para $E(x)$ é uma das mais frequentemente utilizadas para a exponencial. Por vezes aparece $\exp(x)$ em vez de e^x, especialmente quando no expoente aparecem expressões complicadas. Continuaremos ainda a usar $E(x)$ uma vez por outra neste capítulo, mas mais tarde usaremos apenas e^x.

Definimos a função exponencial de maneira que as duas igualdades

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad x = \log y$$

signifiquem exatamente a mesma coisa. Na seção seguinte definiremos potências mais gerais de modo que $y = a^x$ e $x = \log_a y$ sejam equivalentes.

6.15. A definição de a^x para $a > 0$ e x real

Agora que definimos e^x, para x real qualquer, não há dificuldade em formular uma definição para a^x qualquer que seja $a > 0$. Uma maneira de o fazer é definir a^x como o número y tal que $\log_a y = x$; evidentemente que este método não serve para $a = 1$ uma vez que o logaritmo de base 1 não foi definido. Outra maneira é definir a^x pela fórmula

$$a^x = e^{x \log a}. \tag{6.34}$$

O segundo caminho é preferível porque, em primeiro lugar, é provido de significado para qualquer positivo a (incluindo $a = 1$) e, em segundo lugar, torna fácil provar as seguintes propriedades de exponenciais:

$$\log a^x = x \log a . \qquad (ab)^x = a^x b^x .$$

$$a^x a^y = a^{x+y} . \qquad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy} .$$

Se $a \neq 1$, então $y = a^x$ se e só se $x = \log_a y$

As demonstrações destas propriedades são deixadas ao leitor como exercício.

Do mesmo modo que o gráfico da função exponencial foi obtido do gráfico da função logaritmo por simetria relativamente à reta $y = x$, também o gráfico de $y = a^x$ se pode obter do gráfico de $y = \log_a x$ por simetria relativamente à mesma reta; na fig. 6.7 apresentam-se exemplos. As curvas da fig. 6.7 foram obtidas por simetria das da fig. 6.3. O gráfico correspondente a $a = 1$ é, evidentemente, a reta paralela a OX, $y = 1$.

6.16. Derivação e integração de fórmulas contendo exponenciais

Uma das mais notáveis propriedades da função exponencial é a fórmula

$$E'(x) = E(x), \tag{6.35}$$

a qual significa que esta função é a sua própria derivada. Se utilizamos este resultado juntamente com a regra de derivação da função composta, podemos obter fórmulas de derivação para funções exponenciais com qualquer base positiva a.

Suponhamos $f(x) = a^x$ para $x > 0$. Segundo a definição de a^x, podemos escrever

$$f(x) = e^{x \log a} = E(x \log a) \; ;$$

pela regra da derivada duma função composta, encontramos

$$f'(x) = E'(x \log a) \cdot \log a = E(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a \, . \tag{6.36}$$

o que significa que para derivarmos a^x basta multiplicarmos a^x pelo fator constante $\log a$, fator este que vale 1 quando $a = e$.

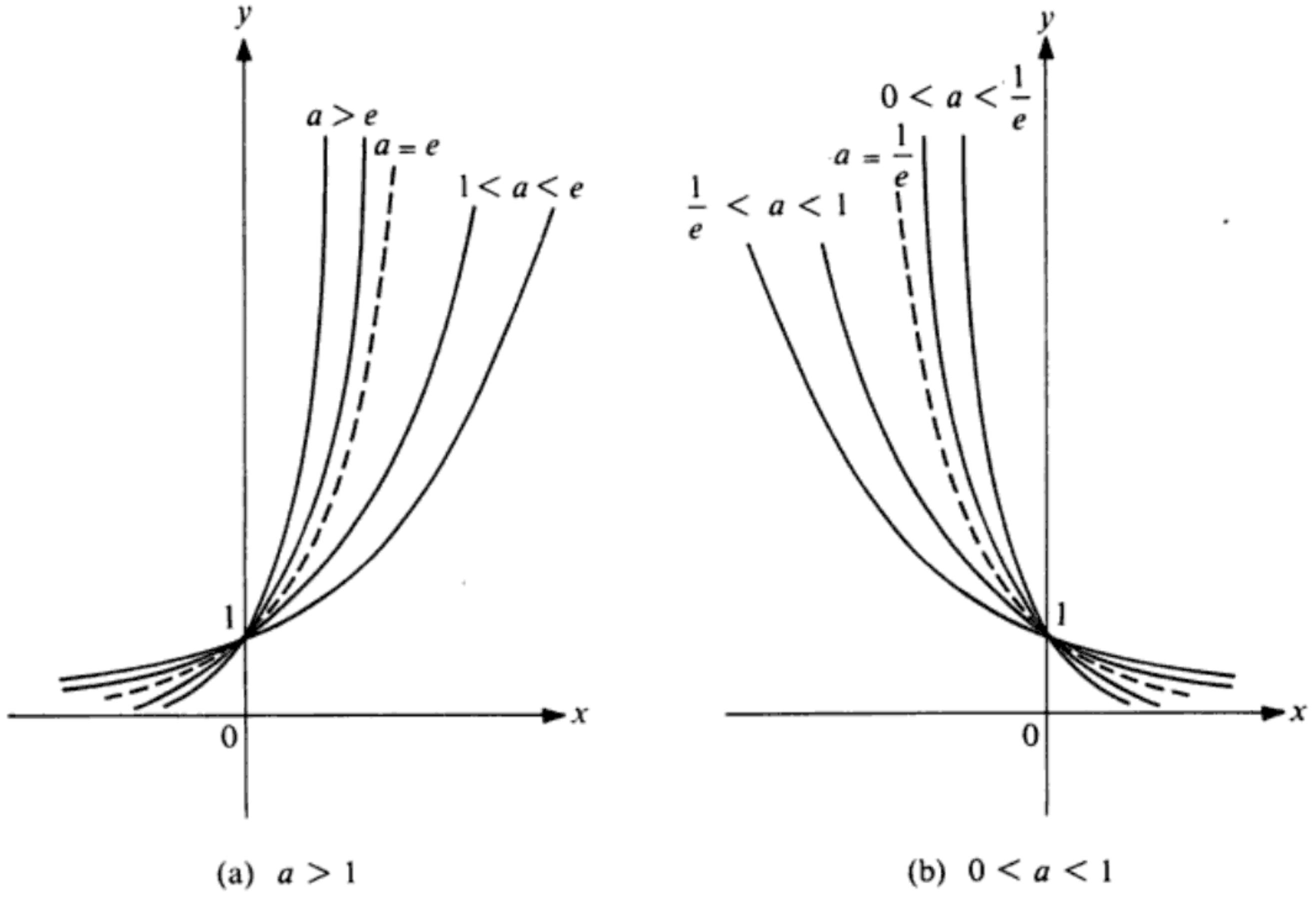


Fig. 6.7. O gráfico de $y = a^x$ para diferentes valores de a.

Naturalmente que estas fórmulas de derivação conduzem automaticamente às correspondentes fórmulas de integração. Por exemplo, (6.35) dá como resultado

$$\int e^x \, dx = e^x + C \, , \tag{6.37}$$

enquanto que (6.36) nos conduz à formula mais geral

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)\,. \tag{6.38}$$

Esta pode ainda generalizar-se um pouco mais pelo método de substituição. Substituindo em (6.37) e (6.38) x por u obtemos

$$\int e^u\,du = e^u + C\,, \qquad \int a^u\,du = \frac{a^u}{\log a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)\,, \tag{6.39}$$

representando agora u qualquer função com derivada contínua. Se escrevemos $u = f(x)$ e $du = f'(x)dx$, as fórmulas (6.39) vêm

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C\,, \qquad \int a^{f(x)}f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C\,,$$

sendo a segunda válida quando $a > 0$, $a \neq 1$.

EXEMPLO 1. Integral $\int x^2 e^{x^3} dx$.

Resolução. Façamos $u = x^3$. Então $du = 3x^2\,dx$ e podemos escrever

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \tfrac{1}{3}\int e^{x^3}(3x^2\,dx) = \tfrac{1}{3}\int e^u\,du = \tfrac{1}{3}e^u + C = \tfrac{1}{3}e^{x^3} + C\,.$$

EXEMPLO 2. Integrar $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Resolução. Seja $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Então $du = \dfrac{1}{2}\,x^{-1/2}\,dx = \dfrac{1}{2}\,dx/\sqrt{x}$. Daqui resulta

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = 2\int 2^u\,du = 2\,\frac{2^u}{\log 2} + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\log 2} + C\,.$$

EXEMPLO 3. Integrar $\int \cos x\, e^{2\,\mathrm{sen}\,x}\,dx$.

Resolução. Se $u = 2\,\mathrm{sen}\,x$, será $du = 2\cos x\,dx$ e daqui resulta

$$\int \cos x\, e^{2\,\mathrm{sen}\,x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int e^{2\,\mathrm{sen}\,x}(2\cos x\,dx) = \tfrac{1}{2}\int e^u\,du = \tfrac{1}{2}e^u + C = \tfrac{1}{2}e^{2\,\mathrm{sen}\,x} + C\,.$$

EXEMPLO 4. Integrar $\int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$.

Resolução. Seja $u = e^x$, $dv = \mathrm{sen}\,x\,dx$. Então $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$, e encontramos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx + C\,. \qquad (6.40)$$

O integral $\int e^x \cos x\, dx$ calcula-se do mesmo modo. Façamos $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx$, $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$ e então virá

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx + C\,. \qquad (6.41)$$

Substituindo em (6.40), podemos resolver a igualdade obtida relativamente a $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ e escrever, depois de somar as duas constantes,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C\,.$$

Observe-se que podemos, por sua vez, substituir este resultado em (6.41) e obtermos também

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x) + C\,.$$

EXEMPLO 5. Integrar $\int \frac{dx}{1 + e^x}$.

Resolução. Um modo de tratar este exemplo consiste em escrever a função integranda na forma

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}\,,$$

fazendo depois $u = e^{-x} + 1$. Então $du = -e^{-x}\, dx$ e obtém-se

$$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}\, dx = -\int \frac{-e^{-x}\, dx}{e^{-x} + 1} = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| + C = -\log(1 + e^{-x}) + C\,.$$

Pode dar-se outro aspecto ao resultado, operando com o logaritmo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} -\log(1 + e^{-x}) &= \log \frac{1}{1 + e^{-x}} = \log \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \log(e^x) - \log(e^x + 1) = x - \log(1 + e^x)\,. \end{aligned}$$

Outra maneira de resolver o problema consiste em escrevermos

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Então temos

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = x - \int \frac{du}{u},$$

onde $u = 1 + e^x$. Assim encontramos

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \log(1+e^x) + C,$$

que é uma das formas já obtidas.

6.17. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 12, calcular a derivada $f'(x)$. Em cada exemplo, a função f supõe-se definida para todos os valores reais de x para os quais a expressão dada de $f(x)$ é provida de significado.

1. $f(x) = e^{3x-1}$.
2. $f(x) = e^{4x^2}$.
3. $f(x) = e^{-x^2}$.
4. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
5. $f(x) = e^{1/x}$.
6. $f(x) = 2^x$.
7. $f(x) = 2^{x^2}$ [que significa $2^{(x^2)}$].
8. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.
9. $f(x) = e^{\cos^2 x}$.
10. $f(x) = e^{\log x}$.
11. $f(x) = e^{e^x}$ [que significa $e^{(e^x)}$].
12. $f(x) = e^{e^{e^x}}$ [que significa $\exp(e^{(e^x)})$].

Calcular os integrais indefinidos dos Exercícios 13 a 18.

13. $\int x\, e^x\, dx$.
14. $\int x\, e^{-x}\, dx$.
15. $\int x^2\, e^x\, dx$.
16. $\int x^2\, e^{-2x}\, dx$.
17. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.
18. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$.
19. Determinar todas as constantes a e b tais que $e^x = b + \int_a^x e^t\, dt$.
20. Sejam $A = \int e^{ax} \cos bx\, dx$ e $B = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$, con a e b constantes, não simultaneamente nulas. Por aplicação do método de integração por partes demonstrar que

$$aA - bB = e^{ax}\cos bx + C_1, \qquad aB + bA = e^{ax}\operatorname{sen} bx + C_2,$$

sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias. Determinar as expressões de A e B e deduzir as seguintes fórmulas de integração.

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Nos Exercícios 21 a 34, calcular a derivada $f'(x)$. Em cada exemplo supõe-se que a função f está definida para todos os valores reais de x para os quais a fórmula dada para $f(x)$ é provida de significado. A derivação logarítmica pode simplificar a resolução em alguns casos.

21. $f(x) = x^x$.
22. $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$.
23. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
24. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$.
25. $f(x) = \log[\log(\log x)]$.
26. $f(x) = \log(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.
27. $f(x) = x^{x^x}$.
28. $f(x) = (\log x)^x$.
29. $f(x) = x^{\log x}$.
30. $f(x) = \dfrac{(\log x)^x}{x^{\log x}}$.
31. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.
32. $f(x) = x^{1/x}$.
33. $f(x) = \dfrac{x^2(3 - x)^{1/3}}{(1 - x)(3 + x)^{2/3}}$.
34. $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^{b_i}$.
35. Seja $f(x) = x^r$, com $x > 0$ e r qualquer número real. A fórmula $f'(x) = rx^{r-1}$ foi demonstrado atrás para *r racional*.
    (a) Provar que esta fórmula é também verdadeira para r real qualquer. [*Sugestão:* Escrever $x^r = e^{r \log x}$].
    (b) Discutir sob que condições o resultado da alínea (a) é válido para $x \leq 0$.
36. Aplicar a definição $a^x = e^{x \log a}$ para derivar as propriedades da exponencial geral:
    (a) $\log a^x = x \log a$.
    (b) $(ab)^x = a^x b^x$.
    (c) $a^x a^y = a^{x+y}$.
    (d) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.
    (e) *Se* $a \neq 1$, *então* $y = a^x$ *se e sómente se* $x = \log_a y$.
37. Seja $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ com $a > 0$. Provar que

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

38. Seja $f(x) = e^{cx}$, com c constante. Mostrar que $f'(0) = c$, e utilizar isto para deduzir a relação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{cx} - 1}{x} = c.$$

39. Seja f uma função definida em todo o eixo real, admitindo uma derivada f' que satisfaz à equação

$$f'(x) = cf(x) \qquad \text{para cada } x,$$

com c uma constante. Provar que existe uma constante K tal que $f(x) = Ke^{cx}$ para qualquer x. [*Sugestão:* Seja $g(x) = f(x)e^{-cx}$ e considere-se $g'(x)$].

40. Seja f uma função definida em todo o eixo real. Admitamos além disso que f verifica a equação funcional

(i) $f(x + y) = f(x)f(y)$, quaisquer que sejam x e y.

(a) Utilizar unicamente a equação funcional para provar que $f(0)$ é ou 0 ou 1. Provar também que se $f(0) \neq 0$, então $f(x) \neq 0$ para *todo* o x.
Supor, em complemento de (i), que $f'(x)$ existe para todo o x, e provar as seguintes propriedades:
(b) $f'(x)f(y) = f'(y)f(x)$ para todo o x e y.
(c) Existe uma constante c tal que $f'(x) = cf(x)$ para todo o x.
(d) $f(x) = e^{cx}$ se $f(0) \neq 0$. [*Sugestão:* Ver Exercício 39.]

41. (a) Seja $f(x) = e^x - 1 - x$ para todo o x. Demonstrar que $f'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$ se $x \leq 0$.
Fazendo uso deste fato deduzir as desigualdades

$$e^x > 1 + x\,, \qquad e^{-x} > 1 - x\,,$$

verdadeiras para todo $x > 0$. (Quando $x = 0$, convertem-se em igualdades).
Integrar essas desigualdades para deduzir as seguintes, válidas para $x > 0$:

(b) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}, \qquad e^{-x} < 1 - x + \dfrac{x^2}{2!}.$

(c) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}, \qquad e^{-x} > 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}.$

(d) Estabelecer a generalização sugerida e demonstrá-la.

42. Se n é um inteiro positivo e se $x > 0$, provar que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x, \qquad \text{e que} \qquad e^x < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \quad \text{se} \quad x < n\,.$$

Pela escolha adequada de n, provar que $2{,}5 < e < 2{,}99$.

43. Seja $f(x, y) = x^y$, com $x > 0$. Mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x\,.$$

6.18. Funções hiperbólicas

Aparecem frequentemente na análise certas combinações de funções exponenciais, o que justifica que lhes sejam dadas designações especiais e que se estudem como exemplos de novas funções. Estas combinações chamam-se *seno hiperbólico* (sh), *cosseno hiperbólico* (ch) *tangente hiperbólica* (th), etc., e definem-se do modo seguinte:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\text{cosch } x = \frac{1}{\text{sh } x}, \qquad \text{sech } x = \frac{1}{\text{ch } x}, \qquad \text{coth } x = \frac{1}{\text{th } x}.$$

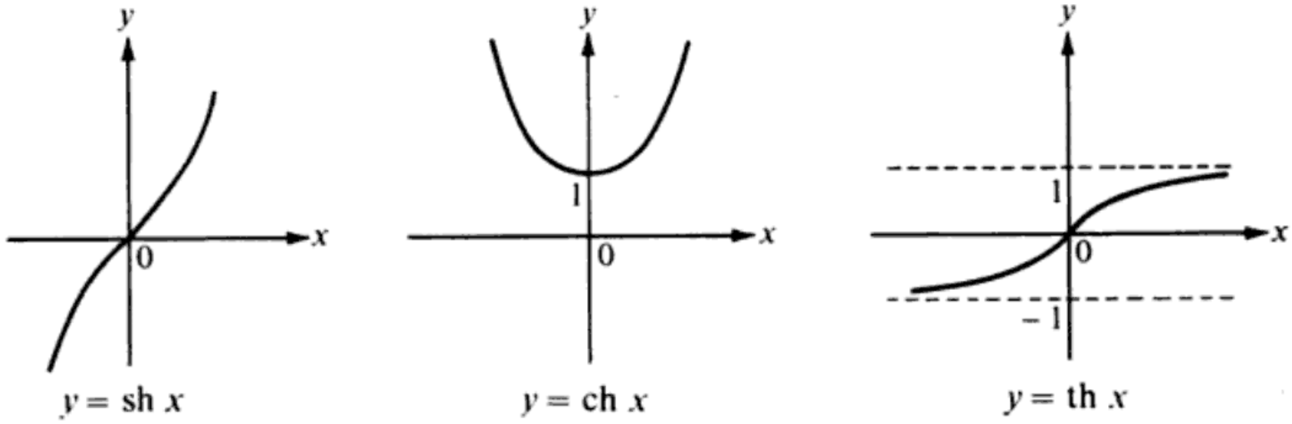


Fig. 6.8. Gráficos de funções hiperbólicas.

O qualificativo "hipérbolico" deve-se ao fato destas funções estarem geometricamente relacionadas com a hipérbole, do mesmo modo que as funções trigonométricas já estudadas estão relacionadas com a circunferência. Esta relação será discutida em pormenor no Capítulo 14, quando fizermos o estudo da hipérbole. Os gráficos do sh, ch e th, estão representados na fig. 6.8.

As funções hiperbólicas possuem muitas propriedades parecidas com as das funções trigonométricas. Algumas delas são apresentadas a seguir como exercícios.

6.19. Exercícios

Deduzir as propriedades das funções hiperbólicas indicadas nos Exercícios 1 a 15 e compará-las, sempre que possível, com as correspondentes propriedades das funções trigonométricas.

1. $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
2. $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$.
3. $\text{ch}(-x) = \text{ch } x$.
4. $\text{th}(-x) = -\text{th } x$.
5. $\text{sh}(x + y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y$.
6. $\text{sh}(x + y) = \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y$.
7. $\text{sh } 2x = 2 \text{ sh } x \text{ ch } x$.
8. $\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$.
9. $\text{ch } x + \text{ch } x = e^x$.
10. $\text{ch } x - \text{ch } x = e^{-x}$.

11. $(\text{ch}\ x + \text{sh}\ x)^n = \text{ch}\ nx + \text{sh}\ nx$ (n a um enteiro).
12. $2\ \text{sh}^2\ \frac{1}{2}x = \text{ch}\ x - 1$.
13. $2\ \text{ch}^2\ \frac{1}{2}x = \text{ch}\ x + 1$.
14. $\text{th}^2\ x + \text{sech}\ x = 1$.
15. $\text{csth}^2\ x - \text{cosech}^2\ x = 1$.
16. Sendo $\text{sh}\ x = \dfrac{4}{3}$ calcular $\text{ch}x$.
17. Sendo $\text{ch}\ x = \dfrac{5}{4}$ e $x > 0$ calcular $\text{sh}x$.
18. Sendo $\text{th}\ x = \dfrac{5}{13}$, calcular $\text{sh}x$ e $\text{ch}x$.
19. Sendo $\text{sh}\ x = \dfrac{4}{3}$ e $\text{sh}\ y = \dfrac{3}{4}$ achar $\text{ch}(x + y)$.
20. Sendo $\text{th}\ x = \dfrac{3}{4}$ calcular $\text{th}\ 2x$.

Nos Exercícios 21 a 26 verificar as fórmulas de derivação:

21. $D\ \text{sh}\ x = \text{ch}\ x$.
22. $D\ \text{ch}\ x = \text{sh}\ x$.
23. $D\ \text{th}\ x = \text{sech}^2\ x$.
24. $D\ \text{coth}\ x = -\text{cosech}\ x$.
25. $D\ \text{sech}\ x = -\text{sech}\ x\ \text{th}\ x$.
26. $D\ \text{cosech}\ x = -\text{cosech}\ x\ \text{coth}\ x$.

6.20. Derivadas de funções inversas

Aplicámos o processo de inversão para construir a função exponencial a partir do logaritmo. Na seção seguinte iremos achar as inversas das funções trigonométricas. É pois conveniente, nesta altura, discutir um teorema geral que nos demonstra que o processo de inversão transmite a derivabilidade de uma função à sua inversa.

TEOREMA 6.7. *Seja f estritamente crescente e contínua num intervalo $[a, b]$ e represente g a função inversa de f. Se existir a derivada $f'(x)$ e for não nula num ponto x de (a, b), então a derivada $g'(y)$ também existe e é não nula no ponto correspondente y, com $y = f(x)$. Além disso, às duas derivadas são recíprocas uma da outra, isto é*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{6.42}$$

Nota: Se usamos a notação de Leibniz e escrevemos y em vez de $f(x)$, dy/dx em vez de $f'(x)$, x em vez de $g(y)$ e dx/dy em vez de $g'(y)$, então (6.42) escreve-se

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)},$$

que tem o aspecto de uma identidade algébrica trivial.

Demonstração. Sejam x um ponto de (a, b) em que $f'(x)$ existe e é não nula e $y = f(x)$. Trata-se de demonstrar que a razão incremental

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k}$$

tende para o limite $1/f'(x)$ quando $k \to 0$.

Seja $h = g(y+k) - g(y)$. Visto que $x = g(y)$ é $h = g(y+h) - x$ ou $x + h = g(y+k)$. Portanto $y + k = f(x+h)$ e por isso $k = f(x+h) - f(x)$. Note-se que $h \neq 0$ se $k \neq 0$, pois g é estritamente crescente. Por conseguinte, se $k \neq 0$, a razão incremental considerada vem

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{[f(x+h)-f(x)]/h}. \tag{6.43}$$

Quando $k \to 0$, a diferença $g(y+k) - g(y) \to 0$, em virtude da continuidade de g em y [propriedade (b) do teorema 3.10]. Quer isto dizer que $h \to 0$ quando $k \to 0$. Mas nós sabemos que a razão incremental no denominador do último termo do segundo membro de (6.43) tende para $f'(x)$ quando $h \to 0$ [pois $f'(x)$ existe]. Portanto, quando $k \to 0$, a razão incremental do termo do primeiro membro de (6.43) tende para o limite $1/f'(x)$, e o teorema 6.7 fica demonstrado.

6.21. Inversas das funções trigonométricas

O processo de inversão pode aplicar-se às funções trigonométricas. Consideremos a função sen. Para determinar uma única função inversa, devemos considerar um intervalo em que a função seno seja monótona. Existem, evidentemente, uma infinidade de tais intervalos, por exemplo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}]$, etc., sendo indiferente escolher qualquer deles. Habitualmente considera-se $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e definimos a nova função de modo seguinte:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

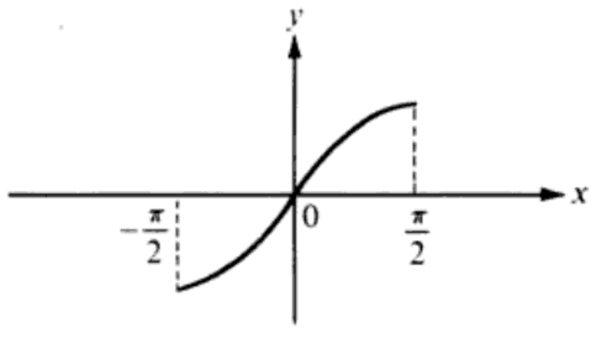


Fig. 6.9 $y = \operatorname{sen} x$

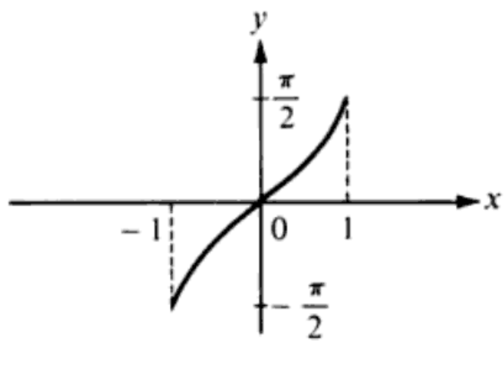


Fig. 6.10 $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

A função f assim definida é estritamente crescente e toma todos os valores de -1 a $+1$, exatamente uma vez no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Ver fig. 6.9). Portanto existe uma única função g, definida em $[-1, 1]$, que faz corresponder a cada número y em $[-1, 1]$ o número x

de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para o qual $y = \text{sen}\, x$. Esta função g chama-se *inversa do seno* ou ***arco seno*** e o seu valor em y representa-se por arc sen y ou $\text{sen}^{-1}\, y$. Então,

$$u = \text{arcsen}\, v \qquad \text{significa} \quad v = \text{sen}\, u \qquad \text{e} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

O gráfico do arco seno está representado na fig. 6.10. Note-se que o arco seno não está definido fora do intervalo $[-1,1]$.

A derivada do arco seno pode obter-se pela fórmula (6.42) da Seção 6.20. Neste caso $f'(x) = \cos x$, a qual é diferente de zero no intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Portanto a fórmula (6.42) permite obter

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\, x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \text{se} \quad -1 < y < 1\,;$$

com uma mudança na notação podemos escrever este resultado do modo seguinte

$$D\, \text{arcsen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{se} \quad -1 < x < 1\,. \tag{6.44}$$

Naturalmente que esta conclusão nos conduz a uma nova fórmula de integração

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \text{arcsen}\, x\,, \tag{6.45}$$

válida para $-1 < x < 1$.

Nota: Esta fórmula pode usar-se como ponto de partida para uma teoria completamente analítica das funções trigonométricas, sem qualquer referência à geometria. Muito resumidamente a ideia consiste em começar com a função arc seno, definindo-a pelo integral (6.45) do mesmo modo que definimos por intermédio dum integral a função logaritmo. Em seguida, a função seno define-se como a inversa do arco seno, e o cosseno como a derivada do seno. Para levar a cabo, completamente, este programa são necessários muitos pormenores e por isso não o descreveremos aqui. No Capítulo 11 será apresentada outra alternativa para a introdução analítica das funções trigonométricas.

Na notação de Leibniz para integrais indefinidos pode escrever-se

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arcsen}\, x + C\,. \tag{6.46}$$

Integrando por partes obtém-se uma nova fórmula de integração

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

O cosseno e a tangente são investidas de uma maneira semelhante. Para o cosseno é usual escolher o intervalo $[0, \pi]$ para efectuar a inversão. (Ver fig. 6.11). A função inversa obtida, chamada o arco cosseno, define-se do modo seguinte:

$$u = \arccos v \quad \text{significa} \quad v = \cos u \quad \text{e} \quad 0 \leq u \leq \pi\,.$$

O gráfico da função arco cosseno está traçãdo na fig. 6.12.

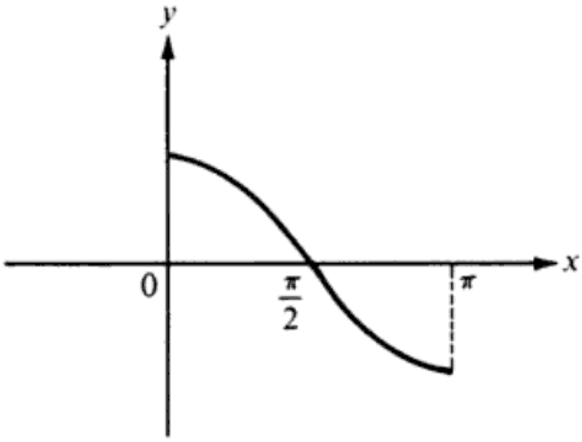


Fig. 6.11 $y = \cos x$

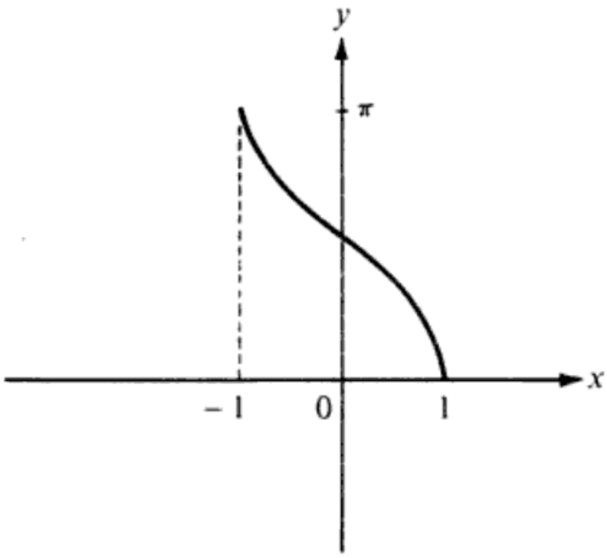


Fig. 6.12 $y = \arccos x$.

Para inverter a tangente escolhemos o intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (Ver fig. 6.13) e definimos o arco tangente como segue:

$$u = \operatorname{arctg} v \quad \text{significa} \quad v = \operatorname{tg} u \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\,.$$

Na fig. 6.14 está representada uma parte do gráfico da função arctg.

O raciocínio utilizado para estabelecer (6.44) pode aplicar-se às funções arco cosseno e arco tangente, obtendo-se as seguintes fórmulas de derivação:

$$D \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \tag{6.47}$$

válida para $-1 < x < 1$, e

$$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}\,, \tag{6.48}$$

válida para todo o real x.

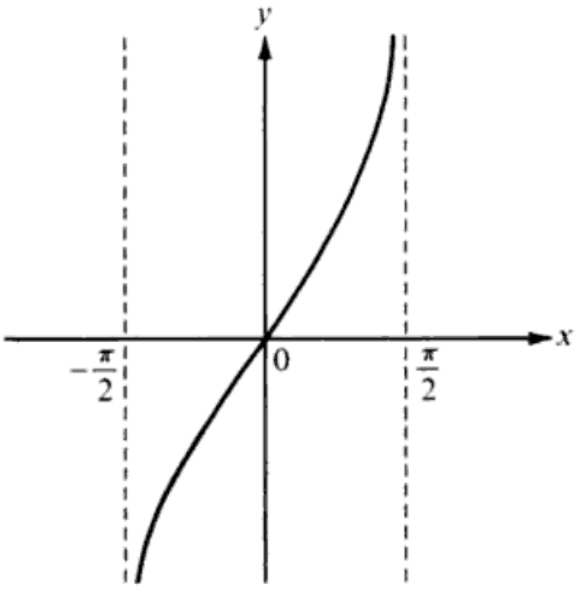


Fig. 6.13 $y = \text{tg } x$

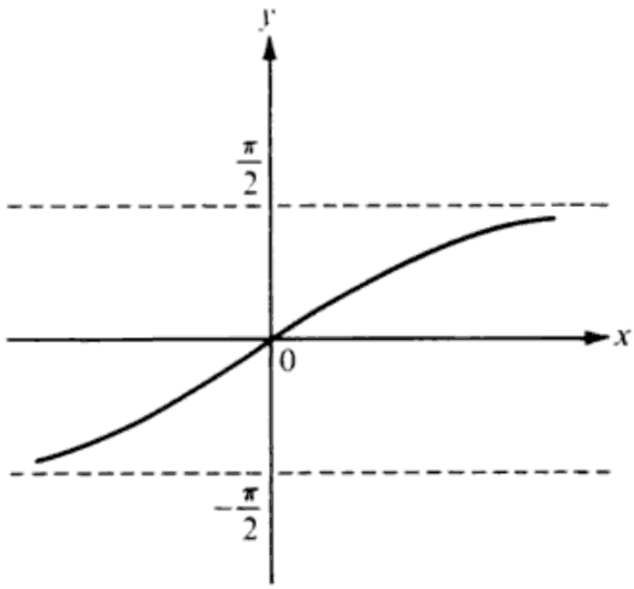


Fig. 6.14 $y = \text{arctg } x$.

Quando (6.47) é transformada numa fórmula de integração resulta

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -(\text{arccos } x - \text{arccos } 0) = \frac{\pi}{2} - \text{arccos } x \tag{6.49}$$

se $-1 < x < 1$. Comparando (6.49) com (6.45), deduzimos a relação $\frac{1}{2}\pi - \text{arccos } x = \text{arcsen } x$. (O mesmo pode ser deduzido da identidade sen $(\frac{\pi}{2} - y) = \cos y$, escrevendo $y = \text{arccos } x$). Na notação de Leibniz para integrais indefinidos podemos escrever (6.49) na forma:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{arccos } x + C\,. \tag{6.50}$$

Analogamente, de (6.48) obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg } x \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + C. \tag{6.51}$$

Por aplicação do método de integração por partes, em conjunção com (6.50) e (6.51), podem derivar-se outras fórmulas de integração:

$$\int \text{arccos } x\, dx = x \,\text{arccos } x + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\,\text{arccos } x - \sqrt{1-x^2} + C\,,$$

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C\,.$$

As inversas da cotangente, secante e cossecante podem definir-se pelas fórmulas seguintes:

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \qquad \text{para todo o real } x, \tag{6.52}$$

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\frac{1}{x} \qquad \text{quando } |x| \geq 1\,, \tag{6.53}$$

$$\operatorname{arccosec} x = \operatorname{arcsen}\frac{1}{x} \qquad \text{quando } |x| \geq 1\,. \tag{6.54}$$

As fórmulas de derivação e integração para estas funções estão contidas no grupo seguinte de problemas.

6.22. Exercícios

Provar as fórmulas de derivação apresentadas nos Exercícios 1 a 5.

1. $D \arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ se $-1 < x < 1$.

2. $D \operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$ para todo o real x.

3. $D \operatorname{arccotg} x = \dfrac{-1}{1+x^2}$ para todo o real x.

4. $D \operatorname{arcsec} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ se $|x| > 1$.

5. $D \operatorname{arccosec} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ se $|x| > 1$.

Provar as fórmulas de integração apresentadas nos Exercícios 6 a 10

6. $\int \operatorname{arccog} x\, dx = x \operatorname{arccog} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$.

7. $\int \operatorname{arcsec} x\, dx = x \operatorname{arcsec} x - \dfrac{x}{|x|}\log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

8. $\displaystyle\int \operatorname{arcosec} x\, dx = x \operatorname{arccosec} x + \frac{x}{|x|}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + C$.

9. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$.

10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\, dx = \log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + C$.

11. (a) Provar que $D(\operatorname{arccotg} x - \operatorname{arctg} 1/x) = 0$ para todo o $x \neq 0$.

(b) Provar que não existe qualquer constante C, tal que $\operatorname{arccotg} x - \operatorname{arctg}(1/x) = C$ para todo o $x \neq 0$. Explicar porque motivo esta conclusão não contradiz o teorema 5.2.

Nos Exercícios 12 a 25, calcular a derivada $f'(x)$. Em cada exemplo a função f supõe-se ser definida para todos os valores reais de x para os quais a fórmula $f(x)$ tem sentido.

12. $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2}$.

13. $f(x) = \arccos \dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$.

14. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$.

15. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

16. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

17. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3)$.

18. $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

19. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

20. $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

21. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x - \cos x)$.

22. $f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

23. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$.

24. $f(x) = [\arccos(x^2)]^{-2}$.

25. $f(x) = \log\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

26. Provar que $dy/dx = (x+y)/(x-y)$ se $\operatorname{arctg}(y/x)$ se $\operatorname{arctg}(y/x) = \log \sqrt{x^2+y^2}$.

27. Calcular d^2y/dx^2 se $y = (\operatorname{arcsen} x)/\sqrt{1-x^2}$ para $|x| < 1$.

28. Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \dfrac{1}{3}x^3$. Examinar o sinal de f' para demonstrar que

$$x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x \qquad \text{se } x > 0.$$

Nos Exercícios 29 a 47, calcular os integrais indefinidos.

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\quad a \neq 0$.

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, $\quad a \neq 0$.

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx^2}$ $\quad (ab \neq 0)$.

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$.

34. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

35. $\int x^2 \arccos x \, dx$.

36. $\int x(\arctan x)^2 \, dx$.

37. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$.

38. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

39. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$. [*Sugestão:* $x = \operatorname{sen} u$.]

40. $\displaystyle\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{3/2}}\,dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\,dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccotg} e^x}{e^x}\,dx.$

45. $\displaystyle\int \left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{1/2} dx, \qquad a > 0.$

46. $\displaystyle\int \sqrt{(x - a)(b - x)}\,dx, \qquad b \neq a.$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(b - x)}}, \qquad b \neq a.$ [*Sugestão:* $x - a = (b - a)\operatorname{sen}^2 u$].

6.23. Integração por decomposição em fracções simples

Lembramos que o quociente de dois polinómios se designa por função racional. A derivação duma função racional conduz-nos a uma nova função racional, a qual se pode obter por aplicação de regra de derivação do quociente. Pelo contrário, a integração duma função racional pode conduzir a funções que não sejam racionais. Por exemplo, tem-se

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C \qquad \text{e} \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Vamos descrever um método de cálculo do integral de qualquer função racional, e verificaremos que o resultado pode sempre ser expresso em termos de polinómios, funções racionais, arco tangentes e logaritmos.

A ideia fundamental do método consiste em decompor uma dada função racional numa soma de frações mais simples, as quais podem ser integradas pelas técnicas já discutidas anteriormente. Vamos descrever o processo geral por meio duma certo número de exemplos que servirão para ilustrar todos os aspectos essenciais do método.

EXEMPLO 1. Começamos com duas frações simples, $1/(x - 1)$ e $1/(x + 3)$, que sabemos integrar e vejamos o que acontece quando formamos uma combinação linear destas frações. Por exemplo, se tomamos duas vezes a primeira fração mais três vezes a segunda obtemos

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x + 3} = \frac{2(x + 3) + 3(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3}\,.$$

Se agora lemos esta fórmula da direita para a esquerda, ela diz-nos que a função racional r definida por $r(x) = (5x + 3)/(x^2 + 2x - 3)$ se pode exprimir como uma combinação linear de $1/(x - 1)$ e $1/(x + 3)$. Portanto, pode escrever-se o integral de r do modo seguinte:

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3}\,dx = 2\int \frac{dx}{x - 1} + 3\int \frac{dx}{x + 3} = 2 \log |x - 1| + 3 \log |x + 3| + C\,.$$

EXEMPLO 2. O exemplo anterior sugere uma maneira para calcular integrais da forma $\int (ax + b)/(x^2 + 2x - 3)\,dx$. Por exemplo, para calcular $\int (2x + 5)/(x^2 + 2x - 3)\,dx$ tentamos exprimir o integral como uma combinação linear de $1/(x - 1)$ e $1/(x + 3)$, escrevendo

$$\frac{2x+5}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \tag{6.55}$$

com as constantes A e B a determinar. Se conseguirmos calcular A e B de maneira que (6.55) seja uma identidade, então o integral da fração no primeiro membro é igual à soma dos integrais das duas frações mais simples do segundo membro. Para calcular A e B, multiplicamos ambos os membros de (6.55) por $(x - 1)(x + 3)$ para desembaraçar dos denominadores. Obtemos então

$$A(x+3) + B(x-1) = 2x + 5\,. \tag{6.56}$$

A partir desta igualdade utilizam-se usualmente dois processos para determinar A e B. Um consiste em igualar os coeficientes das potências iguais de x em (6.56). Isto conduz-nos às equações $A + B = 2$ e $3A - B = 5$. Resolvido este par de equações simultâneas, obtemos $A = 7/4$ e $B = 1/4$. O outro método consiste em atribuir a x em (6.56) dois valores distintos, obtendo-se ainda deste modo um par de equações simultâneas em A e B. Neste caso particular, a presença dos fatores $x - 1$ e $x + 3$ sugere que usemos os valores de $x = 1$ e $x = -3$. Quando fazemos $x = 1$ em (6.56) o coeficiente de B anula-se e encontramos $4A = 7, A = 7/4$, e do mesmo modo quando fazemos $x = -3$ anula-se o coeficiente de A e obtemos $-4B = -1$ ou $B = 1/4$. Em qualquer dos casos encontramos os valores de A e B que satisfazem a (6.55) e portanto temos

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3} = \frac{7}{4}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x+3| + C\,.$$

É evidente que o método exposto no exemplo anterior se aplica também a integrais da forma $\int f(x)/g(x)\,dx$ nos quais f é uma polinómio linear e g um polinómio quadrático que se pode decompor num produto de fatores lineares com coeficientes reais $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Neste caso, o quociente pode expressar-se como uma combinação linear de $1/(x - x_1)$ e $1/(x - x_2)$ e a integração de $f(x)/g(x)$ conduz à combinação linear de $1/(x - x_1)$ e $1/(x - x_2)$ e a integração de $f(x)/g(x)$ conduz à combinação correspondente dos termos logaritmicos $\log|x - x_1|$ e $\log|x - x_2|$.

Os exemplos precedentes referem-se a funções racionais f/g nas quais o grau do numerador é menor do que o do denominador. Uma função racional nestas condições diz-se uma função racional *própria*. Se f/g é *imprópria,* isto é, se o grau do numerador f não é menor do que o de g, então podemos exprimir f/g como a soma de um polinómio e uma função racional própria. Com efeito, basta dividir f por g para obtermos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}\,,$$

com Q e R respetivamente os polinómios *quociente* e *resto*, este com grau inferior ao de g. Por exemplo,

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

Portanto, no estudo desta técnica de integração, não há perda de generalidade se nos restringimos às funções racionais *próprias* e daqui para o futuro consideramos sempre $\int f(x)/g(x)dx$ na hipótese em que o grau de f é menor do que o de g.

Um teorema de álgebra estabelece que toda a função racional própria pode ser expressa como uma soma de frações da forma

$$\frac{A}{(x + a)^k} \quad \text{e} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^m},$$

onde k e m são inteiros positivos e A, B, C, a, b, c são constantes condicionadas a $b^2 - 4c < < 0$. Esta condição significa que o polinómio $x^2 + bx + c$ não se pode decompor em fatores lineares com coeficientes reais, o mesmo é dizer a equação do segundo grau $x^2 + bx + c = 0$ não admite raízes reais. Um polinómio com esta forma diz-se que é *irredutível* no campo real. Quando uma função racional for expressa do modo indicado, dizemos que foi decomposta em *frações simples*. Deste modo o problema de integração desta função racional reduz-se ao da integração das suas frações simples. Estas podem ser facilmente integradas pela aplicação das técnicas descritas a seguir.

Não nos daremos ao trabalho de demonstrar que a decomposição duma função racional em frações simples é sempre possível. Em vez disso mostraremos (por meio dos exemplos) como obter as frações simples em problemas específicos. Em cada caso a decomposição em frações simples pode ser verificada diretamente.

É conveniente dividir a discussão em dois casos, consoante o modo segundo o qual o denominador de $f(x)/g(x)$ pode ser decomposto num produto de fatores.

CASO 1. O denominador é um produto de fatores lineares distintos. Suponhamos que $g(x)$ é decomponível em n fatores lineares distintos, por exemplo

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Observa-se que uma combinação linear da forma

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

pode ser representada por uma única fração com o denominador comum $g(x)$, e cujo numerador será um polinómio de grau $< n$ contendo os A'_i. Portanto, se pudermos encontrar os A'_i de modo que o numerador seja igual a $f(x)$, teremos a decomposição

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

e o integral de $f(x)/g(x)$ será igual a $\sum_{i=1}^{n} A_i \log|x - x_i|$. No exemplo que se segue vamos resolver um caso para $n = 3$.

EXEMPLO 3. Integrar $\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$.

Resolução. Visto que $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$, o denominador é um produto de três fatores lineares distintos, e teremos que calcular A_1, A_2 e A_3 tais que

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Desembaraçando de denominadores vem

$$2x^2 + 5x - 1 = A_1(x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-1).$$

Quando $x = 0$, vem $-2A_1 = -1$, logo $A_1 = 1/2$. Quando $x = 1$, vem $3A_2 = 6$, logo $A_2 = 2$ e quando $x = -2$ vem $6A_3 = -3$, logo $A_3 = -1/2$. Portanto podemos escrever

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log|x| + 2\log|x-1| - \tfrac{1}{2}\log|x+2| + C.$$

CASO 2. O denominador é um produto de fatores lineares, alguns dos quais repetidos. Tratamos este caso com um exemplo.

EXEMPLO 4. Integrar $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2}\, dx$.

Resolução. Teremos que calcular A_1, A_2, A_2 de modo que

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}. \tag{6.57}$$

São necessárias ambas as frações $A_2/(x+1)$ e $A_3/(x+1)^2$, bem como $A_1/(x-1)$ a fim de obtermos um polinómio de grau dois no numerador e conseguirmos tantas equações como constantes quando pretendemos determinar os A_i'. Desembaraçando de denominadores vem:

$$x^2 + 2x + 3 = A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1). \tag{6.58}$$

Fazendo $x = 1$, vem $4A_1 = 6$ ou seja $A_1 = 3/2$. Se $x = -1$ vem $-2A_3 = 2$ e $A_3 = -1$. Necessitamos de outra equação para calcular A_2. Uma vez que não é possivel outra escolha de x de modo a anular algum dos fatores, procura-se tomar x de modo que os cálculos resultem tão simples quanto possível. Por exemplo, fazendo $x = 0$ obtém-se $3 = A_1 - A_2 - A_3$, donde resulta $A_2 = -1/2$. Uma alternativa seria derivar ambos os membros de (6.58) e depois atribuir a x um valor conveniente. Derivando (6.58) obtém-se

$$2x + 2 = 2A_1(x + 1) + A_2(x - 1) + A_2(x + 1) + A_3\,,$$

e se fizermos $x = -1$ vem $0 = -2A_2 + A_3$, de modo que $A_2 = \frac{1}{2}A_3 = -\frac{1}{2}$ como já tínhamos calculado. Assim verificámos que para os A_s' que satisfazem a (6.57) podemos escrever

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{3}{2}\log|x - 1| - \frac{1}{2}\log|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C\,.$$

Se no primeiro membro de (6.57) figurasse o fator $(x + 1)^3$ em vez de $(x + 1)^2$, teríamos que adicionar mais um termo $A_4/(x + 1)^3$ ao segundo membro. Mais geralmente, se uma função linear $x + a$ aparece p vezes em denominador então, para este fator, devem tomar-se uma soma de p termos da forma

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x + a)^k}\,, \tag{6.59}$$

em que os A_s' são constantes. Para cada fator linear repetido tomar-se-à uma soma deste tipo.

CASO 3. O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.

EXEMPLO 5. Integrar $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1}\,dx$.

Resolução. O denominador pode ser apresentado na forma $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, em que $x^2 + x + 1$ é irredutível e tentemos uma decomposição da forma

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}\,.$$

Na fração com o denominador $x^2 + x + 1$ escrevemos no numerador um polinómio de grau unidade, $Bx + C$, a fim de se terem tantas equações como constantes quando se determinam A, B e C. Desembaraçando de denominadores e calculando A, B e C, encontramos $A = 1$, $B = 2$

e $C = 3$. Deste modo podemos escrever

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1}\, dx = \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}\, dx\,.$$

O primeiro integral do segundo membro é $\log|x - 1|$. Para calcular o segundo integral escreve-se:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}\, dx = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx + \int \frac{2}{x^2 + x + 1}\, dx$$

$$= \log(x^2 + x + 1) + 2\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,.$$

Se fizermos $u = x + \dfrac{1}{2}$ e $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, o último integral é

$$2\int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{2}{\alpha}\ \text{arctg}\ \frac{u}{\alpha} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\ \text{arctg}\ \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\,.$$

Portanto, temos

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1}\, dx = \log|x - 1| + \log(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\ \text{arctg}\ \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

CASO 4. O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis, alguns dos quais estão repetidos. A situação aqui é análoga à do caso 2. Da decomposição em frações de $f(x)/g(x)$ admitimos, em primeiro lugar, uma soma da forma (6.59) para cada fator linear, como já foi dito. Além disso, se um fator quadrático irredutível $x^2 + bx + c$ se repete m vezes, admitimos que se pode decompor numa soma de m termos da forma

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + bx + c)^k}\,,$$

em que cada numerador é um polinómio linear.

EXAMPLE 6. Integrar $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x - 1)(x^2 + 2)^2}\, dx$.

Resolução. Escrevemos

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x - 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}\,.$$

Desembaraçando de denominadores e determinando A, B, C, D, E obtemos

$$A = \tfrac{1}{3}, \qquad B = \tfrac{2}{3}, \qquad C = -\tfrac{1}{3}, \qquad D = -1, \qquad E = 0\,.$$

Resulta pois

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+2}\,dx - \int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2} + C\,.\end{aligned}$$

Os exemplos anteriores são típicos do que habitualmente acontece. O problema da integração duma função racional própria reduz-se assim ao do cálculo de integrais da forma

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n}\,, \qquad \int \frac{x\,dx}{(x^2+bx+c)^m}\,, \qquad \text{e} \qquad \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}\,.$$

O primeiro integral é $\log|x + a|$ se $n = 1$ e $(x + a)^{n-1}/(1 - n)$ se $n > 1$. Para calcular os outros dois integrais, escreve-se a forma quadrática como uma soma de quadrados da forma

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = u^2 + \alpha^2\,,$$

onde $u = x + b/2$ e $\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}$. (Isto é possivel porque $4c - b^2 > 0$). A substituição $u = x + b/2$ reduz o problema ao da determinação de

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+\alpha^2)^m} \qquad \text{e} \qquad \int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m}\,. \tag{6.60}$$

O primeiro é $\dfrac{1}{2}\log(u^2 + \alpha^2)$ se $m = 1$, e $\dfrac{1}{2}(u^2 + \alpha^2)^{1-m}/(1 - m)$ se $m > 1$. Quando $m = 1$, o segundo integral em (6.60) é calculado pela fórmula

$$\int \frac{du}{u^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\,\text{arctg}\,\frac{u}{\alpha} + C\,.$$

O caso em que $m > 1$ pode reduzir-se aquele em que $m = 1$ por aplicação repetida da fórmula

$$\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} = \frac{1}{2\alpha^2(m-1)}\frac{u}{(u^2+\alpha^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2\alpha^2(m-1)}\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m-1}},$$

a qual se obtém por integração por partes. Esta discussão permite concluir que toda a função racional pode ser integrada em termos de polinómios, funções racionais, arco tangentes e logaritmos.

6.24. Integrais que podem ser transformados em integrais de funções racionais

Uma função de duas variáveis definida por

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} a_{m,n} x^m y^n$$

diz-se um *polinómio de duas variáveis.* O quociente de dois destes polinómios chama-se *função racional de duas variáveis.* Integrais da forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$, em que R é uma função racional de duas variáveis, podem reduzir-se pela substituição $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ em integrais da forma $\int r(u)du$ com r uma função racional duma variável. O último integral pode ser calculado por aplicação das técnicas que acabámos de descrever. Vamos ilustrar o método com um exemplo particular.

EXEMPLO 1. Integrar $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx.$

Resolução. A substituição $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ permite escrever

$$x = 2 \operatorname{arctg} u\,, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du\,,$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{\sec^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2 \frac{1}{2}x} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

e

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{2u + 1 - u^2}{1+u^2}.$$

Assim temos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = -2\int \frac{du}{u^2 - 2u - 1} = -2\int \frac{du}{(u-a)(u-b)},$$

com $a = 1 + \sqrt{2}$ e $b = 1 - \sqrt{2}$. O método da decomposição em frações simples conduz-nos a

$$\int \frac{du}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b} \right) du$$

e porque $a - b = 2\sqrt{2}$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{u-b}{u-a} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x - 1 - \sqrt{2}} \right| + C. \quad (6.61)$$

O resultado final pode simplificar-se um pouco pela utilização de identidades trigonométricas adequadas. Em primeiro lugar notemos que $\sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg} \pi/8$, de modo que o numerador da última fração em (6.61) é $\operatorname{tg} x/2 + \operatorname{tg} \pi/8$. No denominador escrevemos

$$\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2} \right| = (\sqrt{2} + 1) \left| (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| = (\sqrt{2} + 1) \left| 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right|.$$

Tomando logaritmos, como se indica em (6.61), podemos associar o termo $-\frac{1}{2}\sqrt{2}\log(\sqrt{2} + 1)$ com a constante arbitrária e escrever novamente (6.61) como segue:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C.$$

Na seção anterior deduzimos a fórmula de integração

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x$$

como numa consequência da fórmula de derivação de arcsen x. A presença do arcsen x sugere que podemos também calcular este integral pela substituição trigonométrica $t =$ arc sen x. Temos então

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad dx = \cos t \, dt, \qquad \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \cos t,$$

e encontramos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos t} = \int dt = t = \operatorname{arcsen} x.$$

Esta é sempre uma boa substituição a tentar se a função integranda contém $\sqrt{1 - x^2}$. Em geral, qualquer integral da forma $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, em que R é uma função racional de duas variáveis, pode transformar-se, pela substituição

$$x = a \operatorname{sen} t, \qquad dx = a \cos t \, dt,$$

num integral da forma $\int R(a \operatorname{sen} t,\ a \cos t)\ a \cos t\ dt$. Este, por sua vez pode sempre ser calculado por um dos métodos já descritos.

EXEMPLO 2. Integrar $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$.

Resolução. Seja $x = 2 \operatorname{sen} t$, $dx = 2 \cos t dt$, $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$; então

$$\int \frac{x\,dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{4 \operatorname{sen} t \cos t\,dt}{4 \cos^2 t + 2 \cos t} = \int \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{\cos t + \frac{1}{2}}$$
$$= -\log |\tfrac{1}{2} + \cos t| + C = -\log (1 + \sqrt{4 - x^2}) + C.$$

O mesmo método resulta igualmente para integrais da forma

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - (cx + d)^2})\,dx\ ;$$

utiliza-se a substituição trignométrica $cx + d = a \operatorname{sen} t$.

Podemos tratar duma maneira semelhante com integrais da forma

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + (cx + d)^2})\,dx$$

pela substituição $cx + d = a \operatorname{tg} t$, $c\,dx = a \sec^2 t\,dt$. Para integrais da forma

$$\int R(x, \sqrt{(cx + d)^2 - a^2})\,dx\ ,$$

usamos a substituição $cx + d = a \sec t$, $c\,dx = a \sec t \operatorname{tg} t\,dt$. Em qualquer dos casos, a nova função integranda vem uma função racional em sen t ou cos t.

6.25. Exercícios

Calcular os seguintes integrais:

1. $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}.$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3 - 3x + 2}.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 7}{(x+1)(2x+1)^3}\, dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\, dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{x^4\, dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$

8. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 + x}\, dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

11. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(x+1)^2}.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - x}.$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{x^2 + x - 6}.$

14. $\displaystyle\int \frac{(x+2)\, dx}{x^2 - 4x + 4}.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$

16. $\displaystyle\int \frac{(x-3)\, dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}.$

18. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^3 - 1}\, dx.$

19. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)^2}\, dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 2x^3}.$

21. $\displaystyle\int \frac{1 - x^3}{x(x^2 + 1)}\, dx.$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$

25. $\displaystyle\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\, dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x + 5}.$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + a\cos x}$ $\quad (0 < a < 1).$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + a\cos x}$ $\quad (a > 1).$

29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^2 x}{1 + \mathrm{sen}^2 x}\, dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\,\mathrm{sen}^2 x + b^2\cos^2 x}$ $\quad (ab \neq 0).$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x)^2}$ $\quad (a \neq 0).$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}\,x\, dx}{1 + \cos x + \mathrm{sen}\,x}.$

33. $\displaystyle\int \sqrt{3 - x^2}\, dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}\, dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3 - x^2}}{x}\, dx.$

36. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}\, dx.$

37. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}.$

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2 - x - x^2}}{x^2}\, dx.$

[*Sugestão:* No exercício 40, multiplicar e dividir a função integranda por $\sqrt{2 - x - x^2}$.]

6.26. Exercícios de revisão

1. Seja $f(x) = \int_1^x (\log t)/(t+1)\, dt$ se $x > 0$. Calcular $f(x) + f(1/x)$. Como prova verificarse $f(2) + f(1/2) = 1/2 \log^2 2$.
2. Determinar uma função f, contínua para todo o valor de x(e não nula para qualquer x), tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\operatorname{sen} t}{2 + \cos t}\, dt\,.$$

3. Tentar o cálculo de $\int e^x/x\, dx$ aplicando o método de integração por partes.
4. Integrar $\int_0^{\pi/2} \log (e^{\cos x})\, dx$.
5. Uma função f está definida pela equação

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x + 2}{x(x+1)(x+2)}} \qquad \text{se} \quad x > 0\,.$$

   (a) Calcular o declive da curva de f no ponto $x = 1$.
   (b) A região do plano limitada por $0X$ e a curva relativa ao intervalo $[1, 4]$ é rodada em torno de $0X$, gerando um sólido de revolução. Escrever um integral para o volume deste sólido. Calcular este integral e mostrar que o seu valor é $\pi \log(25/8)$.
6. Uma função F é definida pelo integral indefinido

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt \qquad \text{se} \quad x > 0\,.$$

   (a) Para que valores de x é válido $\log x \leq F(x)$?
   (b) Provar que $\int_1^x e^t/(t+a)\, dt = e^{-a}[F(x+a) - F(1+a)]$.
   (c) De modo análogo, exprimir os seguintes integrais em função de F.

$$\int_1^x \frac{e^{at}}{t}\, dt, \qquad \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\, dt, \qquad \int_1^x e^{1/t}\, dt\,.$$

7. Para cada alínea dar um exemplo duma função contínua f satisfazendo às condições fixadas para todo o real x, ou então explicar porquê não existe tal função:
   (a) $\int_0^x f(t)\, dt = e^x$.
   (b) $\int_0^{x^2} f(t)\, dt = 1 - 2^{x^2}$. $\quad$ [2^{x^2} significa $2^{(x^2)}$.]
   (c) $\int_0^x f(t)\, dt = f^2(x) - 1$.
8. Se $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo x e y e se $f(x) = 1 + xg(x)$, em que $g(x) \to 1$ quando $x \to 0$, provar que: (a) $f'(x)$ existe para todo o x, e (b) $f(x) = e^x$.
9. Dada uma função g que admite derivada $g'(x)$ para todo o x real e que satisfaz às seguintes equações:

$$g'(0) = 2 \text{ e } g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) \text{ para quaisquer } x \text{ e } y.$$

(a) Mostrar que $g(2x) = 2e^x g(x)$ e encontrar uma fórmula semelhante para $g(3x)$.
(b) Generalizar (a) determinando uma fórmula relacionando $g(nx)$ com $g(x)$, válida para todo o inteiro positivo n. Provar o resultado por indução.
(c) Mostrar que $g(0) = 0$ e encontrar o limite de $g(h)/h$ quando $h \to 0$.
(d) Existe uma constante C tal que $g'(x) = g(x) + Ce^x$ para todo o x. Provar esta afirmação e calcular o valor de C. [*Sugestão:* Usar a definição da derivada $g'(x)$.]

10. Uma função periódica com período a verifica $f(x+a) = f(x)$ para todo o x no seu domínio. Que pode concluir-se acerca duma função que admite derivada para todo o valor de x e satisfaz a uma equação da forma

$$f(x+a) = bf(x)$$

para todo o x, sendo a e b constantes?

11. Aplicar a derivação logaritmica para estabelecer as fórmulas de derivação de produtos e quocientes a partir das correspondentes fórmulas para somas e diferenças.

12. Seja $A = \int_0^1 e^t/(t+1)\, dt$. Exprimir os valores dos integrais seguintes, em função de A:

(a) $\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{e^{-t}}{t-a-1}\, dt.$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+1)^2}\, dt.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{te^{t^2}}{t^2+1}\, dt.$ (d) $\displaystyle\int_0^1 e^t \log(1+t)\, dt.$

13. Sejam $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ e $f(x) = e^x p(x)$.
(a) Provar que $f^{(n)}(0)$, a derivada de ordem n de f no ponto zero, é $c_0 + nc_1 + n(n-1)c_2$.
(b) Resolver o problema quando p é um polinómio de grau 3.
(c) Generalizar para um polinómio de grau m.

14. Seja $f(x) = x \operatorname{sen} ax$. Mostrar que $f^{(2n)}(x) = (-1)^n (a^{2n} x \operatorname{sen} ax - 2na^{2n-1} \cos ax)$.

15. Provar que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}.$$

[*Sugestão:* $1/(k+m+1) = \int_0^1 t^{k+m}\, dt$.]

16. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Determinar uma fórmula (ou fórmulas) para calcular $F(x)$ para todo o real x se f se define do modo seguinte:

(a) $f(t) = (t + |t|)^2$. (c) $f(t) = e^{-|t|}$.

(b) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{se } |t| \le 1, \\ 1 - |t| & \text{se } |t| > 1. \end{cases}$ (d) $f(t) =$ ao maximo de 1 e t^2.

17. Um sólido de revolução é gerado pela rotação da curva duma função contínua f, relativa ao intervalo $[0, a]$, em torno do eixo OX. Se, para cada $a > 0$, o volume é $a^2 + a$ determinar f.

18. Seja $f(x) = e^{-2x}$ para todo o x. Representar por $S(t)$ o conjunto de ordenadas de f relativo ao intervalo $[0, t]$, em que $t > 0$. Seja $A(t)$ a área de $S(t)$, $V(t)$ o volume do sólido obtido por rotação de $S(t)$ em torno de OX e $W(t)$ o volume do sólido obtido por rotação de $S(t)$ em torno do eixo OY. Calcular: (a) $A(t)$; (b) $V(t)$; (c) $W(t)$; (d) $\lim_{t \to 0} V(t)/A(t)$.

19. Seja c um número tal que $\operatorname{sh} c = \frac{3}{4}$. (Não calcular c). Em cada alínea determinar todos os valores de x (se existir algum) verificando a equação dada. Exprimir as respostas em função de log 2 e log 3.

(a) $\log(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) = c.$ (b) $\log(e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}) = c.$

20. Dizer se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa. Demonstrar as que foram verdadeiras.

(a) $2^{\log 5} = 5^{\log 2}$.

(b) $\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_2 3}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1} k^{-1/2} < 2\sqrt{n}$ para $n \geq 1$.

(d) $1 + \operatorname{sh} x \leq \operatorname{ch} x$ para cada x.

Nos Exercícios 21 a 24, estabelecer cada desigualdade examinando o sinal da derivada duma função conveniente.

21. $\dfrac{2}{\pi} x < \operatorname{sen} x < x$ se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

22. $\dfrac{1}{x + \frac{1}{2}} < \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$ se $x > 0$.

23. $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x$ se $x > 0$.

24. $(x^b + y^b)^{1/b} < (x^a + y^a)^{1/a}$ se $x > 0, y > 0$, e $0 < a < b$.

25. Demonstrar que

(a) $\int_0^x e^{-t}\, t\, dt = e^{-x}(e^x - 1 - x)$.

(b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t} t^2\, dt = 2!e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right)$.

(c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t} t^3\, dt = 3!e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right)$.

(d) Enunciar a generalização sugerida e demonstrá-la por indução.

26. Se a, b, a_1, b_1 são dados, com $ab \neq 0$, mostrar que existem constantes A, B, C tais que

$$\int \frac{a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}\, dx = Ax + B \log |a \operatorname{sen} x + b \cos x| + C.$$

[*Sugestão:* Provar que existem A e B tais que

$$a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x = A(a \operatorname{sen} x + b \cos x) + B(a \cos x - b \operatorname{sen} x).]$$

27. Em cada alínea, determinar uma função f que satisfaça às condições dadas:

(a) $f'(x^2) = 1/x$ para $x > 0$, $f(1) = 1$.
(b) $f'(\text{sen}^2 x) = \cos^2 x$ para todo x, $f(1) = 1$.
(c) $f'(\text{sen}\, x) = \cos^2 x$ para todo x, $f(1) = 1$.
(d) $f'(\log x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{para } x > 1, \end{cases}$ $f(0) = 0$.

28. Uma função, chamada o *logaritmo integral* e representado por Li, é definida como segue

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad \text{se} \quad x \geq 2\,.$$

Esta função aparece na teoria analítica dos números, onde se prova que Li(x) é uma aproximação muito boa para a quantidade números primos $\leqq x$. Demonstrar as propriedades seguintes de Li(x):

(a) $\text{Li}(x) = \dfrac{x}{\log x} + \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{2}{\log 2}\,.$

(b) $\text{Li}(x) = \dfrac{x}{\log x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!\, x}{\log^{k+1} x} + n! \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} + C_n\,,$

onde C_n é uma constante (dependendo de n). Determinar esta constante.

(c) Provar que existe uma constante b tal que $\int_b^{\log x} e^t/t\, dt = \text{Li}(x)$ e calcular o valor de b.

(d) Exprimir $\int_c^x e^{2t}/(t-1)\, dt$ em função do logaritmo integral, com $c = 1 + \dfrac{1}{2} \log 2$.

(e) Seja $f(x) = e^4\, \text{Li}\,(e^{2x-4}) - e^2\, \text{Li}\,(e^{2x-2})$ se $x > 3$. Provar que:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,.$$

29. Seja $f(x) = \log |x|$ se $x < 0$. Provar que f admite inversa e representá-la por g. Qual é o domínio de g? Determinar uma fórmula para calcular $g(y)$ para todo o y no domínio de g. Traçar o gráfico de g.

30. Seja $f(x) = \int_0^x (1 + t^3)^{-1/2}\, dt$ se $x \geq 0$. (Não efetuar o cálculo do integral).

(a) Demonstrar que f é estritamente crescente no eixo real não negativo.
(b) Designar por g a inversa de f. Demonstrar que a derivada de segunda ordem de g é proporcional a g^2 [isto é, $g''(y) = cg^2(y)$ para cada y no domínio de g] e determinar a constante de proporcionalidade.

7

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE FUNÇÕES

7.1. Introdução

Os polinómios figuram entre as funções mais simples que se estudam na Análise. São adequados para trabalhar em cálculos numéricos porque os seus valores podem ser obtidos pela efetivação dum número finito de multiplicações e adições. No Capítulo 6 mostrou-se que a função logaritmo pode ser aproximada por polinómios, o que torna possivel o cálculo de logaritmos com qualquer grau de precisão. Neste capítulo mostraremos que muitas outras funções, tais como a função exponencial e as funções trigonométricas, podem também ser aproximadas por polinómios. Se a diferença entre uma função e a sua aproximação polinomial é suficientemente pequena, então podemos, com vista às aplicações, operar com o polinómio em vez de o fazer com a função original.

Existem muitas maneiras para aproximar uma dada função f por polinómios, dependendo a escolha do uso que haja de fazer-se da aproximação. Neste capítulo devemos interessar-nos na obtenção dum polinómio que coincida com f e algumas das suas derivadas, num dado ponto. Vamos iniciar o estudo com um exemplo simples.

Suponhamos f uma função exponencial, $f(x) = e^x$. No ponto $x = 0$, a função f e todas as suas derivadas tomam o valor 1. O polinómio linear

$$g(x) = 1 + x$$

também verifica $g(0) = 1$ e $g'(0) = 1$, de maneira que coincide com f e com a sua primeira derivada em 0. Geometricamente isto significa que o gráfico de g é a tangente a f no ponto (0, 1), como se indica na fig. 7.1.

Se aproximamos f por um polinómio quadrático Q, o qual coincide com f e as suas duas primeiras derivadas em 0, poderemos esperar uma melhor aproximação para f do que com a função linear g, pelo menos nas proximidades de (0, 1). O polinómio

$$Q(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

verifica $Q(0) = 1$, $Q'(0) = 1$ e $Q''(0) = f''(0) = 1$. A fig. 7.1 mostra que o gráfico de Q se aproxima mais da curva $y = e^x$ do que a reta $y = 1 + x$ nas proximidades do ponto (0, 1). Podemos tentar melhorar a aproximação, usando polinómios que coincidem com f, bem como também com as derivadas de terceira ordem e superiores. É fácil verificar que o polinómio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{7.1}$$

coincide com a função exponencial e igualmente coincidem as respetivas derivadas até à ordem n, no ponto $x = 0$. Evidentemente, antes de podermos utilizar tais polinómios para

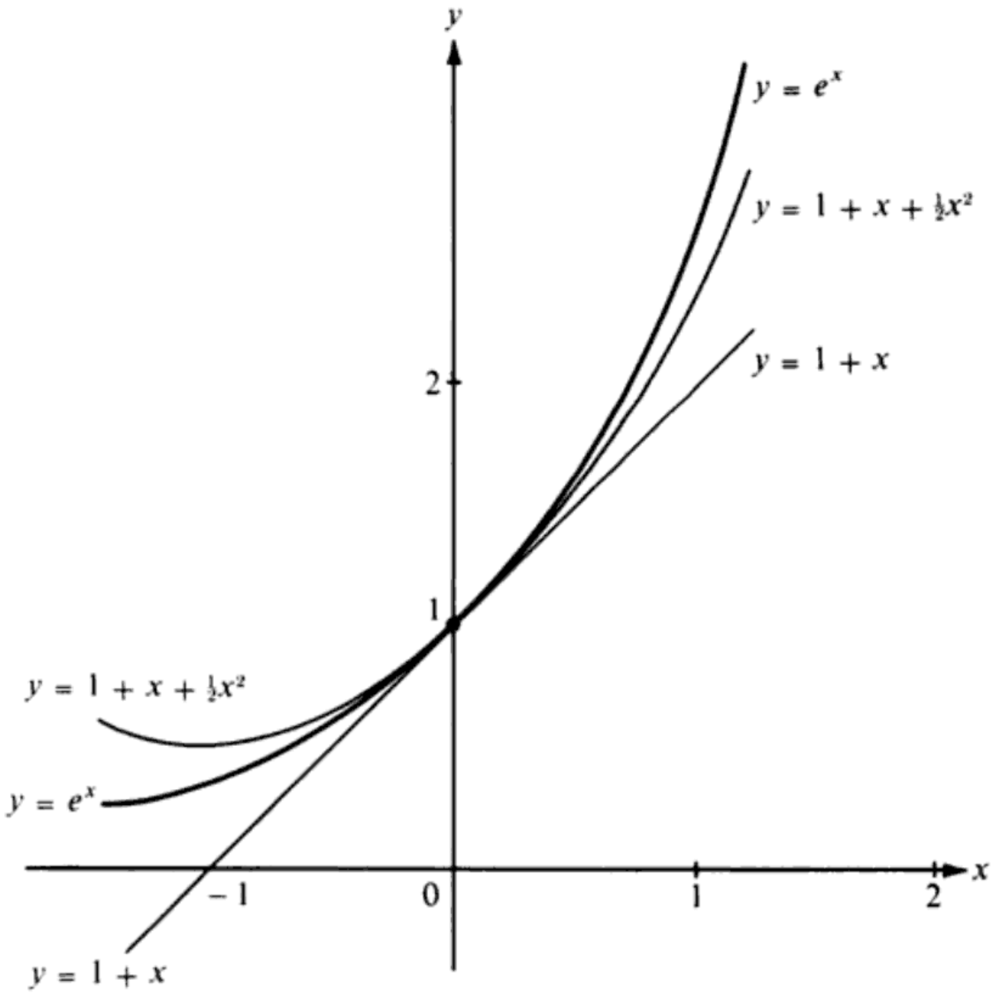


Fig. 7.1. Aproximações polinomiais para a curva $y = e^x$ nas proximidades de (0, 1).

calcular valores aproximados da função exponencial, necessitamos alguma informação acerca do erro cometido na aproximação. Em vez de continuarmos a discutir este exemplo particular com mais pormenor, voltamos de novo à teoria geral.

7.2. Polinómios de Taylor gerados por uma função

Suponhamos que f admite derivadas até à ordem n no ponto $x = 0$, sendo $n \geq 1$, e tentemos determinar um polinómio P que coincida com f no ponto $x = 0$, bem como as respectivas derivadas até à ordem n. Devem então ser verificadas $n + 1$ condições, a saber

$$P(0) = f(0)\,, \qquad P'(0) = f'(0), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\,, \tag{7.2}$$

e assim ensaiamos um polinómio de grau n, por exemplo

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n\,, \tag{7.3}$$

com $n + 1$ coeficientes a serem determinados servindo-nos das condições (7.2).

Primeiramente fazemos $x = 0$ em (7.3) e determinamos $P(0) = c_0$, pelo que $f(0) = c_0$. Em seguida derivamos ambos os membros de (7.3), fazendo depois $x = 0$ para determinarmos $P'(0) = c_1$; daqui resulta que $c_1 = f'(0)$. Derivando novamente (7.3) e fazendo $x = 0$, obtemos $P''(0) = 2c_2$ e assim $c_2 = f''(0)/2$. Depois de ter derivado k vezes, determinamos $P^k(0) = k!\, c_k$, donde resulta a fórmula

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{7.4}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. [Quando $k = 0$, interpretamos $f^{(0)}$ (0) como significando $f(0)$]. Este raciocínio prova que se existe um polinómio de grau $\leq n$ que satisfaz a (7.2), então os seus coeficientes são necessariamente definidos por (7.4). (O grau de P será igual a n se e só se $f^{(n)}(0) \neq 0$). Inversamente, é fácil verificar que o polinómio P cujos coeficientes são definidos por (7.4) satisfazem a (7.2) e por conseguinte temos o teorema seguinte.

TEOREMA 7.1. *Se f é uma função admitindo derivadas até à ordem n no ponto $x = 0$, então existe um e um só polinómio P de grau $\leq n$ o qual satisfaz às $n + 1$ condições*

$$P(0) = f(0)\,, \qquad P'(0) = f'(0), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\,.$$

Este polinómio é definido pela fórmula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\,.$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que existe um e um só polinómio de grau $\leq n$ que coincide com f e as suas n primeiras derivadas num ponto $x = a$. Com efeito, em vez de (7.3), podemos escrever P ordenado segundo potências de $(x - a)$ e proceder como antes. Se calculamos as derivadas em a em vez de 0, somos conduzidos ao polinómio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k\,. \tag{7.5}$$

Este é o único polinómio de grau $\leq n$ que verifica as condições

$$P(a) = f(a)\,, \qquad P'(a) = f'(a), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,,$$

e chama-se o *polinómio de Taylor* em honra ao matemático Brook Taylor (1685-1731). Com maior rigor dizemos que o polinómio (7.5) é o *polinómio de Taylor de grau n gerado por f no ponto a*.

É conveniente usar uma notação que indique a dependência do polinómio de Taylor P a respeito de f e n. Indicaremos esta dependência escrevendo $P = T_n f$ ou $P = T_n(f)$. O símbolo T_n é chamado o *operador de Taylor* de grau n. O valor desta função em x representa-se por $T_n f(x)$ ou por $T_n[f(x)]$. Se desejamos também indicar a dependência a respeito de a, escrevemos $T_n f(x; a)$, em vez de $T_n f(x)$.

EXEMPLO 1. Quando f é a função exponencial, $f(x) = E(x) = e^x$, temos $E^{(k)}(x) = e^x$ para todo o k, pelo que $E^{(k)}(0) = e^0 = 1$ e o polinómio de Taylor de grau n gerado por E em 0 é dado pela fórmula

$$T_n E(x) = T_n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Se desejamos um polinómio que coincide com E e as suas derivadas no ponto $a = 1$, temos $E^{(k)}(1) = e$ para todo o k, pelo que (7.5) nos dá

$$T_n E(x; 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

EXEMPLO 2. Quando $f(x) = \operatorname{sen} x$, temos $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, etc., de maneira que $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ e $f^{(2n)}(0) = 0$. Assim aparecem somente potências ímpares de x nos polinómios de Taylor gerados pela função seno em 0. O polinomio de Taylor de grau $2n + 1$ tem a forma

$$T_{2n+1}(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

EXEMPLO 3. Argumentando como no Exemplo 2, verificamos que o polinómio de Taylor gerado pelo cosseno em 0 contém unicamente potências pares de x. O polinómio de grau $2n$ é dado por

$$T_{2n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Observe-se que o polinómio de Taylor $T_{2n}(\cos x)$ é a derivada do polinómio de Taylor $T_{2n+1}(\operatorname{sen} x)$. Isto deve-se ao fato de que o próprio cosseno é a derivada do seno. Na seção seguinte aprenderemos que certas relações que são válidas entre funções se transmitem aos respetivos polinómios de Taylor.

7.3. Cálculo de polinómios de Taylor

Se uma função f admite derivadas até à ordem n num ponto a, podemos sempre formar o seu polinómio de Taylor $T_n f$ pela fórmula

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .$$

Por vezes o cálculo das derivadas $f^{(k)}(a)$ torna-se muito trabalhoso, pelo que é desejável dispôr de outros métodos para determinar os polinómios de Taylor. O teorema que apresentamos a seguir dá-nos propriedades do operador de Taylor que muitas vezes nos permitem obter novos polinómios de Taylor a partir de outros dados. Neste teorema subentende-se que todos os polinómios de Taylor são gerados num mesmo ponto a.

TEOREMA 7.2. *O operador de Taylor possui as seguintes propriedades: (a) Linearidade. Se c_1 e c_2 são constantes, então*

$$T_n(c_1 f + c_2 g) = c_1 T_n(f) + c_2 T_n(g) .$$

(b) Derivação. A derivada de um polinómio de Taylor de f é um polinómio de Taylor de f' isto é, tem-se

$$(T_n f)' = T_{n-1}(f') .$$

(c) Integração. Um integral indefinido de um polinómio de Taylor de f é um polinómio de Taylor dum integral indefinido de f. Mais exatamente, se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, então tem-se

$$T_{n+1} g(x) = \int_a^x T_n f(t)\, dt .$$

Demonstração. Cada proposição (a), (b) ou (c), é uma equação ligando dois polinómios do mesmo grau. Para demonstrar cada proposição, obervamos que o polinómio que figura no primeiro membro tem o mesmo valor e as mesmas derivadas no ponto a que o do segundo membro. Então basta que se invoque a propriedade da unicidade do Teorema 7.1. Observe-se que a derivação dum polinómio reduz o seu grau, enquanto que a integração o aumenta.

O teorema seguinte diz-nos o que se verifica quando substituímos x por cx num polinómio de Taylor.

TEOREMA 7.3. *Propriedade de substituição. Seja $g(x) = f(cx)$, com c uma constante. Tem-se então*

$$T_n g(x; a) = T_n f(cx; ca) .$$

Em particular, quando $a = 0$, tem-se $T_n g(x) = T_n f(cx)$.

Demonstração. Uma vez que $g(x) = f(cx)$, a regra da derivada da função composta dá-nos

$$g'(x) = cf'(cx), \qquad g''(x) = c^2f''(cx), \qquad \ldots, \qquad g^{(k)}(x) = c^kf^{(k)}(cx).$$

Daqui resulta

$$T_ng(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(ca)}{k!}(cx-ca)^k = T_nf(cx;ca).$$

EXEMPLOS. Substituindo x por $-x$ no polinómio de Taylor para e^x, encontramos que

$$T_n(e^{-x}) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Já que $x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, podemos servir-nos da propriedade da linearidade para obtermos

$$T_{2n}(\text{ch } x) = \tfrac{1}{2}T_{2n}(e^x) + \tfrac{1}{2}T_{2n}(e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A propriedade de derivação dá-nos

$$T_{2n-1}(\text{sh } x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

O teorema que passamos a estudar é também útil na simplificação dos cálculos de polinómios de Taylor.

TEOREMA 7.4. *Seja P_n um polinómio de grau $n \geq 1$. Sendo f e g duas funções admitindo derivadas até à ordem n em 0 e supondo-se que*

$$f(x) = P_n(x) + x^ng(x), \tag{7.6}$$

em que $g(x) \to 0$ quando $x \to 0$, então P_n é o polinómio de Taylor gerado por f em 0.

Demonstração. Façamos $h(x) = f(x) - P_n(x) = x^n g(x)$. Por derivação do produto $x^n g(x)$ repetidas vezes, vemos que h e a suas n primeiras derivadas são 0 para $x = 0$. Portanto, f coincide com P_n e as n primeiras derivadas em 0, de maneira que $P_n = T_nf$, como se afirmou.

EXEMPLOS. A partir da identidade

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \tag{7.7}$$

válida para qualquer $x \neq 1$, vemos que (7.6) é verificada com $f(x) = 1/(1-x)$, $P_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$, e $g(x) = x/(1-x)$. Visto que $g(x) \to 0$ quando $x \to 0$, o Teorema 7.4 diz-nos que

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Integrando membro a membro esta igualdade obtemos outro polinómio de Taylor

$$T_{n+1}[-\log(1-x)] = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Em (7.7) podemos substituir x por $-x^2$ para obtermos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}.$$

Aplicando o Teorema 7.4 uma vez mais, concluímos que

$$T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}.$$

Por integração desta igualdade somos conduzidos à fórmula

$$T_{2n+1}(\operatorname{arctg} x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

7.4. Exercícios

1. Traçar os gráficos dos polinómios de Taylor $T_3(\operatorname{sen} x) = x - x^3/3!$ e $T_5(\operatorname{sen} x) = x - x^3/3! + x^5/5!$. Prestar especial atenção aos pontos em que as curvas intersetam o eixo OX. Comparar estes gráficos com o de $f(x) = \operatorname{sen} x$.
2. O mesmo problema do exercício anterior para os polinómios de Taylor $T_2(\cos x)$, $T_4(\cos x)$ e $f(x) = \cos x$.

Nos Exercícios 3 a 10, determinar os polinómios de Taylor que se indicam. Em cada caso subentende-se que $f(x)$ se define para os valores de x para os quais $f(x)$ é provida de significado. Os Teoremas 7.2, 7.3 e 7.4 auxiliarão, em alguns casos, a simplificar os cálculos.

3. $T_n(a^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log a)^k}{k!} x^k.$

4. $T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$

5. $T_{2n+1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}.$

6. $T_n [\log(1+x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$

7. $T_{2n+1}\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$

8. $T_n\left(\frac{1}{2-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}.$

9. $T_n[(1+x)^\alpha] = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k,$ onde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$

10. $T_{2n}(\operatorname{sen}^2 x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$ [*Sugestão:* $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.]

7.5. Fórmula de Taylor com resto

Voltamos agora a nossa atenção para o análise do erro cometido na aproximação duma função f pelo seu polinómio de Taylor $T_n f$ num dado ponto a. O erro é definido pela diferença $E_n(x) = f(x) - T_n f(x)$. Deste modo, se f admite derivada de ordem n em a, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x). \tag{7.8}$$

igualdade que é conhecida por *fórmula de Taylor com resto* $E_n(x)$, e que é de utilidade quando pretendemos avaliar a grandeza do erro $E_n(x)$. Definiremos o erro por intermédio dum integral e então avaliamos a grandeza desse integral. Para exemplificar as ideias principais, consideremos em primeiro lugar o erro resultante duma aproximação linear.

TEOREMA 7.5. *Se f admite derivada de segunda ordem f'', contínua numa certa vizinhança de a, então, para todo o x nessa vizinhança, tem-se*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x),$$

com

$$E_1(x) = \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

Demonstração. De acordo com a definição de erro podemos escrever

$$E_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f'(t)\,dt - f'(a)\int_a^x dt = \int_a^x [f'(t) - f'(a)]\,dt.$$

O último integral pode escrever-se na forma $\int_a^x u\,dv$, fazendo $u = f'(t) - f'(a)$ e $v = t - x$. Assim $du/dt = f''(t)$, $dv/dt = 1$ e integrando por partes vem

$$E_1(x) = \int_a^x u\,dv = uv\Big|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt = \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt\,,$$

uma vez que $u = 0$ quando $t = a$ e $v = 0$ quando $t = x$ e o teorema está demonstrado.

O resultado correspondente para um polinómio de aproximação de grau n é dado pelo seguinte

TEOREMA 7.6. *Se f tem derivada contínua de ordem $n + 1$ num certo intervalo contendo a, então, para todo o x desse intervalo, tem-se a fórmula de Taylor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x)\,,$$

com

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Demonstração. O teorema demonstra-se por indução a respeito de n. Já o demonstrámos para $n = 1$. Agora supondo que é verdadeiro para algum n, vamos demonstrá-lo para $n + 1$. A formula de Taylor (7.8) escrita com $n + 1$ e com n e subtraindo membro a membro permite obter

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Servindo-nos agora da expressão de $E_n(x)$ e tendo em conta que $(x-a)^{n+1}/(n+1) = \int_a^x (x-t)^n\,dt$, obtemos

$$\begin{aligned}E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n[f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)]\,dt\,.\end{aligned}$$

O último integral pode escrever-se na forma $\int_a^x u\,dv$ com $u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)$ e $v = -(x-t)^{n+1}/(n+1)$. Integrando por partes e notando que $u = 0$ quando $t = a$ e que $v = 0$ quando $t = x$, obtemos

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x u\,dv = -\frac{1}{n!}\int_a^x v\,du = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\,.$$

Isto completa a passagem de n a $n + 1$, pelo que o teorema é verdadeiro para todo o $n \geq 1$.

7.6. Estimativa do erro na fórmula de Taylor

Visto que o erro $E_n(x)$, na fórmula de Taylor, foi expresso por um integral em que intervém a derivada de ordem $(n + 1)$ de f, necessitamos mais alguma informação relativa a $f^{(n+1)}$ antes que possamos estimar a grandeza de $E_n(x)$. Se forem conhecidos limites superior e inferior para $f^{(n+1)}$ podemos determinar os correspondentes limites superior e inferior para $E_n(x)$, como se indica no

TEOREMA 7.7. *Se a derivada de ordem $(n + 1)$ de f satisfaz às condições*

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \tag{7.9}$$

para todo o t em certo intervalo contendo a, então para cada x pertencente a esse intervalo têm-se as seguintes estimativas para o erro

$$m\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{se} \quad x > a\,, \tag{7.10}$$

e

$$m\,\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1}E_n(x) \leq M\,\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{se} \quad x < a\,. \tag{7.11}$$

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que $x > a$. Então o integral de $E_n(x)$ está estendido ao intervalo $[a, b]$. Para cada t neste intervalo tem-se $(x - t)^n \geq 0$, de modo que as desigualdades em (7.9) dão-nos

$$m\,\frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t) \leq M\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,.$$

Integrando de a a x obtemos

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt \leq E_n(x) \leq \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt\,. \tag{7.12}$$

A substituição $u = x - t$, $du = -dt$ dá-nos

$$\int_a^x (x-t)^n\,dt = \int_0^{x-a} u^n\,du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\,,$$

e assim (7.12) reduz-se a (7.10).

Se $x < a$, a integração vem estendida ao intervalo $[x, a]$. Para cada t neste intervalo temos $t \geq x$, de modo que $(-1)^n(x - t)^n = (t - x)^n \geq 0$. Portanto podemos multiplicar as desigualdades (7.9) pelo fator não negativo $(-1)^n (x-t)^n/n!$ e integrar de x até a para obtermos (7.11).

EXEMPLO 1. Se $f(x) = e^x$ e $a = 0$, temos a fórmula

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x) .$$

Visto que $f^{(n+1)}(x) = e^x$, a derivada $f^{(n+1)}(x)$ é monótona crescente em cada intervalo e portanto satisfaz às desigualdades $e^b \le f^{(n+1)}(t) \le e^c$ em cada intervalo da forma $[b, c]$. Num tal intervalo, as desigualdades para $E_n(x)$ do Teorema 7.7 são verificadas com $m = e^b$ e $M = e^c$. Em particular, quando $b = 0$, temos

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le E_n(x) \le e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{se} \quad 0 < x \le c .$$

Podemos usar estas estimativas para calcular o número de Euler e. Toma-se $b = 0$, $c = 1$, $x = 1$ e usamos a desigualdade $e < 3$ para obtermos

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + E_n(1) , \qquad \text{onde} \quad \frac{1}{(n+1)!} \le E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} . \tag{7.13}$$

Podemos deste modo calcular e com qualquer grau de precisão. Por exemplo, se desejamos calcular e com sete casas decimais escolhemos um n de maneira que $3/(n+1)! < \frac{1}{2}10^{-8}$ Verificaremos que basta $n = 12$. Uma tábua de valores de $1/n!$ pode ser facilmente calculada devido a que $1/n!$ pode calcular-se dividindo $1/(n-1)!$ por n. A tábua que a seguir se apresenta para $3 \le n \le 12$ contém esses números arredondados com nove casas decimais. O arredondamento está, em cada caso afetado por um mais ou por um menos, o que nos indica se ele foi efetuado por excesso ou por defeito. (Em qualquer hipótese, o erro é inferior a meia unidade da ordem da última casa decimal).

n	$\frac{1}{n!}$	n	$\frac{1}{n!}$
3	0,166 666 667 −	8	0,000 024 802 −
4	0,041 666 667 −	9	0,000 002 756 −
5	0,008 333 333 +	10	0,000 000 276 −
6	0,001 388 889 −	11	0,000 000 025 +
7	0,000 198 413 −	12	0,000 000 002 +

adição, subtração, multiplicação, divisão, ou composição. Outros exemplos que ocorrem mais frequentemente quer na teoria, quer na prática, são os integrais

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt\,, \qquad \int_0^x \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\,.$$

(No primeiro caso subentende-se que o quociente $(\operatorname{sen} t)/t$ tem que ser substituido por 1 quando $t = 0$. No terceiro caso, k é uma constante $0 < k < 1$.) Concluímos esta seção com um exemplo que mostra como a fórmula de Taylor pode ser usada para se obter uma boa estimativa do integral $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$.

EXEMPLO 3. A fórmula de Taylor para e^x com $n = 4$ dá-nos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + E_4(x)\,. \tag{7.15}$$

Suponhamos agora $x \le 0$. Num intervalo da forma $[-c, 0]$ tem-se $e^{-c} \le e^x \le 1$, de modo que podemos usar as desigualdades (7.11) do Teorema 7.7 com $m = e^{-c}$ e $M = 1$ para escrevermos

$$0 < (-1)^5 E_4(x) \le \frac{(-x)^5}{5!} \qquad \text{if} \quad x < 0\,.$$

Por outras palavras, se $x < 0$, então $E_4(x)$ é negativo e $\ge x^5/5!$ Substituindo x por $-t^2$ em (7.15), temos

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + E_4(-t^2)\,, \tag{7.16}$$

em que $-t^{10}/5! \le E_4(-t^2) < 0$. Se $0 \le t \le \frac{1}{2}$, encontramos que $t^{10}/5! \le (\frac{1}{2})^{10}/5! <$ $< 0{,}000009$. Então, se integramos (7.16) de 0 a $\frac{1}{2}$, obtemos

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 2^7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 2^9\cdot 4!} - \theta\,,$$

com $0 < \theta \le 0{,}0000045$. Arredondando para quatro decimais encontramos $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt =$ $= 0{,}4613$.

*7.7. Outras formas para o resto da fórmula de Taylor

Exprimimos o erro, na fórmula de Taylor, por meio de um integral

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Este resto pode ser expresso por várias outras formas diferentes. Visto que o fator $(x - t)$ na função integranda nunca muda de sinal no intervalo de integração, e ainda porque $f^{(n+1)}$ é contínua neste intervalo, o teorema da média pesada para integrais (Teorema 3.16) dá-nos

$$\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(c)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\,,$$

onde c pertence ao intervalo fechado $[a, x]$. Portanto o erro pode escrever-se

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Esta é a chamada forma de Lagrange para o resto. É de estrutura análoga aos anteriores termos da fórmula de Taylor, exceto que a derivada $f^{(n+1)}(c)$ é calculada em certo ponto c desconhecido em vez de a. O ponto c depende de x e de n, bem como de f.

Usando um tipo de argumentação diferente, podemos prescindir da continuidade de $f^{(n+1)}$ e deduzir a fórmula do resto de Lagrange e outras expressões para o resto sob uma hipótese mais fraca. Suponhamos que $f^{(n+1)}$ existe em certo intervalo aberto (h, k) contendo o ponto a, e que $f^{(n)}$ é contínua no intervalo fechado $[h, k]$. Escolhamos qualquer $x \neq a$ em $[h, k]$. Por comodidade, seja $x > a$. Fixemos x e definamos uma nova função F no intervalo $[a, x]$ do modo seguinte:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\,.$$

Observe-se que $F(x) = f(x)$ e $F(a) = T_n f(x; a)$, de modo que $F(x) - F(a) = E_n(x)$. A função F é contínua no intervalo fechado $[a, x]$ e derivável no intervalo aberto (a, x). Se calculamos $F'(t)$, tendo em conta que cada termo da soma definindo $F(t)$ é um produto, encontramos que todos os termos se anulam exceto um, pelo que nos resta a igualdade

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,.$$

Seja agora G qualquer função contínua em $[a, x]$ e derivável em (a, x). Então podemos aplicar a fórmula do valor médio de Cauchy (teorema 4.6) para escrever

$$G'(c)[F(x) - F(a)] = F'(c)[G(x) - G(a)]\,,$$

para algum c no intervalo (a, x). Se G' é não nula em (a, x), isto dá-nos a seguinte fórmula para o erro $E_n(x)$:

$$E_n(x) = \frac{F'(c)}{G'(c)}[G(x) - G(a)] .$$

Podemos representar o erro de várias maneiras por diferentes escolhas de *G*. Por exemplo, fazendo $G(t) = (x-t)^{n+1}$, obtemos o resto de Lagrange,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \text{onde} \quad a < c < x .$$

Tomando $G(t) = x - t$ obtemos outra fórmula, chamada o resto de Cauchy ,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a), \qquad \text{onde} \quad a < c < x .$$

Se $G(t) = (x-t)^p$, com $p \geq 1$, obtemos a fórmula

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p, \qquad \text{onde} \quad a < c < x .$$

7.8. Exercícios

Nos Exercícios 1, 2 e 3 apresentam-se exemplos de fórmulas de Taylor com resto. Em cada caso provar que o erro satisfaz às igualdades apresentadas.

1. $\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + E_{2n}(x), \qquad |E_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

2. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + E_{2n+1}(x), \qquad |E_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

3. $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + E_{2n}(x), \qquad |E_{2n}(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1.$

4. (a) Obter o número $r = \sqrt{15} - 3$ como uma aproximação de raiz não nula da equação $x^2 = \operatorname{sen} x$, utilizando o polinómio de Taylor do terceiro grau que aproxima $\operatorname{sen} x$.
(b) Provar que a aproximação na alínea (a) verifica a desigualdade

$$|\operatorname{sen} r - r^2| < \frac{1}{200},$$

dado que $\sqrt{15} - 3 < 0{,}9$. Será a diferença $(\operatorname{sen} r - r^2)$ positiva ou negativa? Apresentar os pormenores do raciocínio efetuado.

5. **(a) Aplicar o polinómio de Taylor do terceiro grau que aproxima arctg x para obter o número $r = (\sqrt{21} - 3)/2$ como uma aproximação da raíz não nula da equação arctg $x = x^2$.**
(b) Dado que $\sqrt{21} < 4,6$ e que $2^{16} = 65536$, provar que a aproximação na alínea (a) satisfaz à desigualdade

$$|r^2 - \text{arctg } r| < \frac{7}{100}.$$

Será a diferença $(r^2 - \text{arctg } r)$ positiva ou negativa? Apresentar os pormenores do raciocínio efectuado.

6. Demonstrar que $\int_0^1 \frac{1 + x^{30}}{1 + x^{60}} dx = 1 + \frac{c}{31}$, com $0 < c < 1$.

7. Provar que $0{,}493948 < \int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^4} dx < 0{,}493958$.

8. (a) Se $0 \leq x \leq 1/2$, demonstrar que sen $x = x - x^3/3! + r(x)$, onde $|r(x)| \leq (1/2)^5/5!$.
(b) Utilizar a estimativa da alínea (a) para calcular um valor aproximado do integral $\int_0^{\sqrt{2}/2} \text{sen}(x^2)\, dx$. Dar uma estamativa do erro.

9. Utilizar os três primeiros termos não nulos da fórmula de Taylor para sen$x$ para calcular um valor aproximado do integral $\int_0^1 (\text{sen } x)/x \, dx$ e apresentar uma estimativa do erro. [Subentende-se que o quociente (sen x)/x é igual a 1 quando $x = 0$.]

10. **Neste exercício apresenta-se um cálculo de π, usando a fórmula de Taylor para** arctg x dada no Exercício 3. Baseia-se no fato de que π é aproximadamente 3,2, de modo que $\frac{\pi}{4}$ é aproximadamente 0,8 ou 4/5 e este é aproximadamente 4 arctg 1/5. Seja $\alpha = \text{arctg } 1/5$, $\beta = 4\alpha - \pi/4$.
(a) Usar a identidade $\text{tg}(A + B) = (\text{tg } A + \text{tg } B)/(1 - \text{tg } A \text{ tg } B)$ com $A = B = \alpha$ e depois com $A = B = 2\alpha$ para obter $\text{tg } 2\alpha = 5/12$ e $\text{tg } 4\alpha = \frac{120}{119}$. Utilizar depois a identidade com $A = 4\alpha$, $B = -\frac{1}{4}\pi$ obtendo $\text{tg } \beta = \frac{1}{239}$. Isto conduz à seguinte identidade notável descoberto em 1706 pot John Machin (1680-1751):

$$\pi = 16 \text{ arctg } \tfrac{1}{5} - 4 \text{ arctg } \tfrac{1}{239}.$$

(b) Aplicar o polinómio de Taylor T_{11} (arctg x) com $x = 1/5$ para mostrar que

$$3{,}158328934 < 16 \text{ arctg } \tfrac{1}{5} < 3{,}158328972.$$

(c) Aplicar o polinómio de Taylor $T_3(\text{arctg } x)$ com $x = \frac{1}{239}$ para provar as desigualdades

$$-0{,}016736309 < -4 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} < -0{,}016736300.$$

(d) Utilizar as alíneas (a), (b) e (c) para provar que o valor de π, com sete decimais, é 3,1415926.

7.9. Outras observações acerca do erro na fórmula de Taylor. A notação *o*

Se f possui derivada contínua de ordem $n + 1$ em certo intervalo contendo um ponto a, podemos escrever a fórmula de Taylor na forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x)\,. \tag{7.17}$$

Suponhamos que restringimos x a um certo intervalo fechado $[a - c, a + c]$ de centro a, no qual $f^{(n+1)}$ é contínua. Então $f^{(n+1)}$ é limitada neste intervalo e por isso satisfaz a uma desigualdade da forma

$$|f^{(n+1)}(t)| \le M\,,$$

onde $M > 0$. Por conseguinte, devido ao **Teorema** 7.7, temos a estimativa do erro

$$|E_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

para cada x em $[a - c, a + c]$. Se considerarmos $x \neq a$ e dividimos por $|x - a|^n$, encontramos

$$0 \le \left| \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} \right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|\,.$$

Se agora fazemos $x \to a$, vemos que $E_n(x)/(x - a)^n \to 0$. Exprimimos esta conclusão dizendo que o erro $E_n(x)$ é de ordem inferior a $(x - a)^n$ quando $x \to a$.

Quer dizer que, sob a hipóteses estabelecidas, $f(x)$ pode ser aproximada, na vizinhança de a, por um polinómio em $(x - a)$ de grau n e o erro nesta aproximação é de ordem inferior a $(x - a)^n$ quando $x \to a$.

Em 1909 E. Landau (+) introduziu uma notação particularmente bem adequada quando usada em ligação com a fórmula de Taylor. É a chamada notação *o* (a notação *o* minúsculo) e define-se do modo seguinte.

DEFINIÇÃO. *Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em certo intervalo contendo* **a**, *a notação*

(+)Edmund Landau (1877-1938) foi um famoso matemático alemão que deu importantes contribuições à Matemática. Ele é mais conhecido pelos seus lúcidos livros de análise e teoria dos números.

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textbf{\textit{quando } } x \to a$$

significa que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

O símbolo $f(x) = o(g(x))$ lê-se "$f(x)$ é o-minúsculo de $g(x)$" ou "$f(x)$ é de ordem inferior a $g(x)$" e tem por finalidade dar a entender que para x próximo de a, $f(x)$ é pequeno comparado com $g(x)$.

EXEMPLO 1. $f(x) = o(1)$ quando $x \to a$ significa que $f(x) \to 0$ quando $x \to a$.

EXEMPLO 2. $f(x) = o(x)$ quando $x \to 0$ significa que $f(x)/x \to 0$ quando $x \to 0$.

Uma igualdade da forma $f(x) = h(x) + o(g(x))$ significa que $f(x) - h(x) = o(g(x))$ ou, por outras palavras $[f(x) - h(x)]/g(x) \to 0$ quando $x \to a$.

EXEMPLO 3. Temos $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ porque $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \to 0$ quando $x \to 0$.

As observações precedentes dizendo respeito ao erro na fórmula de Taylor, podem também ser expressas na notação o. Podemos escrever

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \textbf{quando } x \to a,$$

sempre que a derivada $f^{(n+1)}$ seja contínua em algum intervalo fechado contendo o ponto a. Isto exprime, duma maneira resumida, o fato de que o erro é pequeno comparado com $(x-a)^n$, quando x é próximo de a. Em particular, da discussão feita nas anteriores seções, temos os seguintes exemplos da fórmula de Taylor expressa na notação o:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad \textbf{quando } x \to 0.$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \textbf{quando } x \to 0.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \textbf{quando } x \to 0.$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \quad \textbf{quando } x \to 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad \textbf{quando } x \to 0.$$

$$\textbf{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) \quad \textbf{quando } x \to 0.$$

Nos cálculos implicando aproximações de Taylor, é muitas vezes necessário combinar vários termos contendo o símbolo *o*. No teorema que se segue apresentam-se algumas regras simples relativas ao manejo dos símbolos *o*, as quais cobrem a maior parte das situações que podem surgir na prática.

TEOREMA 7.8. ÁLGEBRA DOS SÍMBOLOS *o*. *Quando $x \to a$, tem-se:*

(a) $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$.
(b) $o(cg(x)) = o(g(x))$ *se* $c \neq 0$.
(c) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$.
(d) $o(o(g(x))) = o(g(x))$.
(e) $\dfrac{1}{1 + g(x)} = 1 - g(x) + o(g(x))$ *se* $g(x) \to 0$ *quando* $x \to a$.

Demonstração. A proposição da alínea (a) significa que se $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$, *então* $f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))$. Com efeito uma vez que temos

$$\frac{f_1(x) \pm f_2(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g(x)} \pm \frac{f_2(x)}{g(x)},$$

cada termo do segundo membro tende para zero quando $x \to a$ e assim está demonstrada a alínea (a). As proposições (b), (c) e (d) demonstram-se duma maneira semelhante.

Para demonstrar (e) servimo-nos da identidade

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u\frac{u}{1+u}$$

com u substituido por $g(x)$, observando então que $\dfrac{g(x)}{1 + g(x)} \to 0$ quando $x \to a$.

EXEMPLO 1. Provar que $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ quando $x \to 0$.

Resolução. Usamos a aproximação de Taylor para o seno e cosseno. Da alínea (e) do Teorema 7.8, com $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, temos

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \textbf{quando } x \to 0.$$

Portanto, temos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

EXEMPLO 2. Provar que $(1+x)^{1/x} = e\,.\,(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2))$ quando $x \to 0$.

Resolução. Uma vez que $(1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(1+x)}$ começamos com um polinómio de aproximação para $\log(1+x)$. Tomando uma aproximação do terceiro grau, temos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2),$$

e portanto resulta

$$(1+x)^{1/x} = \exp(1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2)) = e \cdot e^u, \tag{7.18}$$

com $u = -x/2 + x^2/3 + o(x^2)$. Mas quando $u \to 0$, temos $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, com o que se obtém

$$e^u = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2).$$

Se aplicarmos esta igualdade a (7.18) obtemos a fórmula desejada.

7.10. Aplicações às formas indeterminadas

Já explicámos como podem as aproximações polinomiais ser usadas no cálculo do valor de funções. Elas podem também utilizar-se como um meio auxiliar no cálculo de limites. Provamos isso com alguns exemplos.

EXEMPLO 1. Se a e b são números positivos, determinar o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Resolução. Não podemos resolver este problema pelo cálculo do limite do numerador e do denominador separadamente, porque o denominador tende para zero e o teorema do limite dum quociente não é aplicável. O numerador, neste caso, tende também para zero e o quociente diz-se tomar a "*forma indeterminada* $\frac{0}{0}$" quando $x \to 0$. A fórmula de Taylor e a notação o permitem-nos muitas vezes calcular o limite duma forma indeterminada deste tipo por um processo muito simples. A idea consiste em aproximar o numerador $a^x - b^x$ por um polinómio em x, dividir em seguida por x e fazer tender $x \to 0$. Podemos aplicar a fórmula de Taylor diretamente a $f(x) = a^x - b^x$ mas, uma vez que $a^x = e^{x \log a}$ e $b^x = e^{x \log b}$ é mais simples neste caso servirmo-nos da aproximação polinomial já derivada para a função exponencial. Se começamos com a aproximação linear

$$e^t = 1 + t + o(t) \quad \text{quando } t \to 0$$

e substituimos t por $x \log a$ e $x \log b$, respetivamente, encontramos

$$a^x = 1 + x \log a + o(x) \qquad \text{e} \qquad b^x = 1 + x \log b + o(x) \quad \text{quando } x \to 0.$$

Aqui fizemos uso do fato que $o(x \log a) = o(x)$ e $o(x \log b) = o(x)$. Se subtrairmos e tivermos presente que $o(x) - o(x) = o(x)$, encontramos $a^x - b^x = x(\log a - \log b) + o(x)$. Dividindo por x e usando a relação $o(x)/x = o(1)$, obtemos

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b} + o(1) \to \log \frac{a}{b} \quad \text{quando } x \to 0.$$

EXEMPLO 2. Provar que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\text{cotg } x - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{3}$

Resolução. Usamos o exemplo 1 da seção 7.9 e o Teorema 7.8(c) para escrevermos

$$\begin{aligned}\cot x &= \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x)\,.\end{aligned}$$

Daqui resulta

$$\frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3} + o(1) \to -\frac{1}{3} \quad \text{quando } x \to 0.$$

EXEMPLO 3. Provar que $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + ax)}{x} = a$ para todo o real a.

Resolução. Se $a = 0$, o resultado é trivial. Se $a \neq 0$ escrevemos a aproximação linear

$\log(1+x) = x + o(x)$. Substituindo x por ax, obtemos $\log(1+ax) = ax + o(ax) = ax + o(x)$. Dividindo por x e fazendo tender $x \to 0$, obtemos o limite a.

EXEMPLO 4. Provar que para todo o real a, se tem

$$\lim_{x\to 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a . \tag{7.19}$$

Resolução. Notamos muito simplesmente que $(1 + ax)^{1/x} = e^{(1/x)\log(1+ax)}$ e servimo-nos do resultado do **exemplo** 3 conjuntamente com a continuidade da função exponencial.

Substituindo ax por y em (7.19), encontramos outra importante relação

$$\lim_{y\to 0} (1 + y)^{a/y} = e^a .$$

Algumas vezes estas relações limites são tomadas como ponto de partida para a teoria da função exponencial.

7.11. Exercícios

1. Determinar uma fórmula quadrática polinomial $P(x)$ tal que $2^x = P(x) + o(x^2)$ quando $x \to o$.
2. Determinar um polinómio do 3.º grau, $P(x)$, tal que $x \cos x = P(x) + o((x-1)^3)$ quando $x \to 1$.
3. Determinar o polinómio $P(x)$ de menor grau, tal que $\operatorname{sen}(x - x^2) = P(x) + o(x^6)$ quando $x \to 0$.
4. Determinar as constantes a, b, c tais que $\log x = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ quando $x \to 1$.
5. Recorda-se que $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ quando $x \to 0$. Utilizar este resultado para provar que $x^{-2}(1 - \cos x) \to \dfrac{1}{2}$ quando $x \to 0$. De modo análogo determinar o limite de $x^{-4}(1 - \cos 2x - 2x^2)$ quando $x \to 0$.

Calcular os limites nos Exercícios 6 a 29

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$.
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^{2x} - 1}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arctg} x}$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$, $\quad b \neq 1$.
13. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2 + x - 2}$.
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \operatorname{sen} x^2}$.
15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)-x}{1-\cos x}$.

17. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{[\operatorname{sen}(\pi/2x)](\log x)}{(x^3+5)(x-1)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\operatorname{sen} 4x-12\operatorname{sen} x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-a^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)-\cos x}{x^4}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^{2x})^{1/x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

30. Para que valor da constante a tenderá $x^{-2}(e^{ax}-e^x-x)$ para um limite finito, quando $x\to 0$? Qual será o valor desse limite?

31. São dadas duas funções f e g deriváveis em certo intervalo contendo 0, e no qual g é positiva. Supõe-se também $f(x)=o(g(x))$ quando $x\to 0$. Dizer se são ou não verdadeiras cada uma das afirmações seguintes:

(a) $\int_0^x f(t)\,dt = o\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$ quando $x\to 0$, (b) $f'(x)=o(g'(x))$ quando $x\to 0$.

32. (a) Se $g(x)=o(1)$ quando $x\to 0$, provar que

$$\frac{1}{1+g(x)} = 1-g(x)+g^2(x)+o(g^2(x)) \quad \text{quando } x\to 0 .$$

(b) Servir-se da alínea (a) para provar que $\operatorname{tg} x = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o(x^5)$ quando $x\to 0$.

33. Uma função f admite uma derivada de terceira ordem contínua para todo o real x e verifica a igualdade

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^3 .$$

Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$.

[*Sugestão:* Se $\lim_{x\to 0} g(x)=A$, $g(x)=A+o(1)$ quando $x\to 0$.]

7.12. Regra de L'Hôpital para a forma indeterminada 0/0

Em muitos exemplos das precedentes seções calculámos o límite de um quociente $f(x)/g(x)$ no qual ambas as funções, numerador $f(x)$ e o denominador $g(x)$, tendem para zero. Em tais exemplos o quociente $f(x)/g(x)$ diz-se que toman "a forma indeterminada 0/0".

Um caminho para resolver os problemas relativos a formas indeterminadas consiste em obter aproximações polinomiais para $f(x)$ e $g(x)$, como fizemos nos dois exemplos apresentados atrás. Por vezes o trabalho pode ser encurtado pelo uso duma técnica de derivação conhecida por *regra de l'Hôpital*(+). A ideia base do método consiste em analisar o quociente de derivadas $f'(x)/g'(x)$ e por seu intermédio tentar obter informação relativa a $f(x)/g(x)$.

Antes de estabelecer a regra de L'Hôpital, vamos demonstrar porquê o quociente de derivadas $f'(x)/g'(x)$ exibe uma relação para o quociente $f(x)/g(x)$. Suponhamos f e g duas funções para as quais $f(a) = g(a) = 0$. Então, para $x \neq a$, tem-se $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \Big/ \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Se as derivadas $f'(a)$ e $g'(a)$ existem e se $g'(a) \neq 0$, então quando $x \to a$ o quociente no segundo membro tende para $f'(a)/g'(a)$ e por isso $f(x)/g(x) \to f'(a)/g'(a)$.

EXEMPLO. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{x}$.

Resolução. Aqui $f(x) = 1 - e^{2x}$ e $g(x) = x$, de maneira que $f'(x) = -2e^{2x}$, $g'(x) = 1$. Daqui resulta $f'(0)/g'(0) = -2$, pelo que o limite em questão é -2.

Na regra de L'Hôpital não se fazem quaisquer hipóteses acerca de f e g ou respetivas derivadas *no* ponto $x = a$. Em vez disso, supomos que $f(x)$ e $g(x)$ tendem para 0 quando $x \to a$ e que o quociente $f'(x)/g(x)$ tende para um limite finito quando $x \to a$. A regra de L'Hôpital diz-nos então que $f(x)/g(x)$ tende para o mesmo limite. Mais precisamente, temos o seguinte:

TEOREMA 7.9. REGRA DE L'HÔPITAL PARA 0/0. *Sejam f e g duas funções admitindo derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$ em cada ponto x dum intervalo aberto (a, b) e que verificam*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a+} g(x) = 0\,. \tag{7.20}$$

Admite-se que $g'(x) \neq 0$ para cada x em (a, b). Se o limite

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.21}$$

(+) Em 1696, Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) escreveu o primeiro livro sobre cálculo diferencial. Este trabalho apareceu em repetidas edições e desempenhou um papel de relevo na divulgação do assunto. A maior parte do conteúdo do livro, incluindo o método conhecido por "Regra de L'Hôpital" era baseada no anterior trabalho de Johann Bernoulli, um dos professores de L'Hôpital.

existe e tem o valor L, então o limite

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{7.22}$$

também existe e tem o mesmo valor L.

Note-se que os limites em (7.20), (7.21) e (7.22) são "limites laterais, à direita". Existe, com certeza, um teorema análogo no qual as hipóteses são formuladas em certo intervalo da forma *(b, a)* e todos os limites são "limites laterais à esquerda". Também, pela combinação dos dois teoremas referentes a "limites laterais", resultará um teorema válido para limites bilaterais, fornecendo um resultado da mesma natureza quando $x \to a$ de qualquer maneira.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 7.9, vamos ilustrar a utilização desse teorema pela apresentação de alguns exemplos.

EXEMPLO 1. Usar a regra de L'Hôpital para obtermos a fórmula já conhecida

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 . \tag{7.23}$$

Aqui $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$. O quociente das derivadas $f'(x)/g'(x) = (\cos x)/1$ e este tende para 1 quando $x \to 0$. Pelo Teorema 7.9 o limite de (7.23) também existe e é igual a 1.

EXEMPLO 2. Para determinar o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

recorrendo à regra de L'Hôpital, fazemos $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, $g(x) = x - \operatorname{sen} x$, e então encontramos que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos x} . \tag{7.24}$$

Embora este cociente também tome ainda a forma 0/0 quando $x \to 0$, podemos aqui levantar a indeterminação por meio de transformações algébricas. Se escrevermos

$$1 - \sec^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x} ,$$

o quociente em (7.24) escreve-se

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} ,$$

o qual tende para -2 quando $x \to 0$. Observe-se que a indeterminação desaparece quando simplificamos o quociente por divisão pelo fator comum $1 - \cos x$. A supressão de fatores comuns tende habitualmente a simplificar o trabalho em problemas desta natureza.

Cuando o quociente das derivadas $f'(x)/g'(x)$ também é uma forma indeterminada 0/0, podemos aplicar ainda a regra de L'Hôpital mais uma vez. No exemplo que se segue, a indeterminação é levantada depois de duas aplicações daquela regra.

EXEMPLO 3. Para qualquer número real c, temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{cx^{c-1} - c}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{c(c-1)x^{c-2}}{2} = \frac{c(c-1)}{2}\,.$$

Nesta sequência de igualdades subentende-se que a existência de cada limite implica a existência do precedente e também a sua igualdade.

O exemplo que apresentamos a seguir serve para mostrar que a regra de L'Hôpital não é infalível.

EXEMPLO 4. Seja $f(x) = e^{-1/x}$ se $x \neq 0$ seja $g(x) = x$. O quociente $f(x)/g(x)$ toma a forma indeterminada 0/0 quando $x \to 0+$ e uma aplicação da regra de L'Hôpital conduz ao quociente

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(1/x^2)e^{-1/x}}{1} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,.$$

Este, igualmente, é indeterminado quando $x \to 0+$ e se derivamos o numerador e o denominador obtemos $(1/x^2)\,e^{-1/x}/(2x) = e^{-1/x}/(2x^3)$. Depois de n aplicações chega-se ao quociente $e^{-1/x}/(n!x^{n+1})$ de maneira que a indeterminação não desaparecerá jamais por este método.

EXEMPLO 5. Quando aplicamos a regra de L'Hôpital repetidas vezes, é necessário algum cuidado no sentido de averiguar se os quocientes que se vão obtendo continuam a constituir uma indeterminação. Um tipo de erro muito comum é mostrado pelo exemplo seguinte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3\,.$$

A primeira passagem é correta, mas a segunda não. O quociente $(6x-2)/(2x-1)$ não é indeterminado para $x \to 1$. O limite correto, 4, obtém-se pela substituição de x por 1 em $(6x-$ $-2)/(2x-1)$.

EXEMPLO 6. Algumas vezes o trabalho pode ser encurtado por uma mudança de variável. Por exemplo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital diretamente para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}}\,,$$

mas podemos evitar a derivação de raízes quadradas escrevendo $t = \sqrt{x}$ e observando que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{1 - e^{2t}} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{-2e^{2t}} = -\frac{1}{2}.$$

Passamos agora à demonstração do teorema 7.9.

Demonstração. Fazemos uso do teorema de Cauchy (Teorema 4.6 da seção 4.14) aplicado ao intervalo fechado em que a é o extremo esquerdo. Visto que as funções f e g podem não estar definidas em a, introduzem-se duas novas funções que *estejam* aí definidas. Sejam

$$F(x) = f(x) \quad \text{se} \quad x \neq a, \qquad F(a) = 0,$$

$$G(x) = g(x) \quad \text{se} \quad x \neq a, \qquad G(a) = 0.$$

Ambas F e G são continuas em a. Com efeito, se $a < x < b$, ambas as funções F e G são contínuas no *intervalo fechado* $[a, x]$ e admitem derivada em todos os pontos do *intervalo aberto* (a, x). Deste modo o teorema de Cauchy é aplicável ao intervalo $[a, x]$ e obtemos

$$[F(x) - F(a)]G'(c) = [G(x) - G(a)]F'(c),$$

em que c é determinado ponto verificando $a < c < x$. Visto que $F(a) = G(a) = 0$, temos

$$f(x)g'(c) = g(x)f'(c).$$

Agora $g'(c) \neq 0$ [uma vez que, por hipótese, g' nunca é nula em (a, b)], e também $g(x) \neq 0$. Com efeito, se tivessemos $g(x) = 0$ teria que ser $G(x) = G(a) = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existiria um ponto x_1, entre a e x, onde $G'(x_1) = 0$, contradizendo a hipótese de que g' nunca é nula em (a, b). Portanto podemos dividir por $g'(c)$ e $g(x)$ para obtermos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Quando $x \to a$, o ponto $c \to a$ (visto que $a < c < x$) e o quociente do segundo membro tende para L [por(7.21)]. Por conseguinte $f(x)/g(x)$ também tende para L e o teorema está demonstrado.

7.13. Exercícios

Calcular os limites nos Exercícios 1 a 12.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$.

2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}\, x - \text{sen}\, x}{x^3}$.

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$.

6. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{x - \text{sen}\, x}{(x\, \text{sen}\, x)^{3/2}}$.

7. $\lim_{x\to a+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

8. $\lim_{x\to 1+} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log x}$.

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}\, 2x - 2\, \text{arcsen}\, x}{x^3}$.

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cot g\, x - 1}{x^2}$.

11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x - 1}$.

12. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(a \,\text{arctg}\, \dfrac{\sqrt{x}}{a} - b\, \text{arctg}\, \dfrac{\sqrt{x}}{b}\right)$.

13. Determinar o limite do quociente

$$\frac{(\text{sen}\, 4x)(\text{sen}\, 3x)}{x\, \text{sen}\, 2x}$$

quando $x \to 0$ e também quando $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

14. Para que valores das constantes a e b é

$$\lim_{x\to 0} (x^{-3}\, \text{sen} 3x + ax^{-2} + b) = 0?$$

15. Determinar as constantes a e b tais que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{bx - \text{sen} x} \displaystyle\int_0^x \frac{t^2\, dt}{\sqrt{a+t}} = 1$.

16. Um arco circular de raio 1 subtende um ângulo de x radianos, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, como se indi-

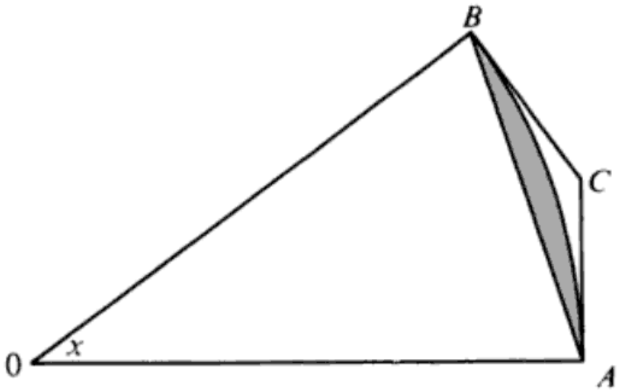


Fig. 7.2. Exercício 16.

ca na fig. 7.2. O ponto C é a interseção das duas tangentes em A e B. Seja $T(x)$ a área do triângulo ABC e $S(x)$ a área da região sombreada. Calcular: (a) $T(x)$; (b) $S(x)$; (c) o limite de $T(x)/S(x)$ quando $x \to 0+$.

17. A corrente $I(t)$ que circula num certo circuito eléctrico num instante t é definida por

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

com E, R e L números positivos. Determine o valor limite de $I(t)$ quando $R \to 0+$.

18. **Um peso está suspenso por uma corda e provoca-se-lhe uma vibração mediante uma força sinusoidal. O seu deslocamento $f(t)$ num instante t é dado por uma equação da forma**

$$f(t) = \frac{A}{c^2 - k^2}(\text{sen}\, kt - \text{sen}\, ct),$$

com A, c e k constantes positivas, sendo $c \neq k$. Determinar o valor limite do deslocamento quando $c \to k$.

7.14. Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Extensão da regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital pode generalizar-se de várias maneiras. Em primeiro lugar poderá haver interesse em considerar o valor uo quociente $f(x)/g(x)$, quando x cresce indefinidamente. É conveniente definir um símbolo para exprimir duma maneira abreviada o fato de que estamos a considerar x a crescer indefinidamente. Com esta finalidade, os matemáticos usam o símbolo $+\infty$, chamado "mais infinito". Embora não se deva atribuir qualquer significado ao símbolo $+\infty$ em *si próprio*, daremos definições precisas das várias proposições em que intervenha.

Uma dessas proposições escreve-se como segue:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

e lê-se "O limite de $f(x)$, quando x tende para mais infinito, é A". A ideia que pretendemos exprimir é que os valores da função $f(x)$ podem ser tão próximos do número real A quanto se queira, para valores de x suficientemente grandes. Para tornar esta afirmação matematicamente rigorosa devemos explicar o que se entende por "tão próximo quanto se queira" e "suficientemente grande". Antige-se esta formalidade por intermédio da seguinte definição:

DEFINIÇÃO. *O simbolismo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

significa que para caaa número $\epsilon > 0$, existe outro número $M > 0$ (o qual pode depender de ϵ) tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad x > M.$$

Os cálculos implicando limites quando $x \to +\infty$ podem reduzir-se a um caso mais simples.

Basta substituir x por $1/t$ (isto é, $x = 1/t$) e observar que $t \to 0$ por valores positivos quando $x \to +\infty$. Mais concretamente, introduzimos uma nova função F, em que

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{se} \quad t \neq 0\,, \tag{7.25}$$

e muito simplesmente constatamos que as duas proposições

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0+} F(t) = A$$

significam exatamente a mesma coisa. A demonstração desta equivalência exige unicamente as definições dos dois símbolos limite e deixa-se como exercício.

Quando estamos interessados na análise do comportamento de $f(x)$ para valores *negativos* de x de grande valor absoluto, introduzimos o símbolo $-\infty$ ("menos infinito") e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

que significa: Para cada $\epsilon > 0$, existe um $M > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad x < -M.$$

Se F está definida por (7.25) é fácil provar que as duas proposições

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0-} F(t) = A$$

são equivalentes.

Em virtude das observações feitas, não é surpreendente encontrar que todas as regras usuais de cálculo com limites (como foram estabelecidas no Teorema 3.1 da seção 3.4) também são aplicáveis aos limites em que $x \to \pm\infty$. O mesmo é verdadeiro para a regra de L'Hôpital a qual pode generalizar-se do modo seguinte:

TEOREMA 7.10. *Sejam f e g duas funções admitindo derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$ para todo o x maior que um certo número fixo $M > 0$. Admita-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\; e \;\; \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

e que $g'(x) \neq 0$ para $x > M$. Se $f'(x)/g'(x)$ tende para um limite quando $x \to +\infty$, então $f(x)/g(x)$ também tende para um limite e os dois limites são iguais, isto é,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad \textit{implica} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,. \tag{7.26}$$

Demonstração. Sejam $F(t) = f(1/t)$ e $G(t) = g(1/t)$. Então $f(x)/g(x) = F(t)/G(t)$ se

$t = 1/x$ e $t \to 0+$ quando $x \to +\infty$. Uma vez que $F(t)/G(t)$ toma a forma indeterminada 0/0 quando $t \to 0+$ analisa-se o quociente das derivadas $F'(t)/G'(t)$. Pela regra da derivada da função composta, temos

$$F'(t) = \frac{-1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{e} \qquad G'(t) = \frac{-1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Além disso, $G'(t) \neq 0$ se $0 < t < 1/M$. Quando $x = 1/t$ e $x > M$, temos $F'(t)/G'(t) = f'(x)/g'(x)$, uma vez que o fator comum $-1/t^2$ se simplifica. Deste modo, se $f'(x)/g'(x) \to L$ quando $x \to +\infty$, então $F'(t)/G'(t) \to L$ quando $t \to 0+$ e por isso, pelo **Teorema** 7.9, $F(t)/G(t) \to L$. Uma vez que $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$ está demonstrada (7.26).

Há evidentemente um teorema análogo ao 7.10 quando se considera o limite para $x \to -\infty$.

7.15. Limites infinitos

Na seção precedente utilizámos a notação $x \to +\infty$ para indicar que x toma valores positivos arbitrariamente grandes. Podemos também escrever

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\,, \tag{7.27}$$

ou ainda

$$f(x) \to +\infty \quad \textbf{quando } x \to a, \tag{7.28}$$

para exprimir que $f(x)$ toma valores tão grandes quanto se queira, quando x se aproxima de a. O significado rigoroso deste símbolo é dado pela definição seguinte:

DEFINIÇÃO. *O simbolismo em (7.27) ou (7.28) significa que a cada número positivo M (tão grande quanto se queira) corresponde outro número positivo* δ *(o qual pode depender de M) tal que*

$$f(x) > M \quad \textbf{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta\,.$$

Se $f(x) > M$ *sempre que* $0 < (x - a) < \delta$, *escreve-se*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty\,,$$

e afirma-se que f(x) tende para mais infinito quando x tende para a *por valores à direita de* a. *Se* $f(x) > M$ *sempre que* $0 < a - x < \delta$, *escreve-se*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty\,,$$

e diz-se que f(x) tende para mais infinito quando x tende para a *por valores à esquerda de* a.

Os símbolos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$$

definem-se de modo semelhante, com a única diferença de que substituímos $f(x) > M$ por $f(x) < -M$. Na fig, 7.3 estão representados alguns exemplos.

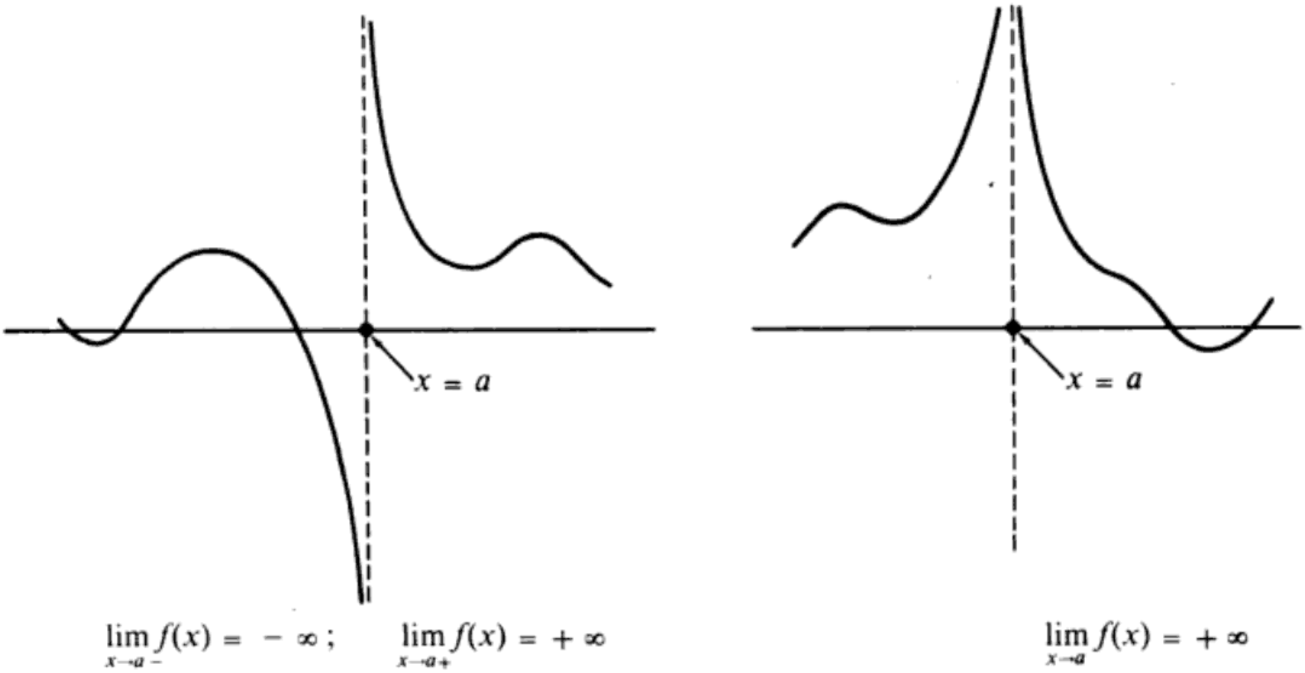


Fig. 7.3. Limites infinitos

É também conveniente alargar um pouco mais as definições destes símbolos para incluirem os casos em que $x \to \pm\infty$. Assim, por exemplo, escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se, para todo o número positivo M, existe outro número positivo X tal que $f(x) > M$ sempre que $x > X$.

O leitor não terá qualquer dificuldade na formulação de definições semelhantes para os símbolos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Exemplos. No capítulo 6 demonstrámos que a função logaritmo é crescente e ilimitada no semi-eixo positivo real OX. Podemos exprimir este fato duma maneira compacta escrevendo

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty\,. \tag{7.29}$$

Provámos igualmente no capítulo 6 que $\log x < 0$ quando $0 < x < 1$ e que o logaritmo não possui limite inferior no intervalo (0, 1). Portanto podemos também escrever $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$.

A partir da relação que existe entre o logaritmo e a exponencial é fácil provar que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \left(\text{ou} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0\right). \tag{7.30}$$

Utilizando estes resultados não é difícil mostrar que para $\alpha > 0$ temos

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0\,.$$

A ideia é escrever $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ e aplicar (7.30) conjuntamente com (7.29). As fórmulas em (7.30) dão-nos igualmente as relações

$$\lim_{x \to 0-} e^{-1/x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0+} e^{-1/x} = 0\,.$$

As demonstrações destas proposições são um bom exercício para o leitor verificar se compreendeu os símbolos de limites contendo $\pm\infty$.

7.16. O comportamento de $\log x$ e e^x para grandes valores de x

Os limites infinitos conduzem a novos tipos de formas indeterminadas. Por exemplo, podemos ter um quociente $f(x)/g(x)$ em que ambos $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to +\infty$ quando $x \to a$ (ou quando $x \to \pm\infty$). Neste caso dizemos que o quociente $f(x)/g(x)$ toma a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. São possíveis extensões da regra de L'Hôpital que muitas vezes nos ajudam a determinar o comportamento de um quociente quando este toma a forma indeterminada ∞/∞. Contudo, não analisaremos essas extensões porque muitos dos exemplos que ocorrem na prática podem ser tratados pela aplicação do seguinte teorema que descreve o comportamento do logaritmo e da exponencial para valores grandes de x.

TEOREMA 7.11. *Se $a > 0$ e $b > 0$, tem-se*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0 \tag{7.31}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0\,. \tag{7.32}$$

Demonstração. Vamos demonstrar (7.31) e depois utilizá-la para provar (7.32). Uma demonstração simples de (7.31) pode ser dada diretamente a partir da definição do logaritmo por um integral. Se $c > 0$ e $t \geq 1$, temos $t^{-1} \leq t^{c-1}$. Por isso, se $x > 1$, podemos escrever

$$0 < \log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^x t^{c-1}\,dt = \frac{x^c - 1}{c} < \frac{x^c}{c}.$$

Portanto temos

$$0 < \frac{(\log x)^b}{x^a} < \frac{x^{bc-a}}{c^b} \quad \text{para cada } c > 0\,.$$

Se escolhemos $c = \frac{1}{2}\,a/b$, então $x^{bc-a} = x^{-a/2}$ o qual tende para 0 quando $x \to +\infty$, o que prova (7.31). Para demonstrar (7.32) efetuarmos a mudança de variável $t = e^x$. Então $x = \log t$ e por conseguinte $x^b/e^{ax} = (\log t)^b/t^a$. Mas $t \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, pelo que (7.32) é consequência de (7.31).

Com uma extensão natural da notação o, podemos escrever as proposições que acabámos de demonstrar na forma

$$(\log x)^b = o(x^a) \quad \text{quando } x \to +\infty\,,$$

e

$$x^b = o(e^{ax}) \quad \text{quando } x \to +\infty\,.$$

Quer isto dizer que por maior que seja b e por pequeno que seja a (desde que ambos positivos), $(\log x)^b$ tende para infinito mais lentamente que x^a. Igualmente, x^b tende para infinito mais lentamente que e^{ax}.

Exemplo 1. No Exemplo 4 da seção 7.2 mostrou-se que o comportamento de $e^{-1/x}/x$ para x próximo de 0 não podia ser definido por qualquer número de aplicações da regra de L'Hôpital à forma indeterminada 0/0. Porém, se escrevemos $t = 1/x$, aquele quociente transforma-se em t/e^t, o qual toma a forma indeterminada ∞/∞ quando $t \to +\infty$. O Teorema 7.11 diz-nos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0\,.$$

Portanto, $e^{-1/x}/x \to 0$ quando $x \to 0+$ ou, por outras palavras, $e^{-1/x} = o(x)$ quando $x \to 0+$.

Além de 0/0 e ∞/∞ existem outras formas indeterminadas. Algumas delas representadas pelos símbolos $0 \,.\, \infty$, 0^0, e ∞^0 são apresentadas através de exemplos dados a seguir. Em casos semelhantes a esses, transformações algébricas permitem-nos amiudadas vezes reduzir o problema a uma forma indeterminada do tipo 0/0 ou ∞/∞, as quais podem ser levantadas pela regra de L'Hôpital, pela aproximação polinomial, ou pelo Teorema 7.11.

Exemplo 2. $(0\,.\,\infty)$. Provar que $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$ para cada α fixo > 0.

Resolução. Escrevendo $t = 1/x$, vem $x^{\alpha} \log x = -(\log t)/t^{\alpha}$ e, por (7.31), tende para 0 quando $t \to +\infty$.

EXEMPLO 3. (0^0). Mostrar que $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$.

Resolução. Visto que $x^x = e^{x \log x}$, pela continuidade da função exponencial temos

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \exp\left(\lim_{x\to 0+} x \log x\right),$$

se o último limite existir. Mas, pelo Exemplo 2, sabemos que $x \log x \to 0$ quando $x \to 0+$ e por isso $x^x \to e^0 = 1$.

EXEMPLO 4. (∞^0). Mostrar que $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = 1$.

Resolução. Fazer $t = 1/x$ e aplicar o resultado do Exemplo 3. Na Seção 7.10 demonstraram-se as igualdades

$$\lim_{x\to 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{a/x} = e^a . \tag{7.33}$$

Cada uma destas relações é uma forma indeterminada do tipo 1^{∞}. Podemos substituir x por $1/x$ naquelas fórmulas e obter, respetivamente,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x} = e^a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^a ,$$

ambas válidas qualquer que seja o número real a.

As relações (7.33) e as dos Exemplos 2, 3 e 4 são todos do tipo $f(x)^{g(x)}$. Habitualmente estas resolvem-se escrevendo-as na forma

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)},$$

tratando a seguir o expoente $g(x) \log f(x)$ por um dos métodos discutidos antes.

7.17. Exercícios

Calcular os limites dos Exercícios 1 a 25. As letras a e b representam constantes positivas.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$.

2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{arctg}(1/x)}$.

3. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log(a + be^x)}{\sqrt{a + bx^2}}$.

5. $\lim_{x\to +\infty} x^4\left(\cos\dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{1}{2x^2}\right)$.

6. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\log|\operatorname{sen} x|}{\log|\operatorname{sen} 2x|}$.

7. $\lim_{x\to\frac{1}{2}-} \dfrac{\log(1-2x)}{\operatorname{tg} \pi x}$.

8. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x+1)}{e^x}$.

9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^b}$, $\quad a > 1$.

10. $\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} \dfrac{\operatorname{tg} x - 5}{\sec x + 4}$.

11. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

12. $\lim_{x\to+\infty} x^{1/4} \operatorname{sen}(1/\sqrt{x})$.

13. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$.

14. $\lim_{x\to 0+} \left[\dfrac{\log x}{(1+x)^2} - \log\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\right]$.

15. $\lim_{x\to 1-} (\log x)\log(1-x)$.

16. $\lim_{x\to 0+} x^{(x^x-1)}$.

17. $\lim_{x\to 0+} [x^{(x^x)} - 1]$.

18. $\lim_{x\to 0-} (1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$.

19. $\lim_{x\to 0+} x^{1/\log x}$.

20. $\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

21. $\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

22. $\lim_{x\to 0+} \left(\log\dfrac{1}{x}\right)^x$.

23. $\lim_{x\to 0+} x^{e/(1+\log x)}$.

24. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

25. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\log 1(+x)}\right)$.

26. Determinar c de modo que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4.$$

27. Provar que $(1+x)^c = 1 + cx + o(x)$ quando $x \to 0$. Utilizar esta conclusão para calcular o limite de

$$\{(x^4 + x^2)^{1/2} - x^2\} \text{ quando } x \to +\infty.$$

28. Para um certo valor de c, o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \{(x^5 + 7x^4 + 2)^c - x\}$$

é finito e não nulo. Determinar este valor de c e calcular o valor do correspondente limite.

29. Sejam $g(x) = xe^{x^2}$ e $f(x) = \int_1^x g(t)(t + 1/t)\,dt$. Calcular o limite de $f''(x)/g''(x)$ quando $x \to +\infty$.

30. Sejam $g(x) = x^c e^{2x}$ e $f(x) = \int_0^x e^{2t}(3t^2+1)^{1/2}\,dt$. Para um certo valor de c, o limite de $f'(x)/g'(x)$ quando $x \to +\infty$ é finito e não nulo. Determinar c e calcular o valor do limite.

31. Seja $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

(a) Provar que para todo o $m > 0, f(x)/x^m \to 0$ quando $x \to 0$.

(b) Provar que para $x \neq 0$ a derivada de ordem n de f tem a forma $f^{(n)}(x) = f(x)P(1/x)$, em que $P(t)$ é um polinómio em t.

(c) Provar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Isto prova que todo o polinómio de Taylor gerado por f em 0 é o polinómio nulo.

32. Uma quantidade de P escudos e depositada num banco que paga um juro de r % ao ano,(r % $= 0{,}06$) acumulando-se os juros m vezes por ano (o juro do ano é pago em m prestações iguais cada uma ao fim da m – enésima parte do ano, e de cada vez esse valor do juro foi capitalizado). (a) Provar que o total do capital mais os juros obtido ao fim de n anos é $P(1 + r/m)^{mn}$. Se r e n se mantêm fixos, essa quantidade tende para Pe^{rn} quando $m \to +\infty$. Este fato dá origem à definição seguinte: Dizemos que uma certa importância em dinheiro está depositada com um juro anual contínuo de r % se a quantidade $f(t)$ depois de t anos é $f(0)e^{rt}$, em que t é qualquer número real não negativo. Calcular aproximadamente o tempo necessário para que uma certa importância em dinheiro duplique o seu valor se, depositado num banco, recebe um juro de 6 % ao ano acumulado (b) continuamente; (c) quatro vezes ao ano (por trimestre).

8
INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

8.1. Introdução

Nos vários domínios da Ciência apresentam-se uma grande variedade de problemas, nos quais se deseja determinar algo variável a partir do seu coeficiente de variação. Por exemplo, podemos estar interessados em calcular a posição duma partícula em movimento, a partir do conhecimiento da sua velocidade ou da sua aceleração. Ou uma substância radioativa pode estar a desintegrar-se segundo um coeficiente de variação conhecido e estarmos interessados em determinar a quantidade de substância ainda existente depois de decorrido um certo intervalo de tempo. Em exemplos como estes trata-se de determinar uma *função desconhecida*, a partir do conhecimento de certos dados expressos por intermédio duma equação contendo pelo menos uma das derivadas da função desconhecida. Estas equações chamam-se *equações diferenciais* e o seu estudo constitui um dos ramos da Matemática com maior número de aplicações.

As equações diferenciais são classificadas sob dois aspectos principais: *ordinárias* e de *derivadas parciais*, conforme a incógnita seja uma função de apenas *uma* variável ou de *duas ou mais* variáveis. Um exemplo simples duma equação diferencial ordinária é a relação

$$f'(x) = f(x) \tag{8.1}$$

que é satisfeita, em particular, pela função exponencial $f(x) = e^x$. Veremos depois que toda a solução de (8.1) há-de ser da forma $f(x) = Ce^x$, com C uma constante arbitrária.

Por outro lado uma equação tal como

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

é um exemplo duma equação de derivadas parciais. Esta, chamada *equação de Laplace*, aparece na teoria da eletricidade e magnetismo, mecânica dos fluidos e noutros assuntos. Admite diferentes tipos de soluções, entre as quais estão $f(x, y) = x + 2y$, $f(x, y) = e^x \cos y$ e $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

O estudo das equações diferenciais constitui um capítulo da Matemática que, talvez mais do que qualquer outro, foi diretamente influenciado pela Mecânica, Astronomia e Física Matemática. A sua história começa no século XVII quando Newton, Leibniz e Bernoulli resolveram algumas equações diferenciais simples, postas por certos problemas de Geometria e Mecânica. Estas primitivas descobertas, iniciadas cerca de 1690, conduziram gradualmente ao desenvolvimento do agora clássico "saco de truques" para resolver determinados tipos de equações diferenciais. Embora estes "truques" especiais sejam aplicáveis em relativamente poucos casos permitem-nos contudo resolver muitas equações diferenciais que aparecem na Mecânica e Geometria, de maneira que o seu estudo tem algum interesse prático. Alguns desses métodos especiais bem como alguns dos problemas que eles permitem resolver serão apresentados no final deste capítulo.

A experiência mostrou que é difícil obter teorias matemáticas muito gerais acerca das soluções das equações diferenciais, excepto para uns poucos tipos. Entre estes figuram as chamadas equações diferenciais *lineares* que aparecem em grande variedade de problemas científicos. Os tipos mais simples de equações diferenciais lineares e algumas das suas aplicações serão estudados neste capítulo de introdução. Um estudo mais completo das equações lineares será apresentado no Volume II.

8.2. Terminologia e notação

Quando se trabalha com uma equação diferencial tal como (8.1) é usual escrever y em vez de $f(x)$ e y' em vez de $f'(x)$, sendo as derivadas de ordem superior representadas sucessivamente por y'', y''', etc. É evidente que também podem ser usadas outras letras, como por exemplo u, v, z, etc., em vez de y. *Ordem* duma equação diferencial é a ordem mais elevada das derivadas que nela figuram. Assim (8.1) é uma equação diferencial de primeira ordem que pode escrever-se $y' = y$. A equação diferencial $y' = x^3y + \operatorname{sen}(x\,y'')$ é de segunda ordem.

Neste capítulo iniciaremos o nosso estudo com equações diferenciais de primeira ordem que possam ser resolvidas relativamente a y' e escritas na forma

$$y' = f(x, y)\,, \tag{8.2}$$

onde a expressão $f(x, y)$ no segundo membro pode assumir diversas formas particulares. Uma função derivável $y = Y(x)$ dir-se-á uma *solução* de (8.2) num intervalo I, se a função Y e a sua derivada Y' satisfazem à equação

$$Y'(x) = f[x,\ Y(x)]$$

para todo o x em I. O caso mais simples ocorre quando $f(x, y)$ é independente de y. Neste caso (8.2) vem

$$y' = Q(x)\,, \tag{8.3}$$

por exemplo, em que Q se supõe ser uma função dada definida em algum intervalo I. Resolver a equação diferencial (8.3) significa encontrar uma primitiva de Q. O segundo teorema fundamental do cálculo diz-nos como obtê-a quando Q é contínua num intervalo aberto I. Muito simplesmente integra-se Q e adiciona-se-lhe uma constante arbitrária. Deste modo toda a solução de (8.3) está contida na fórmula

$$y = \int Q(x)\,dx + C\,, \tag{8.4}$$

em que C é uma constante qualquer (geralmente chamada constante arbitrária de integração). A equação diferencial (8.3) tem, portanto, infinitas soluções, uma para cada valor de C.

Se não for possível calcular o integral em (8.4) por meio de funções elementares, tais como polinómios, funções racionais, funções trigonométricas e trigonométricas inversas, logaritmos e exponenciais, considera-se ainda a equação diferencial como tendo sido resolvida se a solução pode ser expressa mediante integrais de funções conhecidas. Na prática existem vários métodos para obter valores aproximados de integrais os quais nos conduem a uma informação útil acerca da solução. Máquinas de cálculo automático foram concebidas tendo em mente a resolução deste problema.

EXEMPLO. *Movimento retilíneo determinado a partir da velocidade.* Suponhamos que uma partícula se move ao longo duma reta, de maneira que a sua velocidade no instante t seja 2 sen t. Determinar a sua posição nesse instante.

Resolução. Se $Y(t)$ representa a posição no instante t, medida a partir da posição inicial, então a derivada $Y'(t)$ representa a velocidade nesse instante t. Temos, pois, segundo o enunciado

$$Y'(t) = 2\,\text{sen}\,t\,.$$

Integrando obtemos

$$Y(t) = 2\int \text{sen}\,t\,dt + C = -2\cos t + C\,.$$

Isto é tudo quanto podemos deduzir acerca de $Y(t)$, unicamente a partir do conhecimento da velocidade; algo mais necessita ser conhecido para podermos dizer qual a posição da partícula. Podemos determinar C se conhecermos o valor de Y num certo instante. Por exemplo, se $Y(0) = 0$, então $C = 2$ e a lei do movimento é $Y(t) = 2 - 2\cos t$. Mas se fôr $Y(0) = 2$, então $C = 4$ e a mesma lei de movimento é $Y(t) = 4 - 2\cos t$.

Em certos aspectos o exemplo que acabámos de considerar é típico do que acontece em geral. Em determinada fase do processo de resolução duma equação diferencial de primeira ordem, é necessária uma integração para fazer desparecer a derivada y' e nesta fase aparecerá uma constante arbitrária C. O modo segundo o qual a constante arbitrária C entra na solução dependerá da natureza da equação diferencial dada. Pode aparecer como uma constante aditiva, como é o caso de (8.4), mas é mais favorável que apareça sob qualquer outra forma. Por exemplo, quando resolvemos a equação $y' = y$ na seção 8.3, encontrámos que toda a solução tem a forma $y = Ce^x$.

Em muitos problemas é necessário selecionar do conjunto de todas as soluções aquela que toma um valor previamente dado num certo ponto. Esse valor previamente dado chama-se uma *condição inicial* e o problema da determinação duma tal solução é chamado um *problema de valores iniciais*. Esta terminologia é oriunda da mecânica onde, como no exemplo atrás exposto, o valor previamente dado define a posição da partícula num determinado instante inicial.

Vamos começar o nosso estudo das equações diferenciais com um caso particular importante.

8.3. Equação diferencial de primeira ordem para a função exponencial

A função exponencial é igual à sua própria derivada, e o mesmo é verdadeiro se multiplicarmos a exponencial por uma constante. É fácil provar que estas são as únicas funções que satisfazem a esta condição em todo o eixo real.

TEOREMA 8.1. *Se C é um número real dado, existe uma e uma só função f que verifica a equação diferencial*

$$f'(x) = f(x)$$

para todo o real x e que verifica também a condição inicial $f(0) = C$. Esta função é dada pela fórmula

$$f(x) = Ce^x .$$

Demonstração. É fácil verificar que a função $f(x) = Ce^x$ satisfaz quer à equação diferencial, quer à condição inicial dada. Interessa agora demonstrar que esta é a *única* solução.

Seja $y = g(x)$ qualquer solução deste problema de valores inciais

$$g'(x) = g(x) \quad \text{para todo o } x, \;\; g(0) = C .$$

Pretendemos demonstrar que $g(x) = Ce^x$, ou que $g(x)e^{-x} = C$. Consideremos a função $h(x) = g(x)e^{-x}$ e provemos que a sua derivada é sempre zero. A derivada de h é dada por

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = e^{-x}[g'(x) - g(x)] = 0 .$$

Logo, pelo teorema da derivada nula, h é constante. Mas $g(0) = C$, de maneira que $h(0) = g(0)e^0 = C$. Por conseguinte temos $h(x) = C$ para todo o x, o que significa que $g(x) = Ce^x$ como se pretendia demonstrar.

O Teorema 8.1 é um exemplo dum teorema de existência e unicidade de solução. Diz-nos que o problema de valores iniciais dado *tem* uma solução (existência) e *uma só* (unicidade). O objectivo de grande parte da investigação na teoria das equações diferenciais consiste em descobrir teoremas de existência e unicidade para amplas classes de equações.

Estudamos a seguir um tipo importante de equações diferenciais que inclui ambas as equações diferenciais $y' = Q(x)$ e $y' = y$ como casos particulares.

8.4. Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Uma equação diferencial da forma

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{8.5}$$

onde P e Q são funções dadas, chama-se equação diferencial *linear de primeira ordem.* Os termos que contêm a função desconhecida y e a sua derivada y' aparecem como uma combinação linear de y e y'. As funções P e Q supõem-se contínuas em certo intervalo aberto I. Procuramos obter todas as soluções y definidas em I.

Em primeiro lugar consideremos o caso particular em que o segundo membro, $Q(x)$, é idênticamente nulo. A equação

$$y' + P(x)y = 0 \tag{8.6}$$

diz-se *homogénea* ou *reduzida* correspondente a (8.5). Vamos ver como resolver a equação homogénea, para em seguida utilizarmos o resultado na resolução da equação não homogénea (8.5).

Se y é não nula em I, a equação (8.6) é equivalente à equação

$$\frac{y'}{y} = -P(x). \tag{8.7}$$

isto é, toda a função y não nula que satisfaça a (8.6) também satisfaz (8.7) e reciprocamente. Admitamos agora que y é uma função positiva satisfazendo a (8.7). Uma vez que o quociente y'/y é a derivada de $\log y$, a equação (8.7) vem $D\log y = P(x)$, donde resulta $\log y = -\int P(x)dx + C$, pelo que temos

$$y = e^{-A(x)}, \qquad \text{com} \quad A(x) = \int P(x)\,dx - C. \tag{8.8}$$

Quer dizer, se existir uma solução positiva de (8.6), terá necessariamente a forma (8.8) para algúm C. É agora fácil verificar que toda a função (8.8) é uma solução da equação homogénea (8.6). Com efeito temos

$$y' = -e^{-A(x)}A'(x) = -P(x)e^{-A(x)} = -P(x)y.$$

Deste modo encontrámos todas as soluções positivas de (8.6). A partir delas é fácil determinar todas as restantes soluções. Estabelecemos o resultado como um teorema de existência e unicidade.

TEOREMA 8.2. *Se P é continua num intervalo aberto I, a um ponto qualquer em I e b um número real arbitrário, então existe uma e uma só função $y = f(x)$ que satisfaz ao problema de valores inciais*

$$y' + P(x)y = 0, \qquad \textit{com} \qquad f(a) = b, \tag{8.9}$$

no intervalo I. Esta função é definida pela fórmula

$$f(x) = be^{-A(x)}, \qquad \textit{onde} \quad A(x) = \int_a^x P(t)\,dt\,. \tag{8.10}$$

Demonstração. Consideremos f definida por (8.10). Então $A(a) = 0$, de modo que $f(a) = be^0 = b$. A derivação mostra que f satisfaz à equação diferencial (8.9), pelo que f é uma solução do problema de valores iniciais. Temos agora que provar que essa solução é única.

Seja g uma solução qualquer. Pretendemos mostrar que $g(x) = be^{-A(x)}$ ou que $g(x)e^{A(x)} = b$. Portanto é natural introduzir $h(x) = g(x)e^{A(x)}$. A derivada de h vem dada por

$$h'(x) = g'(x)e^{A(x)} + g(x)e^{A(x)}A'(x) = e^{A(x)}[g'(x) + P(x)g(x)]\,. \tag{8.11}$$

Agora, uma vez que g satisfaz à equação diferencial em (8.9), temos $g'(x) + P(x)g(x) = 0$ em todo o I, de modo que $h'(x) = 0$ para todo o x em I. Isto significa que h é constante em I. Por esse motivo temos $h(x) = h(a) = g(a)e^{A(x)} = g(a) = b$. Por outras palavras, $g(x)e^{A(x)} = b$, de maneira que $g(x) = be^{-A(x)}$, o que mostra que $g = f$, estando completada a demonstração do teorema.

A última parte da demonstração anterior sugere um método de resolução da equação diferencial não homogénea (8.5). Suponhamos que g é qualquer função verificando (8.5) e seja $h(x) = g(x)e^{A(x)}$ onde, como anteriormente, $A(x) = \int_a^x P(t)dt$. A equação (8.11) é ainda válida, mas, visto que g satisfaz a (8.5), a fórmula para $h'(x)$ dá-nos

$$h'(x) = e^{A(x)}Q(x)\,.$$

Invocando o segundo teorema fundamental podemos escrever

$$h(x) = h(a) + \int_a^x e^{A(t)}Q(t)\,dt\,.$$

Por isso, visto ser $h(a) = g(a)$, toda a solução g de (8.5) tem a forma

$$g(x) = e^{-A(x)}h(x) = g(a)e^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,dt\,. \tag{8.12}$$

Reciprocamente, pela derivação direta de (8.12), é fácil verificar que cada uma dessas funções g é solução de (8.5), pelo que encontrámos *todas* as soluções. Estabelecemos assim o resultado seguinte:

TEOREMA 8.3. *Se P e Q são contínuas num intervalo aberto I, a um ponto qualquer de I e b um número real arbitrário, então existe uma e uma só função $y = f(x)$ que satisfaz ao problema de valores iniciais*

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad \textit{com} \quad f(a) = b\,,$$

no intervalo I. Esta função é definida pela fórmula

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,dt\,,$$

onde $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$.

Até agora a palavra "intervalo" significava um intervalo limitado da forma (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ ou $(a, b]$, com $a < b$. É conveniente considerar também intervalos ilimitados. São representados pelos símbolos $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$ e $(-\infty, a]$ e definem-se do modo seguinte:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}\,, \qquad (-\infty, a) = \{x \mid x < a\}\,,$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}\,, \qquad (-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}\,.$$

Além disso é conveniente referir o conjunto de *todos* os números reais como o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Assim, quando discutimos uma equação diferencial ou a sua solução num intervalo I, subentende-se que I pode ser um dos nove tipos que acabámos de referir.

EXEMPLO. Determinar todos as soluções da equação diferencial de primeira ordem $xy' + (1 - x)\,y = e^{2x}$ no intervalo $(0, +\infty)$.

Resolução. Primeiramente dá-se à equação a forma $y' + P(x)y = Q(x)$, por divisão de ambos os membros por x. Obtemos então

$$y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = \frac{e^{2x}}{x}\,,$$

pelo que $P(x) = 1/x - 1$ e $Q(x) = e^{2x}/x$. Visto que P e Q são contínuas no intervalo $(0, +\infty)$, existe uma única solução $y = f(x)$ verificando qualquer condição inicial dada da forma $f(a) = b$. Devemos exprimir todas as soluções em função do valor inicial no ponto $a = 1$. Por outras palavras, dado qualquer número real b, determinaremos todas as soluções para as quais $f(1) = b$.

Em primeiro lugar calculamos

$$A(x) = \int_1^x P(t)\,dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - 1\right)dt = \log x - (x - 1)\,.$$

Daqui resulta $e^{-A(x)} = e^{x-1-\log x} = e^{x-1}/x$ e $e^{A(t)} = te^{1-t}$, de maneira que o Teorema 8.3 diz-nos que a solução é dada pela fórmula

$$f(x) = b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x}\int_1^x \frac{e^{2t}}{t}\,te^{1-t}\,dt = b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}\int_1^x e^t\,dt$$

$$= b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}(e^x - e) = b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^{x+1}}{x}\,.$$

Podemos também escrever $f(x)$ na forma

$$f(x) = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}\,,$$

em que $C = be^{-1} - e$. Obtivemos pois todas as soluções no intervalo $(0, +\infty)$.

Pode ser de interesse estudar o comportamento das soluções quando $x \to 0$. Se aproximamos a exponencial pelo seu polinómio de Taylor linear, encontramos $e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$ e $e^x = 1 + x + o(x)$ quando $x \to 0$, pelo que podemos escrever

$$f(x) = \frac{(1 + C) + (2 + C)x + o(x)}{x} = \frac{1 + C}{x} + (2 + C) + o(1)\,.$$

Assim unicamente a solução com $C = -1$ tende para um limite finito quando $x \to 0$, limite esse que vale 1.

8.5. Exercícios

Em cada um dos Exercícios 1 a 5 resolver o problema de valores iniciais no intervalo indicado.

1. $y' - 3y = e^{2x}$ no $(-\infty, +\infty)$, com $y = 0$ quando $x = 0$.
2. $xy' - 2y = x^5$ no $(0, +\infty)$, com $y = 1$ quando $x = 1$.
3. $y' + y \tan x = \operatorname{sen} 2x$ no $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, com $y = 2$ quando $x = 0$.
4. $y' + xy = x^3$ no $(-\infty, +\infty)$, com $y = 0$ quando $x = 0$.
5. $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{2t}$ no $(-\infty, +\infty)$, com $x = 1$ quando $t = 0$.
6. Determinar todas as soluções de $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 1$ no intervalo $(0, \pi)$. Provar que exatamente uma destas soluções tem um limite finito quando $x \to 0$, e outra tem um limite finito quando $x \to \pi$.
7. Determinar todas as soluções de $x(x + 1)y' + y = x(x + 1)^2 e^{-x^2}$ no intervalo $(-1, 0)$. Provar que todas as soluções tendem para 0 quando $x \to -1$, mas que apenas uma delas tem um limite finito quando $x \to 0$.
8. Determinar todas as soluções de $y' + y \operatorname{cotg} x = 2 \cos x$ no intervalo $(0, \pi)$. Provar que exatamente uma destas soluções o é também no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
9. Determinar todas as soluções de $(x - 2)(x - 3)y' + 2y = (x - 1)(x - 2)$ em cada um dos seguintes intervalos: (a) $(-\infty, 2)$; (b) $(2, 3)$; (c) $(3, +\infty)$. Provar que todas as soluções tendem para um limite finito quando $x \to 2$, mas que nenhuma admite limite finito quando $x \to 3$.
10. Seja $s(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ se $x \neq 0$ e $s(0) = 1$. Seja ainda $T(x) = \int_0^x s(t)\,dt$. Provar que a função $f(x) = xT(x)$ satisfaz à equação diferencial $xy' - y = x \operatorname{sen} x$ no intervalo $(-\infty,$

$+\infty$) e determinar todas as soluções neste intervalo. Provar que a equação diferencial não tem solução satisfazendo a condição inicial $f(0) = 1$ e explicar o motivo porque tal não contradiz o teorema 8.3.

11. Provar que existe exatamente uma função f, contínua no semieixo real positivo, tal que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$$

para todo o $x > 0$ e determinar esta função.

12. A função f definida pela equação

$$f(x) = xe^{(1-x^2)/2} - xe^{-x^2/2}\int_1^x t^{-2}e^{t^2/2}\,dt$$

para $x > 0$ goza das propriedades (i) é contínua no semieixo real positivo e (ii) verifica a equação

$$f(x) = 1 - x\int_1^x f(t)\,dt$$

para todo o $x > 0$. Determinar todas as funções com estas duas propriedades.

A equação de Bernoulli. A equação diferencial da forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, em que n é diferente de 0 e 1, chama-se a equação de Bernoulli. É uma equação não linear devido à presença de y^n. O exercício que se segue mostra que tal equação pode ser sempre transformada numa equação linear de primeira ordem para uma nova função desconhecida v, com $v = y^k$, $k = 1 - n$.

13. Seja k uma constante não nula. Suponhamos que P e Q são contínuas num intervalo I. Se $a \in I$ e b é qualquer número real, seja $v = g(x)$ a única solução de $v' + kP(x)v = kQ(x)$ em I, com $g(a) = b$. Se $n \neq 1$ e $k = 1 - n$, provar que uma função $y = f(x)$, que não é identicamente nula em I, é uma solução de

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \text{ em } I, \text{ com } f(a)^k = b$$

se e somente se a potência da ordem k de f é igual a g em I.

Em cada um dos Exercícios 14 e 17, resolver o problema de valores iniciais no intervalo especificado.

14. $y' - 4y = 2e^x y^{1/2}$ em $(-\infty, +\infty)$, com $y = 2$ quando $x = 0$.
15. $y' - y = -y^2(x^2 + x + 1)$ em $(-\infty, +\infty)$, com $y = 1$ quando $x = 0$.
16. $xy' - 2y = 4x^3 y^{1/2}$ em $(-\infty, +\infty)$, com $y = 0$ quando $x = 1$.
17. $xy' + y = y^2 x^2 \log x$ em $(0, +\infty)$, com $y = \frac{1}{2}$ quando $x = 1$.

18. $2xyy' + (1+x)y^2 = e^x$ em $(0, +\infty)$, com (a) $y = \sqrt{e}$ quando $x = 1$; (b) $y = -\sqrt{e}$ quando, $x = 1$; (c) um limite finito quando $x \to 0$.

19. Uma equação da forma $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ chama-se a *equação de Riccati.* (Não se conhece qualquer método de resolução da equação geral de Riccati). Provar que se u é uma solução conhecida desta equação, então existem outras soluções da forma $y = u + 1/v$, em que v verifica a equação diferencial linear de primeira ordem.

20 A equação de Riccati $y' + y + y^2 = 2$ tem duas soluções constantes. Partir de cada uma delas e usar o Exercício 19 para encontrar outras soluções como segue: Se $-2 \leq b < 1$, determinar uma solução em $(-\infty, +\infty)$ para o qual $y = b$ quando $x = 0$.
(b) Se $b \geq 1$ ou $b < -2$, determinar uma solução no intervalo $(-\infty, +\infty)$ para a qual $y = b$ quando $x = 0$.

8.6. Alguns problemas físicos conduzindo à resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem

Nesta seção vamos analisar alguns problemas físicos que podem ser formulados matematicamente por intermédio de equações diferenciais. Em cada exemplo, a equação diferencial representa uma esquematização idealizada do problema físico e chama-se um *modelo matemático* desse problema. A equação diferencial aparece como a tradução de certa lei física, tal como a segunda lei de Newton do movimento, a lei de "conservação", etc. O nosso propósito aqui é não a justificação da escolha do modelo matemático, mas antes a dedução de consequências lógicas a partir dele. Cada modelo é unicamente uma aproximação da realidade e a sua justificação propriamente dita pertence à ciência da qual ele resulta. Se a intuição ou evidência experimental concordam com os resultados deduzidos matematicamente, então acreditamos que o modelo nos será útil. Se assim não for, tentaremos encontrar um outro modelo que seja mais adequado.

EXEMPLO 1. *Desintegração radioactiva.* Embora vários elementos radioactivos mostrem diferenças nítidas nas respectivas velocidades de desintegração todas eles parecem possuir esta propriedade comum — o coeficiente de desintegração para uma dada substância é, em qualquer instante, proporcional à quantidade de substância existente nesse instante. Se representarmos por $y = f(t)$ o total de substância existente em t, a derivada $y' = f'(t)$ representa o coeficiente de variação de y no instante t e a lei de desintegração exprime-se por

$$y' = -ky\ ,$$

onde k é uma constante positiva (chamada *constante de desintegração*) cujo valor depende do elemento particular que se está desintegrando. O sinal menos aparece porque y decresce quando t aumenta e por isso y' é sempre negativo. A equação diferencial $y' = -ky$ é o modelo matemático usado para os problemas relativos à desintegração radioactiva. Cada solução $y = f(t)$ desta equação diferencial é da forma

$$f(t) = f(0)e^{-kt}. \tag{8.13}$$

Portanto, para determinar o total de substância presente num instante t, necessitamos saber o valor inicial $f(0)$ e o valor da constante de desintegração k.

É interessante saber qual a informação que pode ser obtida de (8.3), sem conhecer o valor exato de $f(0)$ ou de k. Em primeiro lugar observamos que não existe qualquer valor finito de t para o qual $f(t)$ seja nulo, uma vez que a exponencial e^{-kt} nunca se anula. Portanto não tem significado falar de "tempo total de vida" duma substância radioativa. Contudo, é possível determinar o tempo necessário para que qualquer *fração* da amostra do elemento se desintegre. A fração 1/2 é habitualmente escolhida por conveniência e o tempo T para o qual $f(T)/f(0) = \frac{1}{2}$ chama-se *vida média* da substância. Esta pode ser calculada pela resolução relativamente a T da equação $e^{-KT} = \frac{1}{2}$. Tomando logaritmos vem $-KT = -\log 2$ ou $T = (\log 2)/k$, equação que relaciona o período de vida média com a constante de desintegração. Uma vez que se tem

$$\frac{f(t+T)}{f(t)} = \frac{f(0)e^{-k(t+T)}}{f(0)e^{-kt}} = e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

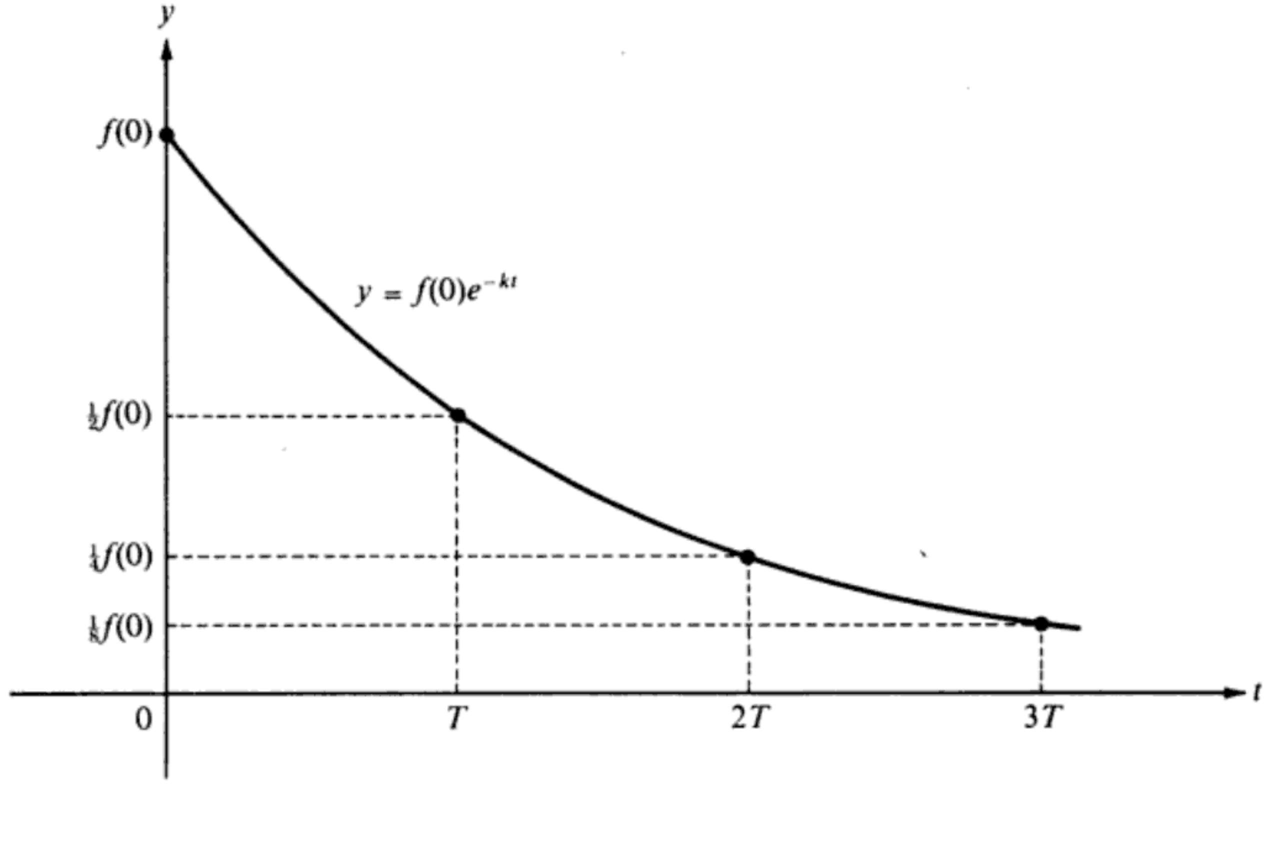


Fig. 8.1. Desintegração radioativa com vida média T.

vemos que o período de vida média é o mesmo para *qualquer* amostra duma mesma substância. A fig. 8.1. dá uma ideia da forma geral da curva de desintegração radioativa.

EXEMPLO 2. *Corpo em queda num meio resistente.* Um corpo de massa m em repouso é lançado de grande altura na atmosfera terrestre. Admitamos que cai segundo a vertical e que as forças únicas actuando sobre ele são a força da gravidade terrestre (mg, com g a aceleração da gravidade, suposta constante) e uma força resistente (devida à resistência do ar) que é proporcional à sua velocidade. Pede-se para discutir o movimento.

Seja $s = f(t)$ a distância percorrida pelo corpo em queda ao fim do tempo t e $v = s' = f'(t)$ a sua velocidade. A afirmação de que inicialmente está em repouso significa que $f'(0) = 0$.

Existem duas forças a atuar sobre o corpo, uma dirigida para baixo (o seu peso) e outra dirigida para cima, $-kv$, (devida à resistência do ar) sendo k uma constante positiva. A segunda lei de Newton afirma que a resultante das forças atuando sobre o corpo em qualquer instante é igual ao produto da sua massa m pela respectiva aceleração. Se designarmos a aceleração no instante t por a, então $a = v' = s''$ e a lei de Newton conduz-nos à equação

$$ma = mg - kv\,.$$

Esta pode ser considerada uma equação diferencial de segunda ordem para o deslocamento s ou uma equação diferencial de primeira ordem para a velocidade v. Como equação de primeira ordem em v é linear e pode escrever-se na forma

$$v' + \frac{k}{m}v = g\,.$$

Esta equação é o modelo matemático do problema. Visto que $v = 0$ quando $t = 0$, a única solução da equação diferencial é dada pela fórmula

$$v = e^{-kt/m}\int_0^t ge^{ku/m}\,du = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})\,. \tag{8.14}$$

Note-se que $v \to mg/k$ quando $t \to +\infty$. Se derivamos (8.14), encontramos que a aceleração em cada instante é $a = ge^{-kt/m}$. Observe-se ainda que $a \to 0$ quando $t \to +\infty$. Interpretado fisicamente, significa isto que a resistência do ar tende a equilibrar a força da gravidade.

Visto que $v = s'$, a equação (8.14) é ela própria uma equação diferencial para o deslocamento s, e pode ser integrada diretamente para dar

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{gm^2}{k^2}e^{-kt/m} + C\,.$$

Por ser $s = 0$ quando $t = 0$, vem $C = -gm^2/k^2$ e a equação do movimento é

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{gm^2}{k^2}(e^{-kt/m} - 1)\,.$$

Se a velocidade inicial é v_0 quando $t = 0$, a fórmula (8.14) deve ser substituida por

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) + v_0e^{-kt/m}$$

É interessante a conclusão de que para toda a velocidade inicial (positiva, negativa ou nula) a velocidade limite, quando t cresce indefinidamente, é mg/k, valor este independente de v_0. O leitor deverá tentar convencer-se a si próprio, por argumentos físicos, que isto parece razoável.

EXEMPLO 3. *Um problema relativo a arrefecimento.* O coeficiente segundo o qual um corpo varia de temperatura é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio que o circunda. (Esta é a chamada *lei de Newton do arrefecimento*). Se $y = f(t)$ é a temperatura (desconhecida) do corpo no instante t e se $M(t)$ representa a temperatura (conhecida) do meio ambiente, a lei de Newton conduz-nos à equação diferencial

$$y' = -k[y - M(t)] \qquad \text{ou} \qquad y' + ky = kM(t)\,, \tag{8.15}$$

em que k é uma constante positiva. Esta equação diferencial linear de primeira ordem é o modelo matemático que usamos para os problemas de arrefecimento. A única solução da equação satisfazendo à condição inicial $f(a) = b$ é dada pela fórmula

$$f(t) = be^{-kt} + e^{-kt}\int_a^t kM(u)e^{ku}\,du\,. \tag{8.16}$$

Consideremos agora um caso particular no qual um corpo arrefece desde 200° até 100° em 40 minutos quando imerso num meio cuja temperatura se supõe constante, digamos $M(t) = 10°$. Se medimos t em minutos e $f(t)$ em graus, temos $f(0) = 200$ e (8.16) dá-nos

$$\begin{aligned} f(t) &= 200e^{-kt} + 10ke^{-kt}\int_0^t e^{ku}\,du \\ &= 200e^{-kt} + 10(1 - e^{-kt}) = 10 + 190e^{-kt}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Podemos calcular k a partir do conhecimento de que $f(40) = 100$. Fazendo $t = 40$ em (8.17) encontramos $90 = 190e^{-40k}$, de maneira que $-40k = \log(90/190)$, $k = \dfrac{1}{40}$ (log 19 − log 9).

Seguidamente, calculemos o tempo necessário para que este mesmo corpo arrefeça de 200° até 100°, se a temperatura do meio ambiente se mantem em 5°. A equação (8.16) é válida com a mesma constante k, mas com $M(u) = 5$. Em vez de (8.17) obtemos

$$f(t) = 5 + 195e^{-kt}.$$

Para determinar o tempo t par o qual $f(t) = 100$, obtemos $95 = 195e^{-kt}$, de maneira que $-kt = \log(95/195) = \log(19/39)$ e por conseguinte

$$t = \frac{1}{k}(\log 39 - \log 19) = 40\,\frac{\log 39 - \log 19}{\log 19 - \log 9}\,.$$

Duma tabela de logaritmos naturais, com 4 casas decimais, tiramos $\log 39 = 3{,}6636$, $\log 19 = 2{,}9444$ e $\log 9 = 2{,}1972$, o que dá aproximadamente $t = 40(0{,}719)/(0{,}747) = 38{,}5$ minutos.

A equação diferencial (8.15) diz-nos que o coeficiente de arrefecimento diminui consideravelmente quando a temperatura do corpo começa a aproximar-se da temperatura do meio em que se encontra. Para pôr isto em evidência, determinemos o tempo exigido para arrefecer a mesmo corpo de 100° até 10° com a temperatura do meio igual a 5°. O cálculo conduz a $\log(5/95) = -kt$ ou

$$t = \frac{1}{k}\log 19 = 40\,\frac{\log 19}{\log 19 - \log 9} = \frac{40(2{,}944)}{0{,}747} = 158 \text{ minutos.}$$

quer dizer para a temperatura baixar de 100° até 10° é necessário quatro vezes mais de tempo do que para passar de 200 a 100°.

EXEMPLO 4. *Um problema de diluição.* Um depósito contém 100 litros de salmoura cuja concentração é de 2,5 gr de sal por litro. Uma salmoura contendo 2 grs de sal por litro é lançada no tanque à razão de 5 litros por minuto e a mistura (tornada uniforme por agitação) corre do tanque na mesma proporção. Determinar o total de sal existente no tanque em cada instante.

Seja $y = f(t)$ o número de gramas de sal existente no tanque t minutos depois de ter começado a mistura. São dois os fatores que obrigam y a variar, a salmoura que é lançada no tanque a qual fornece sal à razão de 10 grs por minuto e a mistura que sai a qual retira do tanque sal à razão de $5(y/100)$ gramas por minuto. (A fração $y/100$ representa a concentração no instante t.) Daqui resulta que a equação diferencial é

$$y' = 10 - \tfrac{1}{20}y \qquad \text{ou} \qquad y' + \tfrac{1}{20}y = 10\,.$$

Esta equação linear é o modelo matemático para o nosso problema. Visto que $y = 250$ quando $t = 0$, a única solução é dada pela fórmula

$$y = 250e^{-t/20} + e^{-t/20}\int_0^t 10e^{u/20}\,du = 200 + 50e^{-t/20}\,. \tag{8.18}$$

Esta equação mostra que $y > 200$ para todo o t e que $y \to 200$ quando t cresce indefinidamente. Quer dizer que o mínimo de sal contido no tanque é 200 grs. (Isto também podia ter sido concluído do enunciado do problema). Na equação (8.18) podemos tirar o valor de t

$$t = 20\log\left(\frac{50}{y - 200}\right).$$

Tal permite-nos encontrar o instante em que o sal contido no tanque assuma determinado valor y, desde que $200 < y < 250$.

EXEMPLO 5. *Circuitos elétricos.* A fig. 8.2(a), página 370, mostra um circuito elétrico que tem uma força eletromotriz, uma resistência, e uma auto-indução ligadas em série. A força eletromotriz origina uma corrente elétrica no circuito. O leitor não deve preocupar-se se não está familiarizado com os circuitos elétricos. Para os nossos propósitos, tudo o que é necessário saber-se acerca dos circuitos elétricos é que a tensão, representada por $V(t)$

e a intensidade da corrente, designada por $I(t)$, são ambas funções do tempo t relacionadas por uma equação diferecial da forma

$$LI'(t) + RI(t) = V(t)\,, \tag{8.19}$$

com L e R constantes positivas, designadas respetivamente por *indutância* e *resistência.* A equação diferencial é a formulação matemática duma lei conhecida por *lei das tensões de Kirchhoff* e serve como modelo matemático para o circuito.

Aos leitores não familiarizados com circuitos elétricos pode ser comodo imaginar a corrente como análoga à água que circula num tubo. A força eletromotriz (geralmente uma bateria ou um gerador) é análoga a uma bomba que obrigue a água a correr no tubo; e a indutância é uma influência estabilizadora que tende a opor-se a variações bruscas na intensidade da corrente, devidas a variações súbitas de tensão.

O tipo corrente de pergunta relativa a tal circuito é esta: Se se aplica ao circuito determinada tensão $V(t)$, qual é a intensidade da corrente resultante? Uma vez que estamos perante uma equação diferencial linear de primeira ordem, a solução é uma questão de rotina. Se $I(0)$ representa a intensidade da corrente no instante inicial $t = 0$, a equação admite a solução

$$I(t) = I(0)e^{-Rt/L} + e^{-Rt/L}\int_0^t \frac{V(x)}{L}\, e^{Rx/L}\, dx\,.$$

Um caso particular importante ocorre quando a tensão aplicada é constante, por exemplo $V(t) = E$, para todo o t. Neste caso a integração é fácil de efetuar e obtemos a fórmula

$$I(t) = \frac{E}{R} + \left(I(0) - \frac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}\,.$$

Isto mostra que a natureza da solução depende da relação entre a intensidade da corrente inicial $I(0)$ e o quociente E/R. Se $I(0) = E/R$, o termo exponencial não aparece e a intensidade da corrente é constante, $I(t) = E/R$. Se $I(0) > E/R$, o coeficiente do termo exponencial é positivo e a intensidade decresce até ao valor limite E/R quando $t \to \infty$. Se $I(0) < E/R$, a corrente cresce até ao valor limite E/R. A constante E/R chama-se a *componente estacionária*, da intensidade, e o termo exponencial $[I(0) - E/R]\,e^{-Rt/L}$ chama-se a *componente variável.* Na fig. 8.2(b) exemplos estão representados.

Os exemplos anteriores exemplificam o poder unificador e a utilidade prática das equações diferenciais. Elas mostram como diferentes tipos de problemas físicos podem conduzir a exatamente o mesmo tipo de equação diferencial.

A equação diferencial em (8.19) é de interesse especial porque sugere a possibilidade de atacar uma larga variedade dos problemas físicos usando meios elétricos. Por exemplo, suponhamos que determinado problema físico conduz a uma equação diferencial da forma

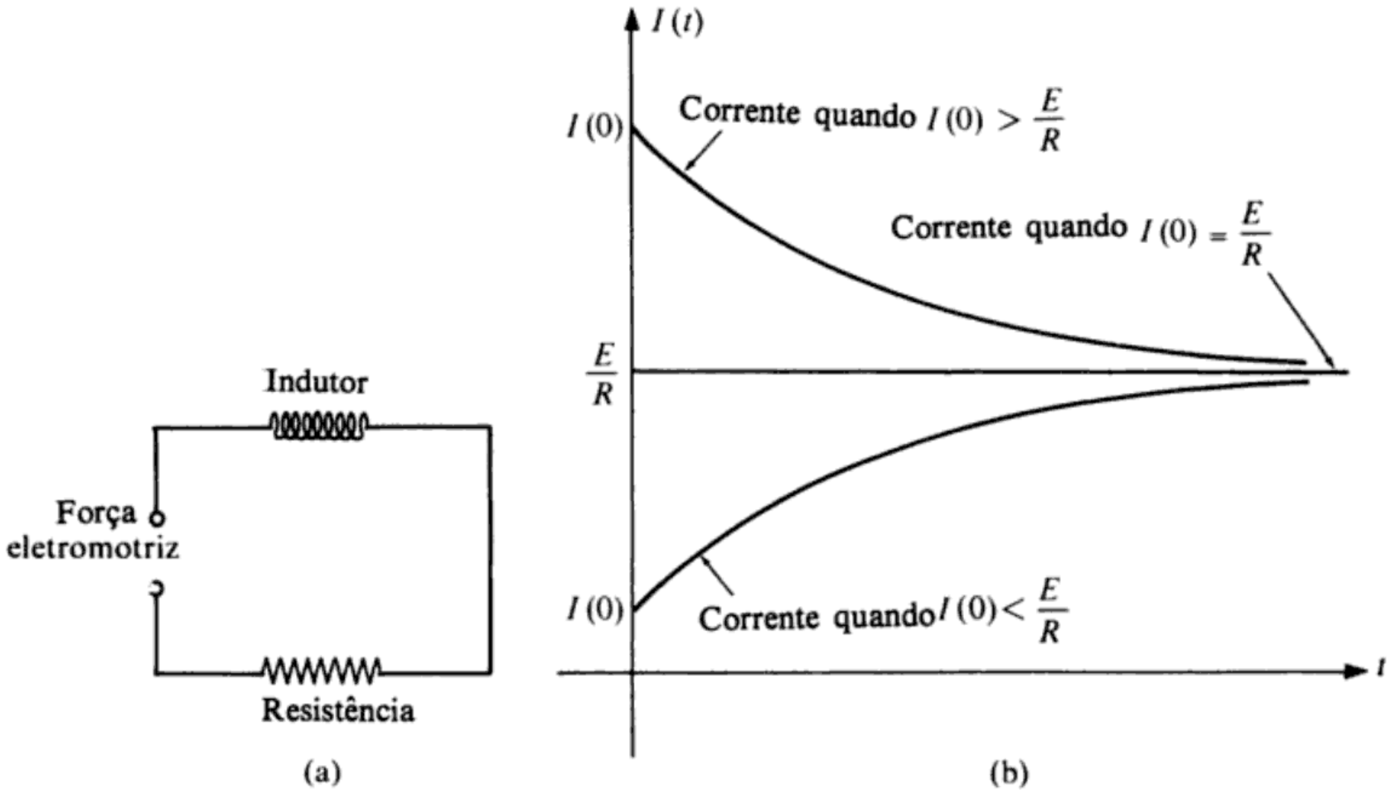


Fig. 8.2.(a) Diagrama para um circuito simples em série. (b) Intensidade da corrente resultante da aplicação duma voltagem constante.

$$y' + ay = Q\,,$$

em que a é uma constante positiva e Q é uma função conhecida. Podemos então tentar construir um circuito elétrico com indutância L e resistência R, de modo que seja $R/L = a$ e então aplicar a tensão LQ no circuito. Teríamos assim um circuito elétrico com exactamente o mesmo modelo matemático que o problema físico. Podemos, portanto, esperar obter dados numéricos relativos à solução do problema físico efetuando medições da intensidade no circuito elétrico. Esta ideia foi posta em prática e conduziu ao desenvolvimento dos *computadores analógicos*.

8.7. Exercícios

Nos exercícios que se seguem, estabelecer uma equação diferencial de primeira ordem adequada como modelo matemático do problema.

1. O período de vida média do rádio é aproximadamente 1600 anos. Determinar qual a percentagem duma dada quantidade de rádio que se desintegra num período de 100 anos.
2. Se uma cultura de bactérias aumenta duma maneira proporcional à quantidade existente em cada instante e se a população duplica numa hora, de quanto aumentará ao fim de duas horas?
3. Representar por $y = f(t)$ o total de substância existente no instante t. Supor que ela se desintegra proporcionalmente à quantidade existente. Se n é um inteiro positivo, o

número T para o qual $f(T)=f(0)/n$ diz-se o período de vida n-enésimo da substância.
(a) Provar que o período de vida n-enésimo para qualquer amostra da mesma substância é o mesmo e calcular T em função de n e da constante de desintegração.
(b) Se a e b são dados, provar que f pode ser expresso na forma

$$f(t) = f(a)^{w(t)}f(b)^{1-w(t)}$$

e determinar $w(t)$. Isto prova que a quantidade existente no instante t é uma media geométrica ponderada das quantidades existentes nos dois instantes $t = a$ e $t = b$.

4. Um indivíduo lança-se em paraquedas duma grande altura. O peso do indivíduo e do paraquedas é de 192 libras. Seja $v(t)$ a sua velocidade (em pés/segundo) no instante t segundos depois do início da queda. Durante os primeiros 10 segundos, antes de o paraquedas se abrir, supor que a resistência do ar é $\frac{3}{4}v(t)$ libras. Depois do paraquedas se abrir supor que essa resistência vale $12v(t)$ libras. Admitindo que a aceleração da gravidade vale 32 pés/seg^2 determinar fórmulas explícitas para a velocidade $v(t)$ no instante t. (Usar a aproximação $e^{-5/4} = 37/128$).
5. No Exercício 2 da seção 8.6 usar a regra da derivação da função composta

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}$$

e mostrar que a equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{ds}{dv} = \frac{bv}{c - v},$$

em que $b = m/k$ e $c = gm/k$. Integrar esta equação para exprimir s em função de v. Comparar o resultado com as fórmulas para v e s derivadas naquele exemplo.
6. Modificar o Exemplo 2 da seção 8.6 supondo que a resistência do ar é proporcional a v^2. Mostrar que a equação diferencial pode ser escrita nas formas seguintes:

$$\frac{ds}{dv} = \frac{m}{k}\frac{v}{c^2 - v^2}; \qquad \frac{dt}{dv} = \frac{m}{k}\frac{1}{c^2 - v^2},$$

onde $c = \sqrt{mg/k}$. Integrar cada uma delas e obter as seguintes expressões para v:

$$v^2 = \frac{mg}{k}(1 - e^{-2ks/m}); \qquad v = c\,\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{e^{bt} + e^{-bt}} = c \operatorname{th} bt,$$

com $b = \sqrt{kg/m}$. Determinar o valor limite de v quando $t \to +\infty$.
7. Um corpo numa sala a 60° arrefece de 200° para 120° em meia hora.
(a) Mostrar que a sua temperatura depois de t minutos é $60 + 140\, e^{-kt}$, com k=(log 7 − log 3)/30.

(b) Mostrar que o tempo t necessário para alcançar a temperatura de T graus é dado pela fórmula $t = [\log 140 - \log(T - 60)]/k$, com $60 < T \leq 200$.

(c) Determinar o instante em que a temperatura é de 90º.

(d) Determinar a fórmula para a temperatura do corpo no instante t se a temperatura da sala não se considera constante, mas sim variando na razão de 1 grau cada dez minutos. Supor que a temperatura da sala é de 60º quando a temperatura do corpo é de 200º.

8. Um termómetro dentro de determinada sala marcava 75ºF. Cinco minutos depois de ter sido retirado para o exterior marcava 65ºF e depois de outros cinco minutos marcava 60ºF. Calcular a temperatura exterior.

9. Um tanque contém 378,53 litros de salmoura obtida pela dissolução de 22,68 kg de sal. Por uma entrada corre água para o tanque na razão de 11,36 l por minuto, mantendo-se a concentração uniforme por agitação do líquido. Que quantidade de sal existirá no tanque ao fim de uma hora se a mistura corre para o exterior à razão de 7,57 l por minuto?

10. Admitir as condições do problema anterior. O fundo do tanque está coberto por uma mistura de sal e material insolúvel e admite-se que o sal se dissolva com uma velocidade proporcional à diferença entre a concentração da solução e a duma solução saturada (362 gramas/litro) e que se a água fosse pura se dissolveria 453,6 gr. de sal por minuto. Que quantidade de sal haverá na solução quando tiver decorrido uma hora?

11. Consideremos um circuito elétrico semelhante ao do Exemplo 5 da seção 8.6. Suponhamos que a força eletromotriz é um gerador de corrente alterna que produz uma tensão $V(t) = E$ sen ωt, em que E e ω são constantes positivas. Se $I(0) = 0$, provar que a intensidade de corrente tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-Rt/L},$$

em que α depende unicamente de ω, L e R. Mostrar que $\alpha = 0$ quando $L = 0$.

12. No Exemplo 5 da seção 8.6 supor que a tensão é uma função em escada definida do modo seguinte: $E(t) = E$ se $a \leq t \leq b$, com $a > 0$; $E(t) = 0$ para qualquer outro valor de t. Se $I(0) = 0$ provar que a intensidade de corrente é dada pelas seguintes fórmulas: $I(t) = 0$ se $t \leq a$;

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-R(t-a)/L}) \quad \text{se} \quad a \leq t \leq b\,; \qquad I(t) = \frac{E}{R} e^{-Rt/L}(e^{Rb/L} - e^{Ra/L}) \quad \text{se} \quad t \geq b\,.$$

Fazer um esboço representativo da natureza do gráfico de I.

Crescimento da população. No estudo do crescimento de uma população (quer humana, quer animal, quer bacteriana), a função que conta o número x de indivíduos existindo num dado instante t é necessariamente uma *função em escada,* tomando unicamente valores inteiros. Deste modo o verdadeiro *coeficiente de crescimento* dx/dt é zero (quando t pertence a um intervalo aberto em que x é constante) ou então a derivada dx/dt não existe (quando x salte de um inteiro para outro). Apesar disso, pode muitas vezes obter-se uma informação útil, admitindo-se que a população x é uma função contínua de t com derivada contínua dx/dt

em cada instante. Postulam-se então várias “leis de crescimento” para a população, dependentes de fatores do meio ambiente que podem estimular ou retardar o crescimento.

Por exemplo, se o meio ambiente tem pouca ou nenhuma influência, parece natural supor que o coeficiente de crescimento é proporcional ao total da população existente e então a lei de crescimento tomará a forma

$$\frac{dx}{dt} = kx\,, \tag{8.20}$$

em que k é uma constante que depende da natureza da população. Podem ocorrer determinadas condições que originem a variação do fator k com o tempo e a lei de crescimento (8.20) pode generalizar-se para

$$\frac{dx}{dt} = k(t)x\,. \tag{8.21}$$

Se, por qualquer razão, a população não puder exceder um certo máximo M (por exemplo porque possam esgotar-se os alimentos) parece razoável supor que o coeficiente de crescimento é conjuntamente proporcional a x e $M - x$. Deste modo teremos nova lei de crescimento.

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x)\,, \tag{8.22}$$

onde, como em (8.21), k pode supor-se constante ou, mais geralmente, k pode variar com o tempo. Aperfeiçoamentos tecnológicos podem fazer com que o valor de M cresça ou decresça lentamente e por isso podemos generalizar (8.22) numa outra forma com M a variar com o tempo.

13. Exprimir x como uma função de t para cada uma das “leis de crescimento” em (8.20) e (8.22) (com k e M ambos constantes). Mostrar que o resultado de (8.22) pode apresentar-se do modo seguinte:

$$x = \frac{M}{1 + e^{-\alpha(t-t_1)}}\,, \tag{8.23}$$

em que α é constante e t_0 é o instante em que $x = M/2$.

14. Considerar a lei de crescimento dada pela fórmula (8.23) do Exercício 13 e supor que fazendo-se censos da população em três datas, t_1, t_2, t_3, definindo intervalos de tempos iguais, se obtiveram os valores x_1, x_2, x_3. Mostrar que estes dados bastam para determinar M e que, com efeito, se tem

$$M = x_2\,\frac{x_3(x_2 - x_1) - x_1(x_3 - x_2)}{x_2^2 - x_1x_3}\,. \tag{8.24}$$

15. Deduzir a fórmula que generaliza (8.23) para a lei de crescimento (8.22) quando k não é necessáriamente constante. Exprimir o resultado em relação ao tempo t_0 para o qual $x = M/2$.
16. O Census Bureau indica as seguintes populações (em milhões) para os Estados Unidos em intervalos de 10 anos desde 1790 até 1950: 3,9; 5,3; 7,2; 9,6; 12,9; 17; 23; 31; 39; 50; 63; 76; 92; 108; 122; 135; 150.

    (a) Usar a equação (8.24) para determinar o valor de M, com base nos dados dos censos de 1790, 1850, 1910.

    (b) O mesmo que em (a) para os anos 1910, 1930, 1950.

    (c) Com base nos cálculos de (a) e (b) pode considerar-se como aceitável ou não a lei de crescimento (8.23) para a população dos Estados Unidos?
17. (a) Desenhar o gráfico de log x como função de t, em que x representa os dados do censo referidos no Exercício 16. Utilizar este gráfico para demonstrar que a lei de crescimento (8.20) se verifica com muita aproximação desde 1970 até 1910. Determinar um valor médio razoável de k para este período.

    (b) Determinar um valor médio razoável de k para o período desde 1920 a 1950; supor que a lei (8.20) é verdadeira para este valor de k, e prever qual a população dos Estados Unidos para os anos 2000 a 2050.
18. A presença de toxinas num certo meio destroi uma cultura de bactérias numa razão conjuntamente proporcional ao número de bactérias presentes e ao total de toxinas existentes na cultura. Se não existissem toxinas as bactérias cresceriam proporcionalmente ao

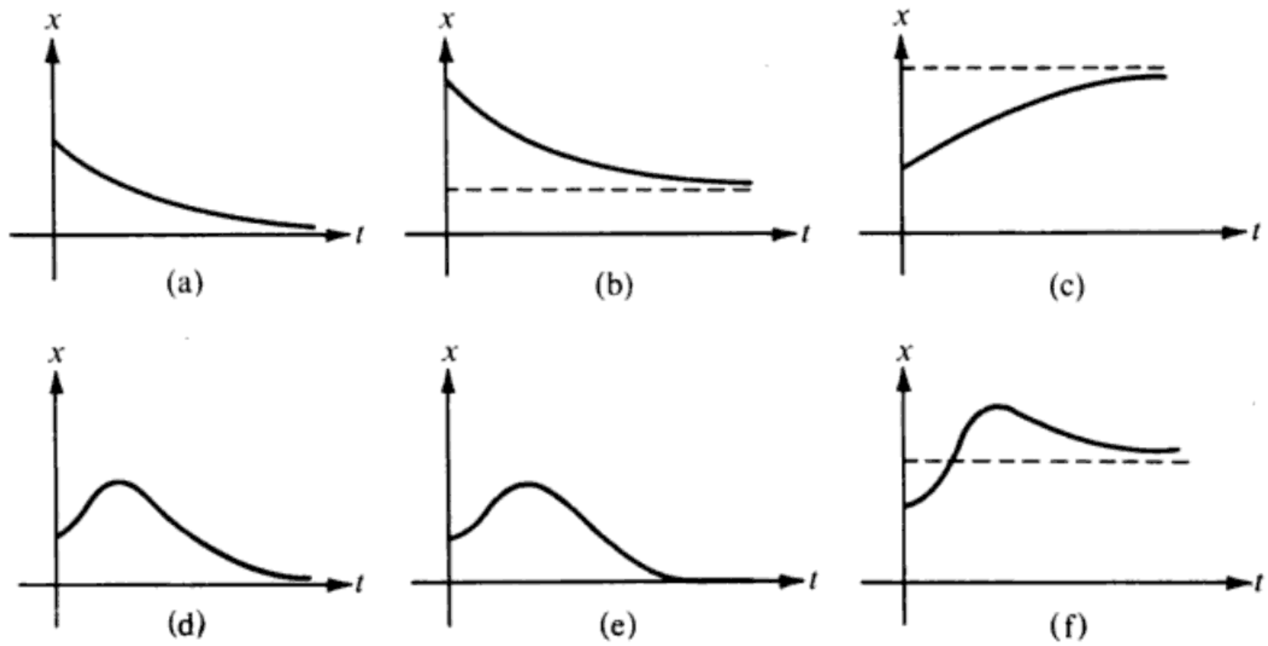


Fig. 8.3. Exercício 18.

total existente. Represente x o número de bactérias vivas no instante t. Suponhamos que o total de toxinas cresce numa razão constante e que a produção de toxinas se inicia no instante $t = 0$. Estabelecer uma equação diferencial para x. Resolver essa equação diferencial. Uma das curvas da fig. 8.3 é a que representa melhor o comportamento geral de x como função de t. Dizer qual, e justificar a escolha.

8.8. Equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

Uma equação diferencial da forma

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x)$$

diz-se uma *equação linear de segunda ordem*. As funções P_1 e P_2 que multiplicam a função desconhecida y e a sua derivada y' são os *coeficientes* da equação.

Para as equações lineares de primeira ordem provámos um teorema de existência e unicidade e determinámos todas as soluções recorrendo a uma fórmula explícita. Embora exista um correspondente teorema de existência e unicidade para a equação linear geral de segunda ordem, não existe uma fórmula que dê todas as soluções, excepto em alguns casos especiais. O estudo da equação linear de segunda ordem mais geral é feito no Volume II. Aqui apenas tratamos o caso em que os coeficientes P_1 e P_2 são constantes. Quando o segundo membro $R(x)$ é identicamente nulo a equação diz-se *homogénea.*

A equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes foi a primeira equação diferencial dum tipo geral a ser completamente resolvida. Em 1743 Euler publicou uma primeira solução. À parte o seu interesse histórico, esta equação apresenta-se numa grande variedade de problemas, pelo que o seu estudo reveste grande importância prática. Além disso, podemos estabelecer fórmulas explícitas para todas as soluções.

Consideremos uma equação linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes que escrevemos

$$y'' + ay' + by = 0 .$$

Pretendemos soluções em todo o eixo real $(-\infty, +\infty)$. Uma solução é a função constante $y = 0$. É a chamada solução trivial. O nosso interesse está na determinação de soluções não triviais e para isso iniciamos o nosso estudo com alguns casos particulares para os quais se podem encontrar aquele tipo de soluções por simples análise da equação. Em todos estes casos o coeficiente de y' é zero e a equação tem a forma $y'' + by = 0$. Verificaremos que resolver esta equação particular é equivalente a resolver o caso geral.

8.9. Existência de soluções da equação $y'' + by = 0$

EXEMPLO 1. *A equação* $y'' = 0$. Neste caso ambos os coeficientes a e b são nulos e podemos facilmente determinar todas as soluções. Admitamos que y é uma função satisfazendo a $y'' = 0$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Então a sua derivada y' é constante, por exemplo $y' = c_1$. Integrando esta relação y tem necessariamente a forma

$$y = c_1 x + c_2 ,$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Reciprocamente, para qualquer escolha das constantes c_1 e c_2 o polinómio linear $y = c_1 x + c_2$ satisfaz a $y'' = 0$, pelo que estão determinadas todas as soluções neste caso.

No exemplo seguinte admitimos que $b \neq 0$ e tratamos separadamente os casos $b < 0$ e $b > 0$.

EXEMPLO 2. *A equação $y'' + by = 0$, com $b < 0$.* Uma vez que $b < 0$, podemos escrever $b = -k^2$ com $k > 0$ e dar à equação diferencial a forma

$$y'' = k^2 y \, .$$

Uma solução evidente e $y = e^{kx}$ e a outra é $y = e^{-kx}$. A partir destas podemos obter outras soluções formando combinações lineares da forma

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx},$$

com c_1 e c_2 duas constantes arbitrárias. No Teorema 8.6 mostraremos que *todas* as soluções estão incluídas nesta fórmula.

EXEMPLO 3. *A equação $y'' + by = 0$, com $b > 0$.* Neste caso podemos fazer igualmente $b = k^2$ com $k > 0$ e a equação diferencial toma a forma

$$y'' = -k^2 y \, .$$

De novo obtemos algumas soluções por análise direta. Assim uma solução é $y = \cos kx$ e outra é $y = \operatorname{sen} kx$. A partir destas obtemos outras pela formação da combinação linear

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \, ,$$

onde c_1 e c_2 são duas constantes arbitrárias. O Teorema 8.6 mostrar-nos-á que esta fórmula inclui todas as soluções.

8.10. Redução da equação geral ao caso particular $y'' + by = 0$

O problema de resolução da equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes pode reduzir-se ao da resolução do caso particular que acabámos de expôr. Existe um método para o fazer,o qual se aplica também a equações mais gerais. A ideia consiste em considerar tres funções y, u e v tais que $y = uv$. A derivação dá-nos $y' = u'v + uv'$ e $y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. Em seguida exprimimos a combinação $y'' + ay' + by$ em função de u e v. Obtemos

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= uv'' + 2u'v' + u''v + a(uv' + u'v) + buv \\ &= (v'' + av' + bv)u + (2v' + av)u' + vu''. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Escolhemos seguidamente v de modo que o coeficiente u' seja nulo. Isso implica que $v' = av/2$, pelo que podemos escolher $v = e^{-ax/2}$. Para este valor de v temos $v'' = -av'/2 = a^2v/4$, e o coeficiente de u em (8.25) vem

$$v'' + av' + bv = \frac{a^2v}{4} - \frac{a^2v}{2} + bv = \frac{4b - a^2}{4}\, v\, .$$

Então a equação (8.25) reduz-se a

$$y'' + ay' + by = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}\, u\right)v\, .$$

Visto que $v = e^{-ax/2}$, a função v nunca se anula, pelo que y satisfaz à equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ se e só se u satisfaz a $u'' + \frac{1}{4}(4b - a^2)u = 0$. Demonstrámos, assim, o seguinte teorema.

TEOREMA 8.4. *Sejam y e u duas funções tais que $y = u\, e^{-ax/2}$. Então, no intervalo $(-\infty, +\infty)$, y satisfaz à equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ se e só se u satisfaz à equação diferencial*

$$u'' + \frac{4b - a^2}{4}\, u = 0\, .$$

Este teorema reduz o estudo da equação $y'' + ay' + by = 0$ ao caso particular $y'' + by = 0$. Já encontrámos soluções não triviais para esta equação, mas, excepção feita ao caso em que $b = 0$, ainda não provámos que as soluções encontradas constituem *todas* as soluções da equação.

8.11. Teorema de unicidade para a equação $y'' + by = 0$

O problema da determinação de todas as soluções da equação $y'' + by = 0$ pode resolver-se com a ajuda do seguinte *teorema de unicidade.*

TEOREMA 8.5. *Sejam f e g duas funções supostas satisfazerem à equação $y'' + by = 0$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e também a verificarem as condições iniciais*

$$f(0) = g(0)\, , \qquad f'(0) = g'(0)\, .$$

Então $f(x) = g(x)$ para todo o x.

Demonstração. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Pretendemos demonstrar que $h(x) = 0$, para todo o x. Devemos fazer isto exprimindo h em função das suas aproximações por polinómios de Taylor.

Primeiramente observamos que h é também solução da equação diferencial $y'' + by = 0$ e verifica as condições iniciais $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Toda a função y que seja solução da equação diferencial admite derivadas de qualquer ordem em $(-\infty, +\infty)$ as quais podem calcular-se por derivações sucessivas da equação diferencial. Por exemplo, uma vez que $y'' = -by$, temos $y''' = -by'$, $y^{(4)} = -by'' = b^2y$. Por indução concluímos que as derivadas de

TEOREMA 8.7. *Seja $d = a^2 - 4b$ o descriminante da equação diferencial linear $y'' + ay' + by = 0$. Toda a solução desta equação no intervalo $(-\infty, +\infty)$ tem a forma*

$$y = e^{-ax/2}[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)]\,, \tag{8.29}$$

onde c_1 e c_2 são constantes e as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são determinadas de acordo com o sinal do descriminante, do modo seguinte:

(a) *Se $d = 0$, então $u_1(x) = 1$ e $u_2(x) = x$.*

(b) *Se $d > 0$, então $u_1(x) = e^{kx}$ e $u_2(x) = e^{-kx}$, com $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$.*

(c) *Se $d < 0$, então $u_1(x) = \cos kx$ e $u_2(x) = \operatorname{sen} kx$, com $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$.*

Nota: Na hipótese (b) em que o descriminante d é positivo, a solução y em (8.29) é uma combinação linear de duas funções exponenciais,

$$y = e^{-ax/2}(c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}\,,$$

onde

$$r_1 = -\frac{a}{2} + k = \frac{-a + \sqrt{d}}{2}\,, \qquad r_2 = -\frac{a}{2} - k = \frac{-a - \sqrt{d}}{2}\,.$$

Os números r_1 e r_2 tem soma $r_1 + r_2 = -a$ e produto $r_1r_2 = \frac{1}{4}(a^2 - d) = b$, por conseguinte são as raizes da equação do 2.º grau $r^2 + ar + b = 0$. Esta é a chamada *equação caraterística* associada à equação diferencial

$$y'' + ay' + by = 0\,.$$

A expressão $d = a^2 - 4b$ é também o binómio descrimante desta equação do 2.º grau; o seu sinal determina a natureza das raízes. Se $d \geq 0$ a equação tem duas raízes reais definidas por $(-a \pm \sqrt{d})/2$. Se $d < 0$, a equação admite raízes complexas r_1 e r_2. A definição da função exponencial pode alargar-se de modo que e^{r_1x} e e^{r_2x} sejam providas de significado quando r_1 e r_2 são *números complexos*. Esta extensão, descrita no capítulo 9, é feita de tal modo que a combinação linear (8.29) pode também escrever-se como uma combinação linear de e^{r_1x} e e^{r_2x} quando r_1 e r_2 são complexas.

Concluímos esta seção com algumas observações de caráter geral. Uma vez que todas as soluções da equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ estão contidas na fórmula (8.29), a combinação linear do segundo membro chama-se vulgarmente a *solução geral* da equação diferencial. Qualquer solução obtida por particularização das constantes c_1 e c_2 diz-se uma *solução particular*.

Por exemplo, fazendo $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ e $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, obtemos as duas soluções particulares

$$v_1 = e^{-ax/2}u_1(x)\,, \qquad v_2 = e^{-ax/2}u_2(x)\,.$$

Estas duas soluções são de especial importância porque as combinações lineares formadas com elas dão-nos todas as soluções. Um par de soluções quaisquer com esta propriedade diz-se uma *base* para o conjunto de todas as soluções.

Uma equação diferencial tem sempre mais do que uma base. Por exemplo, a equação $y'' = 9y$ tem a base $v_1 = e^{3x}$, $v_2 = e^{-3x}$. Mas também tem a base $w_1 = \operatorname{ch} 3x$, $w_2 = \operatorname{sh} 3x$. Com efeito, uma vez que $e^{3x} = w_1 + w_2$ e $e^{-3x} = w_1 - w_2$, cada combinação linear de e^{3x} e e^{-3x} é também uma combinação linear de w_1 e w_2. Por isso o par w_1 e w_2 constitui outra base.

Pode demonstrar-se que qualquer par de soluções v_1 e v_2 duma equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ será uma base se o quociente v_2/v_1 não for constante. Embora esta propriedade não seja necessária aqui, referimo-la porque é importante na teoria das equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. No Exercício 23 da Seção 8.14 esboça-se uma demonstração.

8.14. Exercícios

Determinar todas as soluções das seguintes equações diferenciais, no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

1. $y'' - 4y = 0$.
2. $y'' + 4y = 0$.
3. $y'' - 4y' = 0$.
4. $y'' + 4y' = 0$.
5. $y'' - 2y' + 3y = 0$.
6. $y'' + 2y' - 3y = 0$.
7. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
8. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
9. $y'' + 2y' + y = 0$.
10. $y'' - 2y' + y = 0$.

Nos Exercícios 11 a 14 determinar a solução particular que satisfaça às condições iniciais dadas.

11. $2y'' + 3y' = 0$, com $y = 1$ e $y' = 1$ quando $x = 0$.
12. $y'' + 25y = 0$, com $y = -1$ e $y' = 0$ quando $x = 3$.
13. $y'' - 4y' - y = 0$, com $y = 2$ e $y' = -1$ quando $x = 1$.
14. $y'' + 4y' + 5y = 0$, com $y = 2$ e $y' = y''$ quando $x = 0$.
15. O gráfico de uma solução u da equação diferencial $y'' - 4y' + 29y = 0$ interseta na origem o gráfico da solução v da equação $y'' + 4y' + 13y = 0$. As duas curvas têm iguais declives na origem. Determinar u e v se $u'(\frac{1}{2}\pi) = 1$.
16. O gráfico duma solução u da equação diferencial $y'' - 3y' - 4y = 0$ intersecta na origem o gráfico da solução y da equação diferencial $y'' + 4y' - 5y = 0$. Determinar u e v se as duas curvas têm iguais declives na origem e se
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{v(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}.$$
17. Determinar os valores da constante k tais que a equação diferencial $y'' + ky = 0$ admite uma solução não trivial $y = f_k(x)$ para a qual $f_k(0) = f_k(1) = 0$. Para cada valor possível de k, determinar a correspondente solução $y = f_k(x)$. Considere valores positivos e negativos de k.
18. Se (a, b) é um dado ponto do plano e m um número real, provar que a equação diferencial $y'' + k^2y = 0$ tem exatamente uma solução cujo gráfico passa por (a, b) e tem declive m nesse ponto. Discutir também o caso em que $k = 0$.

$$v_1(x) = e^{-ax/2}u_1(x)\,, \qquad v_2(x) = e^{-ax/2}u_2(x)\,, \tag{8.32}$$

determinando-se as funções u_1 e u_2 por meio do descriminante da equação, como foi explicado no Teorema 8.7. Agora mostrámos que v_1 e v_2 podem utilizar-se para construir uma solução particular y_1 da equação não homogénea $L(y) = R$.

Nessa construção intervem uma função W definida por

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)\,.$$

Esta função é o chamado *wronskiano* de v_1 e v_2; algumas das suas propriedades foram expostas nos Exercícios 21 e 22 da Seção 8.14. Necessitamos da propriedade de que $W(x)$ nunca é nulo. Esta pode demonstrar-se pelos métodos indicados nos exercícios ou pode ser verificada diretamente para as funções particulares v_1 e v_2 dadas em (8.32)

TEOREMA 8.9. *Se v_1 e v_2 são soluções de equação $L(y) = 0$ dada por (8.32), com $L(y) = y'' + ay' + by$, e se W representa o wronskiano de v_1 e v_2, então a equação não homogénea $L(y) = R$ possui uma solução y_1 particular definida por*

$$y_1(x) = t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x)\,,$$

em que

$$t_1(x) = -\int v_2(x)\,\frac{R(x)}{W(x)}\,dx\,, \qquad t_2(x) = \int v_1(x)\,\frac{R(x)}{W(x)}\,dx\,. \tag{8.33}$$

Demonstração. Tentemos determinar duas funções t_1 e t_2 tais que a combinação $y_1 = t_1v_1 + t_2v_2$ satisfaça à equação $L(y_1) = R$. Temos

$$y' = t_1v_1' + t_2v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)\,,$$

$$y_1'' = t_1v_1'' + t_2v_2'' + (t_1'v_1' + t_2'v_2') + (t_1'v_1 + t_2'v_2)'\,.$$

Quando formamos a combinação linear $L(y_1) = y_1'' + ay_1' + by_1$, os termos contendo t_1 e t_2 desaparecem devido às relações $L(v_1) = L(v_2) = 0$. Os restantes termos dão-nos a relação

$$L(y_1) = (t_1'v_1' + t_2'v_2') + (t_1'v_1 + t_2'v_2)' + a(t_1'v_1 + t_2'v_2)\,.$$

Desejamos escolher t_1 e t_2 de maneira que $L(y_1) = R$. Podemos consegui-lo se escolhemos t_1 e t_2 de modo que

$$t_1'v_1 + t_2'v_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad t_1'v_1' + t_2'v_2' = R\,.$$

Estas constituem um par de equações algébricas para t_1' e t_2'. O determinante do sistema é o wronskiano de v_1 e v_2. Uma vez que é diferente de zero, o sistema tem uma solução dada por

$$t_1' = -v_2R/W \qquad \text{and} \qquad t_2' = v_1R/W\,.$$

Integrando estas relações obtemos as fórmulas (8.33), completando assim a demonstração.

O método pelo qual obtivemos a solução y_1 é algumas vezes designado por *método de variação das constantes.* Foi utilizado pela primeira vez por Johann Bernoulli em 1697 para resolver equações lineares de primeira ordem, e depois por Lagrange em 1774 para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Nota: Visto que as funções t_1 e t_2 no Teorema 8.9 são expressas por integrais indefinidos, cada uma delas só está determinada a menos duma constante. Se adicionarmos uma constante c_1 a t_1 e uma constante c_2 a t_2, transformamos a função y_1 numa nova função $y_2 = y_1 + c_1v_1 + c_2v_2$. Pela linearidade, temos

$$L(y_2) = L(y_1) + L(c_1v_2 + c_2v_2) = L(y_1)\,,$$

donde concluímos que a nova função y_2 é também uma solução particular da equação não homogénea.

EXEMPLO 1. Determinar a solução da equação $y'' + y = \operatorname{tg} x$ em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Resolução. As funções v_1 e v_2 das igualdades (8.32) são dadas por

$$v_1(x) = \cos x, \qquad\qquad v_2(x) = \operatorname{sen} x.$$

O respetivo wronskiano é $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Portanto de (8.33) obtemos

$$t_1(x) = -\int \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x\, dx = \operatorname{sen} x - \log|\sec x + \operatorname{tg} x|\,,$$

e

$$t_2(x) = \int \cos x \operatorname{tg} x\, dx = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\,.$$

Então uma solução particular da equação não homogénea é

$$\begin{aligned} y_1 &= t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \log|\sec x + \operatorname{tg} x| - \operatorname{sen} x \cos x \\ &= -\cos x \log|\sec x + \operatorname{tg} x|\,. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 8.8, a sua solução geral é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \log|\sec x + \operatorname{tg} x|\,.$$

Embora o Teorema 8.9 nos dê um método geral para determinar uma solução particular de cálculo dos integrais $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$ e $\int x^3 \cos x\, dx$, enquanto que pelo método dos coeficientes indeterminados não é necessária qualquer integração.

Se o coeficiente b é zero, a equação $y'' + ay' = R$ não pode ser satisfeita por um polinómio de grau n, mas por um de grau $n + 1$, se $a \neq 0$. Quando a e b são ambos nulos, a equação é simplesmente $y'' = R$; a sua solução geral é um polinómio de grau $n + 2$ obtido por duas integrações sucessivas.

CASO 2. O segundo membro tem a forma $R(x) = p(x)e^{mx}$, sendo p um polinómio de grau n e m uma constante.

Neste caso a mudança de variável $y = u(x)e^{mx}$ transforma a equação diferencial $y'' + ay' + by = R$ na nova equação

$$u'' + (2m + a)u' + (m^2 + am + b)u = p\,.$$

Esta é, porém, do tipo estudado no Caso 1 pelo que sempre admite por solução um polinómio u_1. Por conseguinte, a equação original tem uma solução particular da forma $y_1 = u_1(x)e^{mx}$, com u_1 um polinómio. Se $m^2 + am + b \neq 0$, o grau de u_1 é o mesmo que o grau de p. Se $m^2 + am + b = 0$, mas $2m + a \neq 0$, o grau de u_1 é superior em uma unidade ao grau de p. Se ambos $m^2 + am + b = 0$ e $2m + a = 0$, o grau de u_1 é duas unidades superior ao grau de p.

EXEMPLO 2. Determinar uma solução particular da equação $y'' + y = xe^{3x}$.

Resolução. A mudança de variável $y = ue^{3x}$ conduz a uma nova equação $u'' + 6u' + 10u = x$. Ensaiando $u_1(x) = Ax + B$, encontramos a solução particular $u_1(x) = (5x - 3)/50$, pelo que uma solução particular da equação original é $y_1 = e^{3x}(5x - 3)/50$.

O método dos coeficientes indeterminados também pode utilizar-se se R é da forma $R(x) = p(x)e^{mx} \cos \alpha x$, ou $R(x) = p(x)e^{mx} \operatorname{sen} \alpha x$, sendo p um polinómio e m e α constantes. Em ambos os casos existe sempre uma solução particular da forma $y_1(x) = e^{mx}[q(x) \cos \alpha x + r(x) \operatorname{sen} \alpha x]$, onde q e r são polinómios.

8.17. Exercícios

Determinar a solução geral de cada uma das equações diferenciais nos Exercícios 1 a 17. Se a solução não for válida em todo o eixo real, determinar os intervalos em que o seja.

1. $y'' - y = x$.
2. $y'' - y' = x^2$.
3. $y'' + y' = x^2 + 2x$.
4. $y'' - 2y' + 3y = x^3$.
5. $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 2x + 1$.
6. $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$.
7. $y'' - 4y = e^{2x}$.
8. $y'' + 4y = e^{-2x}$.
9. $y'' + y' - 2y = e^x$.
10. $y'' + y' - 2y = e^{2x}$.
11. $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$.
12. $y'' - 2y' + y = x + 2x\, e^x$.
13. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x^2$.
14. $y'' + y = \cot^2 x$.
15. $y'' - y = 2/(1 + e^x)$.
16. $y'' + y' - 2y = e^x/(1 + e^x)$.

17. $y'' + 6y' + 9y = f(x)$, onde $f(x) = 1$ para $1 \leq x \leq 2$, e $f(x) = 0$ para todos restantes valores de x.
18. Se k é uma constante não nula, provar que a equação $y'' - k^2 y = R(x)$ admite uma solução particular y_1 definida por

$$y_1 = \frac{1}{k}\int_0^x R(t)\ \mathrm{sh}\ k(x-t)dt.$$

Determinar a solução geral da equação $y'' - 9y = e^{3x}$.
19. Se k é uma constante não nula, provar que a equação $y'' + k^2 y = R(x)$ tem uma solução particular y_1 dada por

$$y_1 = \frac{1}{k}\int_0^x R(t) \operatorname{sen} k(x-t)\, dt\ .$$

Determinar a solução geral da equação $y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x$.

Em cada um dos Exercícios 20 a 25, determinar a solução geral.

20. $y'' + y = \operatorname{sen} x$.
21. $y'' + y = \cos x$.
22. $y'' + 4y = 3x \cos x$.
23. $y'' + 4y = 3x \operatorname{sen} x$.
24. $y'' - 3y' = 2e^{2x} \operatorname{sen} x$.
25. $y'' + y = e^{2x} \cos 3x$.

8.18. Exemplos de problemas físicos conduzindo a uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes

EXEMPLO 1. *Movimento harmónico simples.* Suponhamos que uma partícula está animada de movimento retilíneo, estando a sua aceleração dirigida para um ponto fixo da reta e sendo proporcional à distância a esse ponto fixo. Se tomamos a origem coincidente com o ponto fixo e designamos por y a distância e por x o tempo, então a aceleração y'' deve ser negativa quando y é positiva e positiva quando y é negativa. Portanto podemos escrever $y'' = -k^2 y$, ou

$$y'' + k^2 y = 0\ ,$$

onde k^2 é uma constante positiva. Esta é a chamada equação diferencial do *movimento harmónico simples.* É muitas vezes usada como modelo matemático para o movimento dum ponto num mecanismo vibrante tal como uma corda tensa ou um diapasão vibrante. A mesma equação aparece na teoria dos circuitos elétricos onde se chama a equação do oscilador harmónico.

O Teorema 8.6 diz-nos que todas as soluções têm a forma

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx\ , \tag{8.34}$$

sendo A e B constantes arbitrárias. Podemos exprimir as soluções em função do seno ou do cosseno unicamente. Por exemplo podemos introduzir novas constantes C e α, onde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{e} \qquad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{B}{A},$$

então temos (Ver fig. 8.4) $A = C \cos \alpha$, $B = C \operatorname{sen} \alpha$, e a equação (8.34) escreve-se

$$y = C \cos \alpha \operatorname{sen} kx + C \operatorname{sen} \alpha \cos kx = C \operatorname{sen} (kx + \alpha) .$$

Quando a solução é escrita desta maneira, as constantes C e α têm uma interpretação geométrica simples (Ver fig. 8.5). Os valores extremos de y que ocorrem quando $\operatorname{sen}(kx + \alpha) = \pm 1$, são $\pm C$. Quando $x = 0$, a posição inicial é $C \operatorname{sen} \alpha$. Quando x cresce, a partícula oscila entre os valores extremos $+C$ e $-C$ com um período $2\pi/k$. O ângulo $kx + \alpha$ é chamado o ***ângulo de fase*** e o próprio α chama-se o valor inicial do ângulo de fase.

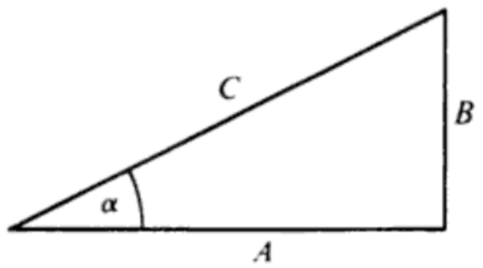


Fig. 8.4.

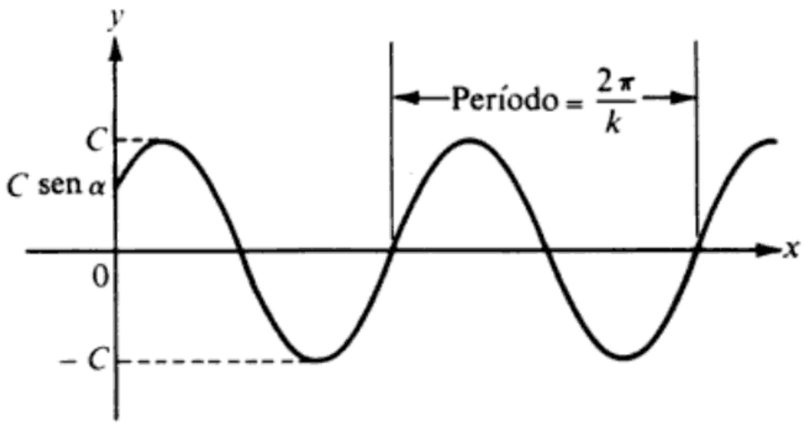


Fig. 8.5. Movimento harmónico simples.

Exemplo 2. *Vibrações amortecidas.* Se uma partícula, sujeita a movimento harmónico simples, é submetida subitamente a uma força externa proporcional à sua velocidade, o novo movimento satisfaz à equação diferencial da forma

$$y'' + 2cy' + k^2 y = 0 ,$$

em que c e k^2 são constantes, $c \neq 0$, $k > 0$. Se $c > 0$ todas as soluções tendem para zero quando $x \to +\infty$. Neste caso a equação diferencial diz-se que é *estável*. A força externa causa *amortecimento* ao movimento. Se $c < 0$, mostraremos que certas soluções tomam valores absolutos arbitrariamente grandes quando $x \to +\infty$. Neste caso a equação diz-se ser *instável*.

Uma vez que o descriminante da equação é $d = (2c)^2 - 4k^2 = 4(c^2 - k^2)$, a natureza das soluções é determinada pelas grandezas relativas de c^2 e k^2. Os três casos $d = 0$, $d > 0$ e $d < 0$ podem analisar-se do modo seguinte:

(a) *Descriminante nulo:* $c^2 = k^2$. Neste caso todas as soluções tem a forma

$$y = e^{-cx}(A + Bx).$$

Se $c > 0$, todas as soluções tendem para zero quando $x \to +\infty$. Este caso é designado por *amortecimento crítico*. Se $B \neq 0$, cada solução mudará de sinal exatamente uma vez devido ao fator linear $A + Bx$. Na fig. 8.6(a) mostra-se um exemplo. Se $c < 0$, cada solução não trivial tende para $+\infty$ ou para $-\infty$ quando $x \to +\infty$.

(b) *Descriminante positivo:* $c^2 > k^2$. Pelo Teorema 8.7 todas as soluções tem a forma

$$y = e^{-cx}(Ae^{hx} + Be^{-hx}) = Ae^{(h-c)x} + Be^{-(h+c)x},$$

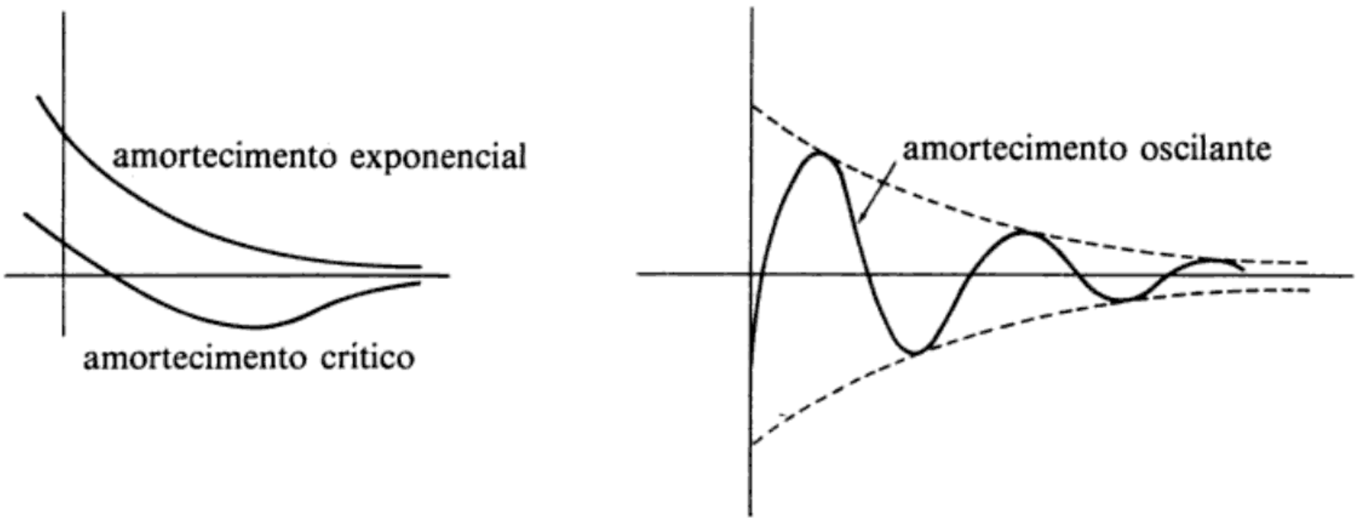
onde $h = \frac{1}{2}\sqrt{d} = \sqrt{c^2 - k^2}$. Uma vez que $h^2 = c^2 - k^2$, temos $h^2 - c^2 < 0$ pelo que $(h-c)(h + c) < 0$, e $e^{(h+c)x}$ então $h + c$ é positivo pelo que $h-c$ é negativo e por isso ambas as exponenciais $e^{(h-c)x}$. Portanto os números $h-c$ e $h + c$ têm sinais opostos. Se $c > 0$, e $e^{(h-c)x}$ tendem para zero quando $x \to +\infty$. Neste caso, designado por *amortecimento exponencial*, todas as soluções tendem para zero quando $x \to +\infty$. Na figura 8.6(a) está representado um exemplo. Cada solução pode mudar de sinal quando muito uma vez.

Se $c < 0$, então $h - c$ é positivo mas $h + c$ é negativo. Deste modo, ambas as exponenciais $e^{(h-c)x}$ e $e^{-(h+c)x}$ tendem para $+\infty$ quando $x \to +\infty$, pelo que de novo existem soluções com valores absolutos tão grandes quanto se queira.

(c) *Descriminante negativo:* $c^2 < k^2$. Neste caso todas as soluções tem a forma

$$y = Ce^{-cx}\,\text{sen}(hx + \alpha),$$

onde $h = \frac{1}{2}\sqrt{-d} = \sqrt{k^2 - c^2}$. Se $c > 0$, cada solução não trivial oscila, mas a amplitude da oscilação decresce e tende para zero quando $x \to +\infty$. Este caso chama-se *amortecimento oscilante* e está representado na fig. 8.6(b). Se $c < 0$, todas as soluções não triviais tomam valores arbitrariamente grandes, positivos e negativos, quando $x \to +\infty$.



(a) Descriminante 0 ou positivo (b) Descriminante negativo

Fig. 8.6. Vibrações amortecidas que se apresentam como soluções de $y'' + 2cy' + k^2y = 0$, com $c > 0$ e descriminante $4(c^2 - k^2)$.

EXEMPLO 3. *Circuitos elétricos.* Se intercalarmos um condensador no circuito elétrico do

Exemplo 5 da secção 8.6, a equação diferencial que serve como modelo para este circuito é dada por

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = V(t)\,,$$

onde C é uma constante positiva chamada a *capacidade*. Derivando esta equação obtém-se uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = V'(t)\,.$$

Se a tensão aplicada $V(t)$ é constante, o segundo membro é nulo e a equação toma a forma

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0\,.$$

Esta é uma equação do mesmo tipo da que foi analisada no Exemplo 2, exceto que $2c$ aparece substituido por R/L, e k^2 é substituido por $1/(LC)$. Neste caso o coeficiente c é positivo, pelo que a equação é sempre estável. Por outras palavras, a intensidade de corrente $I(t)$ tende sempre para zero quando $t \to +\infty$. A terminologia do Exemplo 2 também se utiliza aqui. A corrente diz-se ser criticamente amortecida quando o descriminante é nulo $(CR^2 = 4L)$, exponenciamente amortecida quando é positivo $(CR^2 > 4L)$ e oscilante quando o descriminante é negativo $(CR^2 < 4L)$.

EXEMPLO 4. *Movimento dum foguetão com massa variável.* Um foguetão é impulsionado pela combustão de carburante numa câmara, permitindo-se a expulsão dos produtos de combustão para a retaguarda. Suponhamos que o foguetão parte do repouso e que se move verticalmente para cima. Representemos a altura a que se encontra o foguetão no instante t por $r(t)$, a sua massa (incluindo o combustível) por $m(t)$ e a velocidade dos produtos da combustão, relativamente ao foguetão, por $c(t)$. Na ausência de forças exteriores, a equação

$$m(t)r''(t) = m'(t)c(t) \tag{8.35}$$

constitue o modêlo matemático para o movimento em discussão. O primeiro membro, $m(t)r''(t)$, é o produto da massa do foguetão pela sua aceleração. O segundo membro, $m'(t)c(t)$, é a força de aceleração do foguetão originada pelo impulso desenvolvido pelo mecanismo de impulsão. Nos exemplos que aqui se consideram, $m(t)$ e $c(t)$ são conhecidos ou podem ser definidos em função de $r(t)$ ou das suas derivadas $r'(t)$ (a velocidade do foguetão). A equação (8.35) converte-se então numa equação diferencial linear de segunda ordem para a lei de movimento $r(t)$.

Se existem forças exteriores, tais como a acção da gravidade, então em vez de (8.35), utilizamos a equação

$$m(t)r''(t) = m'(t)c(t) + F(t)\,, \tag{8.36}$$

$-k/g$ e a equação anterior vem

$$r''(t) = -\frac{m'(t)}{m(t)}c - g = \frac{kc}{w - kt} - g\,.$$

Integrando, e utilizando a condição inicial $r'(0) = 0$, encontramos

$$r'(t) = -c\log\frac{w - kt}{w} - gt\,.$$

Integrando de novo e considerando a condição inicial $r(0) = 0$, obtemos a relação

$$r(t) = \frac{c(w - kt)}{k}\log\frac{w - kt}{w} - \frac{1}{2}gt^2 + ct\,.$$

Todo o carburante estará consumido quando $t = b/k$. Nesse instante a altura será

$$r\left(\frac{b}{k}\right) = \frac{c(w - b)}{k}\log\frac{w - b}{w} - \frac{1}{2}\frac{gb^2}{k^2} + \frac{cb}{k}\,. \tag{8.37}$$

Esta fórmula é válida para $b < w$. Para certos foguetões, o peso em vazio é desprezável perante o peso do carburante, e é interessante considerar o caso limite em que $b = w$. Não podemos fazer $b = w$ em (8.37) devido à presença do termo $\log\dfrac{(w - b)}{w}$. Contudo, se fazemos $b \to w$, o primeiro termo em (8.37) é uma forma indeterminada com limite 0. Deste modo, quando $b \to w$, o valor limite do segundo membro de (8.37) é

$$\lim_{b\to w} r\left(\frac{b}{k}\right) = -\frac{1}{2}\frac{gw^2}{k^2} + \frac{cw}{k} = -\frac{1}{2}gT^2 + cT,$$

onde $T = w/k$ é o tempo necessário para que todo o peso w seja consumido.

8.19. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 5, supõe-se uma partícula a mover-se com movimento harmónico simples, com a lei do movimento definida por $y = C\,\text{sen}(kx + \alpha)$. A *velocidade* da partícula é dada pela derivada y'. A *frequência* do movimento é a inversa do período. (O período $=$ $= 2\pi/k$; a frequência $= k/2\pi$.) A frequência representa o número de ciclos completados na unidade de tempo, desde que $k > 0$.

1. Determinar a amplitude C se a frequência for $1/\pi$ e os valores iniciais de y e y' (quando $x = 0$) são 2 e 4 respetivamente.
2. Determinar a velocidade quando y é zero, sabendo que a amplitude é 7 e a frequência é 10.
3. Mostrar que a equação do movimento pode também escrever-se do modo seguinte:

$$y = A\cos(mx + \beta).$$

Determinar as equações que relacionam as constantes A, m, β e C, k, α.

4. **Determinar a equação do movimento, sabendo que $y = 3$ e $y' = 0$ quando $x = 0$ e que o período é 1/2.**
5. Achar a amplitude do movimento se o período é 2π e a velocidade é $\pm v_0$ quando $y = y_0$.
6. Uma partícula está animada de movimento harmónico simples. Inicialmente a sua posição é 1, a sua velocidade é 2 e a sua aceleração é -12. Calcular a sua posição e a sua aceleração quando a velocidade for $\sqrt{8}$.
7. Para um certo número positivo k, a equação diferencial do movimento harmónico simples $y'' + k^2y = 0$ tem soluções da forma $y = f(x)$ com $f(0) = f(3) = 0$ e $f(x) < 0$ para todo o x do intervalo aberto $0 < x < 3$. Calcular k e determinar todas as soluções.
8. **A intensidade de corrente $I(t)$ dum circuito elétrico verifica a equação diferencial $I''(t) + I(t) = G(t)$ onde G é um passo da função dada com $G(t) = 1$ se $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $G(t) = 0$ para todos os outros valores de t. Determine a solução que verifica as condições iniciais $I(0) = 0$, $I'(0) = 1$.**
9. **A intensidade de corrente $I(t)$ dum circuito elétrico verifica a equação diferencial**

$$I''(t) + RI'(t) + I(t) = \operatorname{sen}\omega t,$$

em que R e ω são constantes positivas. A solução pode ser expressa na forma $I(t) = F(t) + A\ \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, com $F(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$, e A e α são constantes dependendo de R e ω, com $A > 0$. Se existir um valor de ω que faça A tão grande quanto possível, então $\omega/(2\pi)$ chama-se a *frequência de ressonância* do circuito.

(a) Determinar todas as frequências de ressonância quando $R = 1$.

(b) Determinar todos os valores de R para os quais o circuito admite uma dada frequência de ressonância.

10. **Uma nave espacial regressa à Terra. Suponhamos que a única força exterior atuando sobre ela é a força da gravidade e que ele cai segundo uma reta dirigida para o centro da Terra. O efeito da gravidade é parcialmente anulado acendendo um foguetão contrário ao sentido do movimento. O carburante do foguetão é consumido à razão constante de k quilos por segundo e a matéria expelida tem uma velocidade constante de c metros por segundo relativamente ao foguetão. Determinar a fórmula que dá o deslocamento da nave em função do tempo t, se ela parte do repouso no instante $t = 0$ com um peso inicial de w quilos.**
11. **Um foguetão de peso inicial w quilos parte do repouso num espaço isolado (sem forças exteriores) e move-se com movimento retílineo. O carburante é consumido na razão constante de k quilos por segundo e os produtos de combustão são expelidos para a rectanguarda com uma velocidade constante de c metros por segundo relativamente ao foguetão. Determinar a distância percorrida no tempo t.**
12. Resolver o Exercício 11 na hipótese da velocidade inicial do foguetão ser v_0 e os produtos da combustão serem expelidos com uma velocidade tal que fiquem em repouso no espaço.

8.20. Observações referentes a equações diferenciais não lineares

Uma vez que as equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes intervêm em tão ampla variedade de problemas é realmente de muita utilidade que tenhamos métodos sistemáticos para as resolvermos. Muitas equações não lineares aparecem também naturalmente quer em problemas físicos, quer geométricos; mas não existe para elas uma teoria geral semelhante à das equações lineares. Na introdução deste capítulo referimos uma clássica "bolsa de truques" que tem sido desenvolvida para tratar muitos casos especiais de equações diferenciais não lineares. Vamos concluir este capítulo com uma análise de alguns desses artifícios e alguns dos problemas que eles nos permitem resolver. Devemos considerar unicamente equações diferenciais de primeira ordem, que possam ser resolvidas relativamente à derivada y' e expressas na forma

$$y' = f(x, y) . \tag{8.38}$$

Lembramos que uma solução de (8.38), num intervalo I, é qualquer função, por exemplo $y = Y(x)$, que é derivável em I e verifica a igualdade $Y'(x) = f[x, Y(x)]$ para todo o x de I. No caso linear provámos um teorema de existência e unicidade da solução, o qual nos diz que existe uma e uma só solução satisfazendo à condição inicial previamente definida. Além disso, estabelecemos uma fórmula explícita para determinar esta solução.

Não é isto o que se verifica em geral. Uma equação linear pode *não* ter qualquer solução que satisfaça à condição inicial dada, ou pode *ter mais do que uma*. Por exemplo, a equação $(y')^2 - xy' + y + 1 = 0$ não tem qualquer solução com $y = 0$ quando $x = 0$, uma vez que tal significaria que $(y')^2 = -1$ quando $x = 0$. Por outro lado, a equação $y' = 3y^{2/3}$ tem duas soluções distintas, $Y_1(x) = 0$ e $Y_2(x) = x^3$, verificando a condição inicial $y = 0$ quando $x = 0$.

Então o estudo das equações não lineares é mais difícil devido à possibilidade da não existência ou não unicidade das soluções. Também mesmo na hipótese das soluções existirem, poderá não ser possível determiná-las explicitamente em termos de funções conhecidas. Algumas vezes pode eliminar-se a derivada y' da equação diferencial e chegar a uma relação da forma

$$F(x, y) = 0$$

satisfeita por algumas, ou talvez todas, soluções. Se esta equação pode resolver-se exprimindo y como função de x, obtemos uma forma explícita para a solução. Frequentemente, porém, a equação é demasiado complicada para que possa explicitar-se o valor de y. Por exemplo, numa seção posterior, estudaremos a equação diferencial

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

e verificaremos que toda a solução satisfaz necessariamente à relação

$$\frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C = 0 \tag{8.39}$$

para alguma constante C. Seria inutil tentar resolver esta equação relativamente a y, exprimindo-o em função de x. Num caso como este dizemos que a relação (8.39) define uma *fórmula implícita* para as soluções. É prática comum dizer que a equação diferencial foi "resolvida" ou "integrada" quando chegamos a uma fórmula implícita tal como $F(x, y) = 0$, na qual aparecem coordenadas x e y. Quando C toma todos os valores, o conjunto das curvas integrais obtidas diz-se uma família de curvas dependendo de *um só parâmetro.*

Por exemplo, quando a equação diferencial é $y' = 3$ a integração dá-nos $y = 3x + C$ e as curvas integrais constituem uma família de retas, todas com o declive 3. A constante arbitrária C representa, para cada reta, a ordenada do seu ponto de interseção com OY.

Se a equação diferencial é $y' = x$, a integração dá-nos $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, e as curvas integrais constituem uma família de parábolas, como se mostra na fig. 8.7. Ainda aqui a constante C define a ordenada do ponto de interseção da curva com OY. A fig. 8.8 representa uma família de curvas, $y = Ce^x$, que são as curvas integrais da equação diferencial $y' = y$. Mais uma vez C representa a ordenada do ponto de interseção com OY. Neste caso C é também igual ao declive da curva no ponto em que interseta OY.

Na fig 8.9. representa-se uma família de retas não paralelas. São as curvas integrais da equação diferencial

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \tag{8.41}$$

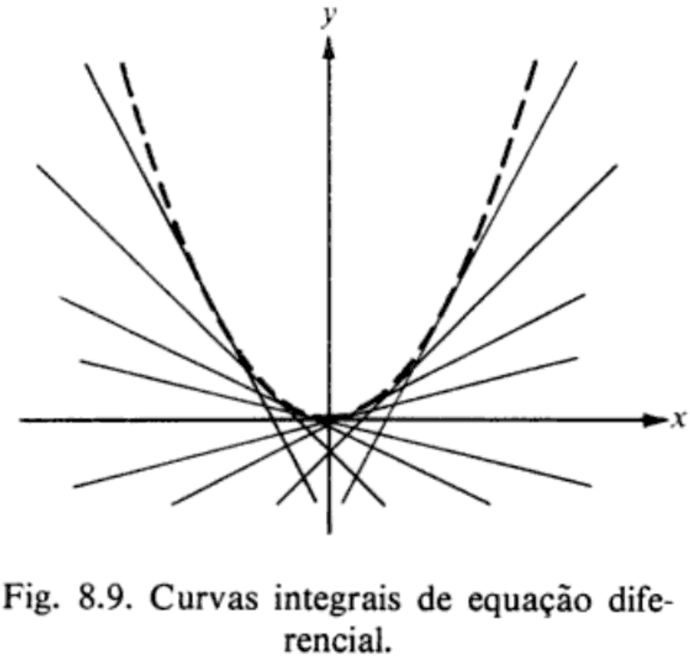


Fig. 8.9. Curvas integrais de equação diferencial.
$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

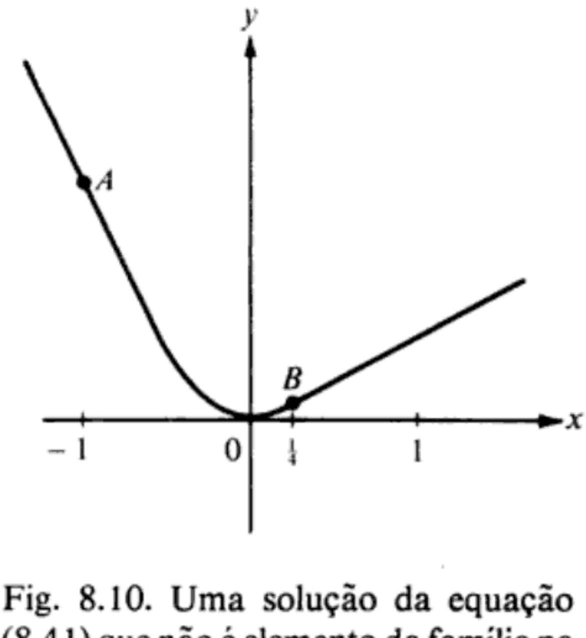


Fig. 8.10. Uma solução da equação (8.41) que não é elemento da família na equação (8.42).

e a equação

$$y = Cx - \tfrac{1}{4}C^2. \tag{8.42}$$

constitue uma família de soluções que depende dum só parâmetro. Esta família admite uma *envolvente*, isto é, uma curva gozando da propriedade de que em cada um dos seus pontos é tangente a uma das curvas da família(*). A envolvente aqui é $y = x^2$ e o seu gráfico é a curva a tracejado na fig. 8.9. A envolvente duma família de curvas integrais é ela própria uma curva integral porque o declive e as coordenadas dum ponto da envolvente coincidem com as duma das curvas integrais da família. Neste exemplo é fácil verificar directamente que $y = x^2$ é solução de (8.41). Observe-se que esta solução particular não é elemento da família definida por (8.42). Podem obter-se outras soluções que não pertencem àquela família de curvas unindo partes de curvas da família com partes da envolvente. Na fig. 8.10 apresenta-se um exemplo. A reta tangente em A resulta de fazermos $C = -2$ em (8.42) e a tangente em B de se considerar $C = \frac{1}{2}$. A solução resultante $y = f(x)$ vem definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } \; x \leq -1 , \\ x^2 & \text{se } \; -1 \leq x \leq \frac{1}{4} , \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} & \text{se } \; x \geq \frac{1}{4} . \end{cases}$$

Esta função admite derivada e satisfaz à equação diferencial (8.41) para todo o valor de x. É evidente que um número infinito de exemplos semelhantes se pode construir do mesmo modo. Este exemplo mostra que pode não ser fácil dar todas as soluções possíveis duma equação diferencial.

Algumas vezes é possível estabelecer uma equação diferencial de primeira ordem verificada por todos os elementos duma família de curvas a um parâmetro. Mostraremos isso com dois exemplos.

Exemplo 1. Achar uma equação diferencial de primeira ordem satisfeita por todas as circunferências com centro na origem.

Resolução. Uma circunferência de centro na origem e raio C tem por equação $x^2 + y^2 = C^2$. Quando C toma todos os valores positivos obtemos todas as circunferências de centro na origem. Para estabelecer uma equação diferencial de primeira ordem admitindo estes círculos como curvas integrais basta derivar a equação cartesianada circunferência obtendo-se $2x + 2yy' = 0$. Então, cada circunferência satisfaz à equação diferencial $y' = -x/y$.

Exemplo 2. Achar a equação diferencial de primeira ordem para a família de circunferências passando pela origem dos eixos coordenados e tendo os centros sobre $0X$.

Resolução. Se o centro duma circunferência é o ponto $(C, 0)$ e se passa pela origem, o teorema de Pitágoras diz-nos que cada ponto (x, y) da circunferência verifica a equação $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, que pode também escrever-se

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0 . \tag{8.43}$$

(*) E inversamente, cada membro da família é tangente à envolvente.

Para estabelecer uma equação diferencial que admita estas circunferências como curvas integrais, derivamos (8.43) e obtemos $2x + 2yy' - 2C = 0$ ou

$$x + yy' = C. \tag{8.44}$$

Uma vez que esta equação contém C, é satisfeita unicamente por aquela circunferência a que corresponda o mesmo valor de C em (8.43). Para obter uma equação diferencial satisfeita por todas as curvas de (8.43) devemos eliminar C. Poderíamos derivar (8.44) para obtermos $1 + yy'' + (y')^2 = 0$. Esta é uma equação diferencial de segunda ordem verificada por todas as curvas (8.43). Podemos obter uma equação diferencial de primeira ordem, gozando da mesma propriedade, eliminando algebricamente C entre (8.43) e (8.44). Substituindo em (8.43) C por $x + yy'$, obtemos $x^2 + y^2 - 2x(x + yy')$, uma equação diferencial de primeira ordem que resolvida relativamente a y' nos dá $y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$.

A fig. 8.11. representa o que se chama um *campo direccional* de uma equação diferencial. É muito simplesmente um conjunto de pequenos segmentos de reta tangentes às várias curvas integrais. O exemplo particular representado na fig. 8.11. é um campo direcional da equação $y' = y$.

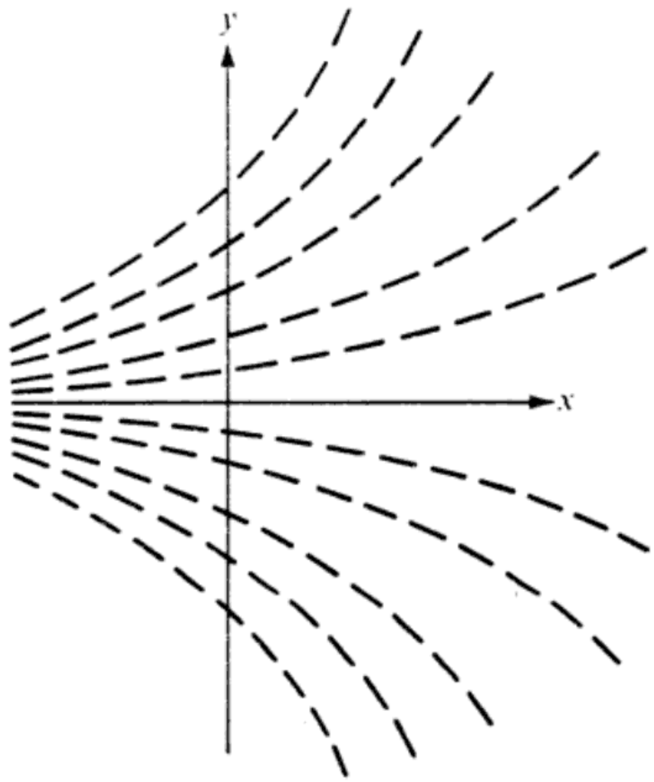


Fig. 8.11. Um campo direcional para a equação diferencial $y' = y$.

Pode construir-se um campo direcional sem resolver a equação diferencial. Escolhe-se um ponto, por exemplo (a, b), e determinamos o número $f(a, b)$ obtido por substituição no segundo membro da equação diferencial $y' = f(x, y)$. Se existir uma curva integral que passe por esse ponto, o seu declive aí deve ser igual a $f(a, b)$. Portanto, se traçarmos um pequeno segmento de reta passando por (a, b) e com esse declive ele pertencerá ao campo direcional da equação diferencial dada. Traçando vários destes segmentos de reta podemos obter uma ideia clara do comportamento geral das curvas integrais. Algumas vezes tal informação qualitativa acerca da solução pode ser tudo o que necessite saber-se. Chama-se a atenção para o fato de que pontos diferentes $(0, b)$ do eixo $0Y$ originam curvas integrais distintas. Isto dá-nos uma justificação de índole geométrica do aparecimento duma constante arbitrária ao integrar-se uma equação diferencial de primeira ordem.

8.22. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 12, determinar uma equação diferencial de primeira ordem que tenha como curvas integrais a família de curvas dada.

1. $2x + 3y = C$.
2. $y = Ce^{-2x}$.
3. $x^2 - y^2 = C$.
4. $xy = C$.
5. $y^2 = Cx$.
6. $x^2 + y^2 + 2Cy = 1$.
7. $y = C(x - 1)e^x$.
8. $y^4(x + 2) = C(x - 2)$.
9. $y = C \cos x$.
10. $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arcsen} x = C$.
11. Todas as circunferências que passam pelos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.
12. Todas as circunferências passando pelos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Na construção dum campo direcional duma equação diferencial, algumas vezes o trabalho pode ser consideravelmente reduzido se primeiramente localizamos aqueles pontos nos quais o declive y' tem um valor constante C. Para cada C, estes pontos estão situados sobre uma curva chamada *isoclínica*.

13. Traçar as isoclínicas correspondentes aos declives constantes $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ e 2 para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2$. Com o auxílio das isoclínicas, construir o campo direcional para a equação e tentar determinar a forma da curva integral passando pela origem.
14. Mostrar que as isoclínicas da equação diferencial $y' = x + y$ constituem uma família de retas a um parâmetro. Traçar as isoclínicas correspondentes aos declives 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, ± 2. Com o auxílio das isoclínicas, construir um campo direcional e desenhar a curva integral passando pela origem. Uma das curvas integrais é também uma isoclínica; determinar esta curva.
15. Traçar várias isoclínicas e construir um campo direccional para a equação

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .$$

Se o campo direcional for cuidadosamente desenhado poder-se-á determinar uma família de soluções desta equação a um parâmetro, a partir apenas do aspecto do campo direcional.

8.23. Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma $y' = f(x, y)$, na qual o segundo membro

$f(x, y)$ se pode exprimir como um produto de dois fatores, um dependendo unicamente de x e o outro unicamente de y, diz-se uma *equação de variáveis separáveis.* Exemplos destas equações são $y' = x^3$, $y' = y$, $y' = \operatorname{sen} y \log x$, $y' = x/\operatorname{tg} y$, etc. Assim uma equação de variáveis separáveis pode apresentar-se na forma

$$y' = Q(x)R(y)\,,$$

onde Q e R são funções dadas. Quando $R(y) \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por aquele fator e escrever a equação diferencial na forma

$$A(y)y' = Q(x)\,,$$

onde se fez $A(y) = 1/R(y)$. O teorema seguinte diz-nos como encontrar uma fórmula implícita que seja satisfeita por qualquer solução duma tal equação.

Teorema 8.10. *Seja $y = Y(x)$ qualquer solução da equação diferencial de variáveis separáveis*

$$A(y)y' = Q(x) \tag{8.45}$$

tal que Y' seja contínua num intervalo aberto I. Se ambas as funções Q e a função composta $A \circ Y$ são contínuas em I e G é uma qualquer primitiva de A, isto é, qualquer função tal que $G' = A$, então a solução Y satisfaz à fórmula implícita

$$G(y) = \int Q(x)\,dx + C \tag{8.46}$$

para algum valor de C constante. Inversamente, se y satisfaz a (8.46) *então y é uma solução de* (8.45).

Demonstração. Uma vez que Y é uma solução de (8.45), devemos ter

$$A[Y(x)]\,Y'(x) = Q(x) \tag{8.47}$$

para todo o x em I. Visto que $G' = A$, esta equação vem

$$G'[Y(x)]\,Y'(x) = Q(x)\,.$$

Mas, pela regra da derivada da função composta, o primeiro membro é a derivada da função composta $G \circ Y$. Portanto $G \circ Y$ é uma primitiva de Q, o que significa que

$$G[Y(x)] = \int Q(x)\,dx + C \tag{8.48}$$

para algum C constante. Esta é a igualdade (8.46). Inversamente, se $y = Y(x)$ satisfaz a (8.46) por derivação obtemos (8.47), a qual mostra que Y é uma solução da equação diferencial (8.45).

Nota: A fórmula implícita (8.46) pode ser expressa em função de A. De (8.47) resulta

$$\int A[Y(x)]Y'(x)\,dx = \int Q(x)\,dx + C\,.$$

Se efetuarmos a substituição $y = Y(x)$, $dy = Y'(x)dx$ no integral da esquerda, a equação vem

$$\int A(y)\,dy = \int Q(x)\,dx + C\,. \tag{8.49}$$

Uma vez que o integral indefinido $\int A(y)dy$ representa qualquer primitiva de A, a equação (8.49) é outra forma de escrever (8.46).

Na prática a fórmula (8.49) obtém-se diretamente de (8.45) por um processo puramente mecânico. Na equação diferencial **(8.45)** escrevemos dy/dx para a derivada y' e em seguida consideramos dy/dx como uma fração para obtermos a igualdade $A(y)dy = Q(x)dx$. Basta depois colocar símbolos de integração em ambos os membros da igualdade e adicionar-lhe a constante C para obtermos (8.49). A justificação para este processo mecânico é proporcionada pelo Teorema 8.10. Este processo é mais um exemplo evidenciando a eficácia da notação de Leibniz.

EXEMPLO. A equação não linear $xy' + y = y^2$ é de variáveis separáveis porque pode escrever-se na forma

$$\frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x}\,, \tag{8.50}$$

desde que $y(y-1) \neq 0$ e $x \neq 0$. Neste caso as duas funções $y = 0$ e $y = 1$ são evidentemente soluções de $xy' + y = y^2$. As restantes soluções, se existirem, satisfazem a (8.50) e por isso, devido ao teorema (8.10), também satisfazem a

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + K$$

para algum valor constante K. Uma vez que a função integranda do primeiro membro é $1/(y-1) - 1/y$, quando integramos obtemos

$$\log|y-1| - \log|y| = \log|x| + K\,.$$

Daqui resulta $|(y-1)/y| = |x|e^K$ ou $(y-1)/y = Cx$ para certo valor de C. Resolvendo relativamente a y obtemos a fórmula explícita

$$y = \frac{1}{1-Cx}\,. \tag{8.51}$$

de declive m passando pela origem, cuja equação é $y = mx$ para qualquer ponto (x, y) sobre a reta; em particular, o ponto $(1, m)$ pertence à reta Suponhamos agora, por uma questão de simplicidade, que existe uma curva integral a passar por cada ponto da reta $y = mx$. O declive da curva integral que passa pelo ponto (a, b) desta reta é $f(a, b) = f(a, ma)$. Se $a \neq 0$ podemos usar a propriedade de homogeneidade (8.53) para escrevermos $f(a, ma) = f(1, m)$. Por outras palavras, se $(a, b) \neq (0, 0)$, a curva integral por (a, b) tem o mesmo declive que a curva integral que passa por $(1, m)$. Portanto a reta $y = mx$ é uma isoclínica, como fora afirmado. (Pode também mostrar-se que estas são as únicas isoclínicas duma equação homogénea.)

Esta propriedade das isoclínicas sugere uma propriedade das curvas integrais conhecida por *invariância a respeito de transformações de semelhança*. Lembramos que uma transformação de semelhança transforma um conjunto S num novo conjunto kS, obtido de S por multiplicação das coordenadas de cada ponto por um fator constante $k > 0$. Cada reta passando pela origem permanece fixa sob uma transformação de semelhança. Portanto, as isoclínicas duma equação diferencial homogénea não variam por transformações de semelhança; por esta razão o campo direcional também não se altera. Isto sugere que as transformações de semelhança transformam curvas integrais em curvas integrais. Para se demonstrar isto analiticamente supõe-se que S é uma curva integral definida por uma fórmula explícita

$$y = F(x)\,. \tag{8.55}$$

Dizer que S é uma curva integral de $y' = f(x, y)$ significa que se tem

$$F'(x) = f(x, F(x)) \tag{8.56}$$

para todo o x sob consideração. Escolhe-se agora um ponto qualquer (x, y) de kS. Então o ponto $(x/k, y/k)$ pertence a S e por isso a suas coordenadas satisfazem a (8.55), pelo que se tem $y/k = F(x/k)$ ou $y = kF(x/k)$, isto é, a curva kS é definida pela equação $y = G(x)$, com $G(x) = kF(x/k)$. Chama-se a atenção para a derivada de G definida por

$$G'(x) = kF'\left(\frac{x}{k}\right) \cdot \frac{1}{k} = F'\left(\frac{x}{k}\right).$$

Para provar que kS é uma curva integral de $y' = f(x, y)$ bastará mostrar que $G'(x) = f(x, G(x))$ ou, o que é a mesma coisa, que

$$F'\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(x, kF\left(\frac{x}{k}\right)\right). \tag{8.57}$$

Mas substituindo x por x/k na equação (8.56) e usando a propriedade da homogeneidade com $t = k$, obtem-se.

$$F'\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(\frac{x}{k}, F\left(\frac{x}{k}\right)\right) = f\left(x, kF\left(\frac{x}{k}\right)\right),$$

o que prova (8.57). Em resumo, mostrou-se que kS é uma curva integral sempre que S o seja. Um exemplo simples no qual esta propriedade geométrica é quase evidente é a equação $y' = -x/y$ cujas curvas integrais constituem uma família de circunferências dependendo de um parâmetro, de equação $x^2 + y^2 = C$.

Pode também mostrar-se que sendo as curvas integrais da equação diferencial de primeira ordem $y'f(x, y)$ invariantes a respeito duma transformação por semelhança, então a equação diferencial é necessariamente homogénea.

8.26. Exercícios

1. Mostrar que a substituição $y = x/v$ transforma a equação homogénea $y' = f(x, y)$ numa equação diferencial de primeira ordem para v, a qual é de variáveis separáveis. Algumas vezes esta substituição conduz a integrais que são mais fáceis de calcular que os obtidos pela substituição $y = xv$ já estudada no texto.

Integrar as equações diferenciais dos Exercícios 2 a 11.

2. $y' = \dfrac{-x}{y}$.
3. $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$.
4. $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$.
5. $(2y^2 - x^2)y' + 3xy = 0$.
6. $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$.
7. $x^2y' + xy + 2y^2 = 0$.
8. $y^2 + (x^2 - xy + y^2)y' = 0$.
9. $y' = \dfrac{y(x^2 + xy + y^2)}{x(x^2 + 3xy + y^2)}$.
10. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{sen}\dfrac{y}{x}$.
11. $x(y + 4x)y' + y(x + 4y) = 0$.

8.27. Alguns problemas físicos e geométricos conduzindo ao estabelecimento de equações diferenciais de primeira ordem

Analisamos a seguir alguns exemplos de problemas de natureza física e geométrica que conduzem a equações diferenciais de primeira ordem que são ou homogéneas ou de variáveis separáveis.

Trajetórias ortogonais. Diz-se que duas curvas se intersetam *ortogonalmente* num ponto se as respetivas tangentes nesse ponto são perpendiculares. Uma curva que interseta cada elemento duma família de curvas ortogonalmente chama-se uma trajetória ortogonal da família. Na fig. 8.13 estão representados exemplos. Problemas respeitantes a trajetórias ortogonais são de importância, quer na matemática pura, quer na aplicada. Por exemplo, na teoria de escoamento de fluidos duas famílias de curvas ortogonais dizem-se *linhas equipotenciais* e *linhas de corrente* respetivamente. Na teoria do calor são conhecidas por *linhas isotérmicas* e *linhas de fluxo.*

Suponhamos uma dada família de curvas satisfazendo a uma equação diferencial de primeira ordem, por exemplo

$$y' = f(x, y)\,. \tag{8.58}$$

O número $f(x, y)$ é o declive duma curva integral que passa por (x, y). O declive de cada trajetória ortogonal nesse ponto é o simétrico do recíproco $-1/f(x, y)$, de maneira que as trajetórias ortogonais satisfazem à equação diferencial

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}\,. \tag{8.59}$$

Se (8.58) é de variáveis separáveis, então (8.59) é-o também. Se (8.58) é homogénea, então (8.59) é também homogénea.

EXEMPLO 1. Determinar as trajetórias ortogonais da família de circunferências passando pela origem e cujos centros estão sobre $0X$.

Resolução. No Exemplo 2 da seção 8.21 vimos que esta família é definida pela equação cartesiana $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$ e que satisfaz a equação diferencial $y' = (y^2 - x^2\, x^2)/(2xy)$. Substituindo o segundo membro pelo simétrico de recíproco, encontramos que as trajetórias ortogonais satisfazem à equação

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\,.$$

Esta equação homogénea pode integrar-se recorrendo à substituição $y = vx$, e conduz à família de curvas integrais

$$x^2 + y^2 - 2Cy = 0\,.$$

Esta é uma família de circunferências passando pela origem e tendo os centros sobre o eixo $0Y$. Na fig. 8.13 estão representadas algumas curvas destas famílias.

Problemas de perseguição. Um ponto Q é obrigado a mover-se ao longo de determinada curva plana C_1. Outro ponto P no mesmo plano "persegue" Q, isto é, P move-se de tal maneira que a direção do movimento de P está sempre dirigida para Q. O ponto P descreve pois outra curva C_2 chamada a *curva de perseguição*. No exemplo da fig. 8.14 C_1 é o eixo $0Y$. Num problema de perseguição pretende-se determinar a curva C_2 quando a curva C_1 é conhecida e é dado algum elemento adicional dizendo respeito a P e a Q, por exemplo uma relação entre as respetivas posições, ou entre as respetivas velocidades.

Quando dizemos que a direção do movimento de P está constantemente dirigida para Q, queremos significar que a tangente a C_2 em P passa pela posição correspondente de Q. Portanto, se representamos por (x, y) as coordenadas retangulares de P num dado instante, e por

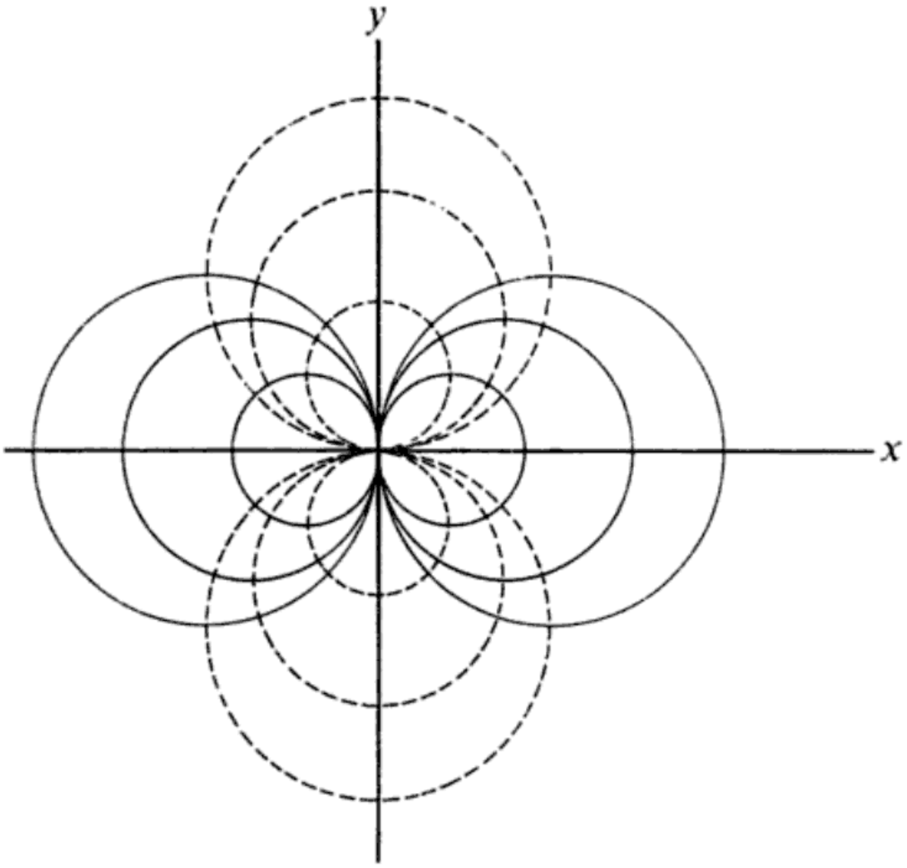


Fig. 8.13. Círculos ortogonais.

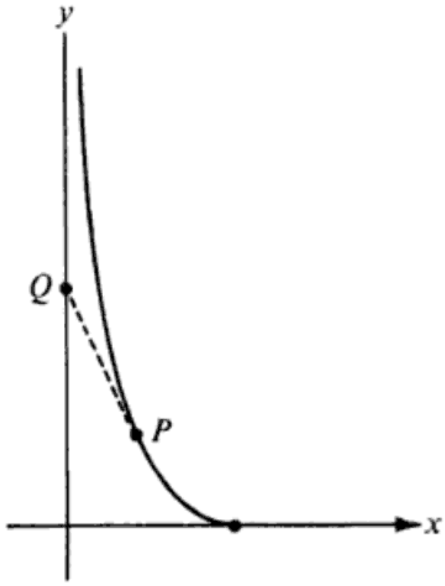


Fig. 8.14. A tractriz como uma curva de perseguição. A distância de *P* a *Q* é constante.

(X, Y) as de *Q* no mesmo instante, devemos ter

$$y' = \frac{Y - y}{X - x}. \tag{8.60}$$

A informação adicional vai permitir-nos considerar X e Y como funções conhecidas de x e y, caso em que a Equação (8.60) se transforma numa equação diferencial de primeira ordem para y. Consideremos agora um caso em que essa equação é de variáveis separáveis.

EXEMPLO 2. Um ponto Q move-se sobre uma reta C_1 e um ponto P persegue Q de maneira que a distância de P a Q tenha um valor constante $k > 0$. Se P não está inicialmente sobre C_1, determinar a curva de perseguição.

Resolução. Consideremos C_1 sobre o eixo $0Y$ e coloquemos inicialmente P no ponto $(k, 0)$. Visto a distância de P a Q ser constante, k, deverá verificar-se $(X-x)^2 + (Y-y)^2 = k^2$. Mas $X = 0$ em C_1, de maneira que temos $Y - y = \sqrt{k^2 - x^2}$ e a equação diferencial (8.60) escreve-se

$$y' = \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{-x}.$$

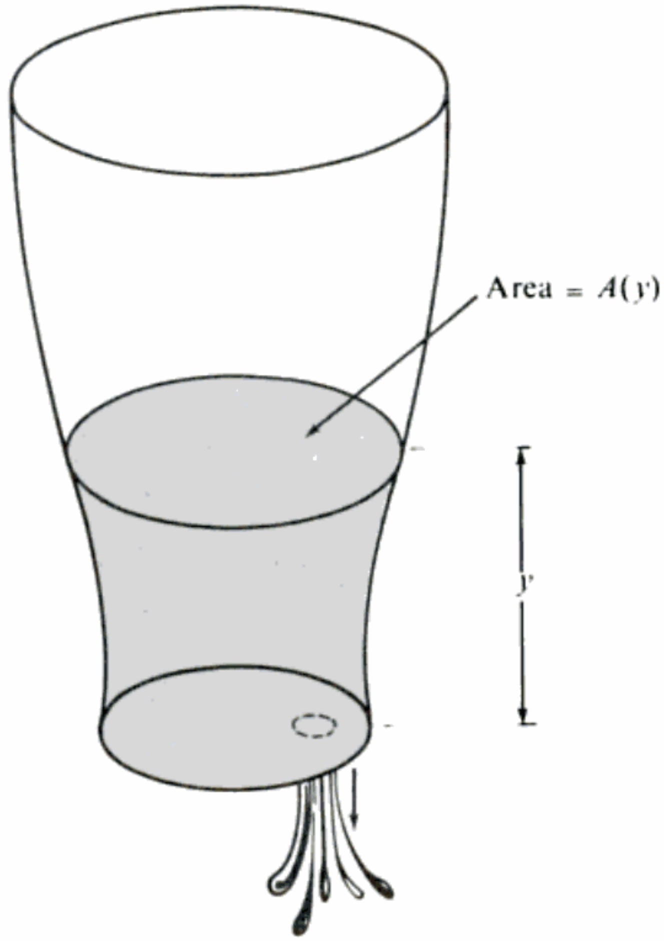


Fig. 8.15. Escoamento dum líquido através dum orifício.

EXEMPLO 3. Consideremos o caso particular em que $A(y)$ é constante, isto é $A(y) = A$ para todo o y e suponhamos que o nível do líquido desce de 10 metros para 9 metros em 10 minutos (600 segundos). Estes dados podem ser introduzidos nos limites de integração e da equação diferencial (8.61) deduz-se:

$$-\int_{10}^{9} \frac{dy}{\sqrt{y}} = k\int_{0}^{600} dt\,,$$

onde $k = 4{,}8A_0/A$. Da equação anterior pode calcular-se k porque

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\frac{1}{2}} = 600k \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{\sqrt{10} - 3}{300}\,.$$

Agora podemos calcular o tempo necessário para que o nível desça dum dado valor para outro. Por exemplo, se no instante t_1 o nível é de 7 metros e no instante t_2 é de 1 metro (t_1 e t_2 medidos em minutos, por exemplo) então temos

$$-\int_{7}^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = k\int_{60t_1}^{60t_2} dt\,,$$

5/3 centímetros quadrados. Se o nível da água é inicialmente 2 metros acima do orifício, determinar o tempo necessário para que o nível desça para 1 metro.

19. Considerar o problema anterior. Se é também lançada água no tanque na razão de 100 pés cubicos por segundo, mostrar que o nível da água se aproxima do valor $(25/24)^2$ pés acima do orifício, independentemente do nível inicial da água.
20. Um tanque tem a forma dum cone circular reto com o vértice para cima. Determinar o tempo necessário para esvaziar o tanque dum líquido de que está cheio, através de um orifício feito na base. Exprimir o resultado em função das dimensões do cone e da área A_0 do orifício.
21. A equação $xy'' - y' + (1 - x)y = 0$ possui uma solução da forma $y = e^{mx}$, onde m é constante. Determinar esta solução explicitamente.
22. Resolver a equação diferencial $(x + y^3) + 6xy^2y' = 0$ por uma adequada mudança de variáveis que a transforme numa equação linear.
23. Resolver a equação diferencial $(1 + y^2 e^{2x})y' + y = 0$ recorrendo a uma mudança de variáveis da forma $y = ue^{mx}$, com m constante e u uma nova função desconhecida.
24. (a) Dada uma função f que verifica as relações

$$2f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{se} \quad x > 0, \qquad f(1) = 2\,,$$

se $y = f(x)$ provar que y verifica a equação diferencial da forma

$$x^2y'' + axy' + by = 0\,,$$

onde a e b são constantes. Determinar a e b.

(b) Determinar uma solução da forma $f(x) = Cx^n$.

25. (a) Seja u uma solução não nula da equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0\,.$$

Mostrar que a substituição $y = uv$ transforma a equação

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

numa equação linear de primeira ordem para v'.

(b) Determinar uma solução não nula da equação $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$ por tentativas e aplicar o método da alínea (a) para encontrar a solução de

$$y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 2xe^{-x^3/3}$$

tal que $y = 0$ e $y' = 4$ quando $x = 0$.

26. Cientistas do Ajax Atomics Works isolaram um grama de um novo elemento radioativo. Verificou-se que se desintegrava proporcionalmente ao *quadrado* da parte exis-

9
NÚMEROS COMPLEXOS

9.1. Introdução histórica.

A equação quadrática $x^2 + 1 = 0$ não admite soluções no conjunto dos números reais, porque não existe nenhum número real cujo quadrado seja -1. Para se definirem soluções para tais equações foram introduzidos novos tipos de números, chamados *números complexos*. Estes serão analisados neste breve capítulo e mostraremos quanto são importantes na resolução de equações algébricas e no cálculo diferencial e integral.

Já no século XVI se introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$ para exprimir as raízes da equação $x^2 + 1 = 0$. Este símbolo, mais tarde representado pela letra i, foi considerado como um número fictício ou imaginário, o qual podia ser tratado algebricamente como qualquer número real, exceto que o seu quadrado era -1. Assim, por exemplo, o polinómio quadrático $x^2 + 1$ podia fatorizar-se escrevendo $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$ e as soluções da equação $x^2 + 1 = 0$ foram definidas como sendo $x = \pm i$, sem qualquer preocupação de considerar o significado ou validade de tais fórmulas. Expressões tais como $2 + 3i$ foram designadas por números complexos e foram utilizados duma maneira meramente formal durante cerca de 300 anos, antes que fossem descritos duma maneira que pudesse ser considerado satisfatória na atualidade.

Em princípios do século XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) e William Rowan Hamilton (1805-1865), independentemente um do outro e quase simultaneamente, propuseram a ideia de definição dos números complexos como pares ordenados (a, b) de números reais dotados com certas propriedades especiais. Esta ideia está largamente aceite hoje em dia e será descrita na seção seguinte.

9.2. Definições e propriedades

DEFINIÇÃO. *Se a e b são números reais, o par (a, b) diz-se um número complexo se a igualdade, adição e multiplicação de pares se definem do modo seguinte:*

(a) Igualdade: $(a, b) = (c, d)$ *significa* $a = c$ *e* $b = d$.

(b) Soma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

(c) Produto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

A definição de igualdade diz-nos que o par *(a, b)* deve ser considerado como um *par ordenado*. Assim, o número complexo (2. 3) não é igual a (3.2). Os números *a* e *b* são as *componentes* de *(a, b)*. A primeira, *a*, é a *parte real* do número complexo; a segunda, *b*, é a *parte imaginária*. Observe-se que o símbolo $i = \sqrt{-1}$ não aparece em toda esta definição. Introduzir-se-á aqui *i* como um número complexo especial que goza de todas as propriedades algébricas prescritas ao símbolo fictício $\sqrt{-1}$ pelos matemáticos antigos. Contudo, antes de fazermos isso, discutiremos as propriedades fundamentais das operações que acabámos de definir.

TEOREMA 9.1. *As operações de adição e multiplicação de números complexos gozam das propriedades comutativa, associativa e distributiva, isto é, se x, y, e z são números complexos arbitrários, tem-se:*

Propriedade comutativa: $x + y = y + x,\ xy = yx.$
Propriedade associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z,\ \ x(yz) = (xy)z.$
Propriedade distributiva: $x(y + z) = xy + xz.$

Demonstração. Todas estas propriedades são facilmente verificadas diretamente a partir da definição de soma e produto. Por exemplo, para demonstrar a propriedade associativa para a multiplicação, escrevemos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ e observamos que

$$\begin{aligned} x(yz) &= (x_1, x_2)(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1) \\ &= (x_1(y_1z_1 - y_2z_2) - x_2(y_1z_2 + y_2z_1), x_1(y_1z_2 + y_2z_1) + x_2(y_1z_1 - y_2z_2)) \\ &= ((x_1y_1 - x_2y_2)z_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)z_2, (x_1y_2 + x_2y_1)z_1 + (x_1y_1 - x_2y_2)z_2) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)(z_1, z_2) = (xy)z. \end{aligned}$$

As propriedades comutativa e distributiva podem demonstrar-se de modo análogo.

O Teorema 9.1 mostra que o conjunto de todos os números complexos satisfaz aos três primeiros axiomas do sistema dos números reais, como se apresentaram na Seção I. 3.2. Demonstraremos ainda que os Axiomas 4, 5 e 6 são também satisfeitos.

Visto que $(0, 0) + (a, b) = (a, b)$ para qualquer complexo *(a, b)*, o número complexo (0, 0) é o elemento neutro para a adição. Chama-se o número complexo zero. De modo semelhante o número complexo (1, 0) é o elemento neutro para a multiplicação, porque

$$(a, b)(1, 0) = (a, b)$$

para todo o *(a, b)*. Deste modo, o Axioma 4 é verificado com (0, 0) como elemento neutro para a adição e (1, 0) como o elemento neutro para a multiplicação.

Para verificar o Axioma 5 fazemos notar muito simplesmente que $(-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$, de modo que $(-a, -b)$ é o simétrico de *(a, b)*. Escrevemos $-(a, b)$ em lugar de $(-a, -b)$.

Finalmente provaremos que cada número complexo não nulo admite um recíproco relativamente ao elemento neutro (1, 0). Isto é, se $(a, b) \neq (0, 0)$ existe um número complexo *(c, d)* tal que

$$(a, b)(c, d) = (1, 0) .$$

Com efeito esta equação é equivalente ao par de equações

$$ac - bd = 1, \qquad ad + bc = 0 ,$$

que admitem a solução única

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}. \tag{9.1}$$

A condição $(a, b) \neq (0, 0)$ assegura que $a^2 + b^2 \neq 0$, pelo que o recíproco é bem definido. Escrevemos $(a, b)^{-1}$ ou $1/(a, b)$ para representar o recíproco de (a, b). Assim temos

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \qquad \text{se} \quad (a, b) \neq (0, 0) . \tag{9.2}$$

A discussão precedente mostra que o conjunto de todos os números complexos satisfaz aos seis axiomas do sistema dos números reais. Por conseguinte, todas as leis da álgebra estabelecidas a partir daquele conjunto de axiomas são também válidas para os números complexos. Em particular os Teoremas I.1 a I.15 da seção I.3.2 são todos válidos tanto para números complexos como para os números reais. O Teorema I.8 diz-nos que o quociente de números complexos existe, quer dizer se (a, b) e (c, d) são números complexos sendo $(a, b) \neq (0, 0)$ existe precisamente um número complexo (x, y) tal que $(a, b)(x, y) = (c, d)$. Com efeito tem-se $(x, y) = (c, d)(a, b)^{-1}$.

9.3. Os números complexos como uma extensão dos números reais

Representamos por C o conjunto dos números complexos. Consideremos o subconjunto C_0 de C formado por todos os complexos da forma $(a, 0)$, isto é, todos os complexos com a parte imaginária nula. A soma ou produto de dois elementos de C_0 pertence ainda a C_0. Com efeito temos

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \qquad \text{e} \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0) . \tag{9.3}$$

Isto prova que podemos somar ou multiplicar dois números de $\mathbf{C}_0$, adicionando ou multiplicando unicamente as partes reais ou, por outras palavras, com respeito à adição é a multiplicação, os números em $\mathbf{C}_0$ comportam-se exactamente como se fossem reais. O mesmo é válido para a subtração e divisão, visto que $-(a, 0) = (-a, 0)$ e $(b, 0)^{-1} = (b^{-1}, 0)$ se $b \neq 0$. Por esta razão, não se faz habitualmente qualquer distinção entre o número real x e o complexo $(x, 0)$ cuja parte real é x; assim identificamos x e $(x, 0)$ e escrevemos $x = (x, 0)$. Em particular, escrevemos $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $-1 = (-1, 0)$, etc. Por este fato podemos pensar do sistema de números complexos como uma extensão do sistema dos números reais.

A relação entre $\mathbf{C}_0$ e o sistema dos números reais pode estabelecer-se de maneira algo diferente. Seja $\mathbf{R}$ o conjunto dos números reais e represente f uma função que aplica cada número real x no número complexo $(x, 0)$, quer dizer se $x \in \mathbf{R}$ faz-se

$$f(x) = (x, 0) .$$

A função f assim definida tem domínio **R** e contradomínio $\mathbf{C}_0$ e aplica elementos distintos de **R** em elementos distintos de $\mathbf{C}_0$. Devido a estas propriedades diz-se que f estabelece uma *correspondência biunívoca* entre **R** e $\mathbf{C}_0$. As operações de adição e multiplicação são conservadas sob esta correspondência. Por outras palavras temos

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad \text{e} \qquad f(ab) = f(a)f(b) ,$$

sendo estas equações simples reformulações de (9.3). Uma vez que **R** satisfaz aos seis axiomas, o mesmo se verifica com $\mathbf{C}_0$. Os dois corpos de números **R** e $\mathbf{C}_0$ dizem-se *isomorfos*; a função f que os relaciona, como se referiu, chama-se um *isomorfismo*. Pelo que respeita às operações de adição e multiplicação não se faz qualquer distinção entre corpos isomofos. É por isso que identificamos o número real x com o número complexo $(x, 0)$. O sistema dos números complexos **C** diz-se uma *extensão* do sistema dos números reais **R** porque contém um subconjunto $\mathbf{C}_0$ que é isomorfo com **R**.

O corpo $\mathbf{C}_0$ pode também ser *ordenado* de tal maneira que os três axiomas de ordem da seção I3.4 sejam verificados. Com efeito, definimos $(x, 0)$ como positivo se e só se $x > 0$. É trivial verificar que os Axiomas 7, 8 e 9 são satisfeitos, pelo que $\mathbf{C}_0$ é um corpo *ordenado*. O isomorfismo f, descrito atrás, também preserva a ordem já que aplica os elementos positivos de **R** nos elementos positivos de $\mathbf{C}_0$.

9.4. A unidade imaginária *i*

Os números complexos possuem algumas propriedades não possuidas pelos números reais. Por exemplo a equação quadrática $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução no campo real, pode agora resolver-se com auxílio dos números complexos. Na verdade o número complexo $(0, 1)$ é solução porque se tem

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 .$$

O número complexo $(0, 1)$ representa-se por i e chama-se a *unidade imaginária*. Goza da propriedade do seu quadrado ser -1, $i^2 = -1$. O leitor pode facilmente verificar que $(-i)^2 = -1$ pelo que $x = -i$ é outra solução da equação $x^2 + 1 = 0$.

Podemos agora relacionar a ideia de par odenado com a notação usada pelos antigos matemáticos. Observemos em primeiro lugar que a definição de multiplicação de números complexos dá-nos $(b, 0)(0, 1) = (0, b)$ e daqui resulta

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) .$$

Portanto, se escrevermos $a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$ e $i = (0, 1)$, obtemos $(a, b) = a + bi$. Por outras palavras provámos o seguinte.

TEOREMA 9.2. *Todo o número complexo (a, b) pode expressar-se na forma $(a, b) = a + bi$.*

A vantagem desta notação reside na facilidade de manipulação de fórmulas contendo a adição e a multiplicação. Por exemplo se multiplicamos $a + bi$ por $c + di$, aplicando as propriedades distributiva e associativa e substituindo i^2 por -1, obtemos

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i\,,$$

que estará, evidentemente, de acordo com a definição de multiplicação. De modo análogo, para calcular o recíproco dum complexo não nulo $a + bi$, podemos escrever

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\,.$$

Esta fórmula está de acordo com a dada em (9.2).

Com a introdução dos números complexos lucrámos muito mais do que a possibilidade de resolver o simples equação quadrática $x^2 + 1 = 0$. Consideremos, por exemplo, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Completando o quadrado podemos escrevê-la na forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0\,.$$

Se $4ac - b^2 \leqslant 0$, a equação tem raízes reais $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. Se $4ac - b^2 > 0$, o primeiro membro é positivo para todo o real x e a equação não tem raízes reais. Neste caso, porém, admite duas raízes complexas dadas pelas fórmulas

$$r_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{e} \qquad r_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,. \tag{9.4}$$

Em 1799 Gauss provou que toda a equação algébrica de forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0\,,$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais arbitrários, com $a_n \neq 0$, tem uma raíz pertencente ao corpo dos números complexos se $n \geqq 1$. Além disso, se os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são complexos, existe uma solução no sistema dos números complexos. Esta afirmação é conhecida por *teorema fundamental da álgebra*+. Por seu intermédio se conclui não ser necessário construir números mais gerais que os números complexos para resolver as equações algébricas com coeficientes complexos.

9.5. Interpretação geométrica. Módulo e argumento

Visto que um número complexo (x, y) é um par ordenado de números reais, pode ser represen-

+ Uma demonstração do teorema fundamental da álgebra encontra-se em qualquer livro que trate da teoria das funções de variável complexa. Por exemplo, ver K. Knopp, *Theory of Functions*, Dover Publications, N. York, 1945 ou E. Hile, *Analitic Function Theory*, vol. 1, Blaisdel Publi. 1959. Uma demonstração mais elementar é apresentada em O. Schreier e E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Chelsea Pub. C., 1951.

tado geometricamente por um ponto no plano ou por um vector que una a origem com o ponto (x,y), como se indica na fig. 9.1. Neste sentido, o plano XOY é muitas vezes designado por plano complexo. O eixo OX é o eixo real; o eixo OY diz-se o eixo imaginário. É frequente usarem-se as palavras *número complexo* e *ponto* indistintamente. Assim, referir-nos-emos ao ponto z em vez de o ponto correspondente ao número complexo z.

As operações de adição e subtração de números complexos admitem uma interpretação geométrica simples. Se dois números complexos z_1 e z_2 são representados por setas da origem para z_1 e para z_2, respetivamente, então a soma $z_1 + z_2$ é determinada pela *regra do paralelogramo*. A seta que representa $z_1 + z_2$ é a diagonal do paralelogramo determinado por 0, z_1 e z_2, como se mostra na fig. 9.2. A outra diagonal está relacionada com a diferença de z_1 e z_2. A seta de z_1 para z_2 é paralela a seta de 0 para $z_2 - z_1$ e de igual comprimento; a seta no sentido oposto, de z_2 para z_1, está relacionada do mesmo modo com $z_1 - z_2$.

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos exprimir x e y em coordenadas polares,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\theta\,,$$

e obtemos,

$$x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)\,. \tag{9.5}$$

O número positivo r, que representa a distância de (x, y) à origem, chama-se o *módulo* ou *valor absoluto* de $x + iy$ e representa-se por $|x + iy|$. Assim podemos escrever

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

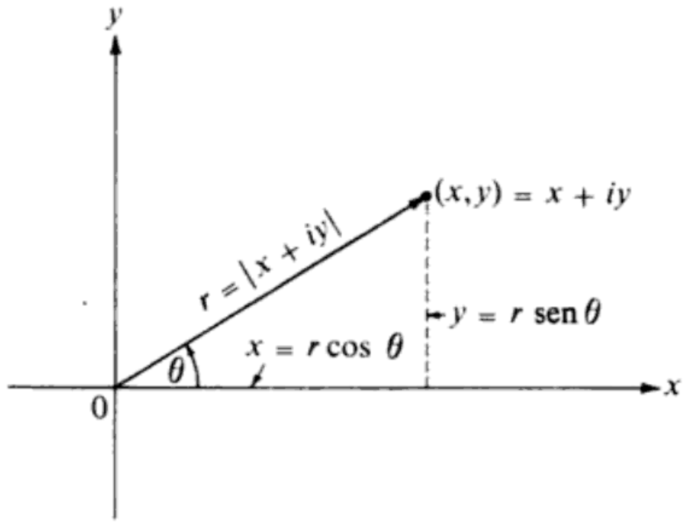


Fig. 9.1. Representação geométrica do número complexo $x + iy$.

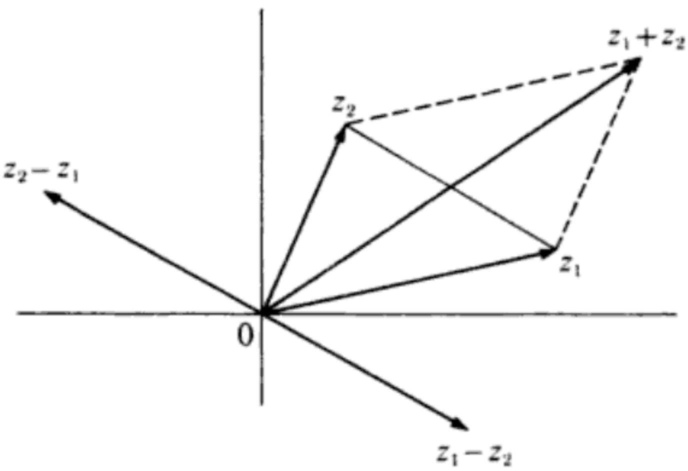


Fig. 9.2. Adição e subtração de números complexos representados geometricamente mediante a regra do paralelogramo.

O ângulo polar θ chama-se um *argumento* de $x + iy$. Dizemos *um* argumento em vez de *o* argumento, porque para um dado ponto (x, y) o ângulo θ é determinado a menos de múltiplos de 2π. Por vezes é conveniente atribuir um único argumento a um número complexo. Pode conseguir-se isto restringindo θ a tomar valores num intervalo semiaberto de medida 2π. Os intervalos $[0, 2\pi)$ e $(-\pi, \pi]$ são frequentemente utilizados com esta finalidade. Nós utilizaremos a intervalo $(-\pi, \pi]$ e referir-nos-emos a θ como sendo o ***argumento principal*** de $x + iy$; representamos tal θ por $\arg(x + iy)$. Por este fato, se $x + iy \neq 0$ e $r = |x + iy|$, define-se $\arg(x + iy)$ como sendo o único real θ verificando as condições

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad -\pi < \theta \leq \pi .$$

Para o número complexo zero, o seu modulo é zero e convencionamos que qualquer número real θ pode ser usado como argumento.

Porque o módulo dum número complexo z é simplesmente o comprimento dum segmento de reta, não surpreenderá verificar que goza das propriedades dos valores absolutos dos números reais. Por exemplo tem-se

$$|z| > 0 \quad \text{se} \quad z \neq 0, \qquad \text{e} \qquad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| .$$

Geometricamente o valor absoluto $|z_1 - z_2|$ representa a distância entre os pontos z_1 e z_2 do plano complexo. A desigualdade triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

é igualmente válida. Em complemento temos as seguintes fórmulas para valores absolutos de produtos e quocientes de números complexos

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \tag{9.6}$$

e

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{se} \quad z_2 \neq 0 .$$

Se escrevemos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, obtemos (9.6) como consequência da identidade

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) .$$

A fórmula para $|z_1/z_2|$ resulta de (9.6) se escrevemos z_1 como um produto

$$z_1 = z_2 \frac{z_1}{z_2} .$$

Se $z = x + iy$, o ***complexo conjugado*** de z é o número complexo $\bar{z} = x - iy$. Geometricamente $\bar{z}$ representa o ponto simétrico de z relativamente ao eixo real. A definição de conjugado implica que

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 , \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 , \qquad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2 , \qquad z\bar{z} = |z|^2 .$$

A verificação destas propriedades é deixada ao leitor como exercício.

pelo que

$$e^a e^b = e^x e^u[\cos y \cos v - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} v + i(\cos y \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} y \cos v)] \,.$$

Recorrendo as fórmulas de adição para $\cos(y + v)$ e $\operatorname{sen}(y + v)$ e à regra do produto de potências para expoentes reais, a igualdade anterior pode escrever-se

$$e^a e^b = e^{x+u}[\cos (y + v) + i \operatorname{sen}(y + v)] \,. \tag{9.11}$$

Visto ser $a + b = (x + u) + i(v + y)$, o segundo membro de (9.11) é e^{a+b} e está portanto demonstrada (9.10).

TEOREMA 9.4. *Todo o número complexo $z \neq 0$ pode ser expresso na forma*

$$z = re^{i\theta}, \tag{9.12}$$

em que $r = |z|$ e $\theta = arg(z) + 2n\pi$, com n inteiro qualquer. Esta representação é a forma polar de z.

Demonstração. Se $z = x + iy$, a representação (9.5) dá-nos

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \,,$$

com $r = |z|$ e $\theta = \arg(z) + 2n\pi$, sendo n um inteiro qualquer. Mas fazendo $x = 0$ e $y = 0$ em (9.9), obtemos a fórmula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

o que demonstra (9.12).

A representação dos números complexos na forma polar (9.12) é particularmente vantajosa na multiplicação e divisão de números complexos. Por exemplo, se $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ e $z_2 = r_2 e^{i\phi}$, temos

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\phi} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\phi)} \,. \tag{9.13}$$

Portanto o produto dos módulos, $r_1 r_2$, é o módulo do produto $z_1 z_2$, de acordo com a equação (9.6) e a soma dos argumentos, $\theta + \phi$, é um argumento do produto $z_1 z_2$.

Quando $z = re^{i\theta}$, a aplicação reiterada de (9.13) dá-nos a fórmula

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \,,$$

válida para qualquer inteiro n não negativo. Também é válida para inteiros negativos n se definimos z^{-m} como sendo $(z^{-1})^m$ com m inteiro e positivo.

De modo análogo tem-se

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\phi}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta-\phi)} ,$$

pelo que o módulo de z_1/z_2 é r_1/r_2 e a diferença $\theta - \phi$ é um argumento possível de z_1/z_2.

9.8. Funções complexas

Uma função f, cujos valores são números complexos, diz-se uma função complexa. Se o domínio de f é o conjunto dos números reais, f diz-se função complexa duma variável real. Se o domínio é um conjunto de números complexos, f é uma função complexa duma variável complexa. Um exemplo é a função exponencial definida pela equação

$$f(z) = e^z$$

para todo o complexo z. Muitas das funções elementares mais familiares do cálculo, tais como a exponencial, o logaritmo e as funções trigonométricas, podem generalizar-se e converter-se em funções de variável complexa. (Ver Exercícios na seção 9.10). Nesta estrutura mais geral aparecem com frequência novas propriedades. Por exemplo, a função exponencial complexa é periódica. Com efeito $z = x + iy$ e se n é um inteiro qualquer tem-se

$$e^{z+2n\pi i} = e^x[\cos(y + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2n\pi)] = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z .$$

Concluímos assim que $f(z + 2n\pi i) = f(z)$, pelo que f é periódica de período $2\pi i$. Esta propriedade da exponencial só se revela quando estudamos a exponencial como uma função de variável complexa.

O primeiro estudo sistemático do cálculo diferencial e integral de funções duma variável complexa foi feita por Cauchy, nos começos do sec. XIX. Desde então a teoria desenvolveu-se num dos mais importantes e mais interessantes ramos da matemática, tornando-se indispensável para os físicos e engenheiros e tendo ligações com quase todos os ramos da matemática pura. Não faremos aqui o estudo dessa teoria. Analisaremos apenas uns rudimentos do cálculo com funções complexas duma variável real.

Suponhamos que f é uma função complexa definida no intervalo real I. Para todo o x em I o valor da função é um número complexo, pelo que podemos escrever

$$f(x) = u(x) + iv(x) ,$$

onde $u(x)$ e $v(x)$ são reais. Esta igualdade define duas funções reais u e v chamadas, respetivamente, as partes real e imaginária de f; a igualdade escreve-se mais resumidamente $f = u + iv$. Conceitos tais como continuidade, derivação e integração de f podem ser definidos através dos conceitos correspondentes para u e v, como se indica na seguinte definição.

DEFINIÇÃO *Se $f = u + iv$, diz-se que f é contínua num ponto se ambas as funções u e v forem contínuas nesse ponto. A derivada de f define-se pela igualdade*

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

$$u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\,, \qquad v'(x) = \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x\,.$$

Visto que $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + i\beta e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) \\ &= (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x} = te^{tx}\,. \end{aligned}$$

estando portanto demonstrado o teorema.

O Teorema 9.5 origina algumas consequências de interesse. Por exemplo, se adoptamos a notação de Leibniz para os integrais indefinidos, podemos traduzir o Teorema 9.5 pela igualdade

$$\int e^{tx}\, dx = \frac{e^{tx}}{t} \tag{9.15}$$

quando $t \neq 0$. Se fizermos $t = \alpha + i\beta$ e igualarmos a parte real e a parte imaginária de (9.15) obtemos as formulas de integração

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x + \beta \operatorname{sen} \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

e

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}\,,$$

as quais são válidas se α e β são não nulos.

Outra consequência do Teorema 9.5 é a ligação entre exponenciais complexas e as equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes.

TEOREMA 9.6. *Seja dada a equação diferencial*

$$y'' + ay' + by = 0\,, \tag{9.16}$$

com a e b constantes reais. As partes real e imaginária da função f definidas em $(-\infty, +\infty)$ *pela igualdade* $f(x) = e^{tx}$ *são soluções da equação diferencial (9.16) se e só se t é uma raiz da equação característica*

$$t^2 + at + b = 0\,.$$

Demonstração. Seja $L(y) = y'' + ay' + by$. Visto ser $f'(x) = te^{tx}$, teremos também $f''(x) = t^2e^{tx}$, pelo que $L(f) = e^{tx}(t^2 + at + b)$. Mas e^{tx} nunca é nulo, visto que $e^{tx}\ e^{-tx} = e^0 = 1$. Por isso $L(f) = 0$ se e somente se $t^2 + at + b = 0$. Mas, se escrevermos $f = u + iv$,

6. Demonstrar que toda a soma da forma

$$S_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

pode ser expressa como uma soma de exponenciais complexas

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

com $c_k = \dfrac{1}{2}(a_k - ib_k)$ para $k = 1, 2, ..., n$. Determinar as fórmulas correspondentes para c_{-k}.

7. (a) Se m e n são inteiros, provar que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n, \\ 2\pi & \text{se} \quad m = n. \end{cases}$$

(b) Utilizar a alínea (a) para deduzir as relações de ortogonalidade para o seno e cosseno (m e n são inteiros, $m^2 \neq n^2$):

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi \qquad \text{si} \quad n \neq 0.$$

8. Considere um número complexo $z \neq 0$. Fazer $z = re^{i\theta}$, onde $\theta = \arg(z)$. Seja $z_1 = Re^{i\alpha}$, onde $R = r^{1/n}$ e $\alpha = \theta/n$, e seja $\epsilon = e^{2\pi i/n}$, com n inteiro e positivo.
(a) Provar que $z_1^n = z$, isto é, z_1 é uma raíz de ordem n de z.
(b) Mostrar que z tem exactamente n raízes n-ésimas distintas

$$z_1, \epsilon z_1, \epsilon^2 z_1, \ldots, \epsilon^{n-1} z_1,$$

e que estão situadas sobre uma circunferência de raio R definindo entre si arcos iguais.
(c) Determinar as três raízes cúbicas de i.
(d) Determinar as quatro raízes quartas de i.
(e) Determinar as quatro raízes quartas de $-i$.

9. As definições das funções seno e cosseno podem generalizar-se para o plano complexo como segue:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Quando z é real estas fórmulas coincidem com as funções seno e cosseno ordinárias.

(Ver Exercício 4). Utilizar estas fórmulas para deduzir as propriedades seguintes do seno e cosseno complexos. Aqui u, v e z representam números complexos, com $z = x + iy$.

(a) $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$.
(b) $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$.
(c) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
(d) $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$, $\quad \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{sh} y$.
(e) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$.
(f) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

10. Se z é um número complexo não nulo define-se $\operatorname{Log} z$, o logaritmo complexo de z, pela igualdade

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \arg(z)\,.$$

Quando z é real e positivo, esta fórmula coincide com a do logaritmo ordinário. Utilizar esta fórmula para deduzir as seguintes propriedades dos logaritmos complexos.

(a) $\operatorname{Log}(-1) = \pi i$, $\quad \operatorname{Log}(i) = \pi i/2$.
(b) $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2n\pi i$, onde n é um inteiro.
(c) $\operatorname{Log}(z_1/z_2) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 + 2n\pi i$, onde n é um inteiro.
(d) $e^{\operatorname{Log} z} = z$.

11. Se w e z são números complexos, $z \neq 0$, definimos z^w pela igualdade

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}\,,$$

onde $\operatorname{Log} z$ é o definido no Exercício 10.

(a) Calcular 1^i, i^i, e $(-1)^i$.
(b) Provar que $z^a z^b = z^{a+b}$ se a, b e z são complexos, $z \neq 0$.
(c) Observar que a igualdade

$$(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w \tag{9.17}$$

não é verificada quando $z_1 = z_2 = -1$ e $w = i$. Quais são as condições que devem verificar z_1 e z_2 para assegurar que (9.17) é verdadeira para todo o complexo w?

Nos Exercícios 12 a 15 L representa o operador linear definido por $L(y) = y'' + ay' + by$, onde a e b são constantes reais.

12. Provar que se R é uma função complexa, por exemplo $R(x) = P(x) + iQ(x)$, então a função complexa $f(x) = u(x) + iv(x)$ satisfaz à equação diferencial $L(y) = R(x)$ no intervalo I se e só se u e v verificam as equações $L(u) = P(x)$ e $L(v) = Q(x)$ em I.

13. Se A é complexo e ω é real, provar que a equação diferencial $L(y) = Ae^{i\omega x}$ admite uma solução complexa da forma $y = Be^{i\omega x}$, desde que seja ou $b\ \alpha\ \omega^2$ ou $a\omega \neq 0$. Exprimir o número complexo B em função de a, b, A e ω.

14. Suponha que c é real e $b \neq \omega^2$. Usar os resultados do Exercício 13 para provar que a equação diferencial $L(y) = c \cos \omega x$ admite uma solução particular da forma $y = A \cos(\omega x + \alpha)$, em que

10
SUCESSÕES, SÉRIES, INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

10.1. O paradoxo de Zenão

O assunto principal deste capítulo teve a sua origem num problema posto há mais de 2400 anos, quando um filósofo grego Zenão de Eleia (495-435 a. C.) precipitou uma crise na Matemática antiga formulando alguns paradoxos engenhosos. Um deles, muitas vezes chamado o *paradoxo do corredor*, pode apresentar-se do seguinte modo:

Um corredor nunca pode alcançar a meta numa corrida porque tem sempre que correr metade de qualquer distância antes de correr a distância total. Quer isto dizer que, tendo corrido a primeira metade, terá ainda que correr a segunda metade. Quando tiver corrido a metade desta, falta-lhe uma quarta parte do total. Quando tiver corrido a metade desta quarta parte falta-lhe a oitava parte do inicial e *assim indefinidamente*.

Zenão referia-se à corrida idealizando, evidentemente, uma situação na qual o corredor é considerado como um ponto em movimento de um extremo do segmento até ao outro extremo do segmento de reta. Podemos formular o paradoxo de outra maneira. Suponhamos que o corredor parte do ponto 1 marcado na fig. 10.1 e corre para o ponto 0. As posições assinaladas com 1/2, 1/4, 1/8, etc., indicam a fração do percurso que falta percorrer quando esses pontos são alcançados. Estas frações, cada uma das quais vale metade da anterior, subdividem o percurso total num número indefinido de pequenos segmentos cada vez mais pequenos. Para percorrer cada um desses segmentos é necessário um certo intervalo de tempo e o tempo exigido para correr todo o percurso é a soma total de todos estes intervalos parciais. Dizer que o corredor nunca atinge a meta, significa que ele não pode atingir esse ponto ao fim dum intervalo de tempo finito; ou, por outras palavras, que a soma dum número infinito de intervalos positivos de tempo não pode ser certamente finita.

Esta afirmação foi rejeitada 2000 años depois de Zenão, com a criação da teoria das séries infinitas. Nos séculos XVII e XVIII os matemáticos começaram a pensar que *seria* possível generalizar as ideias da adição ordinária de conjuntos *finitos* de números a conjuntos *infinitos*, de maneira que algumas vezes a "soma" dum conjunto infinito de números seja finita. Para se ver como se pode fazer esta extensão e ter uma ideia de algumas das dificuldades que podem ser encontradas ao fazê-la, devemos analisar o paradoxo de Zenão mais em pormenor.

Suponhamos que o já mencionado corredor corre com *velocidade constante* e admitamos ainda que necessita T minutos para cobrir a primeira metade do percurso. Na quarta parte seguinte do percurso gastará $T/2$ minutos, na oitava parte seguinte gastará $T/4$ e, em geral, para a parte do percurso compreendida entre $1/2^n$ e $1/2^{n+1}$ necessitará de $T/2^n$ minutos. A "soma" de todos estes intervalos de tempo pode ser indicada simbolicamente escrevendo a seguinte expressão:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots. \tag{10.1}$$

Esta é um exemplo das chamadas *séries infinitas* e o problema consiste agora em verificar se existe algúm método natural de determinação dum número que possa ser chamado a *soma* desta série.

A experiência diz-nos que o corredor que corre com velocidade constante alcançará a meta ao fim do dobro do tempo necessário para alcançar o ponto médio. Visto que ele gasta T minutos para correr metade do percurso, deverá gastar $2T$ minutos para efetuar toda a corrida. Esta linha de raciocínio sugere fortemente

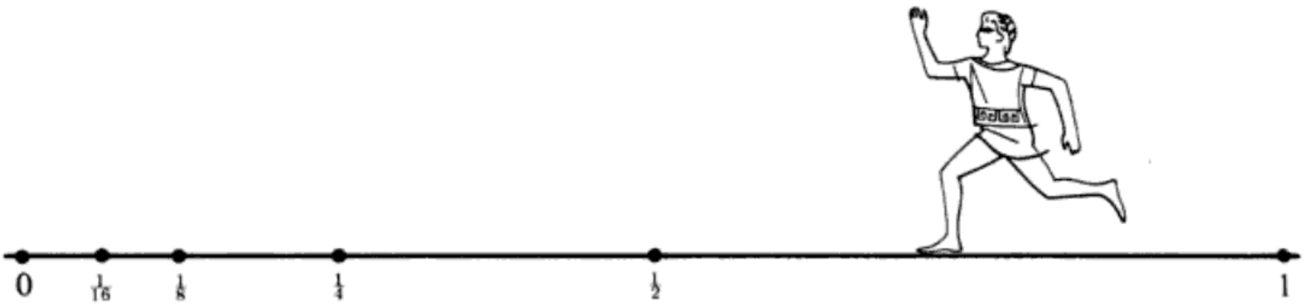


Fig. 10.1. O paradoxo de Zenão.

que devemos atribuir a "soma" $2T$ à série (10.1) e leva-nos a esperar que a igualdade

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = 2T \tag{10.2}$$

seja "verdadeira" em certo sentido.

A teoria das séries infinitas diz-nos exatamente como interpretar esta igualdade. A ideia é a seguinte: em primeiro lugar somam-se um *número finito* de termos, por exemplo os n primeiros, e representamos a sua soma por s_n. Assim temos

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^{n-1}}. \tag{10.3}$$

Obtém-se assim a chamada *soma parcial n-enésima* da série. Em seguida estudamos o comportamento de s_n quando n toma valores tão grandes quanto se queira. Em particular tentamos determinar se a soma parcial s_n tende para um limite finito quando n cresce indefinidamente.

Neste exemplo é fácil verificar que $2T$ é o valor limite da soma parcial. Com efeito, se calculamos vários destas somas parciais, encontramos

$$s_1 = T, \qquad s_2 = T + \frac{T}{2} = \frac{3}{2}T, \qquad s_3 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} = \frac{7}{4}T,$$

$$s_4 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{15}{8}T.$$

Chama-se a atenção para o fato de que estes resultados podem ser expressos do modo seguinte:

$$s_1 = (2 - 1)T, \qquad s_2 = (2 - \tfrac{1}{2})T, \qquad s_3 = (2 - \tfrac{1}{4})T, \qquad s_4 = (2 - \tfrac{1}{8})T,$$

o que nos leva a conjeturar que, para qualquer inteiro positivo n, se tem a fórmula

$$s_n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)T. \tag{10.4}$$

A fórmula (10.4) é aliás facilmente verificável por indução. Visto $1/2^{n-1} \to 0$ quando $n \to +\infty$, resulta que $s_n \to 2T$. Portanto a igualdade (10.2) é "verdadeira" se a intepretamos como significando que $2T$ é o *limite* da soma parcial s_n. Este processo limite parece invalidar a afirmação de que a soma dum número infinito de intervalos de tempo não pode ser nunca finita.

Vamos agora apresentar um argumento que proporciona um considerável apoio ao ponto de vista de Zenão. Suponhamos que fazemos uma pequena, mas importante, mudança na análise precedente do paradoxo da pista de corridas. Em vez de admitirmos que a velocidade do corredor é constante, suponhamos que a sua velocidade decresce gradualmente de tal maneira que ele gasta T minutos para ir de 1 a 1/2, $T/2$ minutos para ir de 1/2 a 1/4, $T/3$ minutos para ir de 1/4 a 1/8 e, em geral, T/n minutos para ir de $1/2^{n-1}$ a $1/2^n$. O "tempo total" que gasta na corrida pode representar-se pela série infinita:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \cdots + \frac{T}{n} + \cdots. \tag{10.5}$$

Neste caso o nosso sentido físico não sugere qualquer "soma" natural ou óbvia para atribuir a esta série e por isso devemos confiar inteiramente na análise matemática para tratar deste exemplo.

Procedamos como no caso anterior introduzindo as somas parciais s_n ou seja

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \cdots + \frac{T}{n}. \tag{10.6}$$

O nosso objetivo consiste em analisar o que acontece a s_n quando n crece indefinidamente. Estas somas parciais não são tão fáceis de estudar como as de (10.3), porque não existe uma fórmula simples análoga a (10.4) que simplifique a expressão do segundo membro de (10.6). Não obstante é fácil obtermos uma *estimativa* para a grandeza de s_n se compararmos a soma parcial com um integral apropriado.

Na fig. 10.2 está traçado o gráfico de $f(x) = 1/x$ para $x > 0$. (A escala está modificada no eixo 0Y). Os retângulos indicados têm uma área total igual à soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{10.7}$$

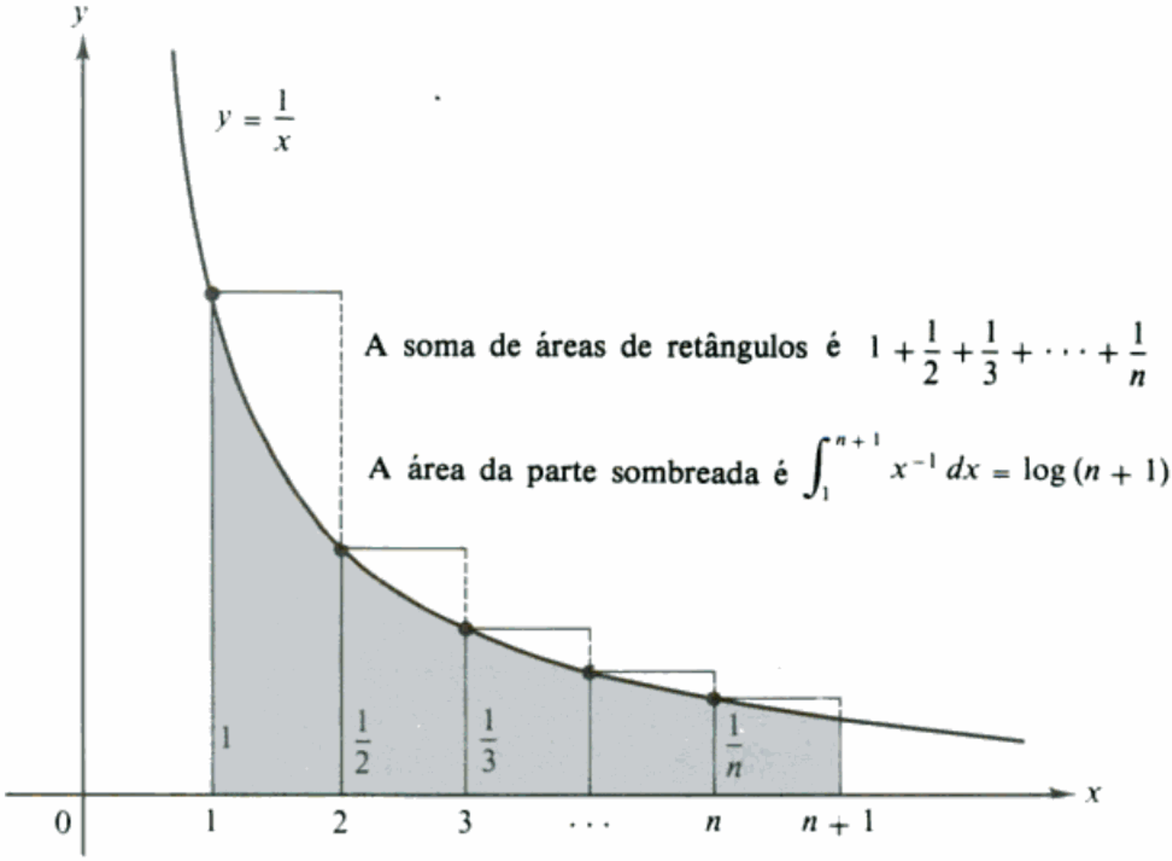


Fig. 10.2. Significado geométrico da desigualdade $1 + 1/2 + \ldots + 1/n \geqslant \log(n + 1)$.

A área da parte sombreada é $\int_1^{n+1} x^{-1}dx = \log(n + 1)$. Visto que esta área não pode exceder a soma das áreas dos retângulos, temos a desigualdade

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \log(n + 1). \tag{10.8}$$

Multiplicando ambos os membros por T, obtemos $s_n \geq T \log(n + 1)$. Por outras palavras, se a velocidade do corredor decresce da maneira que se indica atrás, o tempo necessário para alcançar o ponto $1/2^n$ é, pelo menos, $T \log(n + 1)$ minutos. Visto que $\log(n + 1)$ cresce indefinidamente quando n aumenta, devemos concordar com Zenão e concluir que o corredor não pode atingir a meta ao fim de qualquer intervalo de tempo finito.

A teoria geral das séries infinitas faz uma distinção entre as séries do tipo (10.1) cujas somas parciais tendem para um limite finito e as do tipo (10.5) cujas somas parciais tendem

Na matemática estas palavras têm significados ténicos especiais. A palavra "sucessão" tem um sentido análogo ao da linguagem corrente, querendo significar-se um conjunto de objectos dispostos segundo determinada ordem, mas a palavra "série" é usada em sentido algo diferente. O conceito de sucessão será discutido nesta seção e o de série será definido na seção 10.5.

Se a cada inteiro positivo n está associado um número real ou complexo a_n, então o conjunto ordenado

$$a_1\,,\, a_2\,,\, a_3\,,\, \ldots\,,\, a_n\,,\, \ldots$$

diz-se definir uma sucessão infinita. O fundamental aqui é que cada elemento do conjunto foi qualificado com um inteiro, de maneira que podemos falar de *primeiro termo* a_1, *segundo termo* a_2 e, em geral, o *termo de ordem n,* a_n. Cada termo a_n tem um sucessor a_{n+1} e por isso não há nenhum termo que seja o último.

Os exemplos mais correntes de sucessões podem construir-se dando algumas regras ou fórmulas para descrever o termo de ordem n. Assim, por exemplo, a fórmula $a_n = 1/n$ define uma sucessão cujos primeiros cinco termos são

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5}\,.$$

Algumas vezes empregam-se duas ou mais fórmulas como, por exemplo,

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = 2n^2\,,$$

sendo por conseguinte alguns dos primeiros termos os seguintes

$$1,\ 2,\ 1,\ 8,\ 1,\ 18,\ 1,\ 32,\ 1\ .$$

Outra maneira habitual de definir uma sucessão é por um conjunto de instruções que indicam como obter um termo a partir dos anteriores, depois de definidos alguns. Assim poderemos escrever

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2\,.$$

Esta regra particular é conhecida por *fórmula de recorrência* e define uma sucessão notável cujos termos são chamados *números de Fibonacci* (+). Os primeiros termos são

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34\ .$$

Em qualquer sucessão o fundamental é que exista alguma função f definida no conjunto dos inteiros positivos, tal que $f(n)$ seja o termo de ordem n da sucessão para cada $n = 1, 2,$

(+) Fibonacci, também conhecido por Leonardo de Pisa (cerca de 1175-1250), encontrou esta sucessão num problema referente aos processos hereditários nos coelhos.

3, ... Este será com certeza o modo mais conveniente para estabelecer uma definição ténica de sucessão.

DEFINIÇÃO. *Uma função f, cujo domínio é o conjunto de todos os inteiros positivos 1, 2, 3, ..., diz-se uma sucessão infinita. O valor de função $f(n)$ diz-se o termo de ordem n da sucessão.*

O contradomínio da função (isto é, o conjunto dos valores da função) é habitualmente representado escrevendo os termos por ordem, isto é:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots .$$

Por uma questão de comodidade a notação $\{f(n)\}$ é usada para representar uma sucessão cujo termo de ordem n é $f(n)$. Muitas vezes a dependência de n é indicada pelo uso de índices, e escreve-se a_n, s_n, x_n, u_n, ou uma notação análoga, em vez de $f(n)$. A menos que seja especificado doutro modo, todas as sucessões neste capítulo são supostas de termos reais ou complexos.

A questão fundamental que se nos apresenta aqui é determinar o modo de decidir se os termos de $f(n)$ tendem ou não para um limite, quando n cresce indefinidamente. Para tratarmos este problema necessário se torna alargar o conceito de limite às sucessões. Isto faz-se como segue.

DEFINIÇÃO. *Uma sucessão $\{f(n)\}$ diz-se ter um limite L se, para todo o número positivo ϵ, existe outro número positivo N (o qual pode depender de ϵ) tal que*

$$|f(n) - L| < \epsilon \quad \textit{para todo o } n \geq N.$$

Neste caso diz-se que a sucessão $\{f(n)\}$ converge para L e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L, \qquad \textit{ou} \qquad f(n) \to L \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Uma sucessão que não convirja diz-se divergente.

Nesta definição os valores da função $f(n)$ e o limite L podem ser números reais ou complexos. Se f e L são complexos podemos descompo-los nas respetivas partes reais e partes imaginárias, por exemplo $f = u + iv$ e $L = a + ib$. Então tem-se $f(n) - L = u(n) - a + i[v(n) - b]$. As desigualdades

$$|u(n) - a| \leq |f(n) - L| \qquad \text{e} \qquad |v(n) - b| \leq |f(n) - L|$$

mostram que a afirmação $f(n) \to L$ implica $u(n) \to a$ e $v(n) \to b$ quando $n \to \infty$. Inversamente, a desigualdade

$$|f(n) - L| \leq |u(n) - a| + |v(n) - b|$$

mostra que as duas afirmações $u(n) \to a$, $v(n) \to b$ implicam $f(n) \to L$ quando $n \to \infty$. Quer isto dizer que uma sucessão de termos complexos f converge se e só se ambas as partes realue imaginária v convergem separadamente, caso em que se terá

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} u(n) + i \lim_{n\to\infty} v(n)\,.$$

É evidente que qualquer função definida para todo o real positivo x pode ser usada para construir uma sucessão restringindo x a tomar unicamente valores *inteiros*. Isto explica a forte analogia entre a definição que acabámos de dar e a que foi apresentada na seção 7.14 para funções mais gerais. A analogia estende-se igualmente a *limites infinitos* e deixa-se ao leitor a definição dos símbolos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty$$

como se fez na seção 7.15 quando f é uma função real. Se f é complexa, escrevemos $f(n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ se $|f(n)| \to +\infty$.

A expressão "sucessão convergente" é usada unicamente para uma sucessão cujo limite é *finito*. Uma sucessão com um limite infinito diz-se *divergente*. Existem, evidentemente, sucessões divergentes que não tem limites infinitos. As fórmulas que se seguem definem alguns exemplos:

$$f(n) = (-1)^n\,, \qquad f(n) = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\,, \qquad f(n) = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad f(n) = e^{\pi i n/2}\,.$$

As regras básicas do cálculo de limites de somas, produtos, etc., são também válidas para limites de sucessões convergentes. O leitor não terá dificuldade em formular estes teoremas por si próprio; as respetivas demonstrações são algo semelhantes às dadas na seção 3.5.

A convergência ou divergência de muitas sucessões pode ser determinada pelo uso de propriedades de funções conhecidas que estão definidas para todo o x positivo. Mencionamos alguns exemplos importantes de sucessões de termos reais cujos limites se podem calcular diretamente ou pela utilização de alguns dos resultados estabelecidos no cap. 7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{se} \quad \alpha > 0\,. \tag{10.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0 \quad \text{para quaisquer } a > 0,\ b > 0. \tag{10.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1\,. \tag{10.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \text{para todo o real } a. \tag{10.13}$$

Se $f(n)\searrow$ a demonstração é análoga, sendo neste caso o limite o ínfimo do conjunto dos valores da função.

10.4. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 22 define-se uma sucessão $\{f(n)\}$ pela fórmula dada. Em cada caso: (a) dizer se a sucessão converge ou diverge; (b) determinar o limite em cada sucessão convergente. Em alguns casos pode ser de utilidade substituir o inteiro n por um número real positivo arbitrário x e estudar a função de x assim obtida pelos métodos do capítulo 7. Podem aplicar-se as fórmulas (10.9) a (10.13) dadas no final da Seção 10.2.

1. $f(n) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$.
2. $f(n) = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$.
3. $f(n) = \cos \dfrac{n\pi}{2}$.
4. $f(n) = \dfrac{n^2+3n-2}{5n^2}$.
5. $f(n) = \dfrac{n}{2^n}$.
6. $f(n) = 1 + (-1)^n$.
7. $f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.
8. $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.
9. $f(n) = 2^{1/n}$.
10. $f(n) = n^{(-1)^n}$.
11. $f(n) = \dfrac{n^{2/3}\,\text{sen}\,(n!)}{n+1}$.
12. $f(n) = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$.
13. $f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
14. $f(n) = na^n$, onde $|a| < 1$.
15. $f(n) = \dfrac{\log_a n}{n}$, $a > 1$.
16. $f(n) = \dfrac{100{,}000n}{1+n^2}$.
17. $f(n) = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$.
18. $f(n) = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$.
19. $f(n) = \left(1 + \dfrac{i}{2}\right)^{-n}$.
20. $f(n) = e^{-\pi i n/2}$.
21. $f(n) = \dfrac{1}{n} e^{-\pi i n/2}$.
22. $f(n) = ne^{-\pi i n/2}$.

Cada uma das sucessões $\{a_n\}$ nos Exercícios 23 a 28 é convergente, portanto, para cada $\epsilon > 0$ previamente dado, existe um inteiro N (dependendo de ϵ) tal que $|a_n - L| < \epsilon$ se $n \geq N$, sendo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Determinar, em cada caso, o valor de N adequado a cada um dos seguintes valores de ϵ : $\epsilon = 1; 0, 1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001$.

23. $a_n = \dfrac{1}{n}$.
24. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.
25. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.
26. $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

27. $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$.

28. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$.

29. Provar que uma sucessão não pode convergir para dois limites diferentes.
30. Supor que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Usar a definição de limite para provar que $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.
31. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, usar a definição de limite para provar que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ e $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA$, com c constante.
32. Considerando os resultados dos Exercícios 30 e 31, provar que se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, então $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = A^2$. Em seguida, servindo-se da identidade $2a_nb_n = (a_n + b_n)^2 - a_n^2 - b_n^2$ provar que $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = AB$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.
33. Se α é um número real e n um inteiro não negativo, o coeficiente binominal $\binom{\alpha}{n}$ é definido por

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(a) Quando $\alpha = -1/2$ mostrar que

$$\binom{\alpha}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{3}{8}, \quad \binom{\alpha}{3} = -\frac{5}{16}, \quad \binom{\alpha}{4} = \frac{35}{128}, \quad \binom{\alpha}{5} = -\frac{63}{256}.$$

(b) Seja $a_n = (-1)^n\binom{-1/2}{n}$. Provar que $a_n > 0$ e que $a_{n+1} < a_n$.

34. Seja f uma função real que é monótona crescente e limitada em $[0, 1]$. Definir duas sucessões $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ como segue

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(a) Provar que $s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \le t_n$ e que $0 \le \int_0^1 f(x)\,dx - s_n \le \dfrac{f(1)-f(0)}{n}$.

(b) Provar que ambas as sucessões $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ convergem para o limite $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(c) Estabelecer e demonstrar um resultado correspondente para o intervalo $[a, b]$.

35. Utilizar o Exercício 34 para estabelecer as seguintes relações:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \log 2$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \log(1+\sqrt{2})$.

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi}$.

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}$.

10.5. Séries

A partir duma sucessão de números reais ou complexos podemos sempre formar uma *nova* sucessão pela adição sucessiva dos seus termos. Assim, dada a sucessão de termos

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

podemos formar a sucessão das "somas parciais"

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

etc., vindo para a soma s_n a expressão

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{10.14}$$

A sucessão $\{s_n\}$ das somas parciais chama-se uma *série infinita* ou simplesmente uma série e representa-se também pelos símbolos seguintes

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{10.15}$$

Por exemplo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ representa a sucessão $\{s_n\}$ para a qual

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Com os símbolos em (10.15) se pretende lembrar que a sucessão de somas parciais $\{s_n\}$ é obtida da sucessão $\{a_n\}$ pela adição de termos sucessivos.

Se existir um número real ou complexo S tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

dizemos que a série $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ é *convergente* e tem a *soma* S, caso em que se escreve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Se $\{s_n\}$ diverge, diz-se que a série $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge* e não tem soma.

EXEMPLO 1. A SERIE HARMÓNICA. Na discussão do paradoxo de Zenão, mostrámos que a soma parcial s_n da série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ satisfaz à desigualdade

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log (n + 1) .$$

Visto que $\log(n + 1) \to \infty$ quando $n \to \infty$, o mesmo ocorre com s_n e por isso a série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge. Esta chama-se a *série harmónica*.

EXEMPLO 2. Na discussão do paradoxo de Zenão encontrámos também as somas parciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$, dadas pela fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

a qual se demonstra facilmente por indução. Quando $n \to \infty$, estas somas parciais tendem para o limite 2 e por isso a série converge e tem soma 2. Podemos indicar isso escrevendo

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots = 2 . \tag{10.16}$$

O leitor deve ter presente que a palavra "soma" é usada aqui num sentido muito especial. A soma duma série convergente não se obtém por uma adição ordinária, mas sim como o *limite da sucessão de somas parciais*. Também notará o leitor que, para uma série convergente, o símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é usado para representar tanto a *série* como a respetiva *soma*, muito embora os dois sejam conceitualmente distintos. A soma representa um *número* e portanto não pode ser nem convergente nem divergente. Uma vez feita a distinção entre a série e a respetiva soma, o uso do mesmo símbolo para representar ambas as coisas não dá lugar a qualquer confusão.

Como no caso da notação de somação finita, a letra k utilizada no símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é um "índice mudo" que se pode substituir por qualquer outro símbolo conveniente. As letras n, m, e r são habitualmente usadas com esta finalidade. Algumas vezes é conveniente iniciar a soma com $k = 0$ ou $k = 2$ ou qualquer outro valor de k. Assim, por exemplo, a série em (10.16) pode escrever-se $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k$. Em geral, se $p \geq 0$, definimos o símbolo $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ para significar o mesmo que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, com $b_k = a_{p+k-1}$. Assim $b_1 = a_p$, $b_2 = a_{p+1}$, etc. Quando não há perigo de confusão, ou quando o ponto de partida não é importante, escreve-se $\sum a_k$ em lugar de $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$.

É fácil demonstrar que as duas séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ são ou ambas convergentes ou ambas divergentes. Seja $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ e $t_n = a_p + a_{p+1} + ... + a_{p+n-1}$. Se $p = 0$ tem-se $t_{n+1} = a_0 + s_n$, pelo que se $s_n \to S$ quando $n \to \infty$, então $t_n \to a_0 + S$ e inversamente, se $t_n \to T$ quando $n \to \infty$, então $s_n \to T - a_0$. Deste modo, ambas as séries convergem ou divergem quando $p = 0$. O mesmo é verdadeiro se $p \geq 1$. Para $p = 1$ tem-se $s_n = t_n$ e para $p > 1$ tem-se $t_n = s_{n+p-1} - s_{p-1}$ e de novo resulta que ambas as sucessões $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ convergem ou divergem. Exprime-se isto muitas vezes dizendo que omitindo ou adicionando ao princípio duma série um número finito de termos tal não afeta a sua convergência ou divergência.

10.6. A propriedade da linearidade das séries convergentes

As somas finitas ordinárias possuem as seguintes propriedades importantes:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{(propriedade aditiva)} \tag{10.17}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{(propriedade homogénea).} \tag{10.18}$$

O teorema que apresentaremos a seguir é uma extensão natural destas propriedades às séries infinitas convergentes, e desse modo justifica muitos cálculos algébricos nos quais as séries convergentes são tratadas como se fossem somas finitas. Quer a associatividade quer a homogeneidade podem ser combinadas para se definir uma propriedade de *linearidade* que pode enunciar-se do modo seguinte.

TEOREMA 10.2. *Se Σa_n e Σb_n são séries infinitas convergentes de termos complexos e α e β dois números complexos dados, então a série $\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n)$ também converge, e a sua soma é dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,. \tag{10.19}$$

Demonstração. Tendo em conta (10.17) e (10.18) podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k\,. \tag{10.20}$$

Quando $n \to \infty$ o primeiro termo do segundo membro de (10.20) tende para $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e o segundo termo tende para $\beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Portanto o primeiro membro tende para a sua soma, e isso prova que a série $\Sigma(\alpha a_{k+\beta bk})$ converge para a soma indicada por (10.19).

O teorema 10.12 admite um interessante corolário que é muitas vezes usado para se concluir da divergência da série.

TEOREMA 10.3. *Se Σa_n converge e se Σb_n diverge, então $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge.*

Demonstração. Visto que $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, e porque Σa_n converge, o Teorema 10.2 diz-nos que a convergência de $\Sigma (a_n + b_n)$ implica a convergência de Σb_n. Deste modo, $\Sigma(a_n + b_n)$ não pode convergir se Σb_n diverge.

EXEMPLO. A série $\Sigma(1/k + 1/2^k)$ diverge porque $\Sigma 1/k$ diverge, embora $\Sigma 1/2^k$ convirja.

Se Σa_n e Σb_n são *ambas* divergentes, a série $\Sigma(a_n + b_n)$ pode ou não convergir. Por exemplo quando $a_n = b_n = 1$ para todo o n, então $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge. Mas quando $a_n = 1$ e $b_n = -1$ para todo o n, então $\Sigma(a_n + b_n)$ converge

10.7. Séries telescópicas

Outra propiedade importante das somas finitas é a propriedade que estabelece que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}\,. \tag{10.21}$$

Quando tentamos generalizar esta propriedade às séries infinitas somos levados a considerar aquelas séries Σa_n para as quais cada termo a_n pode ser expresso como uma diferença da forma

$$a_n = b_n - b_{n+1}\,. \tag{10.22}$$

Estas séries são conhecidas por *séries telescópicas* e o seu comportamento é caraterizado pelo seguinte teorema.

TEOREMA 10.4. *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sucessões de números complexos tais que*

$$a_n = b_n - b_{n+1} \qquad \textit{para} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{10.23}$$

A série Σa_n converge se e só se a sucessão $\{b_n\}$ converge, hipótese em que se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L\,, \qquad \textit{onde} \quad L = \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{10.24}$$

Demonstração. Seja s_n a soma parcial dos n primeiros termos de Σa_n. Então temos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

devido a (10.21). Desta maneira ambas as sucessões $\{s_n\}$ e $\{b_n\}$ convergem ou ambas divergem. Além disso se $b_n \to L$ quando $n \to \infty$, então $s_n \to b_1 - L$, o que prova (10.24).

Nota: Toda a série é telescópica, visto que se poderá sempre verificar (10.22), escolhendo um b_1 arbitrário e fazendo $b_{n+1} = b_1 - s_n$ para $n \geq 1$ e $s_n = a_1 + ... + a_n$.

EXEMPLO 1. Seja $a_n = 1/(n^2 + n)$. Então tem-se

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

e por isso (10.23) verifica-se com $b_n = 1/n$. Uma vez que $b_1 = 1$ e $L = 0$ obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 .$$

EXEMPLO 2. Se x não é um inteiro negativo, tem-se a decomposição.

$$\frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)}\right)$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Portanto, pela propriedade telescópica, as seguintes séries convergem e tem a soma indicada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2(x+1)(x+2)} .$$

EXEMPLO 3. Visto que $\log[n/(n+1)] = \log n - \log(n+1)$ e porque $\log n \to \infty$ quando $n \to \infty$, a série $\Sigma \log[n/(n+1)]$ diverge.

Nota: A série telescópica ilustra perfeitamente a diferença importante entre somas finitas e séries infinitas. Se escrevermos (10.21) na forma desenvolvida temos:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

igualdade que pode ser verificada pela supressão dos parêntesis e simplificação dos termos simétricos. Suponhamos agora que fazemos as mesmas operações nas séries infinitas

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots .$$

Assim b_1 permanece, b_2 anula-se com $-b_2$, b_3 com $-b_3$, etc. Para todo $n > 1$ anulam-se b_n e $-b_n$, simplificando-se todos os b_n menos b_1 o que nos leva a concluir ser b_1 a soma da série. Devido ao teorema 10.4 esta conclusão é falsa, a menos que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Mostra-nos esta conclusão que os parêntesis nem sempre podem ser removidos numa série infinita como acontece com uma soma finita. (Ver também o Exercício 24 da seção 10.9).

10.8. A série geométrica

A propriedade (10.21) das somas finitas pode utilizar-se para estudar um exemplo muito importante conhecido por *série geométrica.* Esta série é gerada por adições sucessivas dos termos duma progressão geométrica e tem a forma Σx^n, onde o termo de ordem n, x^n, é a potência de grau n num número fixo x, real ou complexo. É conveniente iniciar esta série com $n = 0$, com a convenção de que o termo inicial, x^0, é igual a 1.

Seja s_n a soma parcial dos n primeiros termos desta série, isto é:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Se $x = 1$, cada termo do segundo membro é igual a 1 e $s_n = n$. Neste caso a série diverge, uma vez que $s_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Se $x \neq 1$ pode escrever-se a soma simplificada, observando que

$$(1 - x)s_n = (1 - x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^n ,$$

pois que a última soma é do tipo (10.21). Divindindo por $1-x$, obtemos a expressão

$$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x} \qquad \text{se} \quad x \neq 1 .$$

Isto mostra que o comportamento de s_n para n suficientemente grande depende inteiramente do comportamento de x^n. Quando $|x| < 1$, então $x^n \to 0$ quando $n \to \infty$ e a série converge para a soma $1/(1 - x)$.

Visto que $s_{n+1} - s_n = x^n$, a convergência de $\{s_n\}$ implica $x^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, se $|x| \geq 1$ a sucessão $\{s_n\}$ diverge visto x^n não tende para zero nesta hipótese. Demonstrámos assim o seguinte teorema:

TEOREMA 10.5. *Se x é complexo, com $|x| < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge e tem a soma $1/(1-x)$, isto é, tem-se*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.25}$$

Se $|x| \geq 1$*, a série diverge.*

A série geométrica, com $|x| < 1$, é um dos raros exemplos em que a soma pode calcular-se pela determinação duma fórmula para as suas somas parciais. (Na Seção 10.1, em ligação com o paradoxo de Zenão, tratámos o caso particular desta série para $x = 1/2$). A real importância desta série está no fato de poder ser usada como ponto de partida para a determinação da soma dum grande número de outras séries interessantes. Por exemplo, se admitirmos que $|x| < 1$ e substituimos x por x^2 em (10.25), obtemos a igualdade

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.26}$$

Observe-se que esta série contém aqueles termos de (10.25) em que o expoente é *par*. Para determinar a soma das potência ímpares basta multiplicar ambos os membros de (10.26) por x, obtendo-se

$$x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2} \quad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.27}$$

Se se substitui x por $-x$ em (10.25), temos

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \quad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.28}$$

Substituindo x por x^2 em (10.28), temos:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.29}$$

Multiplicando ambos os membros de (10.29) por x, resulta:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{se} \quad |x| < 1\,. \tag{10.30}$$

Se substituimos x por $2x$ em (10.26), obtemos:

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2},$$

que é válida se $|2x| < 1$ ou, o que é equivalente, se $|x| < \frac{1}{2}$. É evidente que muitas outros exemplos podem ser construidos de forma semelhante.

então para cada inteiro positivo n a fórmula de Taylor conduz à igualdade

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + E_n(x), \tag{10.34}$$

onde a soma finita $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ é um polinómio de Taylor de grau $\le n$ e $E_n(x)$ é o erro correspondente a essa aproximação. Se agora fixamos x e fazemos crescer n indefinidamente em (10.34), os polinómios de Taylor dão lugar a séries de potências, nomeadamente $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, sendo cada coeficiente a_k definido por:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Se, para um dado x, o erro $E_n(x)$ tende para 0 quando $n \to \infty$, então para esse x podemos fazer $n \to \infty$ em (10.34) obtendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \lim_{n\to\infty} E_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Por outras palavras, a série de potências em questão converge para $f(x)$. Se x é um ponto para o qual $E_n(x)$ não tenda para 0 quando $n \to \infty$, então a soma parcial não tenderá para $f(x)$. Condições a que f deva satisfazer para garantir que $E_n(x) \to 0$ serão estudadas mais adiante, na seção 11.10.

Para fundamentar melhor a teoria geral das séries de potências vamos debruçar-nos a seguir sobre certas questões gerais relativas à convergência e divergência de séries arbitrárias. Voltaremos ao estudo das séries de potências no capítulo 11.

10.9. Exercícios

Cada uma das séries dos Exercícios 1 a 10 é uma série telescópica ou uma série geométrica ou alguma série cuja soma parcial pode simplificar-se. Em cada problema provar que a série converge e que a soma tem o valor indicado.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3.$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1.$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log[(1+1/n)^n(1+n)]}{(\log n^n)[\log(n+1)^{n+1}]} = \log_2 \sqrt{e}.$

Na seção 10.8 obtivemos séries de potências para $\log(1+x)$ e $\operatorname{arctg} x$ pela efetivação de diferentes operações sobre a série geométrica. Duma maneira semelhante, sem preocupação de justificar as passagens, obter as fórmulas dos Exercícios 11 a 19. Estas são todas válidas, pelo menos para $|x| < 1$. (A justificação teórica será dada na seção 11.8).

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log\frac{1}{1-x}.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}.$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$

20. Os resultados dos Exercícios 11 a 14 sugerem que existe uma fórmula geral

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}},$$

onde $P_k(x)$ é um polinómio de grau k, sendo o termo de menor grau x e o de maior grau x^k. Demonstrá-la por indução, sem ter a preocupação de justificar os cálculos efetuados com séries.

21. Os resultados dos Exercícios 17 e 19 sugerem uma fórmula mais geral

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \qquad \text{onde} \quad \binom{n+k}{k} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!}.$$

Demonstrá-la por indução, sem tentar justificar as operações formais com séries.

22. Sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ para todo o x, determinar as somas das séries seguintes pressupondo que é possível operar com séries infinitas como se fossem somas finitas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$.

23. (a) Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ para todo o x, provar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = (x^2 + x)e^x,$$

supondo que é possível operar sobre estas séries como se fossem somas finitas.

(b) A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^3/n!$ é $\underline{ke}$, onde k é um inteiro positivo. Determinar o valor de k. Não tentar justificar os cálculos.

24. Duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dizem-se *idênticas* se $a_n = b_n$ para todo $n \geq 1$. Por exemplo as séries

$$0 + 0 + 0 + \cdots \quad \text{e} \quad (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

são idênticas, mas as séries

$$1 + 1 + 1 + \cdots \quad \text{e} \quad 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots$$

não são idênticas. Determinar se sim ou não as séries são idênticas em cada um dos seguintes pares:

(a) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ e $(2 - 1) - (3 - 2) + (4 - 3) - (5 - 4) + \cdots$.
(b) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ e $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$.
(c) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ e $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$.
(d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ e $1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \cdots$.

25. (a) Utilizando (10.26) provar que

$$1 + 0 + x^2 + 0 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{se} \quad |x| < 1 .$$

Observar que segundo a definição dada no Exercício 24 esta série não é idêntica à de (10.26), se $x \neq 0$.

(b) Aplicar o Teorema 10.2 ao resultado da alínea (a) e a (10.25) para deduzir (10.27).

(c) Mostrar que o Teorema 10.2 quando aplicado diretamente a (10.25) e (10.26) não dá (10.27). Em seu lugar, obtem-se a fórmula $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n}) = x/(1 - x^2)$, válida se $|x| < 1$.

*10.10. Exercícios sobre desenvolvimentos decimais

Na seção 13.15 tratámos da representação decimal dos números reais. Viu-se que cada número real x positivo admite uma representação decimal da forma

$$x = a_0 \,.\, a_1 a_2 a_3 \ldots ,$$

onde $0 \le a_k \le 9$ para todo $k \ge 1$. O número x está relacionado com os digitos a_0, a_1, a_2, ..., pelas desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n} . \tag{10.35}$$

Se fizermos $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k/10^k$ e subtrairmos s_n a cada membro de (10.35), obtemos

$$0 \le x - s_n < 10^{-n}.$$

Isto mostra que $s_n \to x$ quando $n \to \infty$ e por conseguinte x é dado pela série convergente

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} . \tag{10.36}$$

Cada um dos desenvolvimentos decimais nos Exercícios 1 a 5 subentende-se que se repete indefinidamente na forma indicada. Representar cada um por uma série infinita, achar a soma da série e em consequência disso exprimir x como **quociente** de dois inteiros.

1. $x = 0.4444 \ldots .$
2. $x = 0.51515151 \ldots .$
3. $x = 2.02020202 \ldots .$
4. $x = 0.123123123123 \ldots .$
5. $x = 0.142857142857142857142857 \ldots .$
6. Provar que cada desenvolvimento decimal periódico representa um número racional.
7. Se um número tem um desenvolvimento decimal que termina em zeros, tal como $\frac{1}{8} =$ $= 0{,}1250000...$, então este número pode também escrever-se como um número decimal que termina em noves se subtraímos uma unidade ao último dígito não nulo. Por exemplo, $\frac{1}{8} = 0{,}1249999...$. Demonstrar esta proposição fazendo uso das séries infinitas.

A representação decimal em (10.36) pode generalizar-se substituindo o inteiro 10 por qualquer outro inteiro $b > 1$. Se $x > 0$, represente a_0 o maior inteiro contido em x; admita-se que a_0, a_1, ..., a_{n-1} tenham sido definidos e que a_n representa o maior inteiro tal que bem da diferença entre condição *necessária* e condição *suficiente.* Portanto o leitor deve esforçar-se por ter sempre presente esta distinção quando aplica na prática um determinado critério.

O mais simples de todos os critérios dá uma condição *necessária* para a convergência e pode ser enunciado do modo seguinte:

TEOREMA 10.6. *Se a série Σa_n converge, então o seu termo de ordem n tende para* 0, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \tag{10.37}$$

Demonstração: Seja $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Então $a_n = s_n - s_{n-1}$. Quando $n \to \infty$ quer s_n quer s_{n-1} tendem para o mesmo limite e por isso $a_n \to 0$ e o teorema está demonstrado.

Este é um exemplo dum critério que é do tipo (ii) e não do tipo (i). A condição (10.37) *não* é suficiente para a convergência duma série. Por exemplo, quando $a_n = 1/n$, a condição $a_n \to 0$ é satisfeita e contudo a série $\Sigma\, 1/n$ diverge. A real utilidade deste critério está no fato de nos dar uma condição *suficiente* para a *divergência*, isto é, se os termos a_n duma série Σa_n *não tendem* para zero, então a série diverge. Esta conclusão é logicamente equivalente ao Teorema 10.6.

10.12. Critérios de comparação para séries de termos não negativos

Consideramos nesta seção apenas séries de *termos não negativos*, isto é, séries da forma Σa_n, onde cada $a_n \geq 0$. Uma vez que as somas parciais de tais séries são monótonas crescentes, pode aplicar-se o Teorema 10.1 para se obter a seguinte *condição necessária e suficiente* de convergência.

TEOREMA 10.7. *Se $a_n \geq 0$ para todo o $n \geq 1$, então a série Σa_n converge se e somente se a sucessão das respetivas somas parciais é limitada superiormente.*

Se as somas parciais são limitadas superiormente por um número M, por exemplo, a soma da série não pode então exceder M.

EXEMPLO 1. O Teorema 10.7 pode usar-se para se provar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Calcula-se um limite superior para as somas parciais através da igualdade

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} ,$$

a qual é evidentemente verdadeira para todo $k \geq 1$, pois $k!$ é formado por $k - 1$ fatores todos eles ≥ 2. Deste modo tem-se

Exemplo 3. Uma vez que $\Sigma 1/n$ é divergente, toda a série de termos positivos assintoticamente igual a $1/n$ será também divergente. Por exemplo isto verifica-se com as duas séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}.$$

A relação sen $1/n \sim 1/n$ resulta do facto que $(\operatorname{sen} b)/x \to 1$ quando $x \to 0$.

10.13. O critério de comparação com um integral

Para aplicar os critérios de comparação é necessário dispor de alguns exemplos de séries de comportamento conhecido. As séries geométricas e a função zeta são importantes para esta finalidade. Novos exemplos podem ser obtidos de maneira muito simples por aplicação do *critério de comparação com um integral,* pela primeira vez demonstrado por Cauchy em 1837.

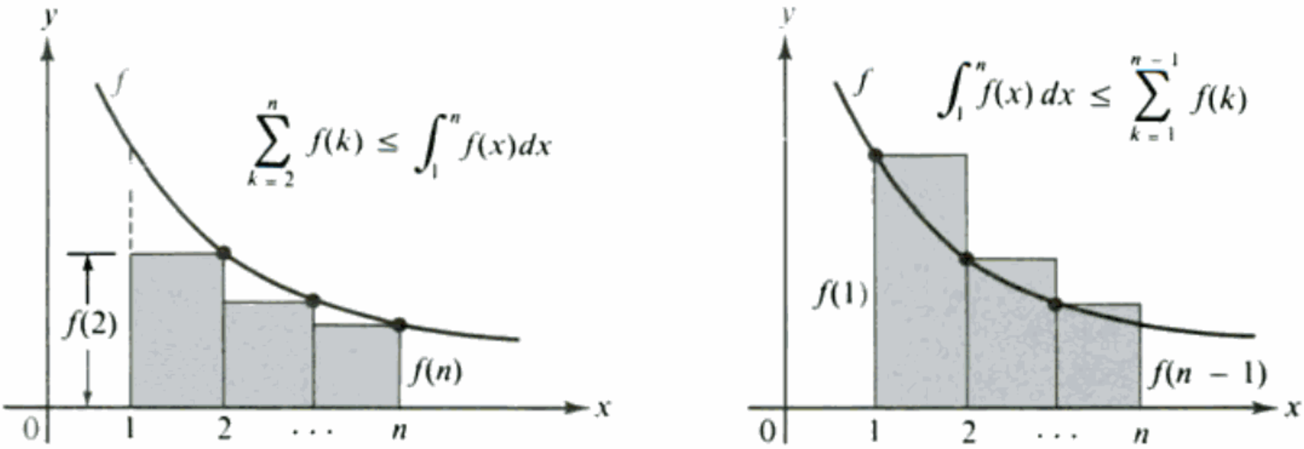


Fig. 10.4. Demonstração do critério de comparação com um integral.

Teorema 10.11. Critério de comparação com um integral. *Se f é uma função positiva decrescente, definida para todo o real $x \ge 1$ e, se para cada $n \ge 1$, é*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad \text{e} \qquad t_n = \int_1^n f(x)\,dx\,.$$

então ambas as sucessões $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ convergem ou divergem.

Demonstração: Comparando f com funções em escada adequadas, como se sugere na fig. 10.4, obtemos as desigualdades

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

ou $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$. Uma vez que ambas as sucessões $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são monótonas crescentes, estas desigualdades mostram que ambas são ou limitadas superiormente ou limitadas inferiormente. Portanto ambas as sucessões ou convergem ou divergem, como se tinha afirmado.

EXEMPLO 1. O critério de comparação com um integral permite demonstrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{converge-se e sómente se } s > 1 .$$

Fazendo $f(x) = x^{-s}$ tem-se

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^s}\, dx = \begin{cases} \dfrac{n^{1-s} - 1}{1 - s} & \text{se } s \neq 1 , \\ \log n & \text{se } s = 1 . \end{cases}$$

Se $s > 1$ o termo $n^{1-s} \to 0$ quando $n \to \infty$ e por isso $\{t_n\}$ converge. Pelo critério do integral, tal implica a convergência da série para $s > 1$.

Quando $s \leq 1$ então $t_n \to \infty$ e a série diverge. O caso especial $s = 1$ (a ***série harmónica***) foi discutido na seção 10.5. A sua divergência já era conhecida de Leibniz.

EXEMPLO 2. O mesmo método pode ser utilizado para demonstrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \quad \text{converge-se e sómente se } s > 1 .$$

(Inicia-se a soma com $n = 2$ para evitar n para o qual $\log n$ seja nulo).

O correspondente integral neste caso é

$$t_n = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s}\, dx = \begin{cases} \dfrac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1 - s} & \text{se } s \neq 1 , \\ \log(\log n) - \log(\log 2) & \text{se } s = 1 . \end{cases}$$

Então $\{t_n\}$ converge se e só se $s > 1$ e por tal motivo, em virtude do critério do integral, o mesmo acontece com a série em questão.

10.14. Exercícios

Verificar se as séries seguintes são convergentes ou divergentes e, para cada exemplo, justificar a resposta dada.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} nx|}{n^2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3-1}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^s}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{10^n}, \quad |a_n| < 10.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2(n\pi/3)}{2^n}$.

15. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n(\log\log n)^s}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

19. Seja f uma função crescente não negativa, definida para todo o $x \geqq 1$. Aplicar o método sugerido para a demonstração do critério do integral para provar que

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=2}^{n} f(k)\,.$$

Fazer $f(x) = \log x$ e deduzir as desigualdades

$$e\,n^n e^{-n} < n! < e\,n^{n+1}e^{-n}\,. \tag{10.41}$$

Elas dão uma estimativa grosseira da ordem de grandeza de $n!$. De (10.41) resulta

$$\frac{e^{1/n}}{e} < \frac{(n!)^{1/n}}{n} < \frac{e^{1/n}\,n^{1/n}}{e}\,.$$

Fazendo $n \to \infty$, conclui-se que

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} \to \frac{1}{e} \quad \text{ou} \quad (n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e} \text{ quando } n \to \infty\,.$$

10.15. Critérios da raiz e do quociente para séries de termos não negativos

Usando a série geométrica Σx^n como série de comparação, Cauchy desenvolveu dois critérios conhecidos por *critério da raiz* e *critério do quociente.*

Se Σa_n é uma série cujos termos (a partir dum deles) satisfazem a uma desigualdade da forma

$$0 \le a_n \le x^n, \qquad \text{onde} \qquad 0 < x < 1\,, \tag{10.42}$$

uma aplicação direta do critério de comparação (Teorema 10.8) diz-nos que Σa_n converge. As desigualdades (10.42) são equivalentes a

$$0 \le a_n^{1/n} \le x\;; \tag{10.43}$$

daqui o nome de *critério da raíz.*

Se a sucessão $\{a_n^{1/n}\}$ é convergente, o critério pode ser reformulado duma maneira mais útil que não faz qualquer referência a x.

TEOREMA 10.12. CRITÉRIO DA RAÍZ (OU DE CAUCHY). *Seja Σa_n uma série de termos não negativos tais que*

$$a_n^{1/n} \to R \text{ quando } n \to \infty\,.$$

(a) Se $R < 1$, a série converge.
(b) Se $R > 1$, a série diverge.
(c) Se $R = 1$, a critério é inconcludente.

Demonstração: Suponhamos $R < 1$ e consideremos x tal que $R < x < 1$. Então (10.43) deve ser verificada para todo $n \ge N$, a partir dum certo N. Por conseguinte Σa_n converge pelo critério de comparação e a alínea (a) fica demonstrada.

Para demonstrar (b), observemos que $R > 1$ implica $a_n > 1$ para uma infinidade de valores de n e em consequência a_n não pode tender para 0. Portanto, pelo Teorema 10.6, Σa_n diverge, o que demonstra (b).

Para provar (c), consideram-se os dois exemplos nos quais $a_n = 1/n$ e $a_n = 1/n^2$. Em ambos os casos $R = 1$ visto que $n^{1/n} \to 1$ quando $n \to \infty$ [Ver a igualdade (10.12) da seção 10.2], mas $\Sigma\, 1/n$ diverge enquanto que $\Sigma\, 1/n^2$ converge.

EXEMPLO 1. Por aplicação do critério da raíz é fácil determinar a convergência da série $\sum_{n=3}^{\infty} (\log n)^{-n}$, pois que

$$a_n^{1/n} = \frac{1}{\log n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Exemplo 2. Aplicando o critério da raíz a $\Sigma[n/(n+1)]^{n^2}$, encontramos

$$a_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

pela igualdade (10.13) da seção 10.2. Posto que $1/e < 1$, a série converge.

Uma aplicação ligeiramente distinta do critério de comparação conduz ao critério do quociente.

Teorema 10.13. Critério do quociente (ou de d'Alembert). *Seja Σa_n uma série de termos positivos tais que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \quad \text{quando } n \to \infty.$$

(a) Se $L < 1$, a série converge.
(b) Se $L > 1$, a série diverge.
(c) Se $L = 1$, o critério é inconcludente.

Demonstração: Suponhamos $L < 1$ e consideremos x tal que $L < x < 1$. Existirá então um inteiro N tal que $a_{n+1}/a_n < x$ para todo o $n \geq N$. Isto implica

$$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n} \quad \text{para todo o } n \geq N\,.$$

Quer dizer, a sucessão $\{a_n/x^n\}$ é decrescente para $n \geq N$. Em particular, quando $n \geq N$, deve verificar-se $a_n/x^n \leq a_N/x^N$ ou, por outras palavras,

$$a_n \leq cx^n\,, \qquad \text{onde} \quad c = \frac{a_N}{x^N}\,.$$

Deste modo Σa_n é majorada pela série convergente Σx^n, e a alinea (a) está demonstrada.

Para demonstrar (b) basta verificar que $L > 1$ implica que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq N$, a partir dum certo N, e por tal motivo a_n não pode tender para 0.

Finalmente (c) demonstra-se utilizando os mesmos exemplos que no Teorema 10.12.

Observação: O fato do quociente a_{n+1}/a_n ser sempre menor do que 1 não significará necessariamente que o *limite* L seja menor que 1. Por exemplo a série harmónica, que é divergente, tem sempre o quociente $n/(n+1)$, menor que 1 mas o limite L é igual a 1. Contudo para a divergência é suficiente que o quociente seja maior que 1 para n suficientemente grande, visto que então é $a_{n+1} > a_n$ e a_n não pode tender para zero.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$.

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/n}}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n + 1/n)^n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n\,|\text{sen}\, nx|, \qquad r > 0$.

15. Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sucessões com $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo o $n \geq N$, e seja $c_n = b_n - b_{n+1}\, a_{n+1}/a_n$. Provar que:
(a) Se existe uma constante positiva r tal que $c_n \geq r > 0$ para todo o $n \geq N$, então Σa_n converge.
[*Sugestão:* Provar que $\Sigma_{k=N}^{n} a_k \leq a_N\, b_N/r$.]
(b) Se $c_n \leq 0$ para $n \geq N$ e se $\Sigma\, 1/b_n$ diverge, então $\Sigma\, a_n$ diverge.
[*Sugestão:* Provar que $\Sigma\, 1/b_n$ é majorada por $\Sigma\, a_n$.]

16. Seja $\Sigma\, a_n$ uma série de termos positivos. Provar o *critério de Raabe:* Se existir um $r > 0$ e um $N \geq 1$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n} \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

então $\Sigma\, a_n$ converge. A série $\Sigma\, a_n$ diverge se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

[*Sugestão:* Recorrer ao Exercício 15 com $b_{n+1} = n$.]

17. Seja Σa_n uma série de termos positivos. *Provar o critério de Gauss:* Se existir um $N \geq 1$, um $s > 1$, e um $M > 0$ tais que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{para } n \geq N,$$

com $|f(n)| \leq M$ para todo o n, então Σa_n converge se $A > 1$ e diverge se $A \leq 1$.

[*Sugestão:* Se $A \neq 1$, utilizar o Exercício 16. Se $A = 1$, utilizar o Exercício 15 com $b_{n+1} = n \log n$.]

18. Aplicar o critério de Gauss (do Exercício 17) para provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^k$$

converge se $k > 2$ diverge se $k \leq 2$. Este é um exemplo em que falha o critério do quociente.

10.17. Séries alternadas

Até aqui estudámos, com alguma pormenor, séries de termos não negativos. Vamos voltar agora a nossa atenção para as séries cujos termos podem ser positivos ou negativos. O caso mais simples ocorre quando os termos da série são alternadamente positivos ou negativos. Tais séries dizem-se *alternadas* e são da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots, \tag{10.45}$$

para cada $a_n > 0$.

Exemplos de séries alternadas eram já conhecidas de muitos dos pioneiros da investigação neste domínio. Já referimos a série logarítmica

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Como provaremos mais adiante esta série converge e a sua soma é $\log(1 + x)$ sempre que $-1 < x \leq 1$. Para x positivo é uma série alternada. Em particular, quando $x = 1$, obtemos a fórmula

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots, \tag{10.46}$$

a qual nos diz que a soma da série harmónica alternada é log 2. Este resultado é de particular interesse em virtude do fato da série harmónica $\Sigma 1/n$ divergir.

$$s_{2n} = (\log 2n + C + o(1)) - (\log n + C + o(1)) = \log 2 + o(1)\,,$$

pelo que $s_{2n} \to \log 2$ quando $n \to \infty$. Isto prova que a soma da série harmónica alternada é $\log 2$.

10.18. Convergência simples e absoluta

Conquanto a série harmónica alternada $\Sigma(-1)^{n-1}/n$ seja convergente, a série obtida pela substituição de cada termo pelo seu valor absoluto é divergente. Quer isto dizer que, em geral, a convergência de Σa_n não implica a convergência de $\Sigma|a_n|$. Em sentido contrário temos o teorema:

TEOREMA 10.15. *Se $\Sigma|a_n|$ é convergente, então é também convergente Σa_n e tem-se*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,. \tag{10.51}$$

Demonstração. Suponhamos, em primeiro lugar, que os termos a_n são reais. Seja $b_n = a_n + |a_n|$. Vamos provar que Σb_n é convergente. Resulta então (pelo Teorema 10.2) que Σa_n converge porque $a_n = b_n - |a_n|$.

Visto que b_n é ou 0 ou $2|a_n|$, tem-se $0 \le b_n \le 2|a_n|$, e por isso Σb_n é majorado por Σa_n. Portanto Σb_n converge e, como já foi referido, isto implica a convergência de Σa_n.

Suponhamos agora que os termos a_n são complexos, quer dizer, $a_n = u_n + iv_n$ com u_n e v_n reais. Uma vez que $|u_n| \le |a_n|$, a convergência de $\Sigma|a_n|$ implica a convergência de $\Sigma|u_n|$ e esta, por sua vez, implica a convergência de Σu_n, visto que u_n é real. Analogamente Σv_n converge. Em virtude da linearidade, a série $\Sigma(u_n + iv_n)$ converge.

Para provar (10.51) observamos que $|\Sigma_{k=1}^{n} a_k| \le \Sigma_{k=1}^{n} |a_k|$, e depois fazemos tender $n \to \infty$.

DEFINIÇÃO. *Uma série Σa_n diz-se absolutamente convergente se $\Sigma|a_n|$ é convergente. Diz-se simplesmente convergente (ou semi-convergente) se Σa_n converge, mas $\Sigma|a_n|$ diverge.*

Se Σa_n e Σb_n são absolutamente convergentes, o mesmo se verifica para a série $\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n)$ qualquer que seja a escolha de α e β. Isto é uma consequência imediata das desigualdades

$$\sum_{n=1}^{M} |\alpha a_n + \beta b_n| \le |\alpha| \sum_{n=1}^{M} |a_n| + |\beta| \sum_{n=1}^{M} |b_n| \le |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |\beta| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,,$$

que provam serem limitadas as somas parciais de $\Sigma|\alpha a_n + \beta b_n|$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n}}{n!}$.

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \log \frac{2n+1}{n}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{5n+1}\right)^{n^2} |z|^{17n}$.

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+2)!}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+3)^n}{n \log (n+1)}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|z|^2)^n}$.

Nos Exercícios 47 e 48 determinar o conjunto dos reais x para os quais as séries dadas convergem

47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n} x}{n}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^n x}{n^2}$.

Nos Exercícios 49 e 52 as séries supõem-se de termos reais.

49. Se $a_n > 0$ e Σa_n converge, provar que $\Sigma\, 1/a_n$ diverge.
50. Se $\Sigma |a_n|$ converge, provar que Σa_n^2 converge. Dar um contra exemplo no qual Σa_n^2 convirja, mas $\Sigma |a_n|$ divirja.
51. Dada uma série convergente Σa_n onde cada $a_n \geq 0$, provar que $\Sigma \sqrt{a_n}\, n^{-p}$ converge se $p > 1/2$. Dar um contra exemplo para $p = 1/2$.
52. Dizer se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições.
    (a) Se Σa_n converge absolutamente, também converge absolutamente $\Sigma a_n^2/(1 + a_n^2)$.
    (b) Se Σa_n converge absolutamente e se nenhum $a_n = -1$, então $\Sigma a_n/(1 + a_n)$ converge absolutamente.

*10.21. Comutatividade nas séries

A ordem dos termos duma soma finita pode sempre alterar-se sem que isso afete o valor da soma. Em 1833 Cauchy fez a surpreendente descoberta de esse fato não ser sempre verdadeiro para séries infinitas. Por exemplo consideremos a série harmónica alternada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \cdots = \log 2\,. \tag{10.56}$$

A convergência desta série para a soma log 2 foi provada na seção 10.17. Se reordenamos os termos desta série, tomando alternadamente dois termos positivos seguidos dum termo negativo, obtemos uma nova série escrita como segue:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + + - \cdots, \tag{10.57}$$

cada termo que aparece na série harmónica alternada aparece também uma só vez aqui e reciprocamente. Todavia pode facilmente demonstrar-se que esta nova série tem uma soma maior que log 2. Procedemos para isso do modo seguinte:

Seja t_n a soma parcial de ordem n de (10.57). Se n é um multiplo de 3, por exemplo $n = 3m$, a soma parcial t_{3m} contém $2m$ termos positivos e m termos negativos e é dada por

$$t_{3m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\,.$$

Em cada uma das três ultimas somas utilizamos a relação assintótica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + o(1) \quad \textbf{quando } n \to \infty\,,$$

obtendo

$$\begin{aligned} t_{3m} &= (\log 4m + C + o(1)) - \tfrac{1}{2}(\log 2m + C + o(1)) - \tfrac{1}{2}(\log m + C + o(1)) \\ &= \tfrac{3}{2}\log 2 + o(1)\,. \end{aligned}$$

Assim $t_{3m} \to \dfrac{3}{2}\log 2$ quando $m \to \infty$. Mas $t_{3m+1} = t_{3m} + 1/(4m+1)$ e $t_{3m-1} = t_{3m} - 1/(2m)$, pelo que t_{3m+1} e t_{3m-1} têm o mesmo limite que t_{3m} quando $m \to \infty$. Portanto cada soma parcial t_n tem o limite $\dfrac{3}{2}\log 2$ quando $n \to \infty$, pelo que a soma da série em (10.57) é $\dfrac{3}{2}\log 2$.

O exemplo precedente mostra que a reordenação dos termos duma série convergente pode alterar a sua soma. Provaremos a seguir que isto pode verificar-se somente se a série dada *é simplesmente* convergente, isto é, a modificacão da ordem dos termos numa série absolutamente convergente não altera a sua soma. Antes de provarmos esta afirmação, vamos precisar o que deve entender-se por reordenação.

DEFINIÇÃO. *Represente* $\mathbf{P} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *o conjunto dos inteiros positivos. Seja* f *uma função cujos domínio e contradomínio são* $\mathbf{P}$ *e admita-se que* f *goza da propriedade seguinte:*

Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ anulam-se na subtração, pelo que se tem

$$|B_n - A_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots = |A_N^* - S^*| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Combinando este resultado com (10.58) vemos que $|B_n - S| < \epsilon$ para todo o $n \geq M$, o que quer dizer que $B_n \to S$ quando $n \to \infty$ e demonstra que a série reordenada Σb_n tem soma S.

A hipótese de convergência absoluta no Teorema 10.20 é essencial. Riemann descobriu que uma série simplesmente convergente de termos reais pode ser sempre reordenada de modo a dar lugar a uma série que convirja para uma soma previamente dada. O raciocínio de Riemann fundamentava-se numa propriedade das séries simplesmente convergentes de termos reais. Uma tal série Σa_n tem infinitamente muitos termos positivos e infinitamente muitos termos negativos. Consideremos as duas novas séries Σa_n^+ e Σa_n^- obtidas tomando só termos positivos e só termos negativos, respetivamente. Mais precisamente, definamos a_n^+ e a_n^- como segue:

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}. \tag{10.59}$$

Se a_n é positivo, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$; se a_n é negativo, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$. As duas novas séries Σa_n^+ e Σa_n^- estão relacionadas com a série dada Σa_n do modo seguinte:

TEOREMA 10.21. *Dada uma série Σa_n de termos reais, definam-se a_n^+ e a_n^- por* (10.59).

(a) *Se Σa_n é simplesmente convergente, ambas as séries Σa_n^- e Σa_n^+ divergem.*

(b) *Se Σa_n é absolutamente convergente, ambas as séries Σa_n^+ e Σa_n^- convergem e tem-se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{10.60}$$

Demonstração. Para demonstrar a alínea (a) observa-se que $\Sigma \frac{1}{2} a_n$ converge e $\Sigma \frac{1}{2}|a_n|$ diverge. Deste modo, pela propiedade da linearidade (Teorema 10.3) Σa_n^+ diverge e Σa_n^- diverge. Para demonstrar (b) observamos que quer $\Sigma \frac{1}{2} a_n$ e $\Sigma \frac{1}{2}|a_n|$ convergem pelo que, pela propriedade da linearidade (Teorema 10.2), ambas as séries Σa_n^+ e Σa_n^- convergem. Visto ser $a_n = a_n^+ + a_n^-$, obtemos também (10.60).

Podemos demonstrar agora facilmente o teorema da reordenação de Riemann.

TEOREMA 10.22. *Se Σa_n é uma série simplesmente convergente de termos reais e S um número real dado, então existe uma reordenação Σb_n de Σa_n que converge para a soma S*

Demonstração. Definamos a_n^+ e a_n^- como foi indicado em (10.59). Ambas as séries Σa_n^+ e Σa_n^- divergem, visto que Σa_n é simplesmente convergente. Reordenemos Σa_n do modo seguinte:

Tomam-se, pela ordem, termos positivos a_n^+ em número suficiente, de maneira que a sua soma exceda S. Se são necessários p_1 termos positivos temos

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n > S \qquad \text{mas} \qquad \sum_{n=1}^{q} a_n \leq S \qquad \text{se } q < p_1 .$$

Isto é sempre possível visto que as somas parciais de Σa_n^+ tendem para $+\infty$. A esta soma adicionamos termos negativos a_n^-, por exemplo n_1 termos negativos, de tal maneira que a soma resultante seja menor do que S. Tal é possível visto que as somas parciais de a_n^- tendem para $-\infty$. Assim temos

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^- < S \qquad \text{mas} \qquad \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{m} a_n^- \geq S \qquad \text{se } m < n_1 .$$

Repetimos o processo, adicionando precisamente novos termos positivos de modo a tornar-se a soma maior que S, e em seguido juntamos-lhe suficientes termos negativos de modo a fazerem a soma menor que S. Continuando deste modo obtemos uma reordenação Σb_n. Cada soma parcial de Σb_n difere de S quando muito dum termo a_n^+ ou a_n^-. Mas $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$, pois Σa_n é convergente, pelo que as somas parciais de Σb_n tendem para S. Está assim demonstrado que a série reordenada Σb_n converge e tem soma S, como se afirmara.

10.22. Exercícios de revisão

1. (a) Seja $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   (b) Seja $a_n = (n+1)^c - n^c$, com c real. Determinar aqueles valores de c para os quais a sucessão $\{a_n\}$ converge e aqueles outros para os quais diverge. Na hipótese de convergência, calcular o limite da sucessão. Observe-se que c pode ser positivo, negativo ou nulo.

2. (a) Se $0 < x < 1$, provar que $(1 + x^n)^{1/n}$ tende para um limite quando $n \to \infty$ e calcular este limite.

   (b) Dados $a > 0$ e $b > 0$, calcular $\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$.

3. Uma sucessão $\{a_n\}$ está definida por recorrência em função de a_1 e a_2 pela fórmula

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \quad \textbf{para} \ n \geq 2\,.$$

(a) Supondo que $\{a_n\}$ converge, calcular o limite da sucessão em função de a_1 e a_2.
O resultado é uma média aritmética pesada de a_1 e a_2.
(b) Provar que, para cada escolha de a_1 e a_2, a sucessão $\{a_n\}$ converge. Pode supor-se que $a_1 < a_2$. [Sugestão: considere $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n+1}\}$ separadamente.]

4. Uma sucessão $\{x_n\}$ está definida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$x_1 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}\,.$$

Provar que a sucessão converge e determinar o seu limite.

5. Uma sucessão $\{x_n\}$ é definida pelas seguintes fórmulas de recorrência

$$x_0 = 1\,, \qquad x_1 = 1\,, \qquad \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}\,.$$

Provar que a sucessão converge e calcular o limite.

6. Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sucessões tais que para cada n se tem

$$e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$$

(a) Demonstrar que $a_n > 0$ implica $b_n > 0$.
(b) Se $a_n > 0$ para todo o n e se Σa_n converge, demonstrar que $\Sigma(b_n/a_n)$ converge.

Nos Exercícios de 7 a 11 averiguar a convergência das séries.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1 + n^2} - n)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^s(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$.

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sendo $a_n = 1/n$ se n é ímpar, $a_n = 1/n^2$ se n é par.

12. Provar que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n^a + 1} - \sqrt{n^a})$$

converge para $a > 2$ e diverge para $a = 2$.

13. Dado $a_n > 0$ para cada n, dar uma demonstração e um contra-exemplo para cada uma das proposições seguintes.

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ converge.

14. Determinar todos os valores reais de c para os quais as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^c/(3n)!$ converge.

15. Determinar todos os inteiros $a \geq 1$ para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^3/(an)!$ converge.

16. Sejam $n_1 < n_2 < n_3 ...$ aqueles inteiros positivos que não contêm 0 na sua representação decimal. Assim $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, ..., $n_9 = 9$, $n_{10} = 11$, ..., $n_{18} = 19$, $n_{19}=21$, etc. Provar que a série dos recíprocos $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ converge e tem uma soma inferior a 90.

[*Sugestão:* A série $9\sum_{n=0}^{\infty} (9/10)^n$ majora a série em estudo.]

17. Se a é um número real arbitrário, seja $s_n(a) = 1^a + 2^a + ... + n^a$. Calcular o seguinte limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n(a+1)}{ns_n(a)} .$$

(Considere o a positivo, negativo e ainda $a = 0$).

18. (a) Se p e q são inteiros fixos $p \geq q \geq 1$, mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=qn}^{pn} \frac{1}{k} = \log \frac{p}{q} .$$

(b) A série seguinte é uma série reordenada da série harmónica alternada na qual aparecem, alternadamente, três termos positivos seguidos de dois negativos:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + + + - - \cdots .$$

Mostrar que a série converge e tem soma $\log 2 + \dfrac{1}{2} \log 3/2$. [*Sugestão:* Considerar a soma parcial s_{5n} e usar a alínea (a).]

(c) Reordenar a série harmónica alternada, escrevendo alternadamente p termos positivos seguidos de q termos negativos. Aplicar a alínea (a) para mostrar que esta reordenação define uma série que converge e tem soma $\log 2 + \dfrac{1}{2} \log (p/q)$.

Portanto $\int_0^\infty e^{-a|x|}dx$ converge e o seu valor é $1/a$. Por outro lado, se $a > 0$ temos

$$\int_{-b}^{0} e^{-a|x|}\,dx = \int_{-b}^{0} e^{ax}\,dx = -\int_{b}^{0} e^{-at}\,dt = \int_{0}^{b} e^{-at}\,dt\,.$$

Deste modo $\int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}dx$ também converge e vale $1/a$. Assim podemos concluir $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}dx =$ $= \frac{2}{a}$. Observe-se, contudo, que o integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}dx$ *diverge* porque $\int_{-\infty}^{0} e^{-ax}dx$ diverge.

Como no caso das séries, dispomos de vários critérios de convergência para integrais impróprios. O mais simples diz respeito a funções integrandas positivas.

TEOREMA 10.23. *Se o integral próprio $\int_a^b f(x)dx$ existe para todo o $b \geq a$ e se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \geq a$, então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge se e só se existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad \textit{para cada } b \geq a.$$

Este teorema constitui a base do seguinte critério de comparação:

TEOREMA 10.24. *Se o integral próprio $\int_a^b f(x)dx$ existe para todo o $b \geq a$ e se $0 \leq f(x) \leq$ $\leq g(x)$ para todo o $x \geq a$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x)dx$ também converge e*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx\,.$$

Nota: O integral $\int_a^\infty g(x)dx$ diz-se que *majora* o integral $\int_a^\infty f(x)dx$.

TEOREMA 10.25. CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO LIMITE. *Se ambos os integrais próprios $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ existem para todo $b \geq a$, com $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, e se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c\,, \qquad \text{com} \qquad c \neq 0\,, \tag{10.63}$$

então os integrais $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ ou convergem ambos ou divergem ambos.

Nota: Se o limite em (10.63) é 0, podemos concluir apenas que a convergência de $\int_a^\infty g(x)dx$ implica a convergência de $\int_a^\infty f(x)dx$.

definida pela equação $f(x) = x^{-3/4}$ se $0 < x \leq 1$. O integral $\int_{0+}^{1} f(x)\,dx$ converge, mas o integral $\int_{0+}^{1} \pi f^2(x)dx$ diverge. Geometricamente isto significa que o conjunto de ordenadas de f tem uma área finita, mas o sólido obtido pela rotação desta região em torno do eixo $0X$ tem um volume infinito.

Integrais impróprios da forma $\int_{a}^{b-} f(t)dt$ definem-se de modo semelhante. Se os dois integrais $\int_{a+}^{c} f(t)dt$ e $\int_{c}^{b-} f(t)dt$ *convergem*, então podemos escrever

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt = \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b-} f(t)\,dt\,.$$

Nota: Alguns autores escrevem $\int_{a}^{b}$ em vez de $\int_{a+}^{b-}$.

A definição pode generalizar-se (duma maneira evidente) para cobrir o caso de qualquer número finito de integrais parcelas. Por exemplo, se f não está definida em dois pontos $c < d$ interiores ao intervalo $[a, b]$, dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(t)dt$ converge e tem o valor $\int_a^{c-} f(t)dt + \int_{c+}^{d-} f(t)dt + \int_{d+}^{b} f(t)dt$, desde que cada um dos integrais parcelas convirja. Além disso, podemos considerar combinações "mistas" tais como $\int_{a+}^{b} f(t)dt +$ $+ \int_b^{\infty} f(t)dt$ que se escreve $\int_{a+}^{\infty} f(t)dt$, ou combinações mistas da forma $\int_a^{b-} f(t)dt +$ $+ \int_{b+}^{c} f(t)dt + \int_c^{\infty} f(t)dt$ que podem escrever-se muito simplesmente $\int_a^{\infty} f(t)dt$.

EXEMPLO 6. *A função gama.* Se $s>0$ o integral $\int_{0+}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$ converge. Este integral deve interpretar-se como uma soma, a saber

$$\int_{0+}^{1} e^{-t}t^{s-1}\,dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt\,. \tag{10.65}$$

O segundo integral converge para qualquer real s, devido ao Exemplo 4. Para estudar o primeiro integral escrevemos $t = 1/u$ e observamos que

$$\int_{x}^{1} e^{-t}t^{s-1}\,dt = \int_{1}^{1/x} e^{-1/u}u^{-s-1}\,du\,.$$

Mas $\int_1^{\infty} e^{-1/u}\, u^{-s-1}du$ converge para $s > 0$ por comparação com $\int_1^{\infty} u^{-s-1}du$. Portanto o integral $\int_{0+}^{1} e^{-t}t^{s-1}dt$ converge para $s > 0$. Quando $s > 0$, a soma (10.65) representa-se por $\Gamma(s)$. A função Γ assim definida chama-se a *função gama*, introduzida por Euler em 1729. Ela possui a interessante propriedade de que $\Gamma(n + 1) = n!$ quando n é um inteiro ≥ 0. (Ver Exercício 19 da secção 10.24, para um esboço de demonstração).

15. Para que valores das constantes a e b existirá o limite e será igual a 1?

$$\lim_{p\to+\infty} \int_{-p}^{p} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x^2 + x + 1}\, dx .$$

16. (a) Provar que

$$\lim_{h\to 0+} \left(\int_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_{h}^{1} \frac{dx}{x} \right) = 0 \qquad \text{e que} \qquad \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} \operatorname{sen} x\, dx = 0 .$$

(b) Dizer se convergem ou divergem os seguintes integrais impróprios

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}\, ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx .$$

17. (a) Provar que o integral $\int_{0+}^{1} (\operatorname{sen} x)/x\, dx$ converge.

(b) Provar que $\lim\limits_{x\to 0+} x \int_{x}^{1} (\cos t)/t^2\, dt = 1$.

(c) Será o integral $\int_{0}^{1} (\cos t)/t^2\, dt$ convergente ou divergente?

18. (a) Se f é monótona decrescente para todo $x \geq 1$ e se $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$, provar que o integral $\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ e a série $\Sigma f(n)$ são ambos convergentes ou ambos divergentes.

[*Sugestão:* Recorde-se a demonstração do critério do integral.]

(b) Dar um exemplo duma função monótona f para a qual a série $\Sigma f(n)$ converge e o integral $\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ diverge.

19. Seja $\Gamma(s) = \int_{0+}^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$, se $s > 0$. (A função gama.) Usar a integração por partes para demonstrar que $\Gamma(s + 1) = s\,\Gamma(s)$. Demonstrar depois, por indução, que $\Gamma(n + 1) = n!$ se n é um inteiro positivo.

Em cada um dos Exercícios 20 a 25 figura uma proposição, não necessariamente correta, relativa à função f definida para todo $x \geq 1$. Em cada um desses exercícios n é um inteiro positivo e I_n representa o integral $\int_{1}^{n} f(x)\, dx$, que se supõe que existe sempre. Para cada proposição dar ou a demonstração ou um contra-exemplo.

20. Se f é monótona decrescente e se $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ existe, então o integral $\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

21. Se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = A$, então $\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ converge e tem valor A.

22. Se a sucessão $\{I_n\}$ converge, então o integral $\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

23. Se f é positiva e se $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = A$, então $\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ converge e tem o valor A.

24. Suponhamos que $f'(x)$ existe para todo $x \geq 1$ e que existe uma constante $M > 0$ tal que

$|f'(x)| \leq M$ para todo $x \geq 1$. Se $\lim_{n\to\infty} I_n = A$, então o integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge e vale A.

25. Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

11
SUCESSÕES E SÉRIES DE FUNÇÕES

11. Convergência pontual de sucessões de funções

No capítulo 10 estudámos sucessões cujos termos eram números reais ou complexos. Agora vamos considerar sucessões $\{f_n\}$ cujos termos são *funções* reais ou complexas, possuindo um domínio comum na reta real ou no plano complexo. Para cada x pertencente ao domínio, podemos formar outra sucessão $\{f_n(x)\}$ de números cujos termos são os correspondentes valores das funções. Designemos por S o conjunto dos pontos x para os quais esta sucessão converge. A função f definida em S pela igualdade.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{se} \quad x \in S\,,$$

chama-se a *função limite* da sucessão $\{f_n\}$ e diz-se que a sucessão $\{f_n\}$ *converge pontualmente* para f no conjunto S.

O estudo de tais sucessões está relacionado,em princípio,com o seguinte tipo de questão: se cada termo duma sucessão $\{f_n\}$ tem uma certa propriedade tal como a continuidade, derivabilidade ou integrabilidade, até que ponto esta propriedade se conserva na função limite? Por exemplo, se cada função f_n é contínua num ponto x, será também a função limite contínua em x? O exemplo seguinte mostra que, em geral, não o é.
limite? Por exemplo, se cada função f_n é contínua num ponto x, será também a função limite contínua em x? O exemplo seguinte mostra que, em geral, não o é.

EXEMPLO 1. *Uma sucessão de funções contínuas com uma função limite descontínua.* Seja $f_n(x) = x^n$ se $0 \le x \le 1$. Os gráficos de alguns termos da sucessão estão representados na fig. 11.1. A sucessão $\{f_n\}$ converge no intervalo fechado $[0, 1]$ e a sua função limite f é dada pela fórmula

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 , \\ 1 & \text{se } x = 1 . \end{cases}$$

Observe-se que a função limite f é descontínua em 1, embora cada termo da sucessão seja contínua no intervalo $[0, 1]$.

EXEMPLO 2. *Uma sucessão para a qual* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Seja $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $0 \le x \le 1$. Neste exemplo a sucessão $\{f_n\}$ converge para uma função limite f a qual é nula em todo o intervalo fechado $[0,1]$. Alguns termos da sucessão estão traçados na fig. 11.2. O integral de f_n estendido ao intervalo $[0,1]$ é dado por

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} .$$

Portanto temos que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, mas $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$. Por outras palavras, o limite dos integrais não é igual ao integral dos limites. Este exemplo mostra que as duas operações

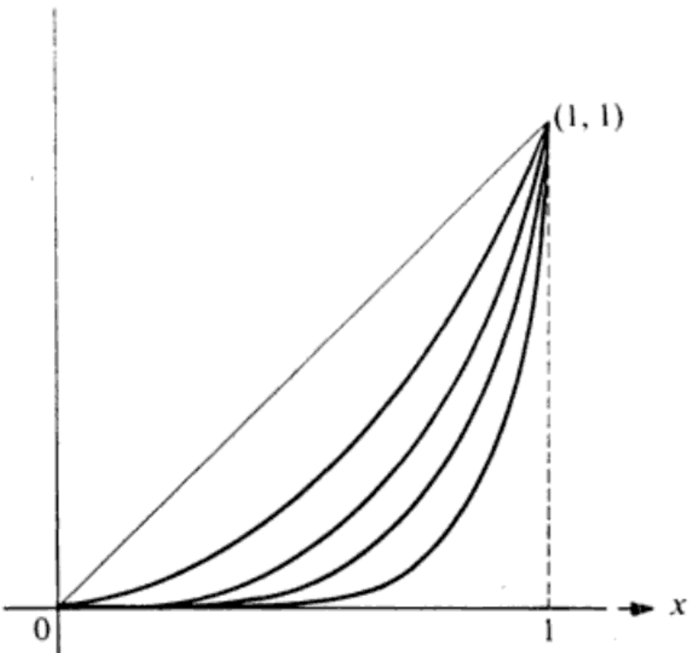


Fig. 11.1. Uma sucessão de funções contínuas com uma função limite descontínua.

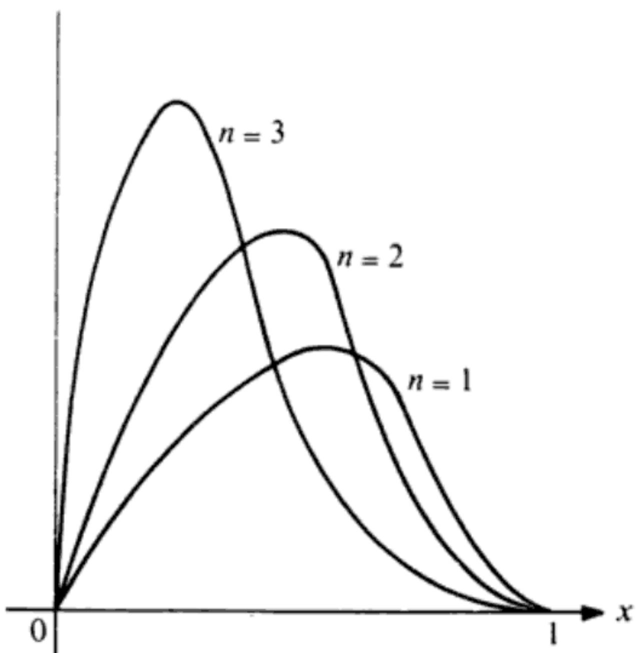


Fig. 11.2. Uma sucessão de funções para a qual $f_n \to 0$ no intervalo $[0, 1]$ mas $\int_0^1 f_n \to \frac{1}{2}$ quando $n \to \infty$.

de "passagem ao limite" e "integração" nem sempre são permutaveis. (Ver também Exercícios 17 e 18 na seção 11.7.)

George G. Stokes (1819-1903), Philip L. v. Seidel (1821-1896) e Karl Weilrstrass foram os primeiros a verificar que são necessárias algumas condições suplementares para justificar a permutabilidade destas operações. Em 1848, Stokes e Seidel (independentemente um do outro e quase simultaneamente) introduziram um conceito actualmente designado por *convergência uniforme* e mostraram que para uma sucessão uniformemente convergente as operações de passagem ao limite a integração podem permutar-se.Weilrstrass mais tarde provou que o conceito é de grande importância em análise superior. Vamos introduzir o conceito na seção seguinte e provar a sua relação com a continuidade e a integração.

11.2. Convergência uniforme duma sucessão de funções

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão que converge pontualmente num conjunto S para uma função limite f. Segundo a definição de limite, isso significa que para cada x em S e para cada $\epsilon > 0$ existe um inteiro N, que depende de x e ϵ, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ sempre que $n \geq N$. Se o mesmo N serve para *todos* os pontos x de S, então a convergência diz-se *uniforme* em S. Quer isto dizer que podemos dar a seguinte

DEFINIÇÃO. *Uma sucessão de funções $\{f_n\}$ diz-se convergir uniformemente para f, num conjunto S, se para cada $\epsilon > 0$ existe um N (dependendo unicamente de ϵ) tal que $n \geq N$ implica*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \textit{para todo } x \textit{ em } S.$$

Simbolicamente escreve-se

$$f_n \to f \quad \textit{uniformemente sobre } S.$$

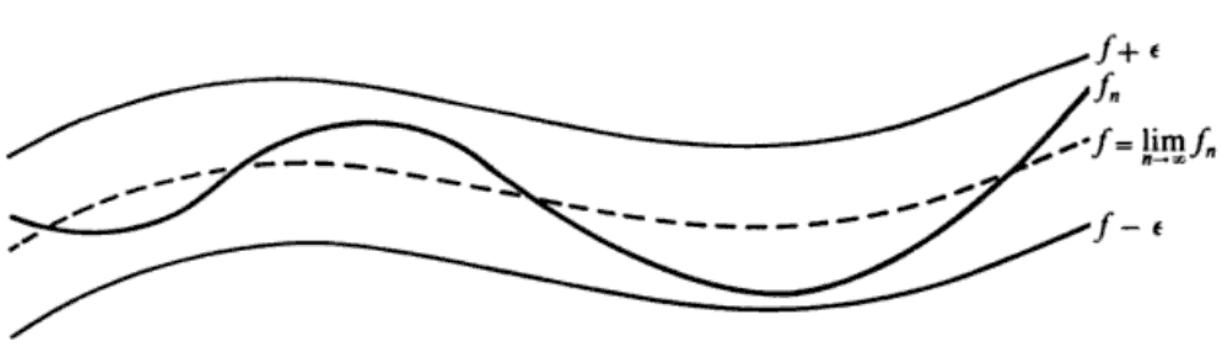


Fig. 11.3 Significado geométrico da convergência uniforme. Se $n \geq N$, todo o gráfico de cada f_n está situado a uma distancia inferior a ϵ do gráfico da função limite f.

Quando as funções f_n são reais, existe uma interpretação geométrica simples da convergência uniforme. A desigualdade $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ é equivalente ao par de desigualdades

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon .$$

Se estas se verificam para todo $n \geq N$ e todo o x em S, então todo o gráfico de f_n relativo a S está situado numa banda de largura 2ϵ simetricamente situada em relação ao gráfico de f, como se indica na fig. 11.3.

11.3. Convergência uniforme e continuidade

Podemos agora demonstrar que a convergência uniforme transmite a continuidade dos termos da sucessão $\{f_n\}$ à função limite f.

TEOREMA 11.1. *Seja $f_n \to f$ uniformemente num intervalo S. Se cada função f_n é contínua num ponto p de S, então a função limite f é também contínua em p.*

Demonstração. Vamos provar que para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $N(p)$ tal que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ sempre que $x \in N(p) \cap S$. Se é dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro N tal que $n \geq N$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo o } x \text{ em } S.$$

Visto que f_n é contínua em p, existe uma vizinhança $N(p)$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo o } x \text{ em } N(p) \cap S.$$

Portanto, para todo o x em $N(p) \cap S$, tem-se

$$\begin{aligned}|f(x) - f(p)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| .\end{aligned}$$

Uma vez que cada termo do segundo membro é $< \frac{\epsilon}{3}$, encontramos que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ como queréamos demonstrar.

O teorema precedente tem uma aplicação importante às séries infinitas de funções. Se os valores das funções $f_n(x)$ são somas parciais de outras funções, por exemplo

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) ,$$

e se $f_n \to f$ pontualmente em S, então tem-se

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad \text{para todo o } t \text{ em } [a, b].$$

Por conseguinte, se $x \in [a, b]$ e se $n \geq N$, temos

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))\, dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dt = \epsilon\,,$$

pelo que $g_n \to g$ uniformemente em $[a, b]$.

Ainda, como corolário, temos o correspondente resultado para séries infinitas.

TEOREMA 11.4. *Se uma série de funções Σu_k converge uniformemente para uma função soma f num intervalo $[a, b]$, com cada u_k uma função contínua em $[a, b]$ e se $x \in [a, b]$ define*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\, dt \qquad e \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,,$$

então $g_n \to g$ uniformemente em $[a, b]$. Por outras palavras, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\, dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\, dt$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, dt\,.$$

Demonstração. Aplicamos o Teorema 11.3 à sucessão de somas parciais $\{f_n\}$ dadas por

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,,$$

e observamos que $\int_a^x f_n(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\, dt$.

Com frequência exprime-se o resultado do Teorema 11.4 dizendo-se que uma série unifor memente convergente pode integrar-se termo a termo.

11.5. Uma condição suficiente para a convergência uniforme

Weilrstrass estabeleceu um critério para provar que certas séries são uniformemente convergentes. O critério é aplicável sempre que a série dada possa ser majorada por uma série convergente de valores numericos positivos.

TEOREMA 11.5. O CRITÉRIO M DE WEIRSTRASS. *Dada uma série de funções Σu_n que converge pontualmente para uma função f num conjunto S, se existir uma série convergente de valores numéricos ΣM_n tal que*

$$0 \leq |u_n(x)| \leq M_n \quad \textit{para cada } n \geq 1 \textit{ e cada } x \textit{ em } S$$

então a série Σu_n converge uniformemente em S.

Demonstração. O critério de comparação mostra que a série $\Sigma u_n(x)$ converge absoluta mente para cada x em S. Para cada x em S temos

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k .$$

Visto que a série ΣM_k converge, para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro N tal $n \geq N$ implica

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon .$$

Isto mostra que

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ e todo o x de S. Portanto a série Σu_n converge uniformemente para f em S.

A derivação termo a termo duma série arbitrária de funções é ainda mais delicada que a integração termo a termo. Por exemplo, a série $\Sigma_{n=1}^{\infty}(\text{sen } nx)/n^2$ converge para todo o real x porque é majorada por $\Sigma 1/n^2$. Além disso a convergência é uniforme em todo o eixo real. Porém, a série obtida por derivação termo a termo é $\Sigma(\cos nx)/n$ a qual *diverge* quando $x = 0$. Este exemplo mostra que a derivação termo a termo pode destruir a convergência. muito embora a série original seja uniformemente convergente. Por conseguinte o problema de justificação da possibilidade de permutação das operações de derivação e somação é, em geral, mais complicado do que no caso da integração. Mencionámos este exemplo para que o leitor se aperceba que cálculos usuais com somas finitas nem sempre se podem transportar para séries infinitas, mesmo que as séries consideradas sejam uniformemente convergentes. Dirigimos de novo a nossa atenção para séries especiais de funções, conhecidas por séries de potências, as quais podem tratar-se como se fossem somas finitas.

11.6. Séries de potências. Circulo de convergência

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

diz-se uma série de potências em $z - a$. Os números z, a e os coeficientes a_n são complexos. A cada série de potências está associado um circulo, chamado o *círculo de convergência*, tal que a série converge absolutamente para todo o z interior ao referido circulo e diverge para todo o valor de z exterior a esse circulo. O centro do círculo é a e o seu raio r chama-se o *raio de convergência* (ver fig. 11.4). Em casos limites

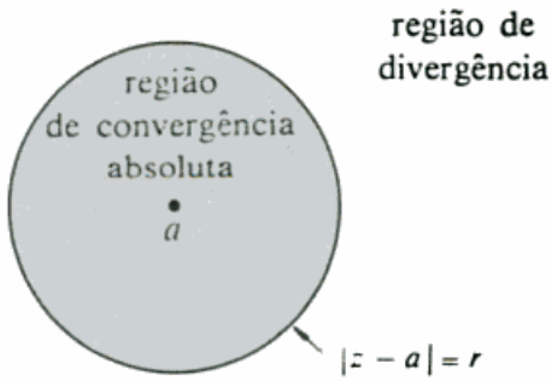


Fig. 11.4. O circulo de convergência duma série de potências.

o circulo pode reduzir-se ao simples ponto a, o que significa ser nulo o raio de convergência ou pode aquele circulo compreender todo o plano complexo, hipótese em que se diz ser o raio de convergência $r = +\infty$. A existência do circulo de convergência será provada no Teorema 11.7.

O comportamento da série nos pontos da fronteira do circulo não pode ser previsto antecipadamente. Com diferentes exemplos se pode concluir que pode não haver convergência em nenhum dos pontos ou então existir em alguns ou em todos os pontos da fronteira.

Para muitas das séries de potências que se apresentam na prática o raio de convergência pode ser determinado quer recorrendo aos critérios do quociente ou da raíz, como se mostra nos exemplos apresentados a seguir.

EXEMPLO 1. Para determinar o raio de convergência da série de potências $\Sigma z^n/n!$, aplicamos o critério do quociente. Se $z \neq 0$, o quociente de dois termos consecutivos tem o valor absoluto

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1}\,.$$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} z^n}{n}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right)^3 z^n.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen} an) z^n, \qquad a > 0.$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sh} an) z^n, \quad a > 0.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}, \qquad a > 0, b > 0.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) z^n, \qquad a > 0, b > 0.$

17. Se $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ para $n = 1, 2, \ldots$ e x real, provar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx .$$

Este exemplo mostra que as operações de integração e passagem ao limite nem sempre podem permutar-se.

18. Seja $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n$, e para cada x real fixo seja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Provar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0) .$$

Este exemplo põe em evidência que as operações de derivação e passagem ao limite nem sempre podem permutar-se.

19. Provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} nx)/n^2$ converge para todo o x real e representar a sua soma por $f(x)$. Provar que f é contínua em $[0, \pi]$ e aplicar o Teorema 11.4 para provar que

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} .$$

20. Sabe-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{if} \quad 0 \leq x \leq 2\pi .$$

Usar esta fórmula e o Teorema 11.4 para provar as igualdades seguintes

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

11.8. Propriedades das funções representadas por séries reais de potências

Nesta seção vamos limitar-nos a *séries reais de potências*, isto é, séries da forma $\Sigma a_n (z-a)^n$ nas quais z, a e os coeficientes a_n são todos números reais. Escrevemos x em vez de z. O círculo de convergência interseta o eixo real segundo um intervalo $(a - r, a + r)$ simétrico em relação ao ponto a; designamos este como sendo o *intervalo de convergência* de série real de potências $\Sigma\, a_n(x - a)^n$. O número r diz-se ainda o raio de convergência (ver fig. 11.5).

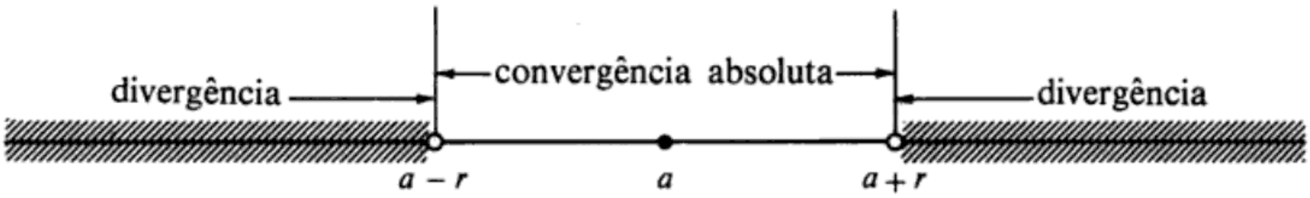


Fig. 11.5. O intervalo de convergência para a série real de potências.

Cada série real de potências define uma função soma cujo valor em cada x do intervalo de convergência é dado por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n .$$

Diz-se que a série *representa a função f* no intervalo de convergência e chama-se o *desenvolvimento de f em série de potências de a*.

Existem dois problemas fundamentais relativos ao desenvolvimento em série de potências que aqui nos interessam:

(1) Dada a série, determinar propriedades da função soma f.

(2) Dada a função f, determinar se pode ou não ser representada por uma série de potências. Acontece que unicamente algumas funções especiais admitem desenvolvimentos em séries de potências. Contudo tal classe de funções inclui a maior parte dos exemplos que se apresentam na prática e por este motivo o seu estudo é da máxima importância. Passemos agora à discussão da questão (1).

O Teorema 11.6 diz-nos que a série de potências converge absolutamente para todo x pertencente ao intervalo aberto $(a - r, a + r)$ e que converge uniformemente em todo o subintervalo fechado $[a - R, a + R]$, com $0 < R < r$. Uma vez que cada termo da série de potências é uma função contínua em todo o eixo real, resulta do Teorema 11.2 que a função soma f é contínua em todo o subintervalo fechado $[a - R, a + R]$ e por tal motivo no intervalo aberto $(a - r, a + r)$. Além disso o Teorema 11.4 diz-nos que podemos integrar a série de potências termo a termo em todo o subintervalo fechado $[a - R, a + R]$. Estas propriedades das funções representadas por séries de potências ficam formalmente reunidas no seguinte teorema.

TEOREMA 11.8. *Se uma função f admite o desenvolvimento em série de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \tag{11.1}$$

num intervalo aberto $(a-r,\ a+r)$, então f é contínua nesse intervalo e o seu integral estendido a qualquer subintervalo fechado pode calcular-se integrando a série termo a termo; em particular para todo o x em $(a-r,\ a+r)$ tem-se

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

O Teorema 11.8 mostra também que o raio de convergência da série integranda é pelo menos igual ao da série original. Provaremos a seguir que ambas as séries têm precisamente o mesmo raio de convergência, demonstrando em primeiro lugar que uma série de potências pode derivar-se termo a termo no interior do respetivo intervalo de convergência.

TEOREMA 11.9. *Se f é representada pela série de potências (11.1) no intervalo de convergência $(a-r,\ a+r)$, então verifica-se que:*

(a) *A série derivada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ tem igualmente raio de convergência r.*

(b) A derivada $f'(x)$ existe para todo o x no intervalo de convergência e é definida por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}.$$

Demonstração. Por comodidade vamos considerar na demonstração $a = 0$. Vamos em primeiro lugar demonstrar que a série derivada converge absolutamente no intervalo $(-r,\ r)$. Seja x um número positivo tal que $0 < x < r$ e seja h um número positivo pequeno tal que $0 < x < x+h < r$. Então as séries para $f(x)$ e $f(x+h)$ são ambas absolutamente convergentes. Assim, podemos escrever

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \tag{11.2}$$

A série do segundo membro é absolutamente convergente visto ser numa combinação linear de séries absolutamente convergentes. Aplicando o teorema da média escrevemos

$$(x+h)^n - x^n = hnc_n^{n-1},$$

onde $x < c_n < x + h$. Logo a série (11.2) é idêntica à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n c_n^{n-1}, \tag{11.3}$$

a qual deve ser absolutamente convergente uma vez que a da igualdade (11.2) o é. A série (11.3) já não é uma série de potências, mas majora a série de potências $\Sigma\, na_n x^{n-1}$, pelo que esta última série deve ser absolutamente convergente para este valor de x. Está pois provado que o raio de convergência da série derivada $\Sigma\, na_n x^{n-1}$ é, pelo menos, igual a r. Por outro lado o raio de convergência da série derivada não pode exceder r porque esta série derivada majora a série inicial $\Sigma\, a_n x^n$. Está pois demonstrada a alínea (a).

Para demonstrar (b), representemos por g a função soma da série derivada,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} .$$

Aplicando o Teorema 11.8 a g, podemos integrar termo a termo no intervalo de convergência, obtendo

$$\int_0^x g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0 .$$

Por g ser contínua, o primeiro teorema fundamental do cálculo diz-nos que $f'(x)$ existe e é igual a $g(x)$ para cada valor de x no intervalo de convergência; está assim demonstrada a alínea (b).

Nota: Uma vez que cada série de potências $\Sigma\, a_n (x-a)^n$ pode ser obtida por derivação da correspondente série integrada, $\Sigma\, a_n (x-a)^{n+1}/(n+1)$, o Teorema 11.9 diz-nos que ambas as séries terão o mesmo raio de convergência.

Os Teoremas 11.8 e 11.9 justificam os cálculos da seção 10.8, onde obtivemos vários desenvolvimentos em série de potências utilizando a derivação e a integração, termo a termo, da série geométrica. Em particular estes teoremas estabelecem a validade dos desenvolvimentos

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} ,$$

sempre que x pertence ao intervalo aberto $-1 < x < 1$.

Como mais uma consequência do Teorema 11.9, concluímos que a função soma duma série de potências admite derivadas de *todas* as ordens, as quais se podem obter por derivação sucessiva, termo a termo, da série de potências. Se $f(x) = \Sigma\, a_n (x-a)^n$, derivando esta igualdade k vezes e fazendo em seguida x igual a a encontramos $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$, pelo que o coeficiente a_k é dado pela fórmula igual a $f(x)$? Surpreendentemente embora, a resposta a ambas as questões é, em geral, "não". A série pode ou não convergir para $x \neq a$ e, caso afirmativo, a sua soma pode ou não ser igual a $f(x)$. Um exemplo no qual a série converge para uma soma diferente de $f(x)$ é dado no Exercício 24 da secção 11.13.

Uma condição necessária e suficiente para que a responta a ambas as perguntas seja afirmativa pode conseguir-se mediante a fórmula de Taylor com resto, a qual permite obter um desenvolvimento *finito* da forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x). \tag{11.6}$$

A soma finita é o polinómio de Taylor de grau n gerado por f em a e $E_n(x)$ é o erro cometido na aproximação de f pelo seu polinómio de Taylor. Se fizermos $n \to \infty$ em (11.6), vemos que a série de potências (11.5) convergirá para $f(x)$ se e só se o resto tender para zero. Apresentaremos a seguir uma *condição suficiente* para que o resto tenda para 0.

11.10. Uma condição suficiente de convergência da série de Taylor

No Teorema 7.6 provámos que o erro na fórmula de Taylor pode ser expresso por intermédio de um integral

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \ , \tag{11.7}$$

em qualquer intervalo em torno do ponto a no qual $f^{(n+1)}$ seja contínua. Portanto, se f é infinitamente derivável, temos sempre essa representação do erro pelo que a série de Taylor converge para $f(x)$ se e só se este integral tende para 0 quando $n \to \infty$.

O integral pode escrever-se dum modo ligeiramente diferente e mais convenientemente recorrendo a uma mudança de variável. Façamos

$$t = x + (a-x)u\,, \qquad dt = -(x-a)\,du\,,$$

e observemos que u varia de 1 a 0 quando t varia de a a x. Desta maneira, o integral (11.7) vem

$$E_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (a-x)u]\, du\,. \tag{11.8}$$

Esta forma do erro permite-nos enunciar a seguinte condição suficiente de convergência da série de Taylor.

TEOREMA 11.11. *Se f é infinitamente derivável num intervalo aberto $I = (a-r, a+r)$ e se existe uma constante positiva A tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11.9}$$

e todo x em I, então a série de Taylor gerada por f em a converge para f(x) para todo o x em I.

Demonstração. Aplicando a desigualdade (11.9) na fórmula integral (11.8) obtemos a estimativa

$$0 \leq |E_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} A^{n+1} \int_0^1 u^n \, du = \frac{|x-a|^{n+1} A^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{B^{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $B = A\,|x - a|$. Mas para cada B, $B^n/n!$ tende para 0 quando $n \to \infty$, pelo que $E_n(x) \to 0$ para todo o x em I.

11.11. Desenvolvimento em série de potências das funções exponencial e trigonométricas

As funções seno e cosseno e todas as suas derivadas são limitadas por 1 em todo o eixo real. Portanto a desigualdade (11.9) é válida com $A = 1$ se $f(x) = \operatorname{sen} x$ ou se $f(x) = \cos x$, e temos os desenvolvimentos em série

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

válidos para todo o x real. Para função exponencial, $f(x) = e^x$, temos $f^{(n)}(x) = e^x$ qualquer que seja x, pelo que em qualquer intervalo finito $(-r, r)$ temos $e^x \leq e^r$. Deste modo (11.9) verifica-se com $A = e^r$. Uma vez que r é arbitrário, isto mostra que o seguinte desenvolvimento em série de potências é válido para todo o x real:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Os precedentes desenvolvimentos em série de potências do seno e do cosseno podem tomar-se como ponto de partida para um estudo completamente analítico das funções trigonométricas. Se usarmos estas séries como *definição* do seno e do cosseno é possível derivar, a partir daqui, todas as propriedades algébricas e analíticas das funções trigonométricas. Por exemplo, as séries dão-nos imediatamente

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

$$D \operatorname{sen} x = \cos x, \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Vamos provar que o erro verifica as desigualdades

$$0 \leq E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r) . \tag{11.11}$$

Isto, por sua vez, prova que $E_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, visto que o quociente $(\frac{x}{r})^{n+1} \to 0$ quando $0 < x < r$.

Para demonstrar (11.11), servimo-nos da forma integral do erro que foi dada em (11.8) com $a = 0$.

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu)\, du .$$

Esta fórmula é válida para todo o x pertencente ao intervalo fechado $[0, r]$. Se $x \neq 0$, seja

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu)\, du .$$

A função $f^{(n+1)}$ é monótona crescente no intervalo $[0, r]$ visto que a sua derivada é não negativa. Portanto temos

$$f^{(n+1)}(x - xu) = f^{(n+1)}[x(1 - u)] \leq f^{(n+1)}[r(1 - u)]$$

se $0 \leq u \leq 1$, o que implica que $F_n(x) \leq F_n(r)$ se $0 < x \leq r$. Por outras palavras, temos $E_n(x)/x^{n+1} \leq E_n(r)/r^{n+1}$ ou

$$E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} E_n(r) . \tag{11.12}$$

Fazendo $x = r$ em (11.10), concluímos que $E_n(r) \leq f(r)$ porque cada termo na soma é não negativo. Considerando (11.12) obtemos (11.11), o qual por sua vez completa a demonstração.

11.13. Exercícios

Para cada uma das séries de potências dos Exercícios 1 a 10 determinar o conjunto de todos os reais x para os quais as séries convergem e calcular a sua soma. Os desenvolvimentos em séries de potências já dados no texto podem utilizar-se sempre que se considere isso convieniente.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n nx^n$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}$.

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$.

Cada uma das funções nos Exercícios 11 a 21 admite um desenvolvimento em série de potências de x. Admitida a existência de tal desenvolvimento, verificar que os coeficientes têm a forma dada e mostrar que as séries convergem para os valores indicados de x. Pode recorrer-se aos desenvolvimentos dados no texto sempre que isso seja considerado conveniente.

11. $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$, $a > 0$ (todo o x). [*Sugestão:* $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$.]

12. $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (todo o x).

13. $\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ (todo o x). [*Sugestão:* $2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$.]

14. $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ ($|x| < 2$).

15. $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ (todo o x).

16. $\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (todo o x).

17. $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| < 1$).

18. $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$ ($|x| < \frac{1}{2}$).

[*Sugestão:* $3x/(1 + x - 2x^2) = 1/(1-x) - 1/(1+2x)$.]

19. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$ ($|x| < 1$).

20. $\dfrac{1}{x^2 + x + 1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \dfrac{2\pi(n+1)}{3} x^n \qquad (|x| < 1).$

[*Sugestão:* $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.]

21. $\dfrac{x}{(1 - x)(1 - x^2)} = \dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \dfrac{1 - (-1)^n}{2}\right) x^n \qquad (|x| < 1).$

22. Determinar o coeficiente a_{98} do desenvolvimento em série de potências sen $(2x + \frac{\pi}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

23. Seja $f(x) = (2 + x^2)^{5/2}$. Determinar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_4$ da série de Taylor gerada por f em 0.

24. Seja $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$, e seja $f(0) = 0$.
(a) Mostrar que f admite derivada de todas as ordens em todo o eixo real.
(b) Mostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Este exemplo mostra que a série de Taylor gerada por f em torno do ponto 0 converge em todo o eixo real, mas que representa f *apenas* na origem.

11.14. Séries de potências e equações diferenciais

As séries de potências permitem-nos, por vezes, obter soluções das equações diferenciais quando outros métodos falham. Uma discussão sistemática do uso da série de potências na teoria das equações diferenciais lineares de segunda ordem será feita no Volume II. Aqui apenas pretendemos ilustrar com um exemplo algumas das ideias e ténicas relacionadas com o assunto.

Consideremos a equação diferencial de segunda ordem

$$(1 - x^2)y'' = -2y. \tag{11.13}$$

Admitamos a existência duma solução, por exemplo $y = f(x)$, a qual pode ser expressa por intermédio duma série de potências em certa vizinhança da origem, seja

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{11.14}$$

A primeira coisa a determinar são os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$.
Uma maneira de proceder é a seguinte: Derivando (11.14) duas vezes obtemos

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)a_n x^{n-2}.$$

Multiplicando por $1 - x^2$, encontramos

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n . \qquad (11.15)
\end{aligned}
$$

Substituindo cada uma das séries (11.14) e (11.15) na equação diferencial, obtemos uma equação contendo duas séries de potências, válida em certa vizinhança da origem. Pelo teorema da unicidade, estas séries de potências devem ser iguais termo a termo. Então igualando os coeficientes de x^n obtemos a relação

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n = -2a_n$$

ou, o que é a mesma coisa,

$$a_{n+2} = \frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)}\, a_n = \frac{n-2}{n+2}\, a_n .$$

Estas relações permitem-nos determinar $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sucessivamente, em função de a_0. Analogamente, podemos calcular $a_3, a_5, a_7, \ldots$ a partir de a_1. Para os coeficientes de índice par encontramos

$$a_2 = -a_0 , \qquad a_4 = 0 \cdot a_2 = 0 , \qquad a_6 = a_8 = a_{10} = \cdots = 0 .$$

Os coeficientes de índices ímpares são

$$a_3 = \frac{1-2}{1+2}\, a_1 = \frac{-1}{3}\, a_1 , \qquad a_5 = \frac{3-2}{3+2}\, a_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{3}\, a_1 ,$$

$$a_7 = \frac{5-2}{5+2}\, a_5 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{3}\, a_1 = \frac{-1}{7 \cdot 5}\, a_1$$

é em geral,

$$a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n+1}\, a_{2n-1} = \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} \cdot \frac{2n-7}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{3}\, a_1 .$$

Simplificando vem

$$a_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}\, a_1 .$$

Portanto, a série para y pode escrever-se como segue:

$$y = a_0(1 - x^2) - a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}.$$

Aplicando o critério do quociente pode verificar-se que esta série é convergente para $|x| < 1$. Pela forma como foi obtida vê-se que a série satisfaz efetivamente à equação diferencial (11.13), podendo a_0 e a_1 ser consideradas como constantes arbitrárias. O leitor constatará que neste exemplo particular o polinómio que multiplica a_0 é ele próprio uma solução de (11.13) e a série que multiplica a_1 é outra solução.

O método acabado de descrever chama-se *método dos coeficientes indeterminados*. Outra maneira de calcular estes coeficientes baseia-se no uso de

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{se} \quad y = f(x).$$

Algumas vezes as derivadas de ordem superior de y, na origem, podem ser calculadas diretamente a partir da equação diferencial. Por exemplo, fazendo $x = 0$ em (11.13), obtemos

$$f''(0) = -2f(0) = -2a_0,$$

donde resulta

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = -a_0.$$

Para calcular as derivadas de ordem mais elevada derivamos a equação diferencial para obtermos

$$(1 - x^2)y''' - 2xy'' = -2y'. \tag{11.16}$$

Fazendo $x = 0$, vemos que $f'''(0) = -2f'(0) = -2a_1$ e daqui $a_3 = f'''(0)/3! = -a_1/3$. Derivando (11.16) obtemos

$$(1 - x^2)y^{(4)} - 4xy''' = 0.$$

Quando $x = 0$, obtemos $f^{(4)}(0) = 0$ e por isso $a_4 = 0$. Repetindo o processo uma vez mais, encontramos

$$(1 - x^2)y^{(5)} - 6xy^{(4)} - 4y''' = 0,$$

$$f^{(5)}(0) = 4f'''(0) = -8a_1, \qquad a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{a_1}{15}.$$

É evidente que o processo pode ser levado tão longe quanto se queira.

Esta propriedade, que é uma consequência imediata da definição (11.18), é válida para todo o real α e todo o inteiro $n \geq 0$. Pode também ser expressa na forma

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}. \tag{11.21}$$

Derivando (11.19) obtemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n,$$

donde se obtém

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right\}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x),$$

em virtude de (11.21). Isto prova que f satisfaz à equação diferencial (11.20) o que, por sua vez, prova (11.17).

11.16. Exercícios

1. A equação diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ tem como solução a função $y = f(x)$ com $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$ e admite um desenvolvimento em série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Aplicar o método dos coeficientes indeterminados para obter uma fórmula relacionando a_{n+2} a a_n. Determinar explicitamente a_n para todo o n e calcular a soma da série.
2. Fazer o mesmo que no Exercício 1 para a equação diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ e as condições iniciais $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$.

Em cada um dos Exercícios 3 a 9 define-se uma funçao f por intermédio duma série de potências. Determinar, em cada caso, o intervalo de convergência e provar que f verifica a equação diferencial indicada, sendo $y = f(x)$. Nos Exercícios 6 a 9 resolver a equação diferencial e obter a soma da série.

3. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$; $\quad \frac{d^4y}{dx^4} = y.$

4. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$; $\quad xy'' + y' - y = 0.$

5. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}$; $\quad y'' = x^a y + b.$ **(Achar a e b.)**

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$; $\quad y' = 2xy.$

7. $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\quad y' = x + y.$

8. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$; $\quad y'' + 4y = 0.$

9. $f(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\quad y'' = 9(y - x).$

10. As funções J_0 e J_1 definidas pelas séries

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}, \qquad J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

são chamadas *funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um* respetivamente. Estas funções aparecem em muitos problemas de matemática pura e aplicada. Mostrar: (a) que ambas as séries convergem para todo o real x; (b) $J_0'(x) = -J_1(x)$; (c) $j_0(x) = j_1'(x)$ com $j_0(x) = x\,J_0(x)$ e $j_1(x) = xJ_1(x)$.

11. A equação diferencial

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

chama-se *equação de Bessel*. Provar que J_0 e J_1 (definidas no Exercício 10) são soluções quando $n = 0$ e $n = 1$, respetivamente.

Em cada um dos Exercícios 12, 13 e 14, supôr que a equação diferencial dada tem uma solução desenvolvivel em série de potências e achar os quatro primeiros termos não nulos.

12. $y' = x^2 + y^2$, com $y = 1$ quando $x = 0$.
13. $y' = 1 + xy^2$, com $y = 0$ quando $x = 0$.
14. $y' = x + y^2$, com $y = 0$ quando $x = 0$.

Nos Exercícios 15, 16, 17 supôr que a equação diferencial dada admite como solução uma série de potências da forma $y = \Sigma\, a_n x^n$, e determinar o coeficiente a_n.

15. $y' = \alpha y$.
16. $y'' = xy$.
17. $y'' + xy' + y = 0$.

18. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde $a_0 = 1$ e os restantes coeficientes são determinados pela identidade

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \{2a_n + (n+1)a_{n+1}\} x^n.$$

Calcular a_1, a_2, a_3 e encontrar a soma da série correspondente a $f(x)$.

19. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com os coeficientes a_n determinados por

12
ÁLGEBRA VECTORIAL

12.1. Introdução histórica

Nos capítulos precedentes apresentámos muitos dos conceitos fundamentais do cálculo, ilustrando-os com aplicações à resolução de problemas relativamente simples de caráter geométrico ou físico. Ulteriores aplicações do cálculo exigem já um conhecimento de geometria analítica mais profundo do que o até agora apresentado e por esta razão vamos dirigir a nossa atenção para um estudo mais pormenorizado de algumas ideias geométricas fundamentais.

Como já se afirmou no início deste livro, o cálculo e a geometria analítica estiveram sempre intimamente relacionados no decorrer do seu desenvolvimento histórico. Cada nova descoberta num dos assuntos conduzia a um progresso no outro. O problema do traçado de tangentes a curvas resolve-se com a descoberta da noção de derivada; o de área conduziu ao estabelecimento do integral; e as derivadas parciais foram introduzidas para estudar superfícies curvas no espaço. Juntamente com estas descobertas obtêm-se desenvolvimentos paralelos na mecânica e na física matemática. Em 1788 Lagrange publicava a sua obra prima, *Mecanique Analytique*, que pôs em evidência a grande flexibilidade e a enorme eficácia alcançada pelo uso de métodos analíticos no estudo da mecânica. Mais tarde, no século XIX, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) estabelecia a sua *Theory of Quaternions*, um novo método e um novo ponto de vista que muito contribuiu para a compreensão tanto da álgebra como da física. Os aspectos mais positivos da análise dos quaterniões e da geometria cartesiana fundiram-se mais tarde, graças em grande parte aos esforços de J. W. Gibbs (1839-1903) e O. Heaviside (1850-1925), para darem lugar a um novo domínio chamado *Álgebra Vectorial*. Rapidamente se aperceberam que os vectores eram os instrumentos ideais para a exposição sintética de muitas ideias importantes na geometria e na física. Será o objetivo deste capítulo o estudo de elementos de álgebra vectorial. As aplicações desta à geometria analítica far-se-ão no capítulo 13. No capítulo 14 faz-se uma combinação de álgebra vectorial com métodos do cálculo e dão-se aplicações quer no domínio da geometria quer da mecânica.

Existem fundamentalmente tres maneiras diferentes para se iniciar o estudo da álgebra vectorial: *geometricamente*, *analiticamente* e *axiomaticamente*. Na via geométrica os vectores são representados por segmentos de reta orientados ou por setas. As operações algébricas com vectores, tais como a adição, subtração e multiplicação por números reais, **são definidas e estudadas por métodos geométricos.**

No método analítico, os vectores e correspondentes operações são completamente descritos em termos de *números,* chamados as *componentes.* As propriedades das operações com vectores são então deduzidas a partir das propriedades correspondentes dos números. A descrição analitica dos vectores resulta naturalmente da descrição geométrica,desde que se introduza um sistema de coordenadas.

Na via axiomática não se faz qualquer tentativa para descrever um vector ou as operações algébricas com vectores. Pelo contrário, vectores e operações vectoriais são considerados como *conceitos não definidos,* relativamente aos quais nada sabemos a não ser que eles satisfazem a um certo conjunto de axiomas. Um tal sistema algébrico, com axiomas apropriados, chama-se um *espaço linear* ou um *espaço vectorial linear*. Em todos os ramos da Matemática se encontram exemplos de espaços lineares e estudaremos alguns deles no capitulo 15. A álgebra dos segmentos de reta orientados e a álgebra dos vectores definidos pelas componentes são apenas dois exemplos de espaços lineares.

O estudo da álgebra vectorial de um ponto de vista axiomático é talvez o mais satisfatório matematicamente,uma vez que proporciona uma descrição dos vectores independentemente do sistema de coordenadas e de qualquer representação geométrica particular. Esse estudo é feito com algum pormenor no cap. 15. Neste capítulo fundamentamos o nosso estudo no método analítico e usamos também os segmentos de reta orientados para interpretarmos geométricamente muitos dos resultados. Sempre que possivel, apresentaremos as demonstrações por métodos independentes das representações dos vectores num dado sistema de coordenadas. Em resumo, este capítulo serve para nos familiarizarmos com exemplos concretos importantes de espaços vectoriais e igualmente para motivar o tratamento mais abstrato que se fará no capitulo 15.

12.2. O espaço vectorial dos N-sistemas de números reais

A ideia de utilizar um número para localizar um ponto sobre uma reta já era conhecida dos antigos gregos. Em 1637 Descartes generalizou esta ideia, utilizando um par de números (a_1, a_2) para localizar um ponto no plano e um terno de números (a_1, a_2, a_3) para localizar um ponto no espaço. Os matemáticos A. Cayley (1821-1895) e H. G. Grassman (1808-1877) provaram que não era forçoso parar nos ternos de números para representar pontos. Podem muito naturalmente considerar-se um quaterno de números (a_1, a_2, a_3, a_4) ou, mais geralmente, um sistema de n números reais

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$. Um tal n-sistema diz-se um *ponto n-dimensional* ou um *vector n-dimensional,* sendo os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ as *coordenadas* ou *componentes* do vector. O conjunto de todos os vectores **n-dimensionais** formam o *espaço vectorial dos n-sistemas,* ou mais simplesmente um **n-espaço.** Representamo-lo por V_n.

O leitor pode, nesta altura, preguntar qual o interesse em considerar espaços de dimensão superior a três. Uma resposta é que muitos problemas que implicam um grande número de equações simultâneas são mais fácilmente analisadas pela introdução de vectores num adequado n-espaço e substituindo todas aquelas equações por uma única equação vectorial. Outra vantagem é que ficamos aptos a tratar, duma vez, muitas propriedades comuns a espaços de uma, duas, três ou mais dimensões, isto é, propriedades independentes da dimensão do espaço. Isto está de acordo com o espírito da matemática moderna que pretende o desenvolvimento de amplos métodos para atacar problemas numa extensa frente.

Infelizmente as representações geométricas, que são um grande auxiliar na justificação de conceitos vectoriais quando $n = 1, 2$ e 3, não são possíveis quando $n > 3$; quer isto dizer que o estudo da álgebra vectorial em espaços com mais do que três dimensões deve fazer-se completamente por métodos analíticos.

Neste capítulo representamos habitualmente os vectores pelas letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$ e as componentes pelas correspondentes letras minúsculas $a, b, c, \ldots$. Assim, escrevemos

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) .$$

Para dotar V_n com uma estrutura algébrica definimos a *igualdade* de vectores e duas operações com vectores chamadas a *adição* e *multiplicação por um escalar*. A palavra "escalar" é aqui usada como sinónimo de "número real".

DEFINIÇÃO. *Dois vectores A e B dizem-se iguais sempre que as correspondentes componentes coincidem, isto é, se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, a igualdade vectorial $A = B$ significa exatamente o mesmo que as n igualdades escalares*

$$a_1 = b_1 , \quad a_2 = b_2 , \quad \ldots , \quad a_n = b_n .$$

A soma $A + B$ define-se como o vector obtido por adição das correspondentes componentes:

$$A + B = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , \ldots , a_n + b_n) .$$

Se c é um escalar, define-se cA como sendo o vector obtido por multiplicação de cada componente de A por c

$$cA = (ca_1 , ca_2 , \ldots , ca_n) .$$

A partir desta definição é fácil verificar as seguintes propriedades destas operações.

TEOREMA 12.1. *A adição vectorial é comutativa*

$$A + B = B + A ,$$

e associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C .$$

A multiplicação por escalares é associativa

$$c(dA) = (cd)A$$

e satisfaz às duas propriedades distributivas

$$c(A + B) = cA + cB, \qquad e \qquad (c + d)A = cA + dA .$$

A demonstração destas propriedades é uma consequência imediata da definição e deixa-se ao leitor como um exercício simples.

O vector de componentes todas nulas diz-se *o vector nulo*, e representa-se por O. Goza de propriedades de que $A + O = A$ qualquer que seja A, o que significa que O é o elemento neutro para a adição vectorial. O vector $(-1)A$, também representado por $-A$, chama-se o *simétrico* de A. Escrevemos também $A - B$ em vez de $A + (-B)$ e chamamos-lhe a *diferença* de A e B . A igualdade $(A + B) - B = A$ mostra que a subtracção é a inversa da adição. Observe-se que $OA = O$ e $1A = A$.

O leitor já terá notado a semelhança entre vectores no 2-espaço e os números complexos. Ambos são definidos por pares ordenados de números reais e ambos se adicionam exatamente do mesmo modo. Assim, pelo que respeita à adição, os números complexos e os vectores bidimensionais são algebricamente indistinguíveis. Só se diferenciam quando introduzimos a multiplicação.

A multiplicação de números complexos dá ao sistema destes números o conjunto de propriedades relativas aos axiomas de corpo possuídas pelos números reais. Pode demonstrar-se (embora a demonstração seja difícil) que excepto para $n = 1$ e 2, não é possível definir a multiplicação em V_n de maneira que satisfaça a todas as propriedades dos axiomas de corpo. Não obstante podem definir-se produtos especiais em V_n que não satisfaçam a todas as propriedades dos axiomas de corpo. Por exemplo na seção 12.5 vamos considerar o *produto escalar* de dois vectores de V_n. O resultado desta operação é um escalar e não um vector. Outro produto, chamado *produto vectorial*, é estudado na seção 13.9. Esta multiplicação define-se unicamente no espaço V_3. O resultado é sempre um vector, mas o produto vectorial é não comutativo.

12.3. Interpretação geométrica para n $\leqslant$ 3

Embora as definições dadas atrás estejam completamente divorciadas da geometria, os vectores e as operações vectoriais são susceptíveis duma interpretação geométrica interessante para o caso de espaços de dimensão igual ou menor que três. Vamos efetuar as representações geométricas num espaço bidimensional e deixamos ao leitor a tarefa de as viszualizar num espaço tridimensional ou unidimensional.

Um par de pontos A e B chama-se *vector geométrico* se um dos pontos, seja A, é a *origem* e o outro, B, é a *extremidade*. Representamos este vector por uma seta de A até B, como se mostra na fig. 12.1 e escrevemos $\overrightarrow{AB}$.

Os vectores geométricos são especialmente uteis para representar certas quantidades físicas tais como força, deslocamento, velocidade, e aceleração que possuem uma grandeza uma direção e um sentido. O comprimento do segmento AB é uma medida da grandeza e a ponta da seta indica o sentido sobre a direção definida pelo segmento.

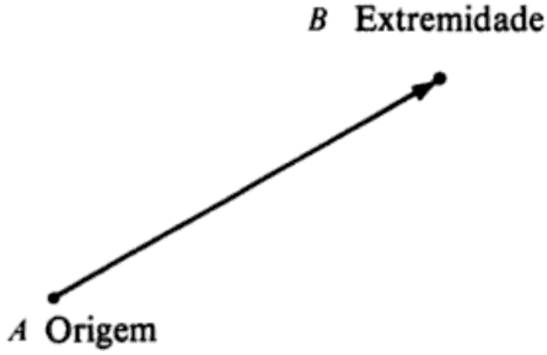


Fig. 12.1. O vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ de A até B.

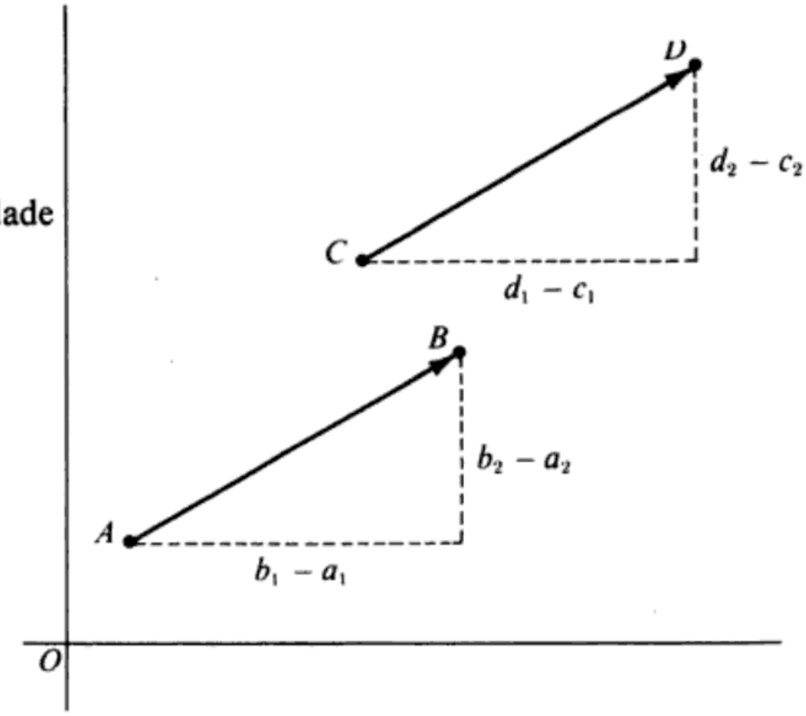


Fig. 12.2. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes porque $B - A = D - C$.

Suponhamos que definimos um sistema de coordenadas com origem em O. A fig. 12.2. mostra dois vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ com $B - A = D - C$. Relativamente às componentes isto significa que

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \qquad \text{e} \qquad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \,.$$

Observando os triângulos iguais da fig. 12.2 verificamos que as setas representando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tem comprimentos iguais, são paralelas e têm o mesmo sentido. Chamamos a tais vectores ***equipolentes***, isto é, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ é equipolente com $\overrightarrow{CD}$ sempre que

$$B - A = D - C \,. \tag{12.1}$$

Repare-se que os quatro pontos A, B, C, D, são vértices de um paralelogramo. (Ver figura 12.3). A igualdade (12.1) pode também escrever-se $A + D = B + C$ que nos diz que *vértices opostos dum paralelogramo têm a mesma soma*. Em particular, se um dos vértices, por exemplo A, é a origem 0, como na fig. 12.4, o vector geométrico de 0 até ao vértice oposto D corresponde ao vector soma $D = B + C$. Exprime-se este fato dizendo que o vector soma corresponde geometricamente à adição de vectores geométricos pela *regra do paralelogramo*. A importância dos vectores na física provém do fato notável de que muitas grandezas físicas (tais como força, velocidade e aceleração) se combinam por meio da regra do paralelogramo.

Por comodidade de notação utilizaremos o mesmo símbolo para representar um ponto de V_n (quando $n \leq 3$) e o vector geométrico definido pela origem O e por esse ponto. Assim escrevemos A em vez de $\overrightarrow{OA}$, B em vez de $\overrightarrow{OB}$, etc. Por vezes escrevemos também A no lugar

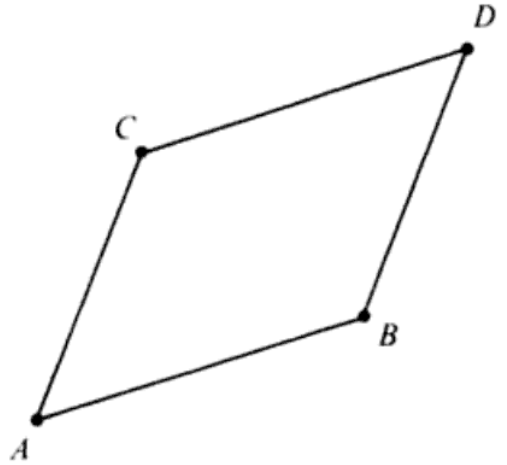


Fig. 12.3. Vértices opostos de um paralelogramo tem a mesma soma $A + D = B + C$.

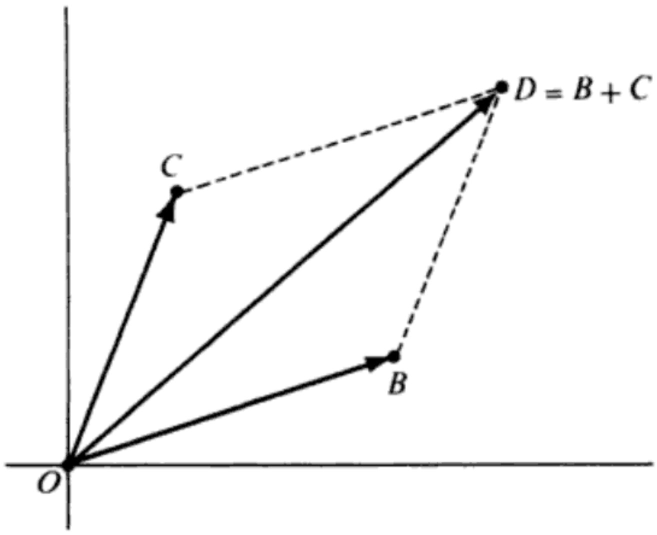


Fig. 12.4. Adição de vectores interpretada geometricamente pela regra do paralelogramo.

de qualquer vector geométrico equipolente a $\overrightarrow{OA}$. Por exemplo a fig. 12.5 representa geometricamente a subtração de vectores. Dois vectores geométricos estão designados por $B - A$, mas estes vectores são equivalentes. Eles têm a mesma grandeza, a mesma direção e o mesmo sentido.

A fig. 12.6 representa geometricamente a multiplicação por escalares. Se $B = cA$, o vector geométrico B tem grandeza igual a $|c|$ vezes a grandeza de A; tem a mesma direção que A e o mesmo sentido se c é positivo e o sentido contrário se c é negativo.

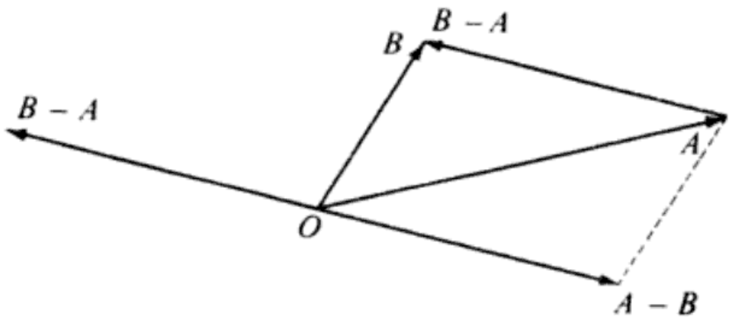


Fig. 12.5. Representação geométrica da subtração de vectores.

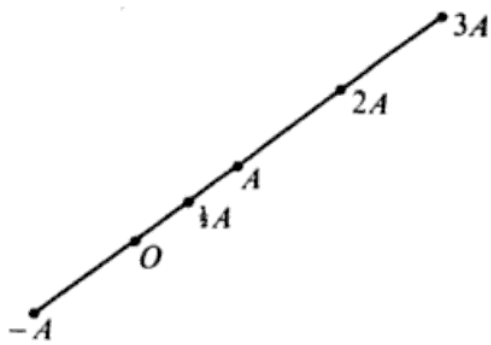


Fig. 12.6. Multiplicação de vectores por escalares.

A interpretação geométrica de vectores em V_n para $n \leq 3$ sugere uma maneira de definir paralelismo num espaço de dimensão n qualquer.

DEFINIÇÃO. *Dois vectores A e B de V_n dizem-se paralelos se $B = cA$ para algum c não nulo. Tem o mesmo sentido se $B = cA$ para algum escalar positivo c e o sentido contrário se $B = cA$ para algum escalar negativo c.*

enquanto que o segundo membro é

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\|\ \|B\| + \|B\|^2 .$$

Comparando estas duas fórmulas vemos que (12.5) verifica-se se e somente se

$$A \cdot B \leq \|A\|\ \|B\| . \tag{12.6}$$

Mas $A \cdot A \leq |A \cdot B|$ pelo que (12.6) resulta da desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma (12.4). Podemos assim afirmar que a desigualdade triangular é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A posição inversa é também verdadeira, isto é, se a desigualdade triangular se verifica, também se verifica (12.6) para A e para $-A$, donde se obtém (12.3). Se a igualdade se verifica em (12.5), então $A \cdot B = \|A\|\|B\|$, pelo que $B = cA$ para algum escalar c. Por conseguinte $A \cdot B = c\|A\|^2$ e $\|A\|\|B\| = |c|\|A\|^2$. Se $A \neq 0$ isto implica que $c = |c| \geq 0$. Se $B \neq 0$ então $B = cA$ com $c > 0$.

A desigualdade triangular está representada geometricamente na fig. 12.9 e nessa representação geométrica estabelece que o comprimento de um lado de um triângulo não pode exceder a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

12.7. Ortogonalidade de vectores

No decorrer da demonstração da desigualdade triangular (Teorema 12.5) obtivemos a fórmula

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B \tag{12.7}$$

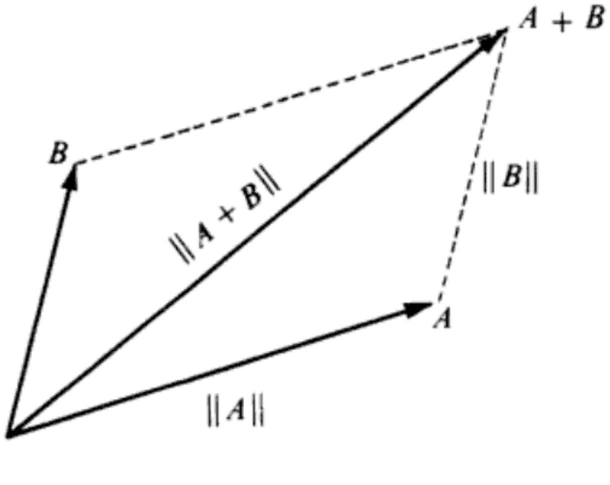


Fig. 12.9. Significado geométrico da desigualdade triangular $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

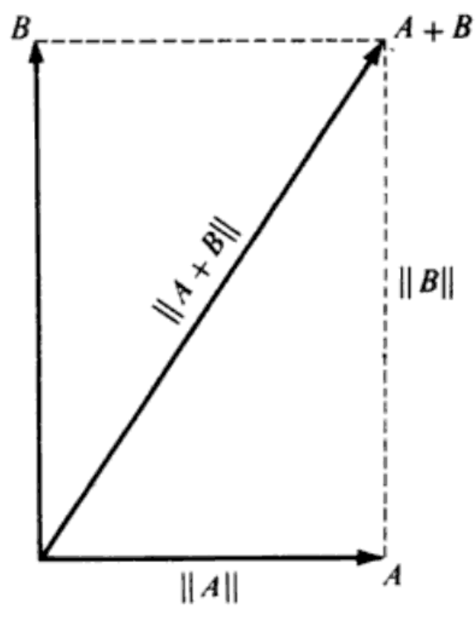


Fig. 12.10. Dois vectores perpendiculares satisfazem à identidade de Pitágoras $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$.

que é válida para dois quaisquer vectores A e B de V_n. A fig. 12.10 representa dois vectores geométricos perpendiculares no plano. Eles definem um triângulo rectângulo de lados $\|A\|$ e $\|B\|$ e cuja hipotenusa mede $\|A + B\|$. O teorema de Pitágoras estabelece que

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 .$$

Comparando este resultado com (12.7) vemos que $A \cdot B = 0$. Por outras palavras, o produto escalar de dois vectores perpendiculares ou ortogonais no plano é zero. Esta propriedade proporciona uma definição de ortogonalidade de vectores de V_n.

DEFINIÇÃO. *Dois vectores A e B de V_n dizem-se ortogonais se* $A \cdot B = 0$.

A igualdade (12.7) mostra que dois vectores A e B de V_n são ortogonais se e somente se $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$. Esta é a chamada identidade de Pitágoras em V_n.

12.8. Exercícios

1. Sejam $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (-1, 2, -3, 0)$ e $C = (0, 1, 0, 1)$ três vectores de V_4. Calcular cada um dos seguintes produtos escalares:
(a) $A \cdot B$; (b) $B \cdot C$; (c) $A \cdot C$; (d) $A \cdot (B + C)$; (e) $(A - B) \cdot C$.
2. São dados três vectores $A = (2, 4, -7)$, $B = (2, 6, 3)$ e $C = (3, 4, -5)$. Em cada uma das expressões seguintes existe uma e uma só maneira de inserir os parêntesis de modo a obter expressões providas de significado. Inserir os parêntesis e efetuar as operações indicadas.
(a) $A \cdot BC$; (b) $A \cdot B + C$; (c) $A + B \cdot C$; (d) $AB \cdot C$; (e) $A/B \cdot C$.
3. Dizer se é ou não correcta a seguinte proposição relativa a vectores de V_n: Se $A \cdot B = A \cdot C$ e $A \neq O$ então $B = C$.
4. Dizer se é ou não correta a seguinte proposição relativa a vectores de V_n: Se $A \cdot B = 0$ para cada B, então $A = O$.
5. Se $A = (2, 1, -1)$ e $B = (1, -1, 2)$ determinar um vector não nulo C de V_3 tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$.
6. Se $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$, determinar escalares x e y tais que $C = xA + yB$ é um vector não nulo com $C \cdot B = 0$.
7. Se $A = (2, -1, 2)$ e $B = (1, 2, -2)$, determinar dois vectores C e D de V_3 verificando as seguintes condições: $A = C + D$, $B \cdot D = 0$, C paralelo a B.
8. Se $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$, determinar dois vectores C e D de V_5 verificando todas as condições seguintes: $B = C + 2D$, $D \cdot A = 0$, C paralelo a A.
9. Sejam $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, -2, 3)$ e $C = (1, -1, 1)$ três vectores de V_3. Calcular a norma de cada um dos seguintes vectores.
(a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $A + B - C$; (d) $A - B + C$.

10. Em cada alínea determinar um vector B de V_2 tal que $B \cdot A = 0$ e $\|B\| = |=A\|$ se: (a) $A = (1, 1)$; (b) $A = (1, -1)$; (c) $A = (2, -3)$; (d) $A = (a, b)$.
11. Sejam $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$ dois vectores de V_3. Em cada alínea determinar um vector C de comprimento 1 paralelo a:
(a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $A + 2B$; (d) $A - 2B$; (e) $2A - B$.
12. Sejam $A = (4, 1, -3)$; $B = (1, 2, 2)$; $C = (1, 2, -2)$, $D = (2, 1, 2)$ e $E = (2, -2, -1)$ vectores de V_3. Determinar todos os pares de vectores ortogonais.
13. Determinar todos os vectores de V_2 que são ortogonais a A e têm o mesmo comprimento que A se:
(a) $A = (1, 2)$; (b) $A = (1, -2)$; (c) $A = (2, -1)$; (d) $A = (-2, 1)$.
14. Se $A = (2, -1, 1)$ e $B = (3, -4, -4)$ determinar um ponto C no 3-espaço tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo.
15. Se $A = (1, -1, 2)$ e $B = (2, 1, -1)$ determinar um vector não nulo C em V_3 ortogonal a A e B.
16. Sejam $A = (1, 2)$ e $B(3, 4)$ dois vectores de V_2. Determinar vectores P e Q em V_2 tais que $A = P + Q$, P é paralelo a B e Q ortogonal a B.
17. Resolver o Exercício 16 se os vectores estão em V_4, com $A = (1, 2, 3, 4)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.
18. São dados os vectores $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (1, 1, -2)$ de V_3. Encontrar cada vector D da forma $xB + yC$, o qual é ortogonal a A e tem comprimento 1.
19. Provar que para dois vectores A e B de V_n se tem a identidade

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B,$$

e por isso $A \cdot B = 0$ se o só se $\|A + B\| = \|A - B\|$. Quando isto é interpretado geometricamente em V_2, significa que as diagonais de um paralelogramo têm comprimento igual se e somente se o paralelogramo for un retângulo.
20. Provar que para quaisquer dois vectores A e B de V_n se tem

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\ \|A\|^2 + 2\ \|B\|^2 .$$

Que teorema relativo às diagonais e lados de um paralelogramo se pode deduzir desta identidade?
21. O teorema de geometria enunciado a seguir sugere uma identidade vectorial relativa a três vectores A, B e C. Dizer qual é a identidade e provar que se verifica para vectores de V_n. Tal identidade proporciona uma demonstração do teorema por métodos vectoriais.
"A soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero qualquer excede a soma dos quadrados das diagonais em quatro vezes o quadrado do comprimento do segmento de reta que une os pontos médios das diagonais".
22. Um vector A de V_n tem comprimento 6. Um vector B de V_n tem a propriedade de que, para todo o par de escalares x e y, os vectores $xA + yB$ e $4yA - 9xB$ são ortogonais. Calcular os comprimentos de B e de $2A + 3B$.
23. Dados os vectores $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$ de V_5 achar os vectores

C e D que satisfaçam às três condições seguintes: C é paralelo a A, D é ortogonal a A, e $B = C + D$.

24. Dados em V_n dois vectores A e B não nulos e não paralelos, demonstrar que existem vectores C e D em V_n que satisfazem as três condições do Exercício 23 e exprimir C e D em função de A e B.
25. Dizer se é ou não correta cada uma das seguintes proposições referentes a vectores de V_n:
    (a) Se A é ortogonal a B, então $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo o real x.
    (b) Se $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo o x real, então A é ortogonal a B.

12.9. Projeções. Ângulo de dois vectores num espaço *n* dimensional

O produto escalar de dois vectores em V_2 admite uma interpretação geométrica importante. A fig. 12.11 (a) representa dois vectores geométricos não nulos A e B fazendo entre si um ângulo θ. Neste exemplo temos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. A figura 12.11 (b) mostra o mesmo vector A e dois vectores perpendiculares cuja soma é A. Um deles, tB, é o produto de B por um escalar; chamamos-lhe *a projeção de A sobre B*. Neste exemplo t é positivo porque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

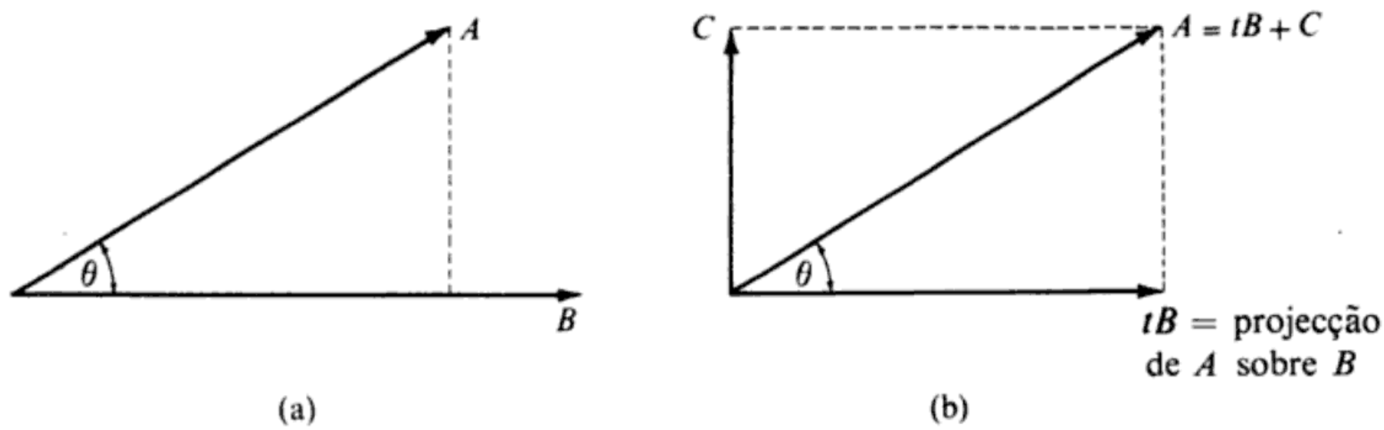


Fig. 12.11. O vector tB é a projeção de A sobre B.

Podemos utilizar o produto escalar para exprimir t em termos de A e B. Em primeiro lugar escrevemos $tB + C = A$ e multiplicamos escalarmente ambos os membros por B obtendo

$$tB \cdot B + C \cdot B = A \cdot B.$$

Mas $C \cdot B = 0$, porque C é perpendicular a B. Portanto $tB \cdot B = A \cdot B$ pelo que se tem

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}. \tag{12.8}$$

Por outro lado o escalar t origina uma relação simples com o ângulo θ. Da fig. 12.11(b) vemos que

Algumas vezes escreve-se sobre as letras uma seta, por exemplo $\vec{i}, \vec{j}$. O significado geométrico do Teorema 12.6 está representado na fig. 12.12 para $n = 3$.

Quando os vectores são expressos como combinações lineares dos vectores coordenados unitários, os cálculos algébricos relativos a vectores podem ser efetuados com as somas $\Sigma\, x_k E_k$ de acordo com as regras usuais da Álgebra. As várias componentes podem ser reconhecidas nas várias fases do Cálculo, considerando os coeficientes dos vectores unitários coordenados. Por exemplo para somarmos dois vectores, sejam $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, escrevemos

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\,, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} b_k E_k\,,$$

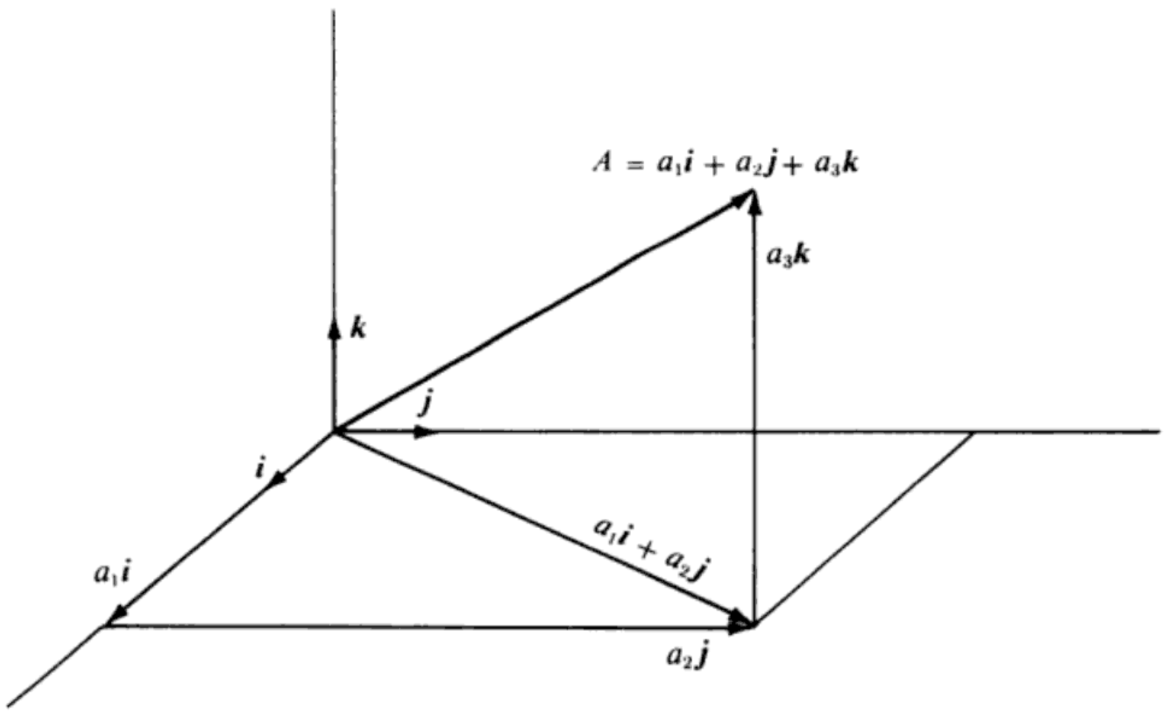


Fig. 12.12. Um vector A de V_3 expresso como uma combinação linear de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

e aplicamos a propriedade da linearidade das somas finitas para obtermos

$$A + B = \sum_{k=1}^{n} a_k E_k + \sum_{k=1}^{n} b_k E_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) E_k\,.$$

O coeficiente de E_k no segundo membro é a componente de ordem k da soma $A + B$.

12.11. Exercícios

1. Determinar a projeção de A sobre B se $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 2, 2)$.
2. Determinar a projeção de A sobre B se $A = (4, 3, 2, 1)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.

15. Suponhamos que em V_2 definimos o produto escalar de dois vectores $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pela fórmula

$$A \cdot B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 .$$

Provar que todas as propriedades do **Teorema** 12.2 são válidas com esta definição do produto escalar. Será a desigualdade de Cauchy-Schwarz ainda válida?

16. Resolver o Exercício 15 se o produto escalar de dois vectores de V_3, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, fôr definido pela fórmula $A \cdot B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_3 + a_3b_1$.

17. Suponhamos que em vez de se definir a norma dum vector $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pela fórmula $(A \cdot A)^{1/2}$, consideramos a seguinte definição

$$\|A\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

(a) Provar que esta definição da norma satisfaz a todas as propriedades dos Teoremas 12.4 e 12.5.

(b) Usar esta definição em V_2 e representar numa figura o conjunto de todos os pontos (x, y) de norma 1.

(c) Quais as propriedades dos **Teorema** 12.4 e 12.5 que permaneceriam válidas se usassemos a definição

$$\|A\| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| ?$$

18. Suponhamos que a norma dum vector $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ era definida pela fórmula

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le n} |a_k| ,$$

onde o símbolo do segundo membro significa o máximo dos n números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$.

(a) Quais as propriedades dos **Teoremas** 12.4 e 12.5 que serão válidas com esta definição?

(b) Utilizar esta definição da norma em V_2 e representar numa figura o conjunto de todos os pontos (x, y) de norma 1.

19. Se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é um vector de V_n, definir duas normas do modo seguinte:

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad \text{e} \qquad \|A\|_2 = \max_{1 \le k \le n} |a_k| .$$

Provar que $\|A\|_2 \le \|A\| \le \|A\|_1$. Interpretar geometricamente esta desigualdade no plano.

20. Se A e B são dois pontos num espaço a n dimensões, a distância de A a B representa-se por $d(A, B)$ e é definida pela igualdade $d(A, B) = \|A - B\|$. Provar que a distância tem as seguintes propriedades:

vem na mesma ordem. Subentende-se igualmente que a implicação (12.10) é válida para uma ordenação previamente fixada, mas arbitrária, dos vectores $A_1, A_2, ..., A_k$.

TEOREMA 12.7. *Um conjunto S gera todo o vector de L(S) duma única maneira se e só se S gerar o vector nulo duma única maneira.*

Demonstração. Se S gera todo o vector de $L(S)$ duma única maneira, então certamente gera O de modo único. Para provar a inversa supomos que S gera O dum único modo e escolhemos qualquer vector X em $L(S)$. Admitamos que S gerava X de duas maneiras diferentes, por exemplo

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i \qquad \text{e} \qquad X = \sum_{i=1}^{k} d_i A_i \,.$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades, encontramos que $O = \sum_{i=1}^{k} (c_i - d_i)A_i$. Mas porque S gera O duma maneira única, devemos ter $c_i - d_i = 0$ para todo i, pelo que S gera X de modo único.

12.13. Independência linear

O Teorema 12.7 põe em destaque a importância dos conjuntos que geram o vector zero duma única maneira. Tais conjuntos distinguem-se com uma designação especial.

DEFINIÇÃO. *Um conjunto* $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ *que gera o vector nulo duma maneira única diz-se um conjunto linearmente independente de vectores. Caso contrário S diz-se linearmente dependente.*

Por outras palavras, *independência* significa que S gera O unicamente na representação trivial:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O \quad \text{implica todo } c_i = 0.$$

Dependência significa que S gera O de alguma maneira não trivial, isto é, para certa escolha de escalares $c_1, ..., c_k$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O \quad \text{mas nem todos os } c_i \text{ são nulos}$$

Embora a dependência e independência sejam propriedades dos *conjuntos* de vectores, é prática comum aplicar estas designações aos próprios vectores. Por exemplo, os vectores num conjunto linearmente independente designam-se, correntemente, por vectores linearmente independentes. Convencionamos também chamar o conjunto vazio um conjunto linearmente independente.

Os exemplos dados a seguir podem servir para proporcionar uma melhor compreensão da ideia de dependência e independência linear.

EXEMPLO 1. Se um subconjunto T dum conjunto S é linearmente dependente, então S é também linearmente dependente, porque se T gera O não trivialmente com S acontece o mesmo. Isto é logicamente equivamente à afirmação de que todo o subconjunto dum conjunto linearmente independente é linearmente independente.

EXEMPLO 2. Os n vectores coordenados unitários $E_1, E_2, ..., E_n$ de V_n geram O duma única maneira pelo que são linearmente independentes.

EXEMPLO 3. Qualquer conjunto contendo o vector nulo é dependente. Por exemplo se $A_1 = O$ temos a representação não trivial $O = 1\, A_1 + 0\, A_2 + ... + 0\, A_k$.

EXEMPLO 4. O conjunto $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$ de vectores de V_2 é linearmente dependente porque a partir deles temos a seguinte representação não trivial do vector nulo.

$$O = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (-1)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$

Neste exemplo o subconjunto $T = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ é linearmente dependente. O terceiro vector, $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, pertence ao subespaço de T. O teorema seguinte mostra que se juntarmos a $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ qualquer vector pertencente ao subespaço de T, obtemos um conjunto dependente.

TEOREMA 12.8. *Seja $S = \{A_1, ..., A_k\}$ um conjunto linearmente independente de k vectores em V_n e seja $L(S)$ o subespaço linear de S. Então todo o conjunto de $k + 1$ vectores de $L(S)$ é linearmente dependente.*

Demonstração. A demonstração faz-se por indução em k, o número de vectores de S. Suponhamos primeiramente $k = 1$. Então, por hipótese, S é formado por um só vector, seja A_1, com $A_1 \neq O$ uma vez que S é independente. Consideremos em seguida dois quaisquer vectores distintos B_1 e B_2 de $L(S)$. Então cada um deles será um multiplo escalar de A_1, isto é, $B_1 = c_1A_1$ e $B_2 = c_2A_1$, com c_1 e c_2 não ambos nulos. Multiplicando B_1 por c_2 e B_2 por c_1 e subtraindo, encontramos

$$c_2B_1 - c_1B_2 = O\,.$$

Isto é uma representação não trivial de O pelo que B_1 e B_2 são dependentes. Está pois demonstrado o teorema quando $k = 1$.

Suponhamos agora que o teorema é verdadeiro para $k - 1$ e provemos que é também verdadeiro para k. Tomemos qualquer conjunto de $k + 1$ vectores em $L(S)$, por exemplo $T = \{B_1, B_2, ..., B_{k+1}\}$. Desejamos provar que T é linearmente dependente. Visto que cada B_i

está em $L(S)$, podemos escrever

$$B_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} A_j \tag{12.11}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, k+1$. Examinemos todos os escalares a_{i1} que multiplicam A_1 e dividamos a demonstração em duas partes conforme todos os coeficientes sejam 0 ou não.

CASO 1. $a_{i1} = 0$ para todo o $i = 1, 2, \ldots, k+1$. Neste caso a soma em (12.11) não contém A_1 pelo que cada B_i em T está no subespaço linear gerado pelo conjunto $S' = \{A_2, A_3, \ldots, A_k\}$. Mas S' é linearmente independente e é formado por $k-1$ vectores. Pela hipótese da indução, o teorema é verdadeiro para $k-1$, pelo que o conjunto T é dependente. Isto demonstra o teorema no caso 1.

CASO 2. Nem todos os escalares a_{i1} são nulos. Suponhamos que $a_{11} \neq 0$. (Se necessário podemos voltar a numerar os B para que assim seja). Tomando $i = 1$ na equação (12.11) e multiplicando ambos os membros por c_i, onde $c_i = a_{i1}/a_{11}$, obtemos

$$c_i B_1 = a_{i1} A_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} A_j \,.$$

Subtraindo (12.11) à igualdade anterior resulta

$$c_i B_1 - B_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) A_j \,,$$

para $i = 2, \ldots, k+1$. Esta igualdade exprime cada um dos k vectores $c_i B_1 - B_i$ como uma combinação linear de $k-1$ vectores linearmente independentes $A_2, \ldots, A_k$. Pela hipótese de indução, os k vectores $c_i B_1 - B_i$ devem ser dependentes. Por conseguinte, para uma certa escolha dos escalares $t_2, \ldots, t_{k+1}$, não todos nulos, temos

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i B_1 - B_i) = O \,,$$

onde resulta

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i\right) B_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i B_i = O \,.$$

Mas esta é uma combinação linear não trivial de $B_1, \ldots, B_{k+1}$ que representa o vector nulo, pelo que os vectores $B_1, \ldots, B_{k+1}$ devem ser dependentes, estando assim completada a demonstração.

Demonstramos a seguir que o conceito de ortogonalidade está intimamente relacionado com o de independencia linear.

DEFINIÇÃO. *Um conjunto $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ de vectores de V_n diz-se um conjunto ortogonal se $A_i \cdot A_j = 0$ sempre que $i \neq j$. Por outras palavras, dois quaisquer vectores distintos de um conjunto ortogonal são perpendiculares.*

TEOREMA 12.9. *Qualquer conjunto ortogonal $S = \{A_1, ..., A_k\}$ de vectores não nulos em V_n é linearmente independente. Além disso, se S gera um vector X, por exemplo*

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i , \tag{12.12}$$

então os coeficientes escalares $c_1, \ldots, c_k$ são dados pela fórmula

$$c_j = \frac{X \cdot A_j}{A_j \cdot A_j} \quad \textit{para} \ \ j = 1, 2, \ldots, k . \tag{12.13}$$

Demonstração. Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que S é linearmente independente. Suponhamos que $\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O$. Multiplicando escalarmente ambos os membros por A_1 e tendo em conta que $A_1 \cdot A_i = 0$ para $i \neq 1$, encontramos $c_1(A_1 \cdot A_1) = 0$. Mas $(A_1 \cdot A_1) \neq 0$ visto que $A_1 \neq O$, pelo que $c_1 = 0$. Repetindo este raciocínio, com A_1 substituido por A_j, concluímos que cada $c_j = 0$. Por conseguinte S gera o vector nulo duma maneira única, pelo que S é linearmente independente.

Suponhamos agora que S gera X como em (12.12). Efetuando o produto escalar de X por A_j, encontramos que $c_j(A_j \cdot A_j) = X \,.\, A_j$ de onde se obtém (12.13).

Se todos os vectores $A_1, A_2, ..., A_k$ do Teorema 12.9 têm norma 1, a fórmula para os coeficientes simplifica-se vindo apenas

$$c_j = X \cdot A_j .$$

Um conjunto ortogonal de vectores $\{A_1, ..., A_k\}$, cada um dos quais com norma 1, diz-se um conjunto *ortonormado.* O conjunto dos vectores coordenados unitários $E_1, ..., E_n$ é um exemplo dum conjunto ortonormado.

12.14. Bases

É natural estudar o conjunto de vectores que geram todo o vector de V_n duma maneira única. Tais conjuntos de vectores constituem *bases* de V_n.

DEFINIÇÃO. *Um conjunto* $S = \{A_1, ..., A_k\}$ *de vectores de* V_n *diz-se uma base para* V_n *se* S *gera cada vector de* V_n *duma maneira única. Se, em complemento,* S *é ortogonal, então* S *diz-se uma base ortogonal.*

Assim, uma base é um conjunto linearmente independente de vectores o qual gera todo o espaço V_n. O conjunto de vectores coordenados unitários é um exemplo dessas bases. Esta base particular é também uma base ortogonal. Provaremos a seguir que cada base conterá o mesmo número de elementos.

TEOREMA 12.10. *Num dado espaço vectorial* V_n, *as bases gozam das seguintes proprieadades:*

(a) *Toda a base contém exatamente n vectores.*

(b) Qualquer conjunto de vectores linearmente independente é um subconjunto de certa base.

(c) Qualquer conjunto de n vectores linearmente independente é uma base.

Demonstração. O conjunto dos vectores coordenados unitários $E_1, ..., E_n$ formam uma base de V_n. Se provarmos que duas quaisquer bases contêm o mesmo número de vectores demonstramos (a).

Sejam S e T duas bases, em que S tem k vectores e T tem r vectores. Se $r > k$, então T contém pelo menos $k + 1$ vectores em $L(S)$, visto que $L(S) = V_n$. Deste modo, devido ao Teorema12.8, T deve ser linearmente dependente, contradizendo a afirmação de que T é uma base. Isto significa que não pode ser $r > k$, pelo que devemos ter $r \leq k$. Aplicando o mesmo raciocínio com S e T trocados, encontramos que $k \leq r$. Por conseguinte $k = r$ e a alínea (a) está demonstrada.

Para demonstrar (b), seja $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ qualquer conjunto de vectores linearmente independentes em V_n. Se $L(S) = V_n$, então S é uma base. Caso contrário existe algum vector X em V_n o qual não está em $L(S)$. Juntemos este vector a S e consideremos o novo conjunto $S' = \{A_1, ..., A_k, X\}$. Se este conjunto fosse dependente, existiriam escalares $c_1, ..., c_{k+1}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i + c_{k+1} X = O \; .$$

Mas $c_{k+1} \neq 0$, visto que $A_1, ..., A_k$ são independentes, e portanto podemos resolver esta equação relativamente a X e verificar que $X \in L(S)$, em contradição, pois, com a hipótese de que X não pertencia a $L(S)$. Portanto o conjunto S' é linearmente independente, mas contém $k + 1$ vectores. Se $L(S') = V_n$, S' é uma base e visto que S é um subconjunto de S', a alínea (b) está demonstrada. Se S' não é uma base, podemos argumentar com S' como o fizemos com S, obtendo um novo conjunto S'' que contém $k + 2$ vectores e é linearmente independente. Se S'' é uma base, (b) está demonstrada. Caso contrário, repetimos o processo. Devemos chegar a uma base ao fim dum número finito de repetições do processo, de outro modo obteríamos um conjunto independente com $n + 1$ vectores, em contradição com o Teorema 12.8. Portanto a alínea (b) está demonstrada.

Finalmente, utilizando as alíneas (a) e (b) demonstramos (c). Seja S qualquer conjunto linearmente independente formado por n vectores. Pela alínea (b), S é um subconjunto de certa base, por exemplo B. Mas devido a (a) a base B tem precisamente n elementos, pelo que $S = B$.

12.15. Exercícios

1. Sejam $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ os vectores coordenados unitários de V_2. Em cada alínea determinar os escalares x e y tais que $x(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) + y(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ é igual a
(a) $\boldsymbol{i}$; (b) $\boldsymbol{j}$; (c) $3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$; (d) $7\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.
2. Se $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$ e $C = (2, -3)$ são três vectores de V_2, determinar escalares x e y tais que $C = xA + yB$. Quantos pares existem?
3. Se $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (2, -11, 7)$ são três vectores em V_3, determinar os escalares x e y tais que $C = xA + yB$.
4. Provar que o Exercício 3 não tem qualquer solução, se C é substituído pelo vector $(2, 11, 7)$.
5. Sejam A e B dois vectores não nulos de V_n.
(a) Se A e B são paralelos, provar que A e B são linearmente dependentes.
(b) Se A e B não são paralelos, provar que A e B são linearmente independentes.
6. Se (a, b) e (c, d) são dois vectores de V_2, provar que eles são linearmente independentes se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.
7. Determinar todos os reais t para os quais os dois vectores $(1 + t, 1 - t)$ e $(1 - t, 1 + t)$ de V_2 são linearmente independentes.
8. Sejam $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, os vectores unitários coordenados de V_3. Provar que os quatro vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ são linearmente dependentes, mas que quaisquer três dentre eles são linearmente independentes.
9. Sejam $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ vectores coordenados unitários em V_2 e seja $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$.
(a) Provar que S é linearmente independente.
(b) Provar que $\boldsymbol{j}$ está no subespaço linear de S.
(c) Exprimir $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ como numa combinação linear de $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.
(d) Provar que $L(S) = V_2$.
10. Consideremos os três vectores $A = \boldsymbol{i}$, $B = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $C = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ em V_3.
(a) Provar que o conjunto $\{A, B, C\}$ é linearmente independente.
(b) Exprimir cada um dos vectores $\boldsymbol{i}$ ou $\boldsymbol{k}$ como uma combinação linear de A, B e C.
(c) Exprimir $2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ como uma combinação linear de A, B e C.
(d) Provar que $\{A, B, C\}$ é uma base de V_3.
11. Sejam $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$, $C = (2, -3)$ e $D = (1, -2)$ quatro vectores de V_2. Enumerar todos os subconjuntos não vazios de $\{A, B, C, D\}$ que são linearmente independentes.
12. Seja $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$ e $C = (1, 1, 0, 0)$ três vectores de V_4.
(a) Determinar se A, B, C são linearmente dependentes ou independentes.

(b) Obter um vector D não nulo tal que A, B, C, D sejam dependentes.
(c) Obter um vector E tal que A, B, C, E sejam independentes.
(d) Escolhido E da alínea (c), exprimir o vector $X = (1, 2, 3, 4)$ como uma combinação linear de A, B, C, E.

13. (a) Provar que os seguintes três vectores de V_3 são linearmente independentes: $(\sqrt{3}, 1, 0)$, $(1. \sqrt{3}, 1)$, $(0, 1, \sqrt{3})$.
(b) Provar que os três seguintes são dependentes: $(\sqrt{2}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$, $(0, 1, \sqrt{2})$.
(c) Determinar todos os reais t para os quais os três vectores seguintes em V_3 são dependentes: $(t, 1, 0)$, $(1, t, 1)$, $(0, 1, t)$.
14. Considerar os seguintes conjuntos de vectores de V_4. Para cada alínea determinar um subconjunto linearmente independente contendo o maior número de vectores possível.
(a) $\{(1, 0, 1, 0), \quad (1, 1, 1, 1), \quad (0, 1, 0, 1), \quad (2, 0, -1, 0)\}$.
(b) $\{(1, 1, 1, 1), \quad (1, -1, 1, 1), \quad (1, -1, -1, 1), \quad (1, -1, -1, -1)\}$.
(c) $\{(1, 1, 1, 1), \quad (0, 1, 1, 1), \quad (0, 0, 1, 1), \quad (0, 0, 0, 1)\}$.
15. Dado três vectores linearmente independentes A, B, C de V_n. Dizer se são ou não corretas cada uma das proposições seguintes.
(a) $A + B, B + C, A + C$ são linearmente independentes.
(b) $A - B, B + C, A + C$ são linearmente independentes.
16. (a) Provar que o conjunto S de três vectores em V_3 é uma base para V_3 se e só se o seu subespaço linear $L(S)$ contém os três vectores coordenados unitários $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
(b) Estabelecer e demonstrar uma generalização da alínea (a) para V_n.
17. Determinar duas bases para V_3 contendo os dois vectores $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$.
18. Determinar duas bases para V_4 tendo somente os dois vectores $(0, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, 1)$ em comum.
19. Considerar os seguintes conjuntos de vectores em V_3:
$S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1)\}$, $\quad T = \{(2, 1, 0), (2, 0, -2)\}$, $\quad U = \{(1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$.
(a) Provar que $L(T) \subseteq L(S)$.
(b) Determinar todas as relações de inclusão entre os conjuntos $L(S)$, $L(T)$ e $L(U)$.
20. Sejam A e B dois subconjuntos finitos de vectores num espaço vectorial V_n, e sejam $L(A)$ e $L(B)$ os respetivos subespaços lineares. Provar cada uma das seguintes proposições:
(a) If $A \subseteq B$, então $L(A) \subseteq L(B)$.
(b) $L(A \cap B) \subseteq L(A) \cap L(B)$.
(c) Dar um exemplo em que $L(A \cap B) \neq L(A) \cap L(B)$.

12.16. O espaço vectorial $V_n(C)$ dos n-sistemas de números complexos

Na seção 12.2 definiu-se o espaço vectorial V_n como o conjunto de todos os sistemas de n números reais (n-tuplos). Igualdade, adição vectorial, e multiplicação de vectores por escalares foram definidos em função dos componentes do modo seguinte: Se $A = (a_1, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, \ldots, b_n)$, então

$$A = B \quad \text{significa} \quad a_i = b_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A + B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \qquad cA = (ca_1, \ldots, ca_n).$$

Se todos os escalares a_i, b_i e c nestas relações forem substituídos por números *complexos*, o novo sistema algébrico assim obtido diz-se *espaço vectorial complexo* e representa-se por $V_n(\mathbf{C})$. Aqui $\mathbf{C}$ é usado para nos lembrar que os escalares são complexos.

Uma vez que os números complexos satisfazem aos mesmos axiomas de corpo que os números reais, todos os teoremas relativos aos espaços vectoriais V_n que utilizam unicamente os axiomas de corpo dos números reais são também verdadeiros para $V_n(\mathbf{C})$, com tanto que todos os escalares possam ser complexos. Em particular, aqueles teoremas neste capítulo que implicam somente a adição vectorial e a multiplicação por escalares são também verdadeiros para $V_n(\mathbf{C})$.

Esta extensão não se faz unicamente por uma questão de generalização. Os espaços vectoriais complexos aparecem naturalmente na teoria das equações diferenciais lineares e na moderna mecânica quântica, pelo que o seu estudo assume uma considerável importância. Felizmente, muitos dos teoremas relativos ao espaço vectorial real V_n podem transportar-se, sem qualquer modificação, para $V_n(\mathbf{C})$. Contudo algumas modificações têm que ser feitas naqueles teoremas que incluem a noção de produto escalar. Ao provar que o produto escalar $A \cdot A$ dum vector não nulo por si próprio é positivo, apoiamo-nos no fato de que a soma de quadrados de números reais é positiva. Uma vez que o quadrado de números complexos pode ser negativo, temos que modificar a definição de $A \cdot B$ se desejamos conservar a propriedade de positividade. Para $V_n(\mathbf{C})$ usamos a seguinte definição de produto escalar.

DEFINIÇÃO. *Se $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ são dois vectores de $V_n(\mathbf{C})$, define-se o respetivo produto escalar $A \cdot B$ pela fórmula*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k ,$$

onde $\bar{b}_k$ é o complexo conjugado de b_k.

Observe-se que esta definição concorda com a dada anteriormente para V_n porque $\bar{b}_k = b_k$ quando b_k é real. As propriedades fundamentais do produto escalar, correspondentes às do Teorema 12.2, tomam agora a forma

TEOREMA 12.11. *Para todos os vectores A, B, C de $V_n(\mathbf{C})$ e todo o complexo escalar c, tem-se:*

(a) $A \cdot B = \overline{B \cdot A}$,
(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
(c) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (\bar{c}B)$,
(d) $A \cdot A > 0$ *se* $A \neq O$,
(e) $A \cdot A = 0$ *se* $A = O$.

Todas estas propriedades são consequências imediatas da definição e as respetivas demonstrações são deixadas como exercício. O leitor deve ter presente que a conjugação aparece na propriedade (a) quando a ordem dos fatores é invertida. Igualmente aparece

6. (a) Provar que para dois quaisquer vectores A e B de $V_n(C)$, a soma $\overline{A \cdot B} + A \cdot B$ é real.
(b) Se A e B são vectores não nulos em $V_n(C)$, provar que

$$-2 \leq \frac{A \cdot B + \overline{A \cdot B}}{\|A\| \ \|B\|} \leq 2 .$$

7. Define-se o ângulo θ entre dois vectores A e B em $V_n(\mathbf{C})$ pela fórmula

$$\theta = \arccos \frac{\frac{1}{2}(A \cdot B + \overline{A \cdot B})}{\|A\| \ \|B\|} .$$

A desigualdade no Exercício 6 mostra que existe sempre um único ângulo θ no intervalo fechado $0 \leq \theta \leq \pi$ verificando aquela igualdade. Demonstrar que

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\,\|A\| \ \|B\| \cos \theta .$$

8. Usar a definição do Exercício 7 para calcular o ângulo dos seguintes pares de vectores de $V_5(\mathbf{C})$: $A = (1, 0, i, i, i)$, e $B = (i, i, i, 0, i)$.
9. (a) Provar que os três vectores seguintes formam uma base para $V_3(\mathbf{C})$: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, i, 0)$, $C = (1, 1, i)$.
(b) Exprimir o vector $(5, -2, -i, 2i)$ como uma combinação linear de A, B, C.
10. Provar que a base dos vectores unitários coordenados $E_1, E_2, ..., E_n$ em V_n é também uma base de $V_n(\mathbf{C})$.

13
APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA VECTORIAL À GEOMETRIA ANALÍTICA

13.1. Introdução

Neste capitulo trataremos das aplicações da álgebra vectorial ao estudo das retas, planos e seções cónicas. No capitulo 14 a álgebra vectorial combina-se com os métodos do cálculo e apresentam-se outras aplicações ao estudo das curvas e a certos problemas de mecânica.

O estudo da geometria como um sistema dedutivo, como foi concebido por Euclides cerca de 300 anos a. C., começa com um conjunto de axiomas ou postulados que definem as propriedades dos pontos e das retas. Os conceitos de "ponto" e "reta" tomam-se como noções primitivas e permanecem indefinidos. Outros conceitos são apresentados em termos de pontos e retas, deduzindo-se sistematicamente os teoremas a partir dos axiomas. Euclides estabeleceu dez axiomas a partir dos quais deduziu todos os seus teoremas. Demonstrou-se, porém, posteriormente que estes axiomas não são adequados para a teoria. Por exemplo, na demonstração do seu primeiro teorema Euclides faz uma hipótese tácita relativa à intersecção de duas circunferências que não está coberta pelos respetivos axiomas. Desde então foram formuladas outras séries de axiomas dos quais resultam todos os teoremas de Euclides. A mais famosa foi a série de axiomas estabelecida pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) no seu agora clássico *Grundlagen der Geometrie,* publicado em 1899. (Existe uma tradução inglesa: *The Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Co., (1947). Esta obra, da qual se fizeram sete edições alemãs ainda em vida de Hilbert, diz-se que inaugurou a matemática abstrata do século vinte.

Hilbert parte, para o seu tratamento da geometria plana, com cinco conceitos não definidos: *ponto, reta, sôbre* (uma relação válida entre um ponto e uma reta), *entre* (uma relação entre um ponto e um par de pontos) e *congruência* (uma relação entre pares de pontos). Hilbert apresenta então quinze axiomas, a partir dos quais desenvolve toda a geometria plana euclidiana. A sua análise de geometria no espaço baseia-se em vinte e um axiomas, contendo seis conceitos não definidos.

A introdução da geometria analitica é feita de modo algo diferente. Definimos conceitos tais como ponto, recta, em (sobre), entre, etc., mas fazêmo-lo em termos de números reais, os quais não se definem. A estrutura matemática resultante chama-se um *modelo analítico* da geometria euclidiana. Neste modelo utilizam-se propriedades dos números reais para deduzir os axiomas de Hilbert. Não tentaremos comentar todos os axiomas de Hilbert. Pelo contrário, indicaremos simplesmente como podem os conceitos primitivos ser definidos por meio dos números reais e daremos algumas demonstrações para ilustrar os métodos da geometria analítica.

13.2. Retas num espaço n-dimensional

Aplicamos em seguida os números reais à definição dos conceitos de *ponto, reta,* e *sobre (em)*. As definições são formuladas de modo que se adaptem às nossas ideias intuitivas, relativas à geometria euclidiana tridimensional, mas são ainda providas de significado num espaço n dimensional com $n \geq 1$.

Um ponto é simplesmente um vector em V_n, isto é, um sistema ordenado de n-tuplos de números reais; usaremos indiferentemente as palavras "ponto" e "vector". O espaço vectorial V_n diz-se um modelo analítico do *espaço euclidiano n-dimensional.* Para definir a "reta" servimo-nos das operações algébricas de adição e de multiplicação por escalares em V_n.

DEFINIÇÃO. *Seja P um dado ponto e A um vector dado não nulo. O conjunto de todos os pontos da forma $P + tA$, onde t toma todos os valores reais, diz-se uma reta passando por P e paralela a A. Designamos esta reta por $L(P; A)$ e escrevemos*

$$L(P; A) = \{P + tA \mid t \text{ real}\} \text{ ou, mais brevemente } L(P; A) = \{P + tA\}.$$

Um ponto Q diz-se estar sobre a reta $L(P; A)$ se $Q \in L(P; A)$.

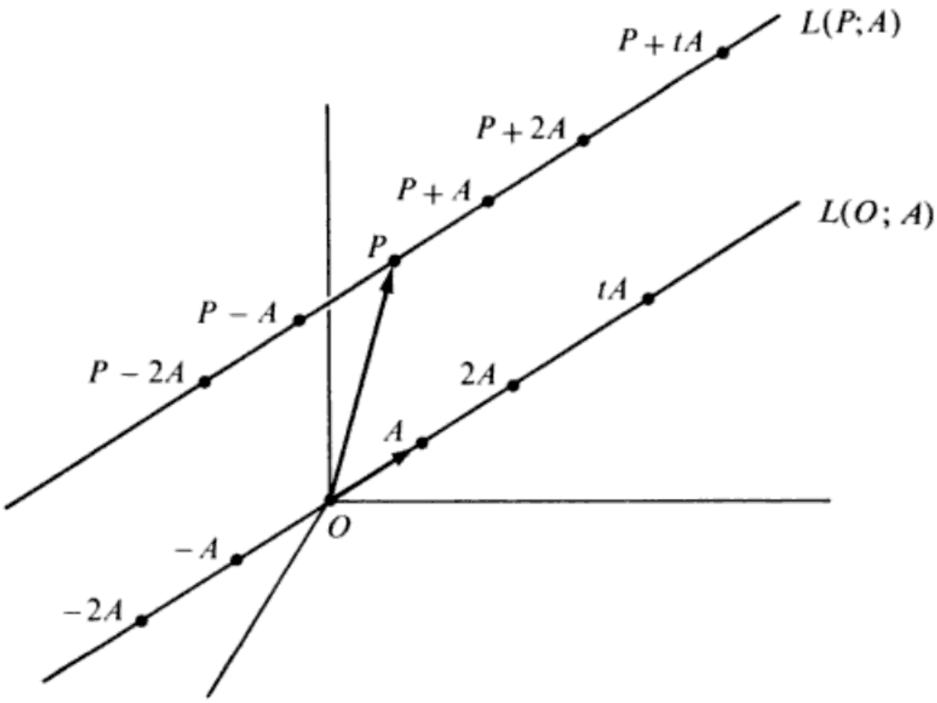


Fig. 13.1. A reta $L(P; A)$ passando por P paralela a A e a sua relação geométrica com a reta $L(O; A)$ passando por O paralela a A.

Na notação $L(P; A)$, o ponto P que se escreve em primeiro lugar está sobre a reta, visto que corresponde a $t = 0$. O segundo ponto, A, chama-se o *vector direccional* da reta. A reta $L(O; A)$ que passa pela origem é o *subespaço* de A, formado por todos os produtos de A por escalares. A reta passando por P paralela a A obtém-se somando P a cada vector do *subespaço* de A.

A fig. 13.1 mostra a interpretação geométrica desta definição em V_3. Cada ponto $P + tA$ pode representar-se pela extremidade dum vector geométrico traçado a partir da origem. Quando t varia tomando todos os valores reais, o ponto correspondente $P + tA$ descreve uma reta que passa por P e é paralela ao vector $A \cdot A$ fig. 13.1 mostra os pontos correspondentes a alguns valores de t em ambas as retas $L(P; A)$ e $L(O; A)$.

13.3. Algumas propriedades simples da reta

Vamos demonstrar em primeiro lugar que o vector direccional A que intervém na definição de $L(P; A)$ pode ser substituído por qualquer vector paralelo a A. (Lembramos que dois vectores A e B dizem-se paralelos se $A = cB$ para um certo escalar c não nulo).

TEOREMA 13.1. *Duas retas $L(P; A)$ e $L(P; B)$ passando pelo mesmo ponto P coincidem se, e só se, os vectores direcionais A e B são paralelos.*

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que $L(P; A) = L(P; B)$. Tomemos um ponto em $L(P; A)$ distinto de P, por exemplo $P + A$. Este ponto está também em $L(P; B)$, pelo que $P + A = P + cB$ para algum escalar c. Daqui resulta que $A = cB$ com $c \neq 0$, visto que $A \neq O$. Portanto A e B são paralelos.

Demonstremos agora o inverso. Suponhamos A e B paralelos, quer dizer $A = cB$ para algum $c \neq 0$. Se Q está em $L(P; A)$, então tem-se $Q = P + tA = P + t(cB) = P + (ct)B$, pelo que Q está em $L(P; B)$. Deste modo $L(P; A) \subseteq L(P; B)$. De modo análogo, $L(P; B) \subseteq L(P; A)$, pelo que $L(P; A) = L(P; B)$.

Vamos agora provar que o ponto P que intervém na definição de $L(P; A)$ pode ser substituído por qualquer outro Q sobre a mesma reta.

TEOREMA 13.2. *Duas retas $L(P; A)$ e $L(Q; A)$ com o mesmo vector direcional A coincidem se, e só se, Q está em $L(P; A)$.*

Demonstração. Suponhamos $L(P; A) = L(Q; A)$. Visto que Q está em $L(Q; A)$, Q está também em $L(P; A)$. Para demonstrar o inverso supomos que Q está em $L(P; A)$, por exemplo $Q = P + cA$. Desejamos provar que $L(P; A) = L(Q; A)$. Se $X \in L(P; A)$, então $X = P + tA$ para algum t. Mas $P = Q - cA$, pelo que $X = Q - cA + tA = Q + (t - c)A$ e em consequência X está também em $L(Q; A)$. Portanto $L(P; A) \subseteq L(Q; A)$. De modo análogo encontramos $L(Q; A) \subseteq L(P; A)$, pelo que ambas as retas são iguais.

Um dos famosos postulados de Euclides é o *postulado das paralelas*, o qual é logicamente equivalente à proposição de que "por um ponto dado passa uma e uma só reta paralela a outra reta dada". Deduziremos esta propriedade com uma consequência simples do Teorema 13.1. Assim, em primeiro lugar, necessitamos definir paralelismo de retas.

DEFINIÇÃO. *As retas $L(P; A)$ e $L(Q; B)$ dizem-se paralelas se os respetivos vectores direcionais A e B forem paralelos.*

TEOREMA 13.3. *Dada uma reta L e um ponto Q não sobre L, então existe uma, e uma só, recta L' contendo Q e paralela a L.*

Demonstração. Suponhamos que a reta dada tem o vector direcional A. Consideremos a reta $L' = L'(Q; A)$. Esta reta contém Q e é paralela a L. O Teorema 13.1 diz-nos que esta é a única reta com essas duas propriedades.

Nota: Durante largo período de tempo os matemáticos suspeitaram que o postulado das paralelas poderia ser deduzido dos outros postulados de Euclides, mas todas as tentativas para o demonstrar falharam. Nos começos do século XIX os matemáticos Karl F. Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860) e N. I. Lobatchevski (1793-1856) chegaram à conclusão de que o postulado das paralelas não poderia ser derivado a partir dos outros e começaram a desenvolver geometrias não euclidianas, isto é, geometrias nas quais o referido postulado não seria válido. O trabalho destes homens inspirou otros matemáticos e cientistas a alargarem os seus pontos de vista acerca das "verdades aceites" e a pôr de parte outros axiomas que durante séculos haviam sido considerados como coisa sagrada.

É também possivel deduzir com facilidade a seguinte propriedade das retas que Euclides tinha estabelecido como um axioma.

TEOREMA 13.4. *Dois pontos distintos definem uma reta, isto é, se $P \neq Q$, existe uma, e uma só, reta unindo P com Q, a qual pode definir-se como o conjunto $\{P + t(Q - P)\}$.*

Demonstração. Seja L a reta que passa por P e é paralela a $Q - P$, isto é,

$$L = L(P; Q - P) = \{P + t(Q - P)\}.$$

Esta recta contém quer P quer Q (fazer $t = 0$ para obter P e $t = 1$ para obter Q). Seja agora L' qualquer reta contendo quer P quer Q. Vamos demonstrar que $L' = L$. Uma vez que L' contem P, temos $L' = L(P; A)$ para algum $A \neq O$. Mas L' também contém Q, pelo que $P + cA = Q$ para algum c. Daqui resulta $Q - P = cA$, com $c \neq 0$, já que $Q \neq P$. Deste modo $Q - P$ é paralelo a A, pelo que, pelo Teorema 13.2, se tem $L' = L(P; A) = L(P; Q - P) = L$.

EXEMPLO. O Teorema 13.4 dá-nos uma maneira fácil para averiguar se um ponto Q pertence a uma determinada reta $L(P; A)$. Diz-nos que Q está em $L(P;A)$ se e só se, $Q - P$ for paralelo a A. Por exemplo, consideremos a reta $L(P; A)$, onde $P = (1, 2, 3)$ e $A = (2, -1, 5)$. Para averiguar se o ponto $Q = (1, 1, 4)$ esta sobre esta reta, examinemos $Q - P = (0, -1, 1)$. Visto $Q - P$ não ser o produto de A por um escalar, o ponto $(1, 1, 4)$ não está sobre a reta.

Por outro lado, se $Q = (5, 0, 13)$ encontramos que $Q - P = (4, -2, 10) = 2A$, pelo que Q está sobre a reta.

A dependência linear de dois vectores em V_n pode ser expressa em linguagem geométrica.

TEOREMA 13.5. *Dois vectores A e B de V_n são linearmente independentes se, e só se, estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem.*

Demonstração. Se quer A quer B são nulos, o resultado é trivial. Se ambos são não nulos, então A e B são dependentes se, e só se, $B = tA$ para algum escalar t. Mas $B = tA$ se, e somente se, B está sobre a reta que passa pela origem paralela a A.

13.4. Retas e funções vectoriais

O conceito de reta pode relacionar-se com o de função. A correspondência que associa a cada real t o vector $P + tA$ é um exemplo de uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais e cujo contradomínio é a reta $L(P; A)$. Se representamos a função pelo símbolo X, então o valor da função $X(t)$, para um dado t, é dado por

$$X(t) = P + tA\,. \tag{13.1}$$

Chamar-lhe-emos uma função vectorial duma variável real.

A definição dum tal tipo de função é importante porque, como veremos no capítulo 14, fornece-nos um método natural para definir curvas mais gerais no espaço.

O escalar t em (13.1) chama-se, muitas vezes, *parâmetro*, e (13.1) a *equação vectorial paramétrica* ou simplesmente a *equação vectorial* da reta. Por vezes convém considerar a reta como a trajectória duma partícula móvel, caso em que o parâmetro t é interpretado como *o tempo* e $X(t)$ é o *vector posicional* da partícula.

Observe-se que dois pontos $X(a)$ e $X(b)$ sobre uma dada reta $L(P;A)$ coincidem se, e só se, temos $P + aA = P + bA$ ou $(a - b)a = O$. Visto que $A \neq O$, esta última igualdade verifica-se se, e só se, $A - b = 0$, ou seja $a = b$. Assim, valores distintos do parâmetro t conduzirão a pontos diferentes sobre a reta.

Consideremos agora três pontos distintos sobre uma dada reta, por exemplo $X(a)$, $X(b)$ e $X(c)$, com $a > b$. Dizemos que $X(c)$ está *entre* $X(a)$ e $X(b)$ se c está entre a e b, isto é, se $a < c < b$.

A congruência pode definir-se em termos de normas. Um par de pontos P, Q diz-se *congruente* com outro par P', Q' se $\|P - Q\| = \|P' - Q'\|$. A norma $\|P - Q\|$ chama-se também a *distância* entre P e Q.

Isto completa as definições dos conceitos *ponto, reta, sobre, entre, congruência* no nosso modelo analítico do espaço euclidiano n-dimensional. Concluímos esta seção com algumas observações complementares respeitantes às equações paramétricas das retas no espaço tridimensional.

Se uma reta passa por dois pontos distintos P e Q, podemos utilizar $Q - P$ para vector direcional A na equação (13.1); a equação vectorial da reta vem então *por P coincidem se, e só se, o subespaço gerado por A e B é o mesmo que o gerado pelos vectores C e D.*

Demonstração. Se o subespaço de A e B é o de C e D é evidente que $M = M'$ (os planos coincidem). Inversamente, suponhamos que $M = M'$. O plano M contém $P + A$ e $P + B$. Uma vez que ambos estes pontos estão também em M', então cada um dos A e B deve estar no subespaço gerado por C e D. Analogamente, cada um dos C e D deve estar no subespaço gerado por A e B. Portanto o subespaço gerado por A e B é o subespaço gerado por C e D.

O teorema que apresentamos a seguir mostra que o ponto P que intervém na definição do plano $\{P + sA + tB\}$ pode ser substituido por qualquer outro ponto Q do mesmo plano.

TEOREMA 13.8. *Dois planos $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{Q + sA + tB\}$ gerados pelos mesmos vectores A e B coincidem se, e só se, Q está sobre M.*

Demonstração. Se $M = M'$, então Q está certamente em M. Para demonstrar a inversa, supomos que Q está em M, quer dizer $Q = P + aA + bB$. Consideremos qualquer ponto X em M. Então $X = P + sA + tB$ para certos escalares s e t. Mas $P = Q - aA - bB$, pelo que $X = Q + (s - a)A + (t - b)B$. Portanto X está em M' e assim $M \subseteq M'$. Analogamente, verificamos que $M' \subseteq M$, pelo que os dois planos são iguais.

O postulado das paralelas de Euclides (Teorema 13.3) admite uma forma análoga para os planos. Antes de enunciarmos este teorema necessitamos definir paralelismo de dois planos. A definição é sugerida pela representação geométrica da fig. 13.3.

DEFINIÇÃO. *Dois planos $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{Q + sC + tD\}$ são paralelos se o subespaço gerado por A e B é o subespaço, gerado por C e D. Diz-se também que um vector X é paralelo ao plano M se X pertence ao subespaço gerado por A e B.*

TEOREMA 13.9. *Dado um plano M e um ponto Q não situado sobre M, existe um e um só plano M' que contém Q e é paralelo a M.*

Demonstração. Seja $M = \{P + sA + tB\}$ e consideremos o plano $M' = \{Q + sA + tB\}$. Este plano contém Q e é gerado pelos mesmos vectores A e B que M. Portanto M' é paralelo a M. Se M'' é outro plano passando por Q paralelo a M, então

$$M'' = \{Q + sC + tD\} \quad ,$$

onde o subespaço gerado por C e D é igual ao de A e B. Pelo Teorema 13.7 devemos ter $M'' = M'$. Portanto M' é o único plano passando por Q e paralelo a M.

O Teorema 13.4 diz-nos que dois pontos distintos definem uma reta. O teorema que se segue mostra que três pontos distintos definem um plano, desde que não sejam colineares.

TEOREMA 13.10. *Se P, Q e R são três pontos não situados sobre a mesma reta, então* *existe um e um só plano contendo esses três pontos. Tal plano define-se pelo conjunto de pontos*

$$M = \{P + s(Q - P) + t(R - P)\}\,. \tag{13.4}$$

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que um dos pontos, por exemplo P, é a origem. Então Q e R não estão sobre uma mesma reta que passe pela origem, pelo que são linearmente independentes. Deste modo eles geram um plano que passa pela origem, digamos o plano

$$M' = \{sQ + tR\}\,.$$

Este plano contém os três ponto O, Q e R.

Provemos agora que M' é o único plano que contém os três pontos dados O, Q e R. Qualquer outro plano que passe pela origem tem a forma

$$M'' = \{sA + tB\}\,,$$

onde A e B são linearmente independentes. Se M'' contém Q e R, temos

$$Q = aA + bB\,, \qquad R = cA + dB\,, \qquad\qquad 13.5)$$

para certos escalares a, b, c, d. Por conseguinte, toda a combinação linear de Q e R é também uma combinação linear de A e B, pelo que $M' \subseteq M''$, basta provar que cada um dos vectores A e B é uma combinação linear de Q e R. Multiplicando a primeira equação (13.5) por d e a segunda por b e subtraindo eliminamos B e obtemos

$$(ad - bc)A = dQ - bR\,.$$

A diferença $ad - bc$ não pode ser nula, porque se o fosse Q e R seriam dependentes. Desta maneira podemos dividir ambos os membros por $ad - bc$ e exprimir A como uma combinação linear de Q e R. Analogamente, podemos exprimir B como uma combinação linear dos mesmos vectores, pelo que $M'' \subseteq M'$. Está assim demonstrado o teorema quando um dos três pontos P, Q e R é a origem.

Para demonstrarmos o teorema no caso geral, seja M o conjunto (13.4) e $C = Q - P$, $D = R - P$. Vamos provar primeiro que C e D são linearmente independentes. Se o não fossem verificar-se-ia $D = tC$ para algum escalar t, resultando $R - P = t(Q - P)$ ou $R = P + t(Q - P)$, contradizendo o fato de que P, Q e R não são colineares. Portanto o conjunto M é um plano passando por P gerado pelo par linearmente independente C e D. Este plano contém os pontos P, Q e R (fazer $s = 1$, $t = 0$ para obter Q, e $s = 0$, $t = 1$ para obter R). Falta agora provar que este é o único plano contendo P, Q e R.

Seja M' qualquer plano contendo P, Q e R. Uma vez que M' é um plano contendo P, tem-se

$$M' = \{P + sA + tB\}$$

para qualquer par de vectores linearmente independentes A e B. Seja $M' = \{sA + tB\}$ o plano gerado pelo mesmo par A e B passando pela origem. Evidentemente M' contém um vector X se, e só se, M_0' contém $X - P$. Uma vez que M' contém Q e R, o plano M_0' contém $C = Q - P$ e $D = R - P$. Mas acabámos de demonstrar que existe um e um só plano contendo O, C e D, visto C e D serem linearmente independentes. Portanto $M_0' = \{sC + tD\}$, pelo que $M' = \{P + sC + tD\} = M$, o que completa a demonstração.

No Teorema 13.5 demonstrámos que dois vectores em V_n são linearmente dependentes se, e só se, estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem. O teorema seguinte exprime uma condição equivalente para três vectores num plano.

TEOREMA 13.11. *Três vectores A, B e C de V_n são lineamente dependentes se, e só se, estão situados sobre o mesmo plano passando pela origem.*

Demonstração. Suponhamos que A, B e C são dependentes. Podemos então exprimir um dos vectores como combinação linear dos outros dois ou seja $C = sA + tB$. Se A e B são independentes, geram um plano que passa pela origem e C está nesse plano. Se A e B são dependentes, então A, B e C estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem e portanto estão em qualquer plano que passe pela origem e que contém os três pontos A, B e C.

Para demonstrar o inverso, supomos que A, B e C estão sobre um mesmo plano que passa pela origem, por exemplo M. Se A e B são dependentes, então A, B e C são dependentes e o teorema está demonstrado. Se A e B são independentes, geram um plano M' que passa pela origem. Segundo o Teorema 13.10 existe um e um só plano que passa por O e contém A e B. Por conseguinte $M' = M$. Uma vez que C está neesse plano deve ser $C = sA + tB$, pelo que A, B e C são dependentes.

13.7. Planos e funções vectoriais

A correspondência que associa a cada par de números reais s e t o vector $P + sA + tB$ no plano $M = \{P + sA + tB\}$ é outro exemplo duma função vectorial. Neste caso o domínio da função é o conjunto de todos os pares de números reais (s, t) e o seu contradomínio é o plano M. Se representarmos a função por X e os seus valores por $X(s, t)$, então para cada par (s, t) temos

$$X(s, t) = P + sA + tB. \tag{13.6}$$

Diz-se que X é uma função vectorial de duas variáveis reais. Os escalares s e t chamam-se parâmetros e a equação (13.6) diz-se a equação vectorial paramétrica ou simplesmente a equação vectorial do plano. É a equivalente à representação da reta por uma função vectorial duma variável real. A presença de dois parâmetros na equação (13.6) dá-nos o caráter de bidemensionalidade do plano. Quando cada vector está em V_3 e é expresso em função das suas componentes, a saber

$$P = (p_1, p_2, p_3), \qquad A = (a_1, a_2, a_3), \qquad B = (b_1, b_2, b_3), \qquad \text{e} \qquad X(s, t) = (x, y, z),$$

a equação vectorial (13.6) pode substituir-se por três equações escalares

$$x = p_1 + sa_1 + tb_1, \qquad y = p_2 + sa_2 + tb_2, \qquad z = p_3 + sa_3 + tb_3.$$

Os parâmetros s e t podem sempre eliminar-se entre estas três equações para dar lugar a uma equação linear da forma $ax + by + cz = d$, chamada a equação cartesiana do plano. Apresentamos a seguir um exemplo.

EXEMPLO. Seja $M = \{P + sA + tB\}$, onde $P = (1, 2, 3)$, $A = (1, 2, 1)$ e $B = (1, -4, -1)$. A correspondente equação vectorial é

$$X(s, t) = (1, 2, 3) + s(1, 2, 1) + t(1, -4, -1).$$

A partir daqui obtém-se as três equações paramétricas escalares

$$x = 1 + s + t,\ y = 2 + 2s - 4t,\ z = 3 + s - t.$$

Para se obter a equação cartesiana escrevemos a primeira a terceira equações, respetivamente, nas formas $x - 1 = s + t$, $z - 3 = s - t$. Somando-as e subtraindo-as encontra-se $2s = x + z - 4$, $2t = x - z + 2$. Substituindo na segunda equação os parâmetros s e t pelos valores tirados das equações anteriores obtemos a equação cartesiana do plano $x + y - 3z = -6$. Voltaremos ao estudo de equações cartesianas lineares na seção 13.16.

13.8. Exercícios

1. Seja $M = \{P + sA + tB\}$, onde $P = (1, 2, -3)$, $A = (3, 2, 1)$, e $B = (1, 0, 4)$. Determinar quais dos pontos estão sobre M.
(a) $(1, 2, 0)$; (b) $(1, 2, 1)$; (c) $(6, 4, 6)$; (d) $(6, 6, 6)$; (e) $(6, 6, -5)$.
2. Os três pontos $P = (1, 1', -1)$, $Q = (3, 3, 2)$, e $R = (3, -1, -2)$ definem um plano M. Determinam quais dos pontos seguintes estão sobre M:
(a) $(2, 2, \frac{1}{2})$; (b) $(4, 0, -\frac{1}{2})$; (c) $(-3, 1, -3)$; (d) $(3, 1, 3)$; (e) $(0, 0, 0)$.
3. Determinar as equações paramétricas escalares de cada um dos planos definidos do modo seguinte:
(a) O plano passando por $(1, 2, 1)$ gerado pelos vectores $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 4)$.
(b) O plano passando por $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 4)$.
4. Um plano M tem as equações escalares paramétricas

$$x = 1 + s - 2t, \qquad y = 2 + s + 4t, \qquad z = 2s + t.$$

(a) Determinar quais dos pontos seguintes estão sobre M: $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(2, -3, -3)$.
(b) Determinar vectores P, A e B tais que $M = \{P + sA + tB\}$.
5. Seja M o plano determinado pelos três pontos P, Q, R não colineares.
(a) Se p, q, r são três escalares tais que $p + q + r = 1$, provar que $pP + qQ + rR$ está sobre M.

(b) Provar que todo o ponto de M é da forma $pP + qQ + rR$, com $p + q + r = 1$.

6. Determinar a equação linear cartesiana da forma $ax + by + cz = d$ para cada um dos seguintes planos:
(a) O plano passando por $(2, 3, 1)$ e gerado por $(3, 2, 1)$ e $(-1, -2, -3)$.
(b) O plano passando por $(2, 3, 1)$, $(-2, -1, -3)$, e $(4, 3, -1)$.
(c) O plano passando por $(2, 3, 1)$, paralelo ao plano passando pela origem e gerado por $(2, 0, -2)$ e $(1, 1, 1)$.
7. Um plano M tem a equação cartesiana $3x - 5y + z = 9$.
(a) Determinar quais dos seguintes pontos estão sobre M: $(0, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$, $(3, 1, -5)$.
(b) Determinar vectores P, A e B tais que $M = \{P + sA + tB\}$.
8. Considerar os dois planos $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{Q + sC + tD\}$, onde $P = (1, 1, 1)$, $A = (2, -1, 3)$, $B = (-1, 0, 2)$, $Q = (2, 3, 1)$, $C = (1, 2, 3)$ e $D = (3, 2, 1)$. Determinar dois pontos distintos sobre a interseção $M \cap M'$.
9. Dado um plano $M = \{P + sA + tB\}$, onde $P = (2, 3, 1)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 1)$ e outro plano M' com a equação cartesiana $x - 2y + z = 0$.
(a) Verificar se M e M' são paralelos.
(b) Determinar dois pontos da interseção $M' \cup M''$ se M'' tem a equação cartesiana

$$x + 2y + z = 0\,.$$

10. Seja L a reta passando pelo ponto $(1, 1, 1)$ e paralela ao vector $(2, -1, 3)$ e seja M_0 plano passando por $(1, 1, -2)$ gerado pelos vectores $(2, 1, 3)$ e $(0, 1, 1)$. Provar que existe um e um só ponto na interseção $L \cap M$ e determinar esse ponto.
11. Uma reta com o vector direcional X diz-se paralela a um plano M se X é paralelo a M. Seja L a reta passando pelo ponto $(1, 1, 1)$, paralela ao vector $(2, -1, 3)$. Determinar se L é paralela a cada um dos seguintes planos.
(a) Plano passando por $(1, 1, -2)$ e gerado por $(2, 1, 3)$ e $(\frac{3}{4}, 1, 1)$.
(b) Plano passando por $(1, 1, -2)$, $(3, 5, 2)$ e $(2, 4, -1)$.
(c) Plano de equação cartesiana $x + 2y + 3z = -3$.
12. Dois pontos distintos P e Q estão situados no plano M. Provar que cada ponto da recta definida por P e Q está em M.
13. Dada a reta L passando pelo ponto $(1, 2, 3)$ paralela ao vector $(1, 1, 1)$ e dado o ponto $(2, 3, 5)$ que não está em L, determinar a equação cartesiana do plano passando por $(2, 3, 5)$ e contendo a reta L.
14. Dada uma reta L e um ponto P não em L, provar que existe um e um só plano passando por P contendo L.

13.9. Produto vectorial

Em muitas aplicações da álgebra vectorial a problemas de geometria e mecânica é útil dispor de um método expedito de determinação dum vector perpendicular a cada um de dois vectores dados A e B. Isto consegue-se por intermédio do produto vectorial $A \times B$ (leia-se "A vectorial B") que se define do modo seguinte:

TEOREMA 13.13. *Se A e B são vectores linearmente independentes de V_3, então:*
(a) *os vectores A, B, $A \times B$ são linearmente independentes*
(b) *Todo o vector N de V_3, ortogonal simultaneamente a A e B, é igual ao produto dum escalar por $A \times B$.*

Demonstração. Seja $C = A \times B$. Então $C \neq O$, visto que A e B são linearmente independentes. Dados os escalares a, b, c tais que $aA + bB + cC = O$, multiplicamos escalarmente ambos os membros por C e tendo em conta que $A \cdot C = B \cdot C = 0$ encontramos $c = 0$. Então resulta $aA + bB = O$ pelo que $a = b = 0$ visto que A e B são independentes e a alínea (a) está demonstrada.

Seja agora N qualquer vector ortogonal a ambos A e B e seja $C = A \times B$. Vamos demonstrar que

$$(N \cdot C)^2 = (N \cdot N)(C \cdot C) .$$

Então da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 12.3) resulta que N é o produto de um escalar por C

Uma vez que A, B e C são linearmente independentes sabemos, pelo Teorema 12.10(c), que geram V_3. Em particular eles geram N, pelo que podemos escrever

$$N = aA + bB + cC$$

para determinados escalares a, b, c. Daqui resulta então

$$N \cdot N = N \cdot (aA + bB + cC) = c\, N \cdot C \ ,$$

visto que $N \cdot A = N \cdot B = 0$. Igualmente, visto que $C \cdot A = C \cdot B = 0$, se tem

$$C \cdot N = C \cdot (aA + bB + cC) = cC \cdot C .$$

Portanto $(N \cdot N)(C \cdot C) = (cN \cdot C)(C \cdot C) = (N \cdot C)(cC \cdot C) = (N \cdot C)^2$, o que completa a demonstração.

O Teorema 13.12 permite-nos uma interpretação geométrica do produto vectorial. Das propriedades (d) e (e) sabemos que $A \times B$ é perpendicular quer A que a B. Quando o vector $A \times B$ se representa geometricamente por uma reta, o sentido da seta depende das posições relativas dos três vectores unitários coordenados. Se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ estão dispostos como se indica na fig. 13.a(a), diz-se que formam um *sistema de eixos coordenados positivo*. Neste caso o sentido de $A \times B$ é determinado pela "regra da mão direita", isto é, quando A roda para B segundo o menor ângulo de maneira que os dedos da mão direita (fechada) indiquem o sentido da rotação, então o polegar indica o sentido de $A \times B$ (supondo, evidentemente, que o polegar define uma direção perpendicular aos outros dedos). Num sistema de eixos coordenados negativo, como se indica na fig. 13.4(b), o sentido de $A \times B$ é o oposto e pode ser determinado pela correspondente "regra da mão esquerda".

O comprimento de $A \times B$ admite uma interpretação geométrica simples. Se A e B são vectores não nulos fazendo entre si um àngulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, podemos escrever $A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos \theta$ na propriedade (f) do Teorema 13.12. para obtermos vectores. Por exemplo se escrevermos o determinante

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

e o "desenvolvermos" segundo a regra indicada em (13.8), verificamos que o resultado é igual ao segundo membro de (13.7); por outras palavras, podemos escrever a definição de produto vectorial na seguinte forma compacta

$$A \times B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Por exemplo, para calcularmos o produto vectorial de $A = 2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ e $B = 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, escrevemos

$$A \times B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = -36\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

13.11. Exercícios

1. Sejam $A = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $B = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $C = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Calcular cada um dos vectores seguintes como combinação linear de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:
   (a) $A \times B$; (d) $A \times (C \times A)$; (g) $(A \times C) \times B$;
   (b) $B \times C$; (e) $(A \times B) \times C$; (h) $(A + B) \times (A - C)$;
   (c) $C \times A$; (f) $A \times (B \times C)$; (i) $(A \times B) \times (A \times C)$.
2. Em cada alínea determinar um vector de V_3 com norma unitária e ortogonal simultaneamente a A e a B:
   (a) $A = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $B = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$;
   (b) $A = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $B = -\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$;
   (c) $A = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $B = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.
3. Em cada alínea calcular a área do triângulo, de vectores A, B e C, recorrendo ao produto vectorial
   (a) $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, -1)$, $C = (3, 4, 0)$;
   (b) $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (1, 2, 1)$;
   (c) $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$.
4. Se $A = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $B = 2\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, e $C = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, exprimir o produto vectorial $(A - C) \times (B - A)$ como combinação linear de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
5. Provar que $\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\|$ se e só se A e B são ortogonais.
6. Dados dois vectores linearmente independentes A e B de V_3 e $C = (B \times A) - B$.

$$A = aB + bC + c(B \times C)$$

para determinados escalares a, b, c. Multiplicando escalarmente ambos os membros por $B \times C$ e atendendo a que $A \cdot (B \times C) = 0$ encontramos $c = 0$, pelo que $A = aB + bC$ e está assim provado que A, B e C são linearmente dependentes.

EXEMPLO. Para determinar se os três vectores $(2, 3, -1)$, $(3, -7, 5)$ e $(1, -5, 2)$ são dependentes, formamos o respetivo produto misto na forma de determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-14 + 25) - 3(6 - 5) - 1(-15 + 7) = 27 .$$

Uma vez que o produto misto não é nulo, os três vectores são linearmente independentes.

O produto misto é susceptível duma interpretação geométrica interessante. A fig. 13.6 mostra um paralelipípedo determinado pelos três vectores geométricos A, B, C não complanares. A sua altura é $\|C\| \cos \phi$, onde ϕ é o ângulo entre $A \times B$ e C. Nesta figura, $\cos \phi$ é positivo porque $0 \leq \phi < \dfrac{\pi}{2}$. A área do paralelogramo que forma a base é $\|A \times B\|$, e esta é também a área de cada seção paralela à base. Integrando a área da seção entre 0 e $\|C\| \cos \phi$, encontramos para volume do paralelipípedo $\|A \times B\|(\|C\| \cos \phi)$, a área da base vezes a altura. Mas sabe-se que

$$\|A \times B\| \,(\|C\| \cos \phi) = (A \times B) \cdot C .$$

Por outras palavras, o produto misto $A \times B \,.\, C$ é igual ao volume do paralelipípedo determinado por A, B e C. Quando $\dfrac{1}{2}\pi < \phi \leq \pi$, $\cos \phi$ é negativo e o produto $A \times B \cdot C$ é negativo, portanto vale o simétrico do volume. Se A, B e C são complanares e o respetivo plano

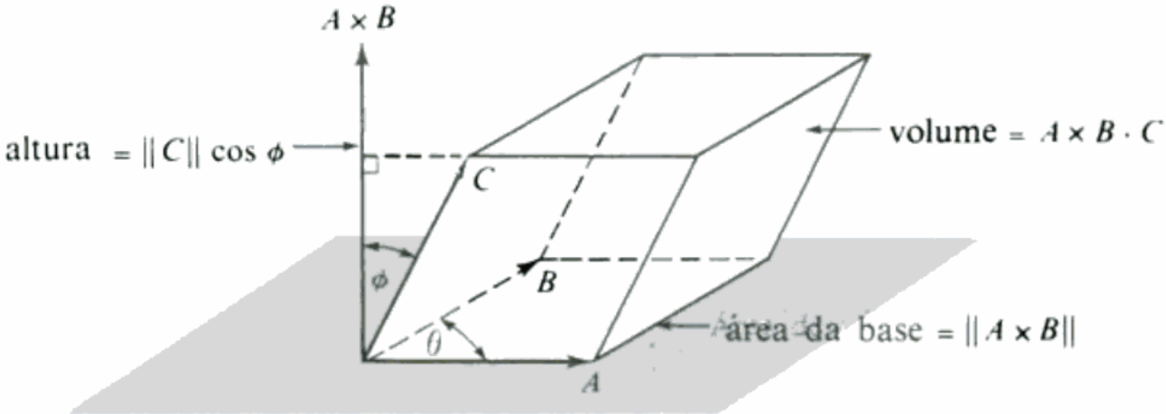


Fig. 13.6. Interpretação geométrica do produto triplo escalar como o volume dum paralelipípedo.

$$(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k} \times (6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) = 3 .$$

(b) Determinar o vector $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ de menor comprimento e que verifique a relação (a).

7. Utilizar as propriedades algébricas do produto escalar e produto vectorial para derivar as seguintes propriedades do produto misto.
(a) $(A + B) \cdot (A + B) \times C = 0$.
(b) $A \cdot B \times C = - B \cdot A \times C$, a qual significa que a troca dos dois primeiros vectores muda o sinal do produto misto. [*Sugestão:* Aplicar a alínea (a) e a propriedade distributiva].
(c) $A \cdot B \times C = - A \cdot C \times B$, a qual significa que a troca dos dois últimos vectores muda o sinal do produto misto. [*Sugestão:* usar a antissimetria do produto vectorial]
(d) $A \cdot B \times C = - C \cdot B \times A$, a qual significa que a troca do primeiro com o terceiro vector muda o sinal do produto misto. [*Sugestão:* usar (b) e (c).]
Igualando os segundos membros de (b), (c) e (d) verificamos que

$$A \cdot B \times C = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B ,$$

o que prova que a permutação circular de A, B e C deixa invariável o produto misto.

9. Este exercício esboça uma demonstração da fórmula vectorial

$$A \times (B \times C) = (C \cdot A)B - (B \cdot A)C , \tag{13.15}$$

que algumas vezes se chama, como mnemónica, fórmula "cab menos bac". Sendo $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, demonstrar que

$$\boldsymbol{i} \times (B \times C) = c_1 B - b_1 C .$$

Isto prova (13.15) no caso particular $A = \boldsymbol{i}$. Demonstrar as fórmulas correspondentes para $A = \boldsymbol{j}$ e $A = \boldsymbol{k}$. e combiná-las depois para obter (13.15).

10. Usar a fórmula "cab menos bac" do Exercício 9 para deduzir as seguintes igualdades
(a) $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$.
(b) $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = O$.
(c) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ se e só se $B \times (C \times A) = O$.
(d) $(A \times B) \cdot (C \times D) = (B \cdot D)(A \cdot C) - (B \cdot C)(A \cdot D)$.

11. Quatro vectores de V_3 A, B, C e D verificam as relações $A \times C \cdot B = 5$, $A \times D \cdot B = 3$, $C + D = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $C - D = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$. Calcular $(A \times B) \times (C \times D)$ em função de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

12. Provar que $(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2$.

13. Dizer se é verdadeira ou falsa a fórmula $A \times [A \times (A \times B)] \cdot C = - \|A\|^2 A \cdot B \times C$.

14. (a) Provar que o volume do tetraedro cujos vértices são A, B, C e D é

$$\tfrac{1}{6} \left|(B - A) \cdot (C - A) \times (D - A)\right| .$$

(b) Calcular este volume quando $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (0, 3, 0)$ e $D = (4, 0, 0)$.

projecção de $P - Q$ sobre N. Este comprimento mínimo é $|(P - Q) \cdot N| / \|N\|$ e chama-se a *distância de Q ao plano.* O número d, em (13.17), é a distância da origem ao plano.

13.16. Equações lineares cartesianas definindo planos

Os resultados estabelecidos pelos Teoremas 13.15 e 13.16 podem também exprimir-se em termos de componentes. Se admitimos que $N = (a, b, c)$, $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $N = (x, y, z)$, a equação (13.16) escreve-se

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 . \tag{13.18}$$

Esta é a equação cartesiana do plano e é verificada por aqueles pontos (x, y, z) (e só por eles) que estão no plano. O conjunto de pontos verificando (13.18) não se altera se multiplicarmos cada um dos valores a, b, c por um escalar não nulo t. Isto significa unicamente que se escolheu outro vector normal ao plano em (13.16).

Passando ao segundo membro os termos independentes de x, y e z, podemos dar a (13.18) a forma

$$ax + by + cz = d_1 , \tag{13.19}$$

onde $d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$. Uma equação deste tipo diz-se que é *linear em x, y e z*. Mostrámos exactamente que todo o ponto (x, y, z) dum plano verifica uma equação cartesiana linear (13.19), na qual es três valores a, b, c não são todos nulos. Inversamente, toda a equação linear com esta propriedade representa um plano. (O leitor pode demonstrar esta proposição a título de exercício).

O número d_1 em (13.19) dá lugar a uma relação simples com a distância d do plano à ori-

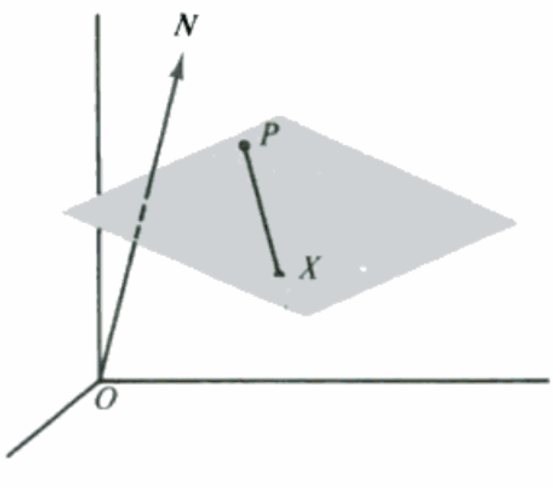


Fig. 13.7. Um plano passando por P e X e normal N

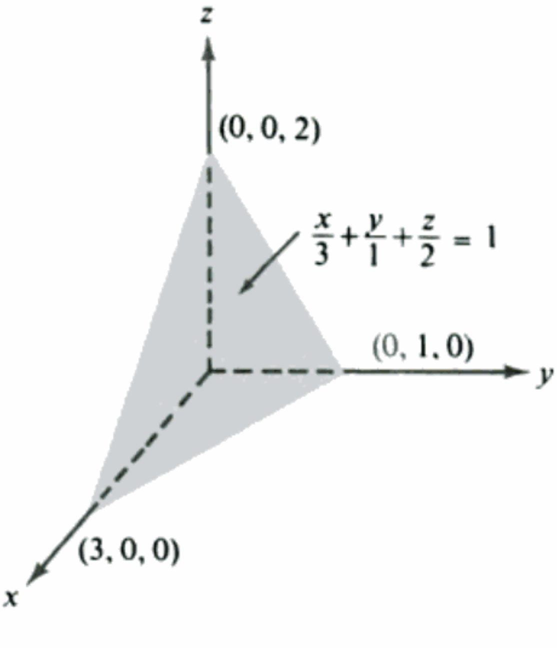


Fig. 13.8 Um plano intersetando os eixos coordenados.

21. (a) Se três pontos A, B, C definem um plano, provar que a distância de Q a este plano é $|(Q - A) \cdot (B - A) \times (C - A)| \,/\, \|(B - A) \times (C - A)\|$.
(b) Calcular esta distância se $Q = (1, 0, 0)$, $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$ e $C = (2, 3, 4)$.
22. Provar que se dois planos M e M' não são paralelos, a sua intersecção $M \cap M'$ é uma reta.
23. Achar a equação cartesiana do plano paralelo a j e que passa pela interseçao dos planos de equações $x + 2y + 3z = 4$ e $2x + y + z = 2$.
24. Achar a equaçao cartesiana do plano paralelo ao vector $3i - j + 2k$ e que contém a reta de interseção dos planos $x + y = 3$ e $2y + 3z = 4$.

13.18. As seções cónicas

Uma reta móvel G que interseta uma reta fixa A num ponto P, com a qual forma um ângulo constante θ, onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, gera no espaço tridimensional uma superfície chamada cone circular reto. A reta G é a *geratriz* do cone, A o seu *eixo* e P o *vértice*. Cada um dos cones representados na fig. 13.9 tem eixo vertical. As partes superior e inferior do cone que se unem no vértice chamam-se as duas *folhas* do cone. As curvas obtidas por interseção do cone com um plano não passando pelo vértice chamam-se *seções cónicas*, ou simplesmente *cónicas*. Se o plano secante é paralelo a uma geratriz do cone, a cónica é uma *parábola*. Nos outros casos essa seção é

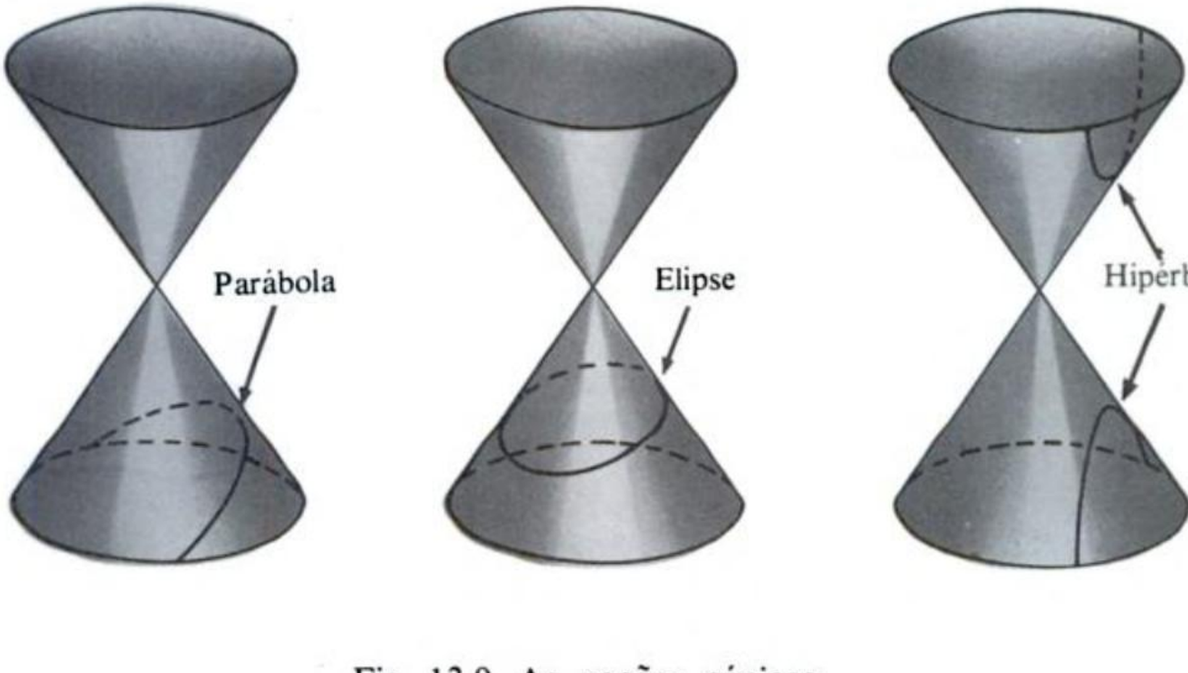


Fig. 13.9. As seções cónicas.

ou uma *elipse* ou uma *hipérbole*, conforme o plano interseta uma ou as duas folhas (Ver fig. 13.9). A hipérbole é formada por dois *ramos*, um em cada folha do cone.

Muitas descobertas importantes, tanto na matemática pura como aplicada, estiveram relacionadas com as seções cónicas. O estudo das cónicas feito por Apolónio data do Sec. III A. C. e constitui um dos trabalhos mais notáveis da geometria clássica grega. Cerca de dois mil anos mais tarde, Galileu descobria que um projéctil lançado horizontalmente do cimo de uma torre cai para a terra deecrevendo uma trajetória que é um arco de parábola (se for considerada desprezável a resistência do ar e se admitirmos que o movimento tem lugar numa região da superfície terrestre suficientemente reduzida para que possa ser considerada um plano). Um dos pontos de viragem na história da astronomia ocorreu em 1600 quando Kepler sugeriu que todos os planetas se movem em órbitas elípticas. Cerca de 80 anos mais tarde, Newton pode demonstrar que uma órbita planetária elíptica implica uma lei de atração gravitacional em que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Este fato levou Newton a formular a sua famosa teoria da gravitação universal, a qual tem sido frequentemente referida como o maior descoberta científica jamais feita. As seções cónicas aparecem não somente como órbitas de planetas e satélites, mas também como trajetórias de partículas atómicas elementares. Por tal fato podemos concluir que a importância das seções cónicas dificilmente poderá ser superestimada.

Há outras definições equivalentes das secções cónicas. Numa delas consideram-se pontos especiais conhecidos por *focos;* e aqui a elipse pode definir-se como o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2 a dois pontos fixos F, e F_2 (os focos) é constante. (Ver fig. 13.10). Se os focos coincidem, a elipse reduz-se a uma circunferência. Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a diferença $|d_1 - d_2|$ é constante. Uma parábola é o conjunto dos pontos do plano para os quais a distância a um ponto fixo F (chamado o foco) é igual à distância a uma dada reta (chamada a diretriz).

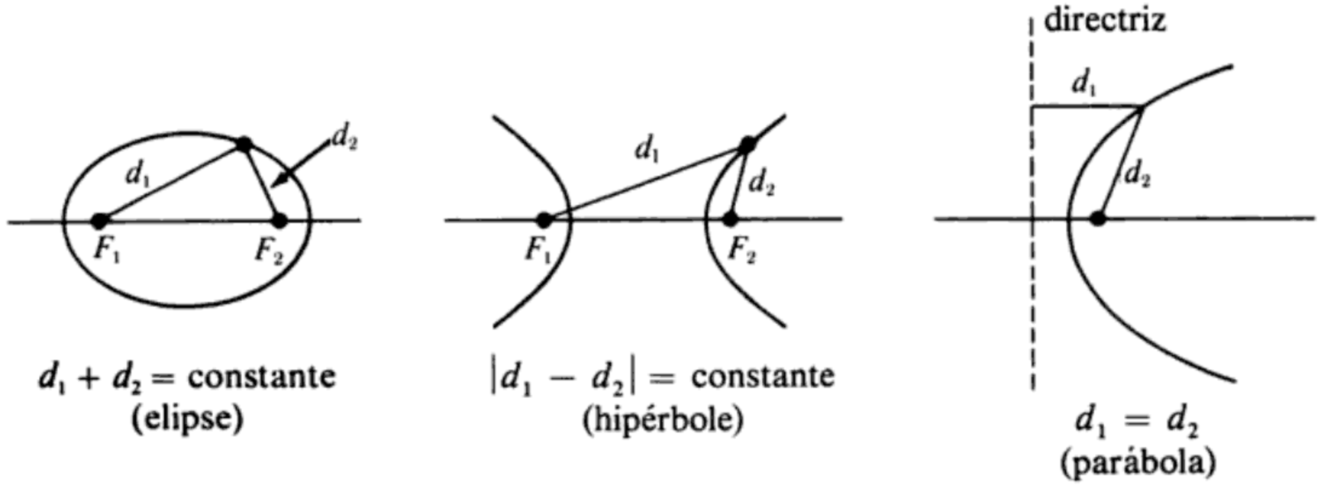


Fig. 13.10. Definições focais das secções cónicas.

Por um raciocínio muito simples pode demonstrar-se que a propriedade focal da elipse é uma consequência da sua definição como uma seção de um cone. Esta demonstração foi feita em 1822 pelo matemático belga G.P. Dandelin (1794-1847), considerando no interior do cone duas esferas que lhe são tangentes e em que cada uma delas é tangente a um plano secante do cone, como se indica na fig. 13.11. O lugar dos pontos de contacto destas esferas com o cone são duas circunferências C_1 e C_2, situadas em planos paralelos. Interessa provar que os pontos F_1 e F_2 de contato do plano secante com as esferas são os focos da elipse determinada no cone pelo plano.

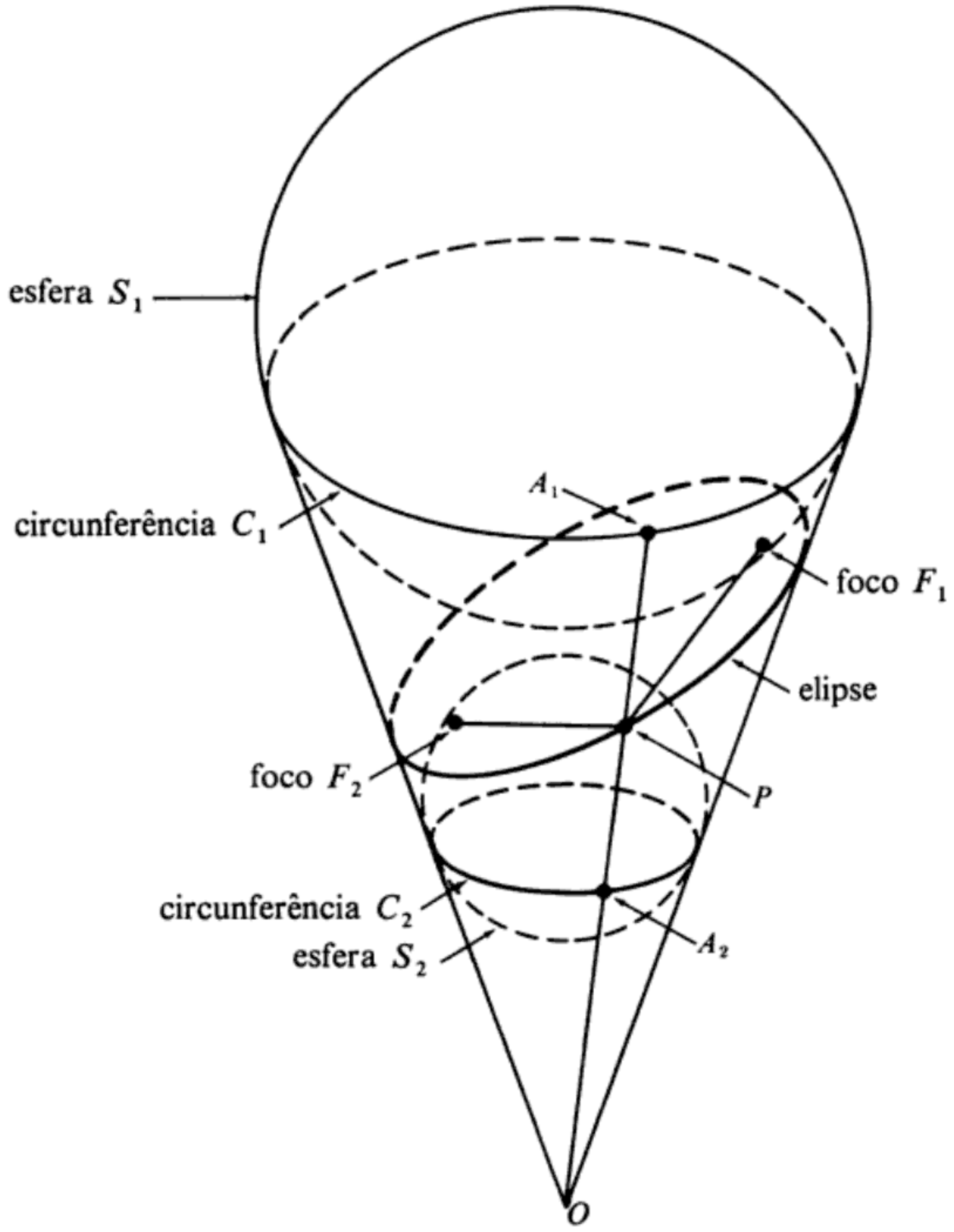


Fig. 13.11. Demonstração de Dandelin

Seja P um ponto qualquer da elipse. O problema consiste em demonstrar que $\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\|$ é constante, isto é, independente de P. Considere-se a geratriz do cone dirigida de O para P e sejam A_1 e A_2 os pontos de interseção com as circunferências C_1 e C_2, respetivamente. Então $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PA_1}$ são duas tangentes a S_1 tiradas a partir de P e por isso $\|\overrightarrow{PF_1}\| = \|\overrightarrow{PA_1}\|$. Analogamente $\|\overrightarrow{PF_2}\| = \|\overrightarrow{PA_2}\|$, e portanto tem-se

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = \|\overrightarrow{PA_1}\| + \|\overrightarrow{PA_2}\| .$$

Mas $\|\overrightarrow{PA_1}\| + \|\overrightarrow{PA_2}\| = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$, que é a distância entre os planos de C_1 e C_2 medida ao longo da reta OA_1 geratriz do cone. Isto prova que F_1 e F_2 são os focos da elipse, como se tinha afirmado.

Se $e > 1$, a curva é uma hipérbole com um ramo de cada lado de L. Os pontos do ramo esquerdo verificam (13.27) e os do ramo direito satisfazem a

$$r = \frac{ed}{e \cos \theta - 1}. \tag{13.28}$$

Equações polares correspondentes a outras posições da diretriz serão discutidas no conjunto de exercícios que se apresenta a seguir.

13.21. Exercícios

1. Provar que a equação (13.22) do Teorema 13.17 deve substituir-se por

$$\|X - F\| = e\,|(X - F) \cdot N + d|$$

se F está no semi-plano positivo determinado por N.

2. Seja C uma cónica de excentricidade e, um foco na origem e directriz vertical L a uma distância d de F e à sua esquerda.

(a) Provar que se C é uma elipse ou uma parábola, todo o ponto C está à direita de L e satisfaz à equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}.$$

(b) Provar que se C é uma hiperbole, pontos no ramo direito satisfazem à equação da alínea (a) e pontos do ramo esquerdo satisfazem a $r = -ed/(1 + e \cos \theta)$. Repare-se que $1 + e \cos \theta$ é sempre negativo nesta hipótese.

3. Se uma cónica tem uma directriz horizontal a uma distância d acima do foco situado na origem, provar que os seus pontos verificam a equação polar obtida da do Teorema 13.18 pela substituição de $\cos \theta$ por $\operatorname{sen} \theta$. Quais são as correspondentes equações polares se a directriz é horizontal e situada abaixo do foco?

Cada um dos Exercícios 4 a 9 dá uma equação polar duma cónica com o foco F na origem e a diretriz vertical à direita de F. Em cada caso determinar a excentricidade e e a distância d do foco à diretriz. Traçar a curva mostrando a relação desta com os respetivos foco e diretriz.

4. $r = \dfrac{2}{1 + \cos \theta}$.

5. $r = \dfrac{3}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}$.

6. $r = \dfrac{6}{3 + \cos \theta}$.

7. $r = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + \cos \theta}$.

8. $r = \dfrac{4}{1 + 2 \cos \theta}$.

9. $r = \dfrac{4}{1 + \cos \theta}$.

Em cada um dos Exercícios 10 a 12, uma cónica de excentricidade e tem um foco na origem e a diretriz com uma dada equação cartesiana. Em cada caso calcular a distância d do foco à diretriz e determinar uma equação polar para a cónica. Para a hipérbole dar uma equação polar para cada ramo. Fazer um desenho mostrando a relação da curva com o seu foco e diretriz.

10. $e = 1/2$; directriz: $3x + 4y = 25$.
11. $e = 1$; directriz: $4x + 3y = 25$.
12. $e = 2$, directriz: $x + y = 1$.
13. Um cometa move-se numa órbita parabólica com o sol no foco. Quando o cometa dista 10^8 quilómetros do sol, um vector do foco para o cometa faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com o vector unitário N do foco perpendicularmente à diretriz, estando o foco no semi-plano negativo determinado por N.
    (a) Determinar a equação polar da órbita, tomando a origem no foco e calcular a menor distância do cometa ao Sol.
    (b) Resolver a alínea (a) se o foco está situado no semi-plano positivo definido por N.

13.22 Cónicas simétricas relativamente à origem

Um conjunto de pontos diz-se *simétrico relativamente à origem* se $-X$ pertence ao conjunto sempre que X pertença. Vamos provar a seguir que o foco duma elipse ou duma hipérbole pode sempre ser definido de modo que a cónica seja simétrica em relação à origem. Para isso escrevemos a equação fundamental (13.22) na forma:

$$\|X - F\| = e\,|(X - F)\cdot N - d| = e\,|X\cdot N - F\cdot N - d| = |eX\cdot N - a|\,, \tag{13.29}$$

onde $a = ed + e\,F\cdot N$. Quadrando ambos os membros vem

$$\|X\|^2 - 2F\cdot X + \|F\|^2 = e^2(X\cdot N)^2 - 2eaX\cdot N + a^2\,. \tag{13.30}$$

Se pretendemos que exista simetria a respeito da origem, esta equação deve ainda ser satisfeita quando se substitue X por $-X$ ou seja

$$\|X\|^2 + 2F\cdot X + \|F\|^2 = e^2(X\cdot N)^2 + 2eaX\cdot N + a^2\,. \tag{13.31}$$

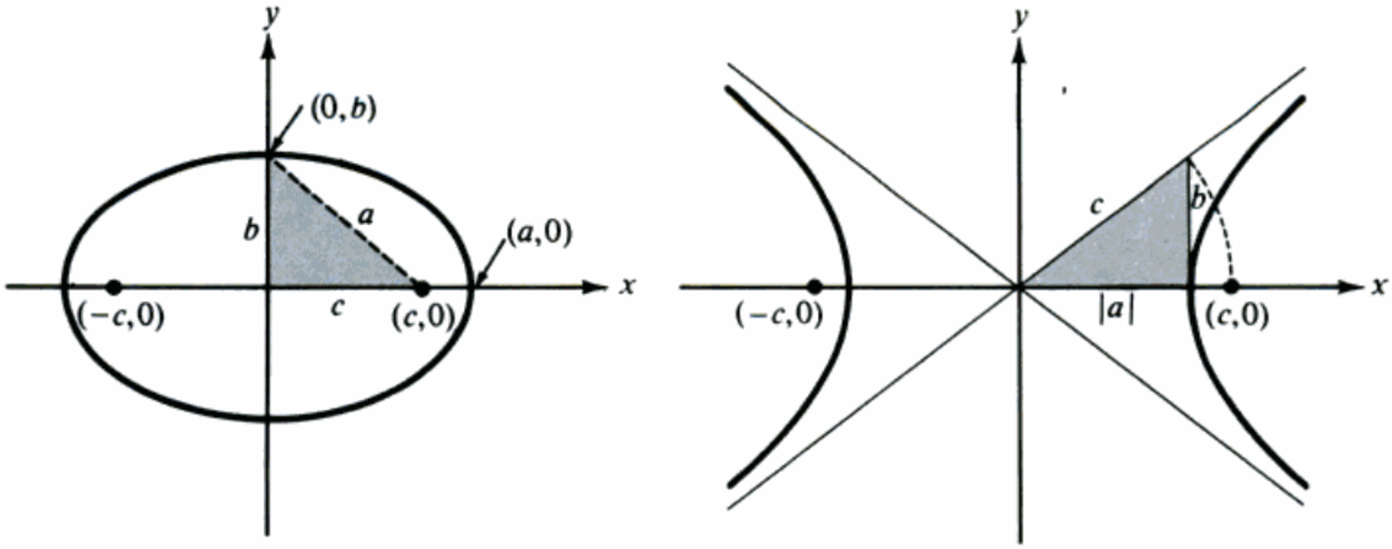
Subtraindo (13.31) de (13.30), teremos simetria se e só se

$$F\cdot X = eaX\cdot N \qquad \text{ou} \qquad (F - eaN)\cdot X = 0\,.$$

Esta equação pode ser satisfeita para todos os X pertencentes à curva se e só se F e N estão relacionados por

$$F = eaN\,, \qquad \textbf{onde} \quad a = ed + eF\cdot N\,. \tag{13.32}$$

A relação $F = eaN$ implica que $F\cdot N = ea$, donde resulta $a = ed + e^2a$. Se $e = 1$, esta última



(a) Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = a^2 - c^2$$

(b) Hipérbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Fig. 13.14. Cónicas de excentricidade $e \neq 1$, simétricas relativamente à origem. Os focos são os pontos $(\pm c,\, 0)$, com $c = |a|\, e$. Os triângulos relacionam a, b e c geometricamente.

Para se obter uma equação cartesiana para a parábola, voltamos à equação fundamental (13.20) com $e = 1$. Tomando para diretriz a reta $x = -c$ e considerando o foco no ponto $(c, 0)$, se $X = (x, y)$, tem-se $X - F = (x - c, y)$ e a equação (13.20) dá-nos $(x - c)^2 + y^2 = |x + c|^2$. Efetuando as simplificações possíveis obtemos a equação da parábola na forma reduzida

$$y^2 = 4cx\,. \tag{13.40}$$

O ponto médio entre o foco e a diretriz (a origem na fig. 13.15) chama-se o *vértice* da parábola e a reta passando pelo vértice e pelo foco é o *eixo* da parábola. A parábola é simétrica em relação ao seu eixo. Se $c > 0$, a parábola está situada à direita do eixo OY, como na fig. 13.15; quando $c < 0$, a curva fica à esquerda de OY.

Se os eixos se escolhem de modo que o foco esteja sobre OY no ponto $(0, c)$ e se a diretriz for a reta $y = -c$, a forma reduzida da equação cartesiana da parábola é

$$x^2 = 4cy.$$

Quando $c > 0$, a parábola tem a concavidade para cima como se mostra na fig. 13.16. Quando $c < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

Se a parábola da fig. 13.15 for deslocada de maneira que o seu vértice seja o ponto (x_0, y_0), a equação correspondente será

$$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)\,.$$

9. O mesmo Exercício 8, excepto que o eixo maior é paralelo a OY.
10. Vértices em $(-1, 2)$, $(-7, 2)$, eixo menor de comprimento 2.
11. Vértices em $(3, -2)$, $(13, -2)$, focos em $(4, -2)$, $(12, -2)$.
12. Centro em $(2, 1)$, eixo maior paralelo a OX, passando a curva pelos pontos $(6, 1)$ e $(2, 3)$.

Cada uma das equações dos Exercícios 13 a 18 representa uma hipérbole. Determinar as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices. Traçar as curvas e desenhar as assíntotas. Determinar também a excentricidade.

13. $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1.$
14. $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1.$
15. $\dfrac{(x+3)^2}{4} - (y-3)^2 = 1.$
16. $9x^2 - 16y^2 = 144.$
17. $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0.$
18. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1.$

Em cada um dos Exercícios 19 a 23 determinar a equação cartesiana da hipérbole que verifica as condições dadas. Traçar cada curva e as assíntotas.

19. Centro em $(0, 0)$, um foco em $(4, 0)$, um vértice em $(2, 0)$.
20. Focos em $(0, \pm\sqrt{2})$, vértices em $(0, \pm 1)$.
21. Vértices em $(\pm 2, 0)$, assíntotas $y = \pm 2x$.
22. Centro em $(-1, 4)$, um foco em $(-1, 2)$, um vértice em $(-1, 3)$.
23. Centro em $(2, -3)$, eixo transverso paralelo a um dos eixos coordenados, passando a curva pelos pontos $(3, -1)$ e $(-1, 0)$.
24. Para que valor (ou valores) de C será a reta $3x - 2y = C$ tangente à hiperbole $x^2 - 3y^2 = 1$?
25. As assíntotas da hipérbole são as retas $2x - y = 0$ e $2x + y = 0$. Determinar a equação cartesiana da curva, sabendo que passa pelo ponto $(3, -5)$.

Cada uma das equações dos Exercícios 26 a 31 representa uma parábola. Determinar as coordenadas do vértice, a equação da diretriz e a equação do eixo. Traçar as curvas

26. $y^2 = -8x.$
27. $y^2 = 3x.$
28. $(y-1)^2 = 12x - 6.$
29. $x^2 = 6y.$
30. $x^2 + 8y = 0.$
31. $(x+2)^2 = 4y + 9.$

Em cada um dos Exercícios 32 a 37 achar a equação cartesiana da parábola que satisfaz. às condições dadas e traçar a curva.

32. Foco em $(0, -1/4)$; equação da diretriz $x = 1/4$.
33. Vértice em $(0, 0)$; equação da diretriz $x = -2$.
34. Vértice em $(-4, 3)$; foco em $(-4, 1)$.
35. Foco em $(3, -1)$; equação da diretriz $x = 1/2$.
36. Eixo paralelo a OY e passando pelos pontos $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, 0)$.
37. Eixo paraleio a OX, vértice em $(1, 3)$, passando por $(-1, -1)$.
38. Partindo da definição focal, achar a equação cartesiana da parábola cujo foco é a origem e cuja diretriz é a reta $2x + y = 10$.

12. Considere o Exercício 11. Provar que em cada ramo da hipérbole a diferença $\|X - F\| - \|X + F\|$ é constante.
13. (a) Demonstrar que uma transformação de homotetia (substituição de x por tx e y por ty) transforma uma elipse de centro na origem noutra elipse com o mesmo centro e com a mesma excentricidade; por outras palavras elipses homotéticas têm a mesma excentricidade.

    (b) Provar o inverso, isto é, se duas elipses concêntricas têm a mesma excentricidade e os eixos maiores sobre a mesma reta, então elas estão relacionadas por homotetia.

    (c) Provar os resultados correspondentes a (a) e a (b) para as hipérboles.
14. Utilizar a equação cartesiana que representa todas as cónicas de excentricidade e e centro na origem para demonstrar que estas cónicas são curvas integrais da equação diferencial $y' = (e^2 - 1)x/y$.

Nota: Uma vez que esta é uma equação diferencial homogénea (seção 8.25), o conjunto de todas essas cónicas de excentrecidade e é invariante por uma transformação homotética. (Comparar com o Exercício 13.)

15. (a) Provar que o conjunto de todas as parábolas é invariante sob uma transformação de semelhança. Isto é, uma transformação de semelhança transforma uma parábola numa parábola.

    (b) Determinar todas as parábolas semelhantes a $y = x^2$.
16. A recta $x - y + 4 = 0$, é tangente à parábola $y^2 = 16x$. Determinar o ponto de contato.
17. (a) Se as duas parábolas $y^2 = 4p(x - a)$ e $x^2 = 4qy$, dado $a \neq 0$, são tangentes provar que a abcissa do ponto de contato depende unicamente de a.

    (b) Determinar uma condição relativa a a, p e q que exprima o fato de que duas parábolas são tangentes.
18. Considerar o lugar dos pontos P do plano para os quais a distância de P ao ponto $(2, 3)$ é igual à soma das distâncias de P aos eixos coordenados.

    (a) Mostrar que a parte deste lugar geométrico situado no primeiro quadrante é parte de uma hipérbole, localizar as assíntotas e fazer um desenho.

    (b) Traçar o lugar geométrico nos restantes quadrantes.
19. Duas parábolas têm o mesmo ponto como foco e a mesma reta como eixo, mas os vértices situados um de cada lado do foco. Provar que as parábolas se intersetam ortogonalmente (isto é, que as tangentes às parábolas nos pontos de interseção são perpendiculares).
20. (a) Provar que a equação cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

    representa todas as cónicas simétricas relativamente à origem com os focos em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$.

    (b) Fixar c e representar por S o conjunto de todas as cónicas obtidas quando a^2 toma qualquer valor real e positivo diferente de c^2. Provar que toda a curva de S verifica a equação diferencial

14
CÁLCULO COM FUNÇÕES VECTORIAIS

14.1. Funções vectoriais duma variável real

Este capítulo combina a álgebra vectorial com os métodos do cálculo e descreve algumas aplicações ao estudo de curvas e de alguns problemas de mecânica. O conceito de função vectorial é fundamental neste estudo.

DEFINIÇÃO. *Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e o contradomínio é um subconjunto do espaço* n*-dimensional* V_n *denomina-se função vectorial duma variável real.*

Encontrámos tais funções no capítulo 13. Por exemplo, a reta passando por um ponto P, paralela a um vector não nulo A, é o contradomínio da função vectorial X definida por

$$X(t) = P + tA \ ,$$

para todo o t real.

As funções vectoriais serão representadas pelas letras maiúsculas, tais como F, G, X, Y, etc., ou por letras minusculas $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$, etc. O valor da função F em t representa-se, como habitualmente, por $F(t)$. Nos exemplos que viermos a estudar o domínio de F será um intervalo que pode ser finito e fechado ou pode mesmo ser infinito.

14.2. Operações algébricas. Componentes

As operações usuais da álgebra vectorial podem servir à combinação de duas funções vectoriais ou à combinação duma função vectorial com uma função real. Se F e G são funções vectoriais e u é uma função real, todas com o mesmo domínio, definimos novas funções $F + G$, uF, e $F \cdot G$ mediante as igualdades

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t)\,, \qquad (uF)(t) = u(t)F(t)\,, \qquad (F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)\,.$$

A soma $F + G$ e o produto uF são funções vectoriais, enquanto que o produto escalar $F \cdot G$ é uma função real. Se $F(t)$ e $G(t)$ são definidas no espaço tridimensional, podemos também definir o produto vectorial $F \times G$ pela fórmula

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)\,.$$

As operações de composição podem aplicar-se na combinação de funções vectoriais com funções reais. Por exemplo, se F é uma função vectorial cujo domínio inclui o domínio de uma função real u, a composição $G = F \circ u$ é uma nova função vectorial definida pela equação

$$G(t) = F[u(t)]$$

para cada t do domínio de u.
Se uma função F tem valores em V_n, então cada vector $F(t)$ tem n componentes e podemos escrever

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))\,.$$

Deste modo, cada função vectorial F dá lugar a n funções reais $f_1, \ldots, f_n$ cujo sistema de valores para um certo t são as componentes de $F(t)$. Exprimimos simplesmente esta relação escrevendo $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ e chamamos f_k a componente de ordem k de F.

14.3. Limites, derivadas e integrais

Os conceitos básicos do cálculo tais como limite, derivada e integral, podem generalizar-se às funções vectoriais. Basta para tanto exprimir a função por intermédio das suas componentes e efetuar com estas componentes essas operações do cálculo.

Definição. *Se $F = (f_1, \ldots, f_n)$ é uma função vectorial, definem-se o limite, derivada e o integral pelas fórmulas*

$$\lim_{t \to p} F(t) = \left(\lim_{t \to p} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to p} f_n(t)\right),$$

$$F'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t))\,,$$

$$\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right),$$

sempre que as componentes do segundo membro tenham significado.

Dizemos igualmente que F é *contínua, derivável* ou *integrável* num intervalo, se cada componente de F possui a correspondente propriedade nesse mesmo intervalo.

Em virtude das definições apresentadas, não surpreenderá a verificação de que muitos teoremas sobre limites, continuidade, derivação e integração de funções reais sejam também válidas para as funções vectoriais. Vamos estabelecer alguns desses teoremas de que faremos uso no presente capítulo.

TEOREMA 14.1. *Se F, G e u são deriváveis num intervalo, então também o são $F + G$, uF e $F \cdot G$ e tem-se*

$$(F + G)' = F' + G', \qquad (uF)' = u'F + uF', \qquad (F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'.$$

Se F e G têm valores em V_3 também se verifica

$$(F \times G)' = F' \times G + F \times G'.$$

Demonstração. Apenas para mostrar a rotina das demonstrações, vamos provar a igualdade $(uF)' = u'F + uF'$. As demonstrações das restantes são análogas e deixam-se como exercício ao leitor.

Escrevendo $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ tem-se

$$uF = (uf_1, \ldots, uf_n), \qquad (uF)' = ((uf_1)', \ldots, (uf_n)').$$

Mas a derivada da componente de ordem k de uF è $(uf_k)' = u'f_k + uf_k'$, de maneira que

$$(uF)' = u'(f_1, \ldots, f_n) + u(f_1', \ldots, f_n') = u'F + uF'.$$

O leitor terá notado que as fórmulas de derivação no Teorema 14.1 são análogas às formas usuais de derivação duma soma ou um produto de funções reais. Visto que o produto vectorial é não comutativo, deve prestar-se atenção à ordem dos fatores na fórmula definindo $(F \times G)'$.

Da fórmula de derivação do produto escalar $F \cdot G$ resulta o seguinte teorema que utilizaremos com frequência.

TEOREMA 14.2. *Se uma função vectorial é derivável e tem norma constante num intervalo aberto I, então $F \cdot F' = 0$ em I, isto é, $F'(t)$ é perpendicular a $F(t)$ para cada t em I.*

Demonstração. Seja $g(t) = \|F(t)\|^2 = F(t) \cdot F(t)$. Por hipótese g é constante em I e consequentemente $g' = 0$ nesse intervalo. Mas, porque g é definida por um produto escalar, podemos escrever $g' = F' \cdot F + F \cdot F' = 2F \cdot F'$. Deste modo $F \cdot F' = 0$.

O teorema seguinte diz respeito a funçoes compostas. A sua demonstração faz-se com facilidade a partir dos Teoremas 3.5 e 4.2 que contêm resultados análogos para as funções reais.

TEOREMA 14.3. *Seja $G = F \circ u$, com F uma função vectorial e u uma função real. Se u é contínua em t e se F é contínua em $u(t)$, então G é contínua em t. Se as derivadas $u'(t)$ e*

$F'[u(t)]$ existem, então $G'(t)$ também existe e é dada por

$$G'(t) = F'[u(t)]u'(t) .$$

Se uma função vectorial F é contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então cada componente é contínua e por conseguinte integrável em $[a, b]$, pelo que F é integrável no mesmo intervalo. Os três teoremas seguintes dão-nos as propriedades fundamentais do integral de funções vectoriais. Em cada um deles as demonstrações são consequências imediatas dos resultados correspondentes para os integrais das funções reais.

TEOREMA 14.4. LINEARIDADE E ADITIVIDADE. *Se as funções vectoriais F e G são integráveis em $[a, b]$, o mesmo se verifica com c_1F+c_2G para quaisquer c_1 e c_2 e tem-se*

$$\int_a^b (c_1F(t) + c_2G(t))\, dt = c_1\int_a^b F(t)\, dt + c_2\int_a^b G(t)\, dt .$$

Igualmente para todo c em $[a, b]$ verifica-se

$$\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^c F(t)\, dt + \int_c^b F(t)\, dt .$$

TEOREMA 14.5. PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. *Se F é uma função vectorial contínua em $[a, b]$ e $c \in [a, b]$, define-se o integral indefinido A como sendo a função vectorial dada por*

$$A(x) = \int_c^x F(t)\, dt \qquad \text{se} \quad a \leq x \leq b .$$

Então $A'(x)$ existe e tem-se $A'(x) = F(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

TEOREMA 14.6. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. *Se a função vectorial F admite derivada contínua F' no intervalo aberto I, então para cada escolha de c e x em I tem-se*

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\, dt .$$

O teorema seguinte é uma generalização da propriedade $c\int_a^b F(t)dt = \int_a^b cF(t)dt$, com a multiplicação por um escalar c substituido pelo produto escalar pelo vector C.

TEOREMA 14.7. *Se $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ é integrável em $[a, b]$, então para cada vector $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ o produto escalar $C \cdot F$ é integrável em $[a, b]$ e tem-se*

$$C \cdot \int_a^b F(t)\, dt = \int_a^b C \cdot F(t)\, dt .$$

Demonstração. Uma vez que cada componente de F é integrável, temos

$$C \cdot \int_a^b F(t)\,dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\,dt = \int_a^b C \cdot F(t)\,dt\,.$$

Apliquemos agora o Teorema 14.7, conjuntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para obtermos a seguinte propriedade importante das funções vectoriais.

TEOREMA 14.8. *Se F e $\|F\|$ são integráveis em $[a, b]$, tem-se*

$$\left\| \int_a^b F(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\|\,dt\,. \tag{14.1}$$

Demonstração. Seja $C = \int_a^b F(t)dt$. Se $C = O$, então (14.1) resulta trivial. Supomos, portanto, $C \neq O$ e aplicando o Teorema 14.7, temos

$$\|C\|^2 = C \cdot C = C \cdot \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b C \cdot F(t)\,dt\,. \tag{14.2}$$

Visto que o produto escalar $C \cdot F(t)$ é uma função real, temos a desigualdade

$$\int_a^b C \cdot F(t)\,dt \leq \int_a^b |C \cdot F(t)|\,dt \leq \int_a^b \|C\|\,\|F(t)\|\,dt\,, \tag{14.3}$$

onde na última passagem fizemos uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|C \cdot F(t)| \leq \|C\|$ $\|F(t)\|$. Combinando (14.2) e (14.3) obtemos

$$\|C\|^2 \leq \|C\| \int_a^b \|F(t)\|\,dt\,.$$

Porque $\|C\| > 0$, podemos dividir ambos os membros por $\|C\|$ para obtermos (14.1)

14.4. Exercícios

Calcular as derivadas $F'(t)$ e $F''(t)$ para cada uma das funções vectoriais indicadas nos Exercícios 1 a 6.

1. $F(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$.
2. $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} 2t, \tan t)$.
3. $F(t) = (\operatorname{arcsen} t, \arccos t)$.
4. $F(t) = 2e^t\boldsymbol{i} + 3e^t\boldsymbol{j}$.
5. $F(t) = \operatorname{ch} t\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sh} 2t\,\boldsymbol{j} + e^{-3t}\boldsymbol{k}$.
6. $F(t) = \log(1 + t^2)\,\boldsymbol{i} + \operatorname{arctg} t\,\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{1 + t^2}\,\boldsymbol{k}$.
7. Seja F a função vectorial definida por

$$F(x) = xe^x A + \frac{1}{x}\int_1^x F(t)\,dt\,,$$

para todo $x > 0$, sendo A um vector fixo não nulo.

24. Uma função vectorial F, que nunca é nulo e tem derivada contínua $F'(t)$ para todo t, é sempre paralela à sua derivada. Provar que existe um vector constante A e uma função real positiva u tal que $F(t) = u(t)A$ para todo t.

14.5. Aplicações às curvas. Tangência

Seja X uma função vectorial cujo domínio é um intervalo I. Quando t percorre I, os correspondentes valores da função $X(t)$ definem um conjunto de pontos que designaremos por *gráfico* de X. Se os valores da função estão definidos num espaço a duas ou três dimensões, podemos efetuar a correspondente representação geométrica. Por exemplo se $X(t) = P + tA$, com P e A vectores fixos de V_3, e $A \neq O$, o gráfico de X é uma linha reta passando por P e paralela a A. Uma função mais geral dará origem a um gráfico mais geral, como sugere o exemplo da figura 14.1. Se X é contínua em I, tal gráfico diz-se uma *curva;* mais rigorosamente, a curva descrita por X. Por vezes dizemos que a curva é definida *parametricamente* por X. O intervalo I diz-se o *intervalo paramétrico;* e t diz-se um *parâmetro.*

As propriedades da função X podem utilizar-se para investigar as propriedades geométricas do seu gráfico. Em particular a derivada X' está relacionada com o conceito de tangência, como no caso duma função real. Formemos a razão incremental

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \tag{14.4}$$

e analisemos o seu comportamento quando $h \to 0$. Este quociente é o produto do vector $X(t + h) - X(t)$ pelo escalar $1/h$. O numerador, $X(t + h) - X(t)$, representado na fig. 14.2, é paralelo ao vector (14.4). Se exprimirmos esta razão incremental por intermédio das respetivas componentes e fazemos $h \to 0$, encontramos

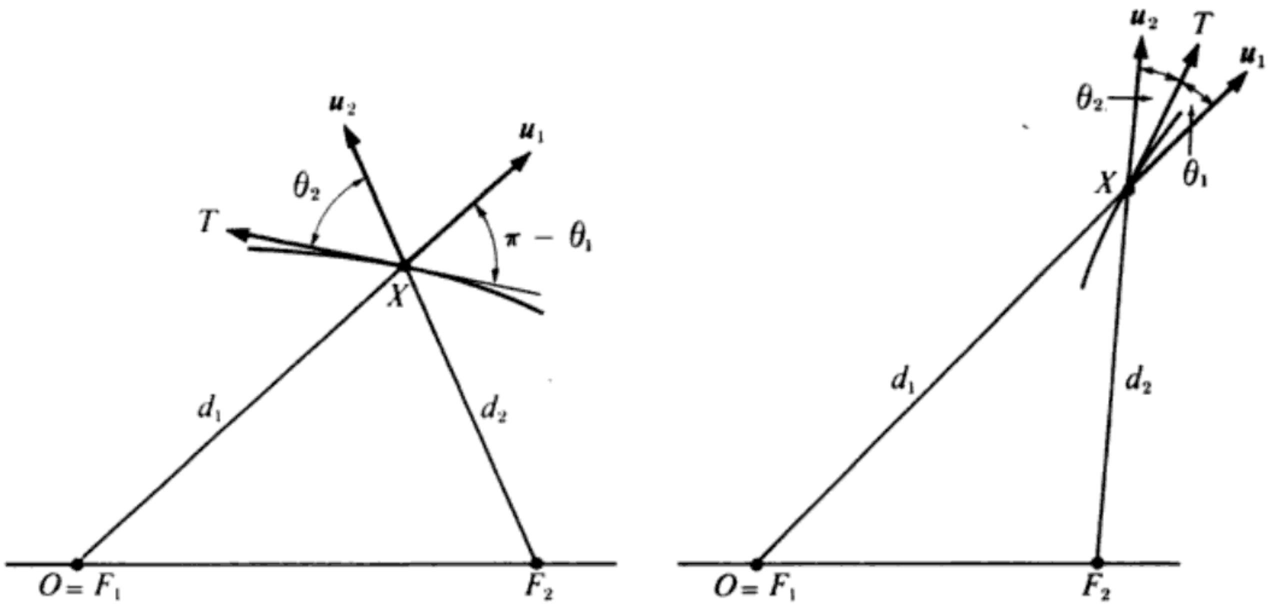
$$\lim_{h\to 0}\frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X'(t)\,,$$

admitindo, é claro, que a derivada $X'(t)$ existe. A interpretação geométrica desta relação sugere a seguinte definição:

DEFINIÇÃO. *Seja C uma curva descrita por uma função vectorial contínua X. Se a derivada $X'(t)$ existe e é não nula, a reta que passa por $X(t)$ e é paralela a $X'(t)$ chama-se a tangente a C em $X(t)$. O vector $X'(t)$ chama-se o vector tangente a C em $X(t)$.*

EXEMPLO 1. *Linha reta.* Para uma reta dada $X(t) = P + tA$, com $A \neq O$, tem-se $X'(t) = A$, pelo que a tangente à reta em cada um dos seus pontos coincide com a própria reta $X(t)$, propriedade que evidentemente era de desejar.

$$X' \cdot (u_1 + u_2) = d_1' + d_2', \qquad X' \cdot (u_1 - u_2) = d_1' - d_2'. \tag{14.6}$$



(a) $\theta_2 = \pi - \theta_1$, na elipse (b) $\theta_2 = \theta_1$ na hipérbole

Fig. 14.4. Demonstração das propriedades de reflexão para a elipse e hipérbole.

Na elipse $d_1 + d_2$ é constante, pelo que $d_1' + d_2' = 0$. Sobre cada ramo da hipérbole $d_1 - d_2$ é constante, pelo que $d_1' - d_2' = 0$. Deste modo, as equações (14.6) dão-nos

$$X' \cdot (u_1 + u_2) = 0 \quad \text{na elipse,} \qquad X' \cdot (u_1 - u_2) = 0 \quad \text{na hipérbole.}$$

Seja $T = X'/\|X'\|$ é um vector unitário tendo a mesma direção e sentido que X'. Então T é tangente à cónica, e tem-se

$$T \cdot u_2 = -T \cdot u_1 \quad \text{na elipse,} \qquad T \cdot u_2 = T \cdot u_1 \quad \text{na hipérbole.}$$

Se θ_1 e θ_2 representam, respectivamente, os ângulos que T faz com u_1 e u_2, com $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ e $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, estas duas últimas igualdades mostram que

$$\cos \theta_2 = -\cos \theta_1 \quad \text{na elipse,} \qquad \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \quad \text{na hipérbole.}$$

Daqui se conclui que $\theta_2 = \pi - \theta_1$ na elipse e $\theta_2 = \theta_1$, na hipérbole. Estas relações entre os ângulos θ_1 e θ_2 justificam as propriedades de reflexão da elipse e da hipérbole já referidas.

14.6. Aplicações ao movimento curvilíneo. Vector velocidade, grandeza do vector velocidade e vector aceleração

Suponhamos uma partícula movendo-se no espaço bidimensional ou tridimensional, de tal maneira que a sua posição no instante t, referida a um determinado sistema de coordenadas, seja $X(t)$. Quando t varia num certo intervalo de tempo, a trajetória descrita pela partícula é precisamente o gráfico da função $X(t)$. Quer isto dizer que a função vectorial X serve como modelo matemático para descrever o movimento. À função vectorial X dá-se a designação de *função de posição* do movimento. Conceitos físicos com o vector velocidade, a velocidade (grandeza do vector velocidade) e o vector aceleração podem ser definidos em termos de derivadas da função de posição.

Na discussão que se segue supomos que a função de posição pode derivar-se tantas vezes quantas as necessárias, sem que seja preciso afirmá-lo expressamente de cada vez.

DEFINIÇÃO. *Considere-se um movimento definido por uma função vectorial X. A derivada $X'(t)$ define o vector velocidade no instante t. A norma desse vector, $\|X'(t)\|$, dá a grandeza da velocidade. A segunda derivada da função de posição, $X''(t)$, define o vector aceleração.*

Notação. Algumas vezes a função de posição X representa-se por $\boldsymbol{r}$, o vector velocidade por $\boldsymbol{v}$, a grandeza da velocidade por v e a aceleração por $\boldsymbol{a}$. Assim, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'$, $v = \|\boldsymbol{v}\|$ e $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{r}''$.

Se o vector velocidade $X'(t)$ se considera ligado ao ponto que se move sobre a curva em $X(t)$, vê-se que ele tem a direção da tangente à curva. A palavra velocidade, como norma do vector velocidade, dá o coeficiente de variação do comprimento do arco medido sobre a curva com o tempo. Quer dizer, a grandeza do vector velocidade diz-nos da rapidez com que a partícula está a mover-se em cada instante e a sua direção e sentido dizem-nos para onde a partícula se move nesses mesmos instantes. O vector velocidade variará se modificarmos quer a sua direção quer a sua grandeza (velocidade) ou ambos. O vector aceleração dá uma medida desta variação. A aceleração está relacionada com o efeito que experimentamos quando um automóvel muda de velocidade ou de direção. Contrariamente ao vector velocidade, o vector aceleração não tem necessariamente a direção da tangente à curva $X(t)$.

EXEMPLO 1. *Movimento rectilíneo.* Consideremos o movimento em que o vector posicional é dado por

$$\boldsymbol{r}(t) = P + f(t)A\,,$$

com P e A vectores constantes e $A \neq O$. Este movimento tem lugar ao longo de uma reta passando por P e paralela a A. O vector velocidade, sua grandeza, e o vector aceleração são dados por

$$\boldsymbol{v}(t) = f'(t)A\,, \qquad v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\| = |f'(t)|\;\|A\|\,, \qquad \boldsymbol{a}(t) = f''(t)A\,.$$

Se $f'(t)$ e $f''(t)$ são diferentes de zero, então os vectores aceleração e velocidade são paralelos.

EXEMPLO 2. *Movimento circular.* Se um ponto (x, y) em V_2 é representado pelas suas coordenadas polares r e θ, tem-se

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Fixado r, por exemplo $r = a$, e podendo θ tomar todos os valores num intervalo de amplitude, pelo menos, 2π, o ponto de coordenada (x, y) descreve uma circunferência de centro na origem e raio a. Se θ se considera uma função de t, $\theta = f(t)$, tem-se um movimento definido pela função vectorial de posição

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos f(t)\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,f(t)\boldsymbol{j}\,.$$

O correspondente vector velocidade é

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = -af'(t)\,\mathrm{sen}\,f(t)\boldsymbol{i} + af'(t)\cos f(t)\boldsymbol{j}\,,$$

donde se pode obter a grandeza da velocidade, no instante t, definida por

$$v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\| = a\,|f'(t)|\,.$$

O fator $|f'(t)| = |d\theta/dt|$ é a chamada *velocidade angular* da partícula.

Um caso de interesse corresponde à hipótese de $\theta = \omega t$, com ω uma constante positiva. Neste caso a partícula parte do ponto $(a, 0)$ no instante $t = 0$ e move-se no sentido positivo (contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio) ao longo da circunferência com velocidade angular constante ω. As fórmulas que definem o vector posicional, o vector velocidade, a grandeza deste, e o vector aceleração são, respetivamente,

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j}\,, \qquad \boldsymbol{v}(t) = -\omega a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega a\cos\omega t\,\boldsymbol{j}\,, \qquad v(t) = a\omega\,.$$

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2 a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2 a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t)\,,$$

mostrando a última fórmula que o vector aceleração é paralelo ao vector posicional, mas de sentido contrário. Quando se faz a representação geométrica deste vector para uma dada posição da partícula, ele fica dirigido desta para o centro da circunferência que a partícula descreve. Por esta razão se designa por *aceleração centrípeta*.

Nota: Se uma partícula em movimento tem massa m, a segunda lei de Newton estabelece que a força que atua sobre ela é o vector $m\boldsymbol{a}(t)$, produto da massa pela aceleração. Se a partícula se move sobre uma circunferência com velocidade angular constante, aquela força diz-se *centrípeta* porque está dirigida para o centro. Esta força é exercida pelo mecanismo que obriga a partícula a uma trajetória circular. O mecanismo é a corda no caso da pedra girando numa funda ou a *atração da gravidade* no caso de um satélite à volta da Terra. A reação, igual e oposta (devido à terceira lei de Newton), isto é, a força $-m\boldsymbol{a}(t)$, diz-se a força *centrífuga*.

EXEMPLO 3. *Movimento sobre uma elipse.* A figura 14.5 representa uma elipse de equação cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, e duas circunferências concêntricas de raios a e b. O ângulo θ chama-se o *ângulo excêntrico*. Está relacionado com as coordenadas (x, y) dum ponto da elipse pelas fórmulas

$$x = a\cos\theta\,, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Quando θ varia num intervalo de amplitude 2π, o ponto correspondente (x, y) percorre a elipse. Se considerarmos θ como função de t, $\theta = f(t)$, temos um movimento definido pela função vectorial de posição

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos f(t)\boldsymbol{i} + b\,\mathrm{sen} f(t)\boldsymbol{j}\,.$$

Se $\theta = \omega t$, com ω uma constante positiva, o vector velocidade, a sua grandeza e o vector aceleração são dados respetivamente por

$$\boldsymbol{v}(t) = \omega(-a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{i} + b\cos\omega t\,\boldsymbol{j})\,, \qquad v(t) = \omega(a^2\mathrm{sen}^2\,\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{1/2}\,,$$

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2(a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}(t)\,.$$

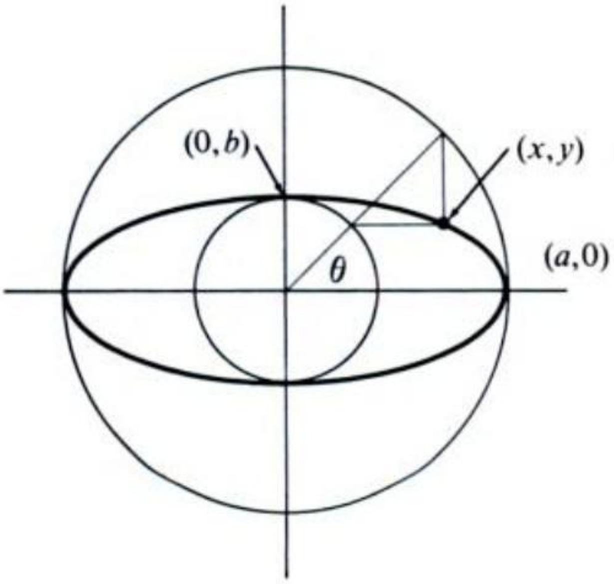


Fig. 14.5. Movimento sobre uma elipse

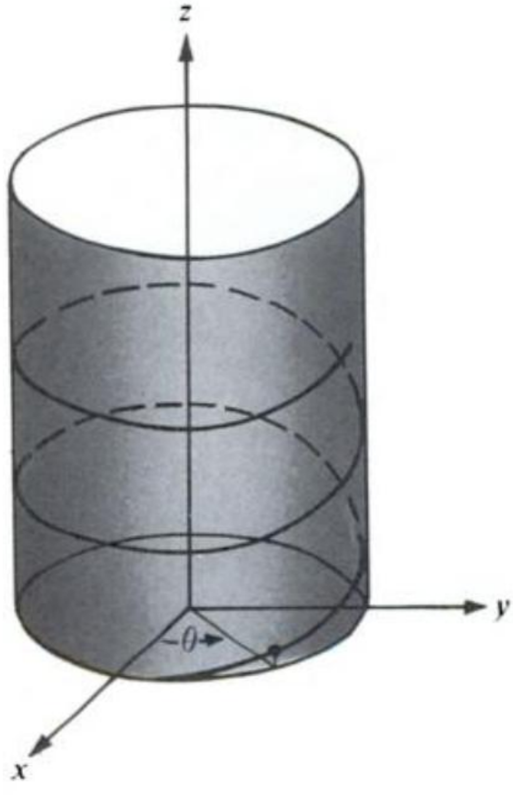


Fig. 14.6. Movimento sobre uma hélice cilíndrica.

Assim, quando a partícula se move sobre a elipse de tal maneira que o ângulo excêntrico seja uma função linear do tempo, a aceleração é centrípeta.

EXEMPLO 4. *Movimento sobre uma hélice.* Se um ponto (x, y, z) gira em torno do eixo OZ a uma distância constante a daquele e simultaneamente se move paralelamente ao eixo de maneira que a sua cota z varia proporcionalmente ao ângulo de que roda em torno daquele, a trajetória resultante chama-se uma *hélice cilíndrica*. Na figura 14.6 apresenta-se um exemplo. Se θ representa o ângulo de revolução, tem-se

$$x = a\cos\theta\,, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad z = b\theta\,, \tag{14.7}$$

onde $a > 0$, e $b \neq 0$. Quando θ varia de 0 a 2π, as coordenadas x e y voltam a assumir os valores iniciais enquanto z varia de 0 a $2\pi b$. O número $2\pi b$ designa-se habitualmente por *passo* da hélice.

Suponhamos agora que $\theta = \omega t$, com ω constante. O movimento sobre a hélice é então descrito pelo vector posicional

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j} + b\omega t\boldsymbol{k}\,.$$

Os vectores velocidade e aceleração são dados por

$$\boldsymbol{v}(t) = -\omega a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega a\cos\omega t\,\boldsymbol{j} + b\omega\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{a}(t) = -\omega^2(a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j})\,.$$

Então, quando o vector aceleração está aplicado na partícula em movimento, ele mantém-se paralelo ao plano XOY dirigido para o eixo OZ.

Se eliminarmos θ entre as duas primeiras equações (14.7), obtemos a equação cartesiana $x^2 + y^2 = a^2$, que reconhecemos como sendo a equação duma circunferência no plano XOY e centro na origem. No espaço tridimensional, porém, esta equação representa uma superfície. Um ponto (x, y, z) satisfaz à equação se, e só se, a sua distância a OZ for a. O conjunto de todos esses pontos é um cilindro circular de raio a e com o eixo coincidente com OZ. A hélice desenvolve-se ao longo desse cilindro.

14.7. Exercícios

Em cada um dos Exercícios 1 a 6, $\boldsymbol{r}(t)$ representa o vector posicional, no instante t, referente a uma partícula movendo-se numa curva do espaço. Em cada exemplo, determinar os vectores velocidade $\boldsymbol{v}(t)$ e aceleração $\boldsymbol{a}(t)$ em função de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; calcular ainda $\boldsymbol{v}(t)$.

1. $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^3)\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\boldsymbol{k}$.
2. $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,t\,\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$.
3. $\boldsymbol{r}(t) = 3t\cos t\,\boldsymbol{i} + 3t\,\mathrm{sen}\,t\,\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$.
4. $\boldsymbol{r}(t) = (t - \mathrm{sen}\,t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + 4\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\,\boldsymbol{k}$.
5. $\boldsymbol{r}(t) = 3t^2\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$.
6. $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,t\,\boldsymbol{j} + (1 - \cos t)\boldsymbol{k}$.
7. Considerar a hélice cilíndrica definida pela equação vectorial $\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\boldsymbol{j} + b\omega t\boldsymbol{k}$, com ω uma constante positiva. Provar que a tangente à curva faz um ângulo constante com OZ e que o cosseno deste ângulo é $b/\sqrt{a^2 + b^2}$.
8. Ainda referente à hélice do Exercício 7, provar que os vectores velocidade $\boldsymbol{v}$ e aceleração $\boldsymbol{a}$ tem comprimento constante, e que

$$\frac{\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{v}\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}\,.$$

9. Ainda referente ao Exercício 7, represente $\boldsymbol{u}(t)$ o vector unitário $\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{sen}\,\omega t\boldsymbol{i} - \cos\omega t\boldsymbol{j}$.

Provar que existem duas constantes A e B tais que $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = A\boldsymbol{u}(t) + B\boldsymbol{k}$, e exprimir A e B em função de a, b, e ω.

10. Provar que para qualquer movimento o produto escalar dos vecotores velocidade e aceleração vale metade da derivada do quadrado da velocidade:

$$\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2(t)\,.$$

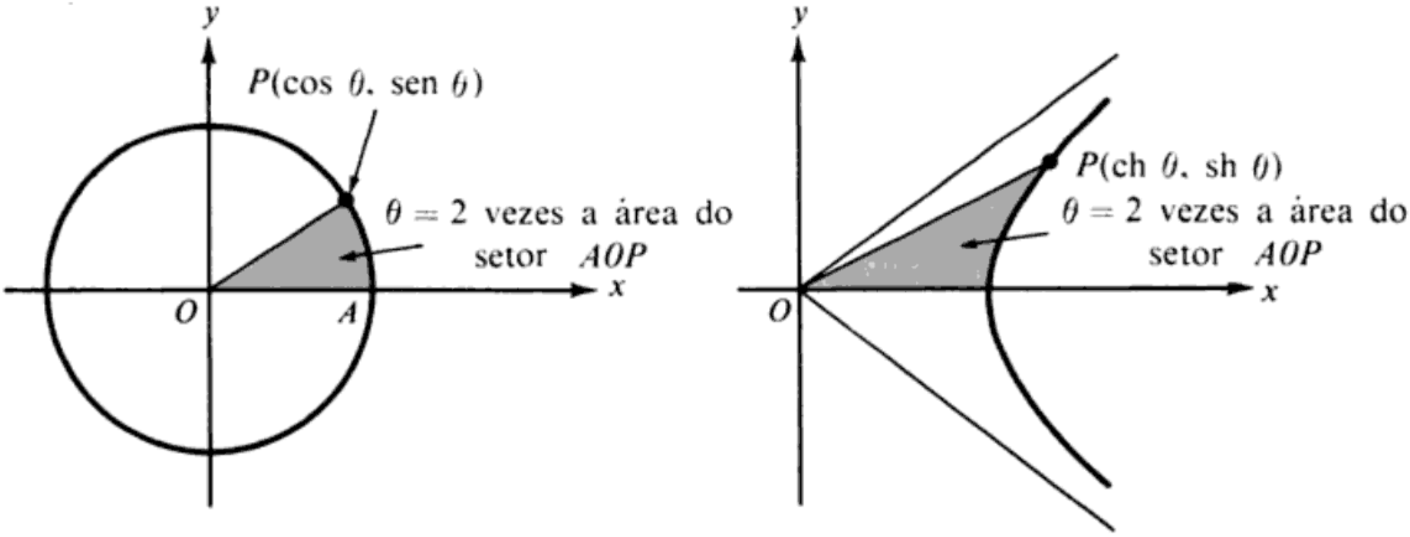
11. Seja $\boldsymbol{c}$ um vector unitário constante. Uma partícula move-se no espaço de tal modo que o seu vector possicional $\boldsymbol{r}(t)$ verifica a equação $\boldsymbol{r}(t) \cdot c = e^{2t}$ para todo t e o seu vector velocidade $\boldsymbol{v}(t)$ faz um ângulo constante θ com c, sendo $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
    (a) Provar que $||\boldsymbol{v}(t)||$, num instante t, é $2e^{2t}/\cos\theta$.
    (b) Exprimir o produto escalar $\boldsymbol{a}(t)\ .\ \boldsymbol{v}(t)$ em função de t e θ.

12. A identidade $\text{ch}^2\theta - \text{sh}^2\theta = 1$ para funções hiperbólicas sugere que a hiperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ pode representar-se pelas equações paramétricas $x = a\,\text{ch}\,\theta$, $y = b\,\text{sh}\,\theta$ ou, o que é a mesma coisa, pela equação vectorial $r = a\text{ch}\,\theta\,\boldsymbol{i} + b\text{sh}\,\theta\,\boldsymbol{j}$. Quando $a = b = 1$, ao parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ pode ser dada uma interpretação geométrica análoga à dada a $\boldsymbol{\theta}$, sen $\boldsymbol{\theta}$ e cos $\boldsymbol{\theta}$ no círculo de raio unidade, desenhado na figura 14.7(a). A figura 14.7(b) representa um ramo da hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Se o ponto P tem coordenadas $x = \text{ch}\,\boldsymbol{\theta}$ e $y = \text{sh}\,\boldsymbol{\theta}$, provar que $\boldsymbol{\theta}$ é igual a duas vezes a área do setor AOP sombreado na figura.

    [*Sugestão:* Represente $A(\boldsymbol{\theta})$ a área do setor OAP. Mostrar que

$$A(\theta) = \tfrac{1}{2}\,\text{ch}\,\theta\,\text{sh}\,\theta - \int_1^{\text{ch}\,\theta} \sqrt{x^2 - 1}\,dx\,.$$

    Derivar para obter $A'(\theta) = \dfrac{1}{2}$.]



(a) Círculo $x^2 + y^2 = 1$. (b) Hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Fig. 14.7. Analogia entre o parâmetro para o círculo e o correspondente para a hipérbole.

13. Uma partícula move-se ao longo de uma hipérbole, segundo a equação $\boldsymbol{r}(t) = a \operatorname{ch}\omega t\boldsymbol{i} + b \operatorname{sh}\omega t\boldsymbol{j}$, com ω constante. Provar que a aceleração é centrífuga.
14. Provar que a tangente a uma parábola num ponto X bisseta o ângulo entre a reta que une X com o foco e a que, passando por X, é paralela ao eixo. Isto constitui a propriedade de reflexão na parábola (Ver figura 14.3).
15. Uma partícula de massa 1 move-se num plano segundo a equação $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$. Ela é atraída para a origem por uma força cuja grandeza é quatro vezes a distância da partícula à origem. No instante $t = 0$, a posição inicial, é $\boldsymbol{r}(0) = 4\boldsymbol{i}$ e o vector velocidade inicial é $v(0) = 6\boldsymbol{j}$.
    (a) Determinar as componentes $x(t)$ e $y(t)$ explicitamente em função de t.
    (b) A trajetória da partícula é uma cónica. Determinar a equação cartesiana desta cónica, desenhá-la e indicar o sentido do movimento ao longo da curva.
16. Uma partícula move-se ao longo duma parábola $x^2 + c(y - x) = 0$ de tal maneira que as componentes segundo OX e OY do vector aceleração são iguais. Se são necessárias T unidades de tempo para ir de $(c, 0)$ a $(0, 0)$ que tempo será necessário para ir de $(c, 0)$ a $(c/2, c/4)$?
17. Supondo que a curva C é descrita por duas funções equivalentes X e Y, com $Y(t) = X[u(t)]$, provar que em cada ponto de C os vectores velocidade associados com X e Y são paralelos, mas que os correspondentes vectores aceleração não são necessariamente paralelos.

14.8. O vector tangente unitária, o vector normal principal e o plano osculador a uma curva

No caso do movimento retilíneo o vector aceleração é paralelo ao vector velocidade. No caso do movimento circular, com velocidade angular constante, o vector aceleração é perpendicular ao vector velocidade. Vamos estudar, nesta seção, que num movimento qualquer o vector aceleração é a soma de dois vectores perpendiculares entre si, um paralelo ao vector velocidade, e outro perpendicular a esse mesmo vector. Se o movimento é não retilíneo, estes dois vectores definem um plano que passa pelo ponto correspondente da curva e que se chama *plano osculador*.

Para estudarmos estes conceitos, introduzimos o vector *tangente unitária* T. Esta é outra função vectorial associada à curva e definida por

$$T(t) = \frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}$$

sempre que a velocidade $\|X'(t)\| \neq 0$. Observe-se que $\|T(t)\| = 1$ para todo o t.

A fig. 14.8 mostra a posição do vector tangente unitária $T(t)$ ao longo da curva, para diferentes valores de t. Quando a partícula se move ao longo da curva, o correspondente vector T, tendo comprimento constante, pode variar unicamente na sua direção. O modo de variação de T é medido pela sua derivada T'. Visto que T tem grandeza constante, o Teorema 14.2 diz-nos que T é perpendicular à sua derivada T'.

Se o movimento for retilíneo, então $T' = O$. Se $T' \neq O$, o vector unitário com a mesma direção e sentido de T' chama-se o *vector normal principal* à curva e representa-se por N. Quer dizer, N é uma nova função vectorial associada à curva e definida por

$$\boldsymbol{a}(t) = v'(t)T(t) + v(t)\ \|T'(t)\|\ N(t)\,. \tag{14.9}$$

Demonstração. A fórmula que define o vector tangente unitário dá-nos

$$\boldsymbol{v}(t) = v(t)T(t)\,.$$

Derivando encontra-se

$$\boldsymbol{a}(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t)\,,$$

Que demonstra (14.8). Para demonstrar (14.9) basta utilizar a definição de N escrevendo $T'(t) = \| T'(t)\| N(t)$.

Este teorema mostra que o vector aceleração está sempre no plano osculador. Na figura 4.10 apresenta-se um exemplo. Os coeficientes de $T(t)$ e $N(t)$ em (14.9) chamam-se respetivamente *componentes tangencial e normal* da aceleração. Uma variação na grandeza da velocidade contribui para a variação da componente tangencial da aceleração, enquanto que uma variação na direção do vector velocidade contribui para uma variação da componente normal da aceleração.

No caso da trajetória ser plana, o comprimento de $T'(t)$ é susceptivel duma interpretação geométrica interessante. E isto T' ser um vector unitário, podemos escrever

$$T(t) = \cos \alpha(t)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha(t)\boldsymbol{j}\,,$$

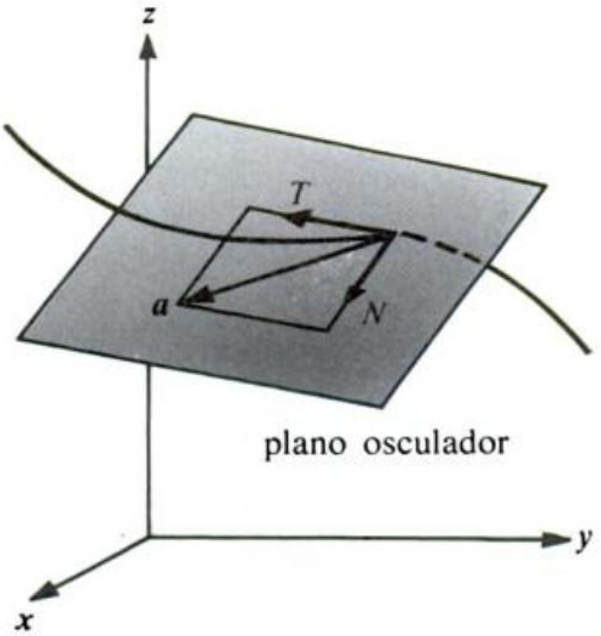


Fig. 14.10. O vector aceleração está situado no plano osculador

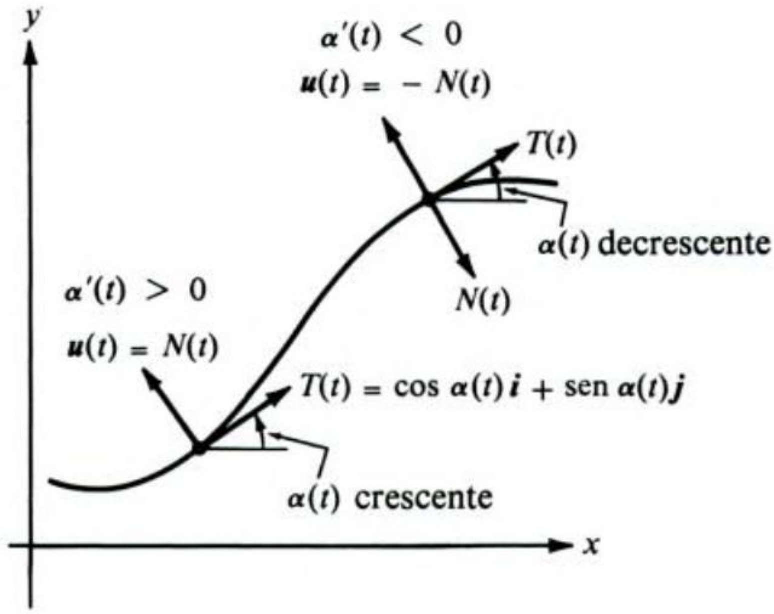


Fig. 4.11. O ângulo de inclinação do vector tangente a uma curva plana.

onde $\alpha(t)$ representa o ângulo do vector tangente com o semi-eixo positivo OX, como se indica na fig. 14.11. Derivando, encontramos $T'(t) = -\operatorname{sen}\ \alpha(t)\ \alpha'(t)\boldsymbol{i} + \cos\alpha(t)\ \alpha'(t)\boldsymbol{j} = \alpha'(t)\boldsymbol{.u}(t)$ onde $\boldsymbol{u}(t)$ é um vector unitário. Portanto $\| T'(t)\| = |\alpha'(t)|$ o que prova ser $\| T'(t)\|$

duas ou três dimensões, definida pelo vector posicional $\boldsymbol{r}$, e consideramos a parte da curva definida por $\boldsymbol{r}(t)$ quando t varia num intervalo $[a, b]$. Em princípio, apenas admitimos que $\boldsymbol{r}$ é contínua no intervalo $[a, b]$. Mais adiante imporemos outras restrições.

Consideremos agora qualquer partição P do intervalo $[a, b]$ por exemplo

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, \qquad \text{onde} \qquad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Representemos por $\pi(P)$ o contorno poligonal cujos vértices são $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{r}(t_1), \ldots, \boldsymbol{r}(t_n)$, respetivamente. (Na fig. 14.14 está representado um exemplo com $n = 6$). Os lados do contorno poligonal tem comprimentos

$$\|\boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)\|, \ \|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)\|, \ldots, \ \|\boldsymbol{r}(t_n) - \boldsymbol{r}(t_{n-1})\|.$$

Portanto, o comprimento de $\pi(P)$, que representamos por $|\pi(P)|$, é a soma

$$|\pi(P)| = \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_k) - \boldsymbol{r}(t_{k-1})\|.$$

Definição. *Se existir um número positivo M tal que*

$$|\pi(P)| \leq M \tag{14.10}$$

para todas as partições P de $[a, b]$, então a curva diz-se retificável e o seu comprimento, representado por $\Lambda(a,b)$, define-se como o supremo do conjunto dos números $|\pi(P)|$. Se não existir tal M, a curva diz-se não retificável.

Observe-se que, se existe um M que satisfaça a (14.10) para cada partição P, tem-se

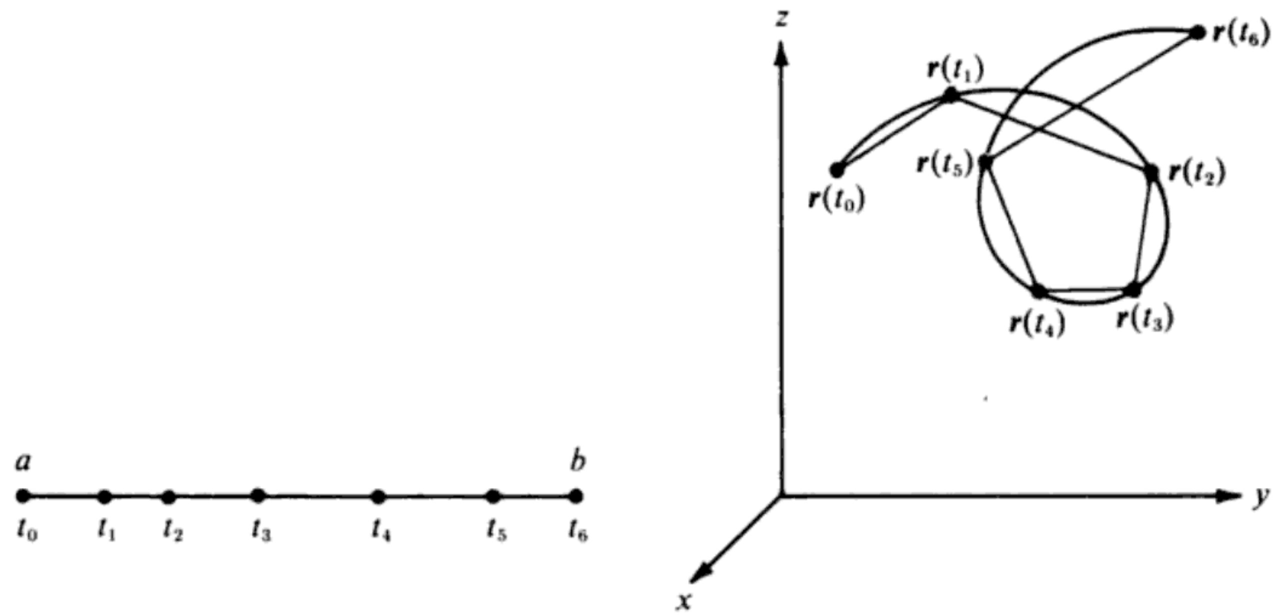


Fig. 14.14. Uma partição de $[a, b]$ em seis subintervalos e a correspondente linha poligonal inscrita.

$$|\pi(P)| \leq \Lambda(a, b) \leq M, \tag{14.11}$$

uma vez que o supremo não pode exceder nenhum limite superior.

É fácil provar que uma curva é retificável sempre que o seu vector velocidade $\boldsymbol{v}$ é contínuo no intervalo $[a, b]$. Com efeito o teorema seguinte diz-nos que neste caso podemos usar o integral da velocidade com um limite superior de todos os números $|\pi(P)|$.

TEOREMA 14.10. *Seja $\boldsymbol{v}(t)$ o vector velocidade da curva com vector posicional $\boldsymbol{r}(t)$ e $v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\|$ a respectiva grandeza. Se v é contínua em $[a, b]$, a curva é retificável e o seu comprimento $\Lambda(a, b)$ satisfaz à desigualdade*

$$\Lambda(a, b) \leq \int_a^b v(t)\, dt. \tag{14.12}$$

Demonstração. Para cada partição P de $[a, b]$ vem

$$\begin{aligned} |\pi(P)| &= \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_k) - \boldsymbol{r}(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{r}'(t)\, dt \right\| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{v}(t)\, dt \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\boldsymbol{v}(t)\|\, dt = \int_a^b v(t)\, dt, \end{aligned}$$

sendo a desigualdade uma consequência do Teorema 14.8. Isto mostra que $|\pi(P)| \leq \int_a^b v(t)\, dt$ para todas as partições P e por conseguinte o número $\int_a^b v(t) dt$ é um limite superior do conjunto de todos os números $|\pi(P)|$. Isto prova que a curva é retificável e, ao mesmo tempo. diz-nos que o comprimento $\Lambda(a, b)$ não pode exceder o integral da velocidade.

Mais adiante provaremos que a desigualdade (14.12) é, com efeito, uma *igualdade*. A demonstração deste fato exigirá a aplicação da *aditividade* do comprimento da curva, propriedade que vamos passar a estudar.

14.11. Aditividade do comprimento do arco.

Se uma curva retificável se divide em duas partes, o comprimento de toda a curva é a soma dos comprimentos das duas partes. Este é outro exemplo das proposições "intuitivamente evidentes" e cuja demonstração não é de modo algum trivial. Esta propriedade chamase da *aditividade do comprimento do arco* e pode ser expressa analiticamente do modo seguinte:

TEOREMA 14.11. *Considere-se uma curva retificável de comprimento $\Lambda(a, b)$ descrita pelo vector $\boldsymbol{r}(t)$ quando t varia no intervalo $[a, b]$. Se $a < c < b$, sejam C_1 e C_2 as curvas descritas por $\boldsymbol{r}(t)$ quando t varia nos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, respetivamente. Então C_1 e C_2 também são retificáveis e se $\Lambda(a, c)$ e $\Lambda(c, b)$ representam os seus respetivos comprimentos, tem-se* *primento de arco s,* definida do modo seguinte:

$$s(t) = \Lambda(a, t) \qquad \text{se} \quad t > a, \qquad s(a) = 0\,.$$

A condição $s(a) = 0$ significa muito simplesmente que estamos a admitir que o movimento se inicia quando $t = a$.

O teorema da aditividade permite-nos estabelecer algumas propriedades importantes para s. Por exemplo, temos o seguinte:

TEOREMA 14.12. *Para qualquer curva retificável, a função comprimento de arco s é monótona crescente em* $[a, b]$, *isto é, tem-se*

$$s(t_1) \le s(t_2) \qquad \textit{se} \quad a \le t_1 < t_2 \le b\,. \tag{14.15}$$

Demonstração. Se $a \le t_1 < t_2 \le b$, tem-se

$$s(t_2) - s(t_1) = \Lambda(a, t_2) - \Lambda(a, t_1) = \Lambda(t_1\,, t_2)\,,$$

onde a última igualdade resulta da aditividade. Visto que $\Lambda(t_1, t_2) \ge 0$, fica demonstrada (14.15).

Em continuação vamos provar que a função s admite derivada em cada ponto interior do intervalo em que se define e que essa derivada é igual à grandeza da velocidade da particula.

TEOREMA 14.13. *Seja s a função comprimento de arco associada com determinada curva e represente $v(t)$ a grandeza da velocidade no instante t. Se v é contínua em* $[a, b]$, *então a derivada $s'(t)$ existe para cada t em (a, b) e é dada pela fórmula*

$$s'(t) = v(t)\,. \tag{14.16}$$

Demonstração. Definamos $f(t) = \int_a^t v(u)\,du$. Sabemos que $f'(t) = v(t)$, devido ao primeiro teorema fundamental do cálculo. Pretendemos provar que $s'(t) = v(t)$. Com este objetivo formamos a razão incremental

$$\left\| \frac{\boldsymbol{r}(t + h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} \right\|. \tag{14.17}$$

Suponhamos em primeiro lugar que $h > 0$. O segmento unindo $\boldsymbol{r}(t)$ e $\boldsymbol{r}(t + h)$ pode considerar-se como uma poligonal que aproxima o arco que une esses pontos. Portanto, em virtude de (14.11), temos

$$\|\boldsymbol{r}(t + h) - \boldsymbol{r}(t)\| \le \Lambda(t, t + h) = s(t + h) - s(t)\,.$$

Aplicando este resultado em (14.17), conjuntamente com a desigualdade (14.12) do teorema 14.10, temos

$$\left\| \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(u)\, du = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Um raciocínio análogo permite concluir que estas desigualdades são ainda válidas para $h < 0$. Se fizermos $h \to 0$, a razão incremental mais à esquerda tende para $\|\boldsymbol{r}'(t)\| = v(t)$ e a da direita tende para $f'(t) = v(t)$. Daqui resulta que a razão incremental intermédia também tende para $v(t)$. Mas isto significa que $s'(t)$ existe e é igual a $v(t)$, como tinhamos afirmado.

O Teorema 14.13 está de acordo com a nossa noção intuitiva de velocidade como sendo a distância percorrida na unidade de tempo, durante o movimento.

Usando (14.16), conjuntamente com o segundo teorema fundamental do cálculo, podemos calcular a medida do comprimento do arco por integração da grandeza da velocidade. Consequentemente a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$

Em particular, quando $t_1 = a$ e $t_2 = b$, obtemos o seguinte integral para o comprimento do arco

$$\Lambda(a, b) = \int_a^b v(t)\, dt.$$

EXEMPLO 1. *Comprimento dum arco de circunferência.* Para calcular o comprimento dum arco de circunferência de raio a, podemos imaginar uma partícula movendo-se ao longo da circunferência de acordo com a equação $\boldsymbol{r}(t) = a \cos t\boldsymbol{i} + a \operatorname{sen} t\boldsymbol{j}$. O vector velocidade é $\boldsymbol{v}(t) = -a \operatorname{sen} t\boldsymbol{i} + a \cos t\boldsymbol{j}$ e a sua grandeza $v(t) = a$. Integrando a velocidade $v(t)$ num intervalo de amplitude θ, encontramos que o arco percorrido é $a\theta$, quer dizer o comprimento do arco da circunferência é proporcional ao ângulo que subtende; a constante de proporcionalidade é o raio do círculo. Para uma circunferência de raio unidade temos $a = 1$ e o comprimento do arco vale exatamente o correspondente ângulo ao centro.

EXEMPLO 2. *Comprimento do gráfico duma função real.* O gráfico duma função real f definida num intervalo $[a, b]$ pode ser tratado como uma curva cujo vector posicional $\boldsymbol{r}(t)$ é dado por

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}.$$

O correspondente vector velocidade é $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{i} + f'(t)\boldsymbol{j}$ e a sua grandeza

$$v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}.$$

Deste modo o comprimento do gráfico de f correspondente ao intervalo $[a, x]$ é dado por

$$s(x) = \int_a^x v(t)\, dt = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt\,. \tag{14.18}$$

14.13. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 9 determinar o comprimento do arco de trajectória descrita por uma partícula movendo-se sobre uma curva definida pelo vector posicional dado e durante o intervalo de tempo referido.

1. $\boldsymbol{r}(t) = a(1 - \cos t)\boldsymbol{i} + a(t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0.$
2. $\boldsymbol{r}(t) = e^t \cos t\, \boldsymbol{i} + e^t \operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2.$
3. $\boldsymbol{r}(t) = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + a(\operatorname{sen} t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0.$
4. $\boldsymbol{r}(t) = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t\, \boldsymbol{i} + \dfrac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t\, \boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad 0 < b < a.$
5. $\boldsymbol{r}(t) = a(\operatorname{sh} t - t)\boldsymbol{i} + a(\operatorname{ch} t - 1)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le T, \quad a > 0.$
6. $\boldsymbol{r}(t) = \operatorname{sen} t\, \boldsymbol{i} + t\, \boldsymbol{j} + (1 - \cos t)\boldsymbol{k} \quad (0 \le t \le 2\pi).$
7. $\boldsymbol{r}(t) = t\, \boldsymbol{i} + 3t^2 \boldsymbol{j} + 6t^3 \boldsymbol{k} \quad (0 \le t \le 2).$
8. $\boldsymbol{r}(t) = t\, \boldsymbol{i} + \log(\sec t)\boldsymbol{j} + \log(\sec t + \operatorname{tg} t)\boldsymbol{k} \quad (0 \le t \le \frac{1}{4}\pi).$
9. $\boldsymbol{r}(t) = a\cos \omega t\, \boldsymbol{i} + a \operatorname{sen} \omega t\, \boldsymbol{j} + b\omega \boldsymbol{k} \quad (t_0 \le t \le t_1).$
10. Calcular um integral semelhante ao de (14.18) para o comprimento do gráfico duma equação de forma $x = g(y)$, admitindo g derivada contínua no intervalo $[c, d]$.
11. Uma curva tem a equação $y^2 = x^3$. Determinar o comprimento do arco unindo $(1, -1)$ a $(1, 1)$.
12. Dois pontos A e B sobre uma circunferência de raio unidade e centro O definem o setor circular AOB. Provar que o arco AB tem um comprimento igual a duas vezes a área do setor.
13. Estabelecer integrais para os comprimentos das curvas cujas equações são: (a) $y = e^x$, $0 \le x \le 1$; (b) $x = t + \log t$, $y = t - \log t$, $1 \le t \le e$. Mostrar que o segundo comprimento é $\sqrt{2}$ vezes o primeiro.
14. (a) Estabelecer o integral que dá o comprimento da curva $y = c\operatorname{ch}(x/c)$ de $x = 0$ e $x = a (a > 0, c > 0)$.
    (b) Mostrar que c vezes o comprimento desta curva é igual à área da região limitada por $y = c\operatorname{ch}(x/c)$, o eixo OX, o eixo OY e a reta $x = a$.
    (c) Calcular este integral e determinar o comprimento da curva quando $a = 2$.
15. Provar que o comprimento da curva $y = \operatorname{ch} x$ entre os pontos $(0, 1)$ e $(x, \operatorname{ch} x)$ é $\operatorname{sh} x$ se $x > 0$.
16. Uma função não negativa f goza da propriedade de o conjunto de ordenadas relativa a um intervalo arbitrário ter uma área proporcional ao comprimento do arco do gráfico referente ao mesmo intervalo. Determinar f.
17. Utilizando a equação vectorial $\boldsymbol{r}(t) = a \operatorname{sen} t\boldsymbol{i} + b\cos t\boldsymbol{j}$, onde $0 < b < a$, mostrar que o perímetro L duma elipse é dada pela fórmula

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt\,,$$

com $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$. (O número e representa a excentricidade da elipse). Este é um caso particular dum integral da forma

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt\,,$$

chamado *integral elíptico de segunda espécie*, em que $0 \leqq k < 1$. Os valores $E(k)$ estão tabulados para diferentes valores de k.

18. Se $0 < b < 4a$, seja $\boldsymbol{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\,\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j} + b \operatorname{sen} \frac{t}{2} t\boldsymbol{k}$. Provar que o comprimento do arco de trajetória descrito desde $t = 0$ até $t = 2\pi$ é $8\ a\ E(k)$, onde $E(k)$ tem o significado apresentado no Exercício 17 e $k^2 = 1 - (b/4a)^2$.
19. Uma partícula move-se segundo a lei vectorial do movimento

$$\boldsymbol{r}(t) = tA + t^2B + 2(\tfrac{2}{3}t)^{3/2}\, A \times B\,,$$

onde A e B são dois vectores unitários fixos que formam entre si um ângulo de $\pi/3$ radianos. Calcular a velocidad da partícula no instante t e determinar o tempo necessário para que percorra um arco com 12 unidades de comprimento, a partir da posição inicial $\boldsymbol{r}(0)$.
20. (a) Quando um círculo rola (sem escorregar) ao longo duma reta, um ponto da sua circunferência descreve uma curva chamada *cicloide*. Se a reta fixa fôr o eixo OX e se o ponto escolhido (x, y) estiver inicialmente na origem, provar que quando o círculo rola do ângulo θ se tem

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)\,, \qquad y = a(1 - \cos \theta)\,,$$

sendo a o raio do círculo. Estas são as equações paramétricas do cicloide.

(b) Referindo-se à alínea (a), mostrar que $dy/dx = \operatorname{cotg} \dfrac{\theta}{2}$ e provar que a tangente ao cicloide no ponto (x, y) faz um ângulo $\dfrac{1}{2}(\pi - \theta)$ com o eixo OX. Traçar o gráfico e provar que a tangente passa pelo ponto mais alto do círculo.
21. Seja C uma curva descrita por duas funções equivalentes X e Y, onde $Y(t) = X\,[u(t)]$ para $c \leq t \leq d$. Se a função u, que define a mudança de parâmetro, admite derivada contínua em $[c, d]$ provar que

$$\int_{u(c)}^{u(d)} \|X'(u)\|\, du = \int_c^d \|Y'(\cdot)\|\, dt\,,$$

e demonstrar que o comprimento do arco C é invariante sob uma tal mudança de parâmetro.
22. Considerar uma curva plana cuja equação vectorial é $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}$, *onde*

$$f(t) = t \cos\left(\frac{\pi}{2t}\right) \quad \text{se} \quad t \neq 0\,, \qquad f(0) = 0\,.$$

Considerar a seguinte partição do intervalo $[0, 1]$:

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Mostrar que o correspondente polígono inscrito $\pi(P)$ tem perímetro

$$|\pi(P)| > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

e demonstrar que a curva não é retificável.

14.14. Curvatura duma curva

No caso da reta o vector tangente unitária T não muda de direção quando se desloca sobre a reta e portanto $T' = O$. No caso de uma curva qualquer, a derivada T' dá conta da mudança de direção da tangente à curva. O coeficiente de variação da tangente unitária *em relação ao comprimento do arco* chama-se o *vector curvatura* da curva. Representa-se por dT/ds, em que s representa o comprimento do arco. A regra da derivada da função composta, aplicada em conjunção com a fórmula $s'(t) = v(t)$, permitem relacionar o vector curvatura dT/ds com a derivada T' em relação "ao tempo" pela igualdade

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{s'(t)}\,T'(t) = \frac{1}{v(t)}\,T'(t).$$

Uma vez que $T'(t) = \|T'(t)\|\,N(t)$, obtemos

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}\,N(t), \tag{14.19}$$

que põe em evidência que o vector curvatura tem a mesma direção e sentido que a normal principal $N(t)$. O fator escalar, que multiplica $N(t)$ em (14.19), é um número não negativo **chamado a *curvatura* da curva em t e representa-se por $\kappa(t)$. Temos pois que a curvatura $\kappa(t)$, definida como *a norma do vector curvatura*, é dada pela fórmula seguinte:**
seguinte:

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}. \tag{14.20}$$

EXEMPLO 1. *Curvatura duma circunferência.* Para a circunferência de raio a, dada por **$r(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\boldsymbol{j}$, tem-se** $v(t) = -a\,\mathrm{sen}\,t\,\boldsymbol{i} + a\cos t\,\boldsymbol{j}$, $v(t) = a$, $T(t) =$ **$= -\mathrm{sen}\,t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j}$ e $T'(t) = -\cos t\boldsymbol{i} - \mathrm{sen}\,t\boldsymbol{j}$. Daqui resulta $\|T'(t)\| = 1$, pelo que $k(t) = 1/a$.** Quer isto dizer que numa circunferência tem curvatura constante. O inverso da curvatura define o raio da circunferência.

Quando $\kappa(t) \neq 0$, o seu inverso define o *raio de curvatura* e representa-se por $\rho(t)$ A circunferência situada no plano osculador com raio $\rho(t)$ e centro na extremidade do vector curvatura

Tomando a norma de cada membro de (14.23) e tendo presente que

$$\|N \times T\| = \|N\| \, \|T\| \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi = 1 ,$$

obtemos $\|a \times v\| = kv^3$, o que demonstra (14.22).

Na prática é consideravelmente mais fácil calcular os vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$ (por derivação da equação vectorial da curva); em consequência a equação (14.22) pode considerar-se como um meio de calcular a curvatura. Este método é habitualmente mais simples do que a determinação da curvatura pela definição.

Para uma reta tem-se $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = O$, pelo que a curvatura é constantemente nula. Uma curva, com uma pequena curvatura num ponto, tem nesse ponto um grande raio de curvatura e na sua vizinhança difere pouco duma reta. Isto permite interpretar a curvatura como medindo a tendência para uma curva se desviar da forma retilínea.

14.15. Exercícios

1. Considerar as curvas definidas nos Exercícios 1 a 6 da seção 14.9 e para cada uma delas calcular a curvatura $\kappa(t)$, para o valor indicado de t.
2. Uma hélice cilíndrica tem por equação vectorial $r(t) = a \cos \omega t\, i + a \operatorname{sen} \omega t\, j + b\omega t\, k$. Provar que a sua curvatura κ é constante, e igual a $a/(a^2 + b^2)$.
3. Dois vectores unitários constantes A e B fazem entre si um ângulo θ, com $0 < \theta < \pi$. Uma partícula move-se sobre uma curva no espaço de tal maneira que o seu vector posicional $\boldsymbol{r}(t)$ e velocidade $v(t)$ estão relacionados pela fórmula $v(t) = A \times \boldsymbol{r}(t)$. Se $\boldsymbol{r}(0) = B$, provar que a curva tem curvatura constante e determinar essa curvatura em função de θ.
4. Um ponto move-se no espaço segundo a equação vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = 4 \cos t\, \boldsymbol{i} + 4 \operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j} + 4 \cos t\, \boldsymbol{k} .$$

   (a) Provar que a trajetória é uma elipse e achar a equação do plano que contém essa elipse.
   (b) Provar que o raio de curvatura é $\rho(t) = 2\sqrt{2}(1 + \operatorname{sen}^2 t)^{3/2}$.
5. Para a curva cuja equação vectorial é $r(t) = e^t\, i + e^{-t}\, j + \sqrt{2}t k$, mostrar que a curvatura é $\kappa(t) = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$.
6. (a) Para uma curva plana definida pela equação $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, mostrar que a curvatura é dada pela fórmula

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}} .$$

   (b) Se uma curva plana tem a equação cartesiana $y = f(x)$, mostrar que a curvatura no ponto $(x, f(x))$ é

$$\frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} .$$

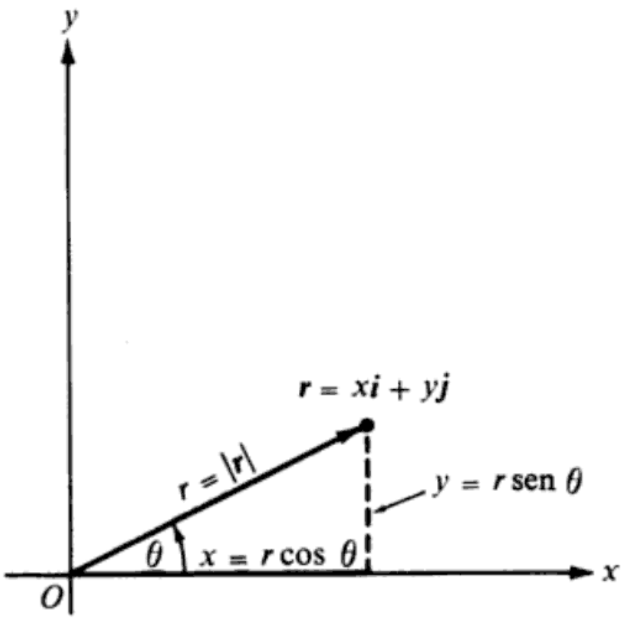


Fig. 14.15. Coordenadas polares

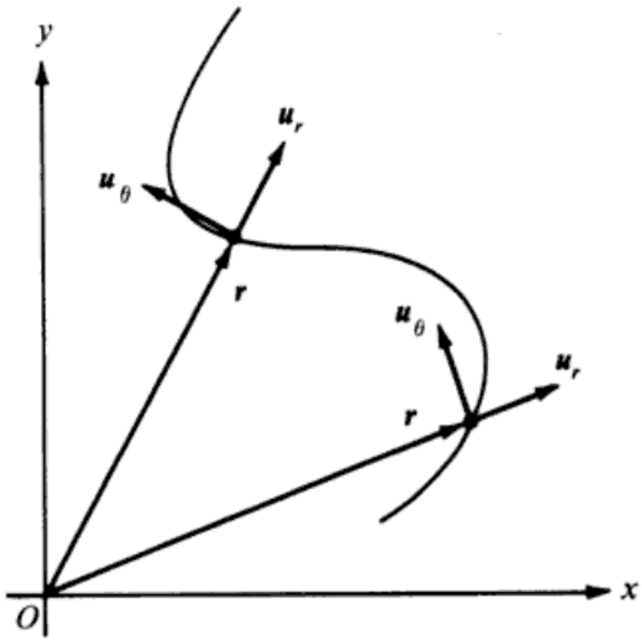


Fig. 14.16. Os vectores unitários $\boldsymbol{u}_r$ e $\boldsymbol{u}_\theta$.

É conveniente introduzir também um vector unitário $\boldsymbol{u}_\theta$, perpendicular a $\boldsymbol{u}_r$, definido do modo seguinte:

$$\boldsymbol{u}_\theta = \frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j}\,.$$

Observe-se que

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\, \boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r\,.$$

No estudo de curvas planas, os dois vectores unitários $\boldsymbol{u}_r$ e $\boldsymbol{u}_\theta$ desempenham, para as coordenadas polares, o mesmo papel que $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ para as coordenadas retangulares. A figura 14.16 mostra os vectores unitários $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$ ligados à curva, em alguns dos seus pontos.

Suponhamos agora que as coordenadas polares r e θ são funções de t, por exemplo $r = f(t)$ e $\theta = g(t)$. Vamos deduzir fórmulas para expressar os vectores velocidade e aceleração em termos de $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$. Para o vector posicional temos

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r = f(t)\boldsymbol{u}_r\,.$$

Visto que θ depende do parâmetro t, o mesmo acontece com o vector unitário $\boldsymbol{u}_r$ e deve ter-se esse fato em consideração quando se calcula o vector velocidade. Assim tem-se

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt}\,.$$

Utilizando a regra da derivação da função composta, podemos exprimir $d\boldsymbol{u}_r/dt$ em função de

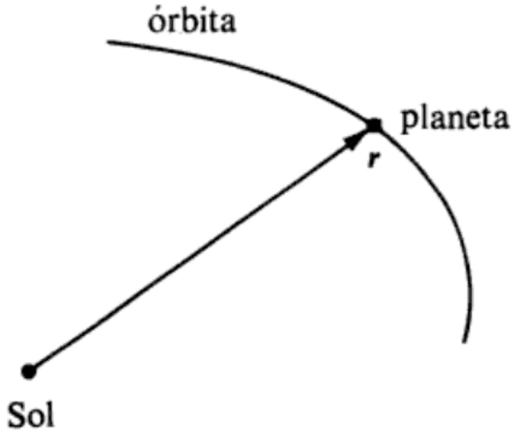


Fig. 14.19. O vector posicional do planeta relativamente ao Sol.

sendo $\boldsymbol{a}$ o vector aceleração do planeta considerado. Seja $\boldsymbol{r}$ o vector posicional do planeta em relação ao Sol (fig. 14.19), sejem $r = \|\boldsymbol{r}\|$ e $\boldsymbol{u}_r$ o vector unitário com a direção e sentido de $\boldsymbol{r}$, de modo que $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$. A lei da atração universal estabelece que

$$F = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\boldsymbol{u}_r\,,$$

com G uma constante. Combinando-a com (14.28), obtemos

$$\boldsymbol{a} = -\,\frac{GM}{r^2}\,\boldsymbol{u}_r\,, \tag{14.29}$$

a qual nos diz que a aceleração é *central*. Demonstraremos a seguir que a órbita é uma curva plana. Uma vez sabido isto, resulta imediatamente, devido à seção 14.17, que o vector posicional descreve áreas proporcionalmente ao tempo.

Para demonstrar que a trajetória é plana servimo-nos do fato de $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{a}$ serem paralelos. Considerando o vector velocidade temos

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\,.$$

Visto ser $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = O$, resulta que $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ é um vector constante, por exemplo $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$.

Se $\boldsymbol{c} = O$, o vector posicional $\boldsymbol{r}$ é paralelo ao vector velocidade e o movimento é retilíneo. Uma vez que a órbita do planeta não é retilínea, então deverá ser $\boldsymbol{c} \neq O$. Da igualdade $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$ resulta que $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ e portanto o vector posicional está num plano perpendicular a $\boldsymbol{c}$. Como já se referiu, a aceleração é central e $\boldsymbol{r}$ varre áreas proporcionais ao tempo, conclusão que prova a segunda lei de Kepler.

É fácil provar que a constante de proporcionalidade na descrição das áreas pelo vector $\boldsymbol{r}$ vale exactamente metade da grandeza do vector $\boldsymbol{c}$. Com efeito, utilizando coordenadas polares e exprimindo a velocidade em função de $\boldsymbol{u}_r$ e $\boldsymbol{u}_\theta$, como em (14.25), encontramos

$$c = r \times v = (ru_r) \times \left(\frac{dr}{dt}\,u_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,u_\theta\right) = r^2\,\frac{d\theta}{dt}\,u_r \times u_\theta\,, \tag{14.30}$$

e por conseguinte $\|c\| = |r^2 d\,\theta/dt|$. Considerando (14.27) isto é igual a $2|A'(t)|$, onde $A'(t)$ é a velocidade com que o raio vector varre a área.

A segunda lei de Kepler está representada na figura 14.20. As duas regiões sombreadas, que foram varridas pelo raio vector em intervalos de tempo iguais, tem áreas iguais.

Demonstraremos a seguir que a órbita é uma elipse. Antes de mais, formemos o produto vectorial $a \times c$ utilizando (14.29) e (14.30) para encontrarmos

$$a \times c = \left(-\frac{GM}{r^2}\,u_r\right) \times \left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\,u_r \times u_\theta\right) = -GM\,\frac{d\theta}{dt}\,u_r \times (u_r \times u_\theta) = GM\,\frac{d\theta}{dt}\,u_\theta\,.$$

Visto que $a = dv/dt$ e $u_\theta = du_r/d\theta$, a expressão anterior de $a \times c$ pode escrever-se

$$\frac{d}{dt}(v \times c) = \frac{d}{dt}(GMu_r)\,.$$

Integrando, obtém-se

$$v \times c = GMu_r + b\,,$$

onde b é outro vector constante. Podemos ainda escrever esta igualdade na forma

$$v \times c = GM(u_r + e)\,, \tag{14.31}$$

onde $GMe = b$. Interessa-nos combinar esta igualdade com (14.30) para eliminar v e obter uma equação para r. Com esta finalidade multiplicamos escalarmente ambos os membros de (14.30) por c e ambos os de (14.31) por r. Igualando as duas expressões do produto misto $r \cdot v \times c$, chegamos à equação

$$GMr(1 + e\cos\phi) = c^2\,, \tag{14.32}$$

onde $e = \|e\|$, $c = \|c\|$, e ϕ representa o ângulo entre o vector constante e e o raio vector r. (Ver figura 14.21). Se fizermos $d = c^2/(GMe)$ a equação (14.32) escreve-se

$$r = \frac{ed}{e\cos\phi + 1} \qquad \text{ou} \qquad r = e(d - r\cos\phi)\,. \tag{14.33}$$

Pelo Teorema 13.18, esta é a equação polar duma cónica de excentricidade e e um foco no Sol. A figura 14.21 mostra a diretriz traçada perpendicularmente a e e a uma distância d do Sol. A distância do planeta à diretriz é $d - r\cos\phi$, e o quociente $r/(d - r\cos\phi)$ é a excentricidade e. A cónica é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$. Visto que os planetas descrevem órbitas fechadas, a órbita sob consideração deve ser uma elipse. Isto prova a primeira lei de Kepler.

15
ESPAÇOS LINEARES

15.1. Introdução

Ao longo deste livro encontrámos muitos exemplos de objetos matemáticos que podem ser adicionados uns aos outros e multiplicados por números reais. O primeiro exemplo de tais objetos são os próprios números reais. Outros exemplos são as funções reais, os números complexos, as séries infinitas, os vectores num espaço n-dimensional e as funções vectoriais. Neste capítulo vamos analisar um conceito matemático geral, chamado *espaço linear,* que inclui todos estes exemplos e muitos outros como casos particulares.

Em resumo, um espaço linear é um conjunto de elementos de natureza qualquer no qual se efectuam certas operações (chamadas *adição* e *multiplicação por números*). Ao definir-se um espaço linear, não é necessário especificar a natureza dos elementos nem dizer como se realizam entre elas as operações acabadas de referir. Em vez disso, exige-se que as operações gozem de certas propriedades que se tomam como axiomas do espaço linear. Vamos precisamente, em seguida, fazer uma descrição pormenorizada desses axiomas.

15.2. Definição de espaço linear

Seja V um conjunto não vazio de objetos, chamados *elementos*. O conjunto V chama-se um espaço linear se satisfaz aos dez axiomas que a seguir se enunciam, divididos em três grupos.

Axiomas de fecho.

AXIOMA 1. FECHO A RESPEITO DA ADIÇÃO. *A todo o par de elementos x e y de V corresponde um único elemento de V, chamado soma de x e y e representado por $x + y$.*

AXIOMA 2. FECHO A RESPEITO DA MULTIPLICAÇÃO POR NÚMEROS REAIS. *A todo o x de V e todo o número real a corresponde um elemento de V, chamado o produto de a por x e representado por ax.*

Axiomas para a adição.

AXIOMA 3. PROPRIEDADE COMUTATIVA. *Para todo o x e y de V, tem-se $x + y = y + x$.*

AXIOMA 4. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA. *Para todo o x, y e z de V, tem-se $x + (y + z) = (x + y) + z$.*

AXIOMA 5. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO. *Existe um elemento em V, representado pelo símbolo O, tal que*

$$x + O = x \quad \textit{para todo } x \textit{ em } V.$$

AXIOMA 6. EXISTÊNCIA DE SIMÉTRICOS. *Para todo o x de V, o elemento $(-1)x$ tem a propriedade*

$$x + (-1)x = O\ .$$

Axiomas para a multiplicação por números.

AXIOMA 7. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA. *Para todo o x de V, e todo o par de números reais a e b, tem-se*

$$a(bx) = (ab)x\ .$$

AXIOMA 8. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA PARA A ADIÇÃO EM V. *Para todo o par x e y de V e todo o real a, tem-se*

$$a(x + y) = ax + ay\ .$$

AXIOMA 9. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA PARA A ADIÇÃO DE NÚMEROS. *Para todo o x em V e todo o par de reais a e b tem-se*

$$(a + b)x = ax + bx\ .$$

AXIOMA 10. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO. *Para todo x em V, tem-se $1x = x$.*

Os espaços lineares, como foram definidos atrás, são muitas vezes chamados espaços lineares *reais*, para fazer ressaltar o fato de que se multiplicam elementos de V por números reais. Se nos Axiomas 2, 7, 8 e 9 substituimos *número real* por *número complexo*, a estrutura resultante chama-se um *espaço linear complexo*. Por vezes um espaço linear chama-se também *espaço vectorial linear*, ou mais simplesmente *espaço vectorial;* os números usados como multiplicadores chamam-se *escalares*; um espaço linear real admite os números reais como escalares, um espaço linear complexo admite os números complexos como escalares. Embora se considerem aqui fundamentalmente exemplos de espaços vectoriais lineares reais, todos os teoremas são verdadeiros igualmente para os espaços vectoriais complexos. Quando fazemos uso da expressão espaço linear, sem qualquer designação suplementar, deve subentender-se que o espaço pode ser real ou complexo.

15.3. Exemplos de espaços lineares

Se especificamos qual o conjunto V e dizemos como somar os seus elementos e como multiplicá-los por números, obtemos um exemplo concreto dum espaço linear. O leitor pode facilmente verificar que cada um dos seguintes exemplos satisfaz a todos os axiomas para um espaço linear real.

EXEMPLO 1. Seja $V = \mathbf{R}$ o conjunto dos números reais e sejam $x + y$ e ax a adição e multiplicação ordinários de números reais.

EXEMPLO 2. Seja $V = \mathbf{C}$ o conjunto dos números complexos e seja $x + y$ a adição ordinária de números complexos e ax a multiplicação de números complexos x pelo número real a. Embora os elementos de V sejam números complexos, este é um espaço linear real porque os escalares são reais.

EXEMPLO 3. Seja $V = V_n$, espaço vectorial dos sistemas de números reais, com a adição e a multiplicação por escalares definida da maneira usual em função das componentes.

EXEMPLO 4. Seja V o conjunto de todos os vectores em V_n, ortogonais a um dado vector não nulo N. Se $n = 2$, este espaço linear é uma reta que passa por O, admintindo N como vector normal. Se $n = 3$, é um plano que passa por O com N como vector normal.

Os exemplos que se seguem dizem-se *espaços funcionais*. Os elementos de V são funções reais, com a adição de duas funções f e g definidas na forma usual:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo o real x pertencente à interseção dos domínios de f e g. A multiplicação duma função f por um escalar real a define-se do modo seguinte: af é a função cujo valor para cada x no domínio de f é $af(x)$. O elemento zero é a função cujos valores são sempre zero. O leitor verificará com facilidade que cada um dos conjuntos seguintes é um espaço funcional.

EXEMPLO 5. O conjunto de todas as funções definidas num dado intervalo.

EXEMPLO 6. O conjunto de todos os polinómios.

EXEMPLO 7. O conjunto de todos os polinómios de grau $\leq n$, com n fixo. (Sempre que se considera este conjunto subentende-se que o polinómio zero está também incluído). O conjunto de todos os polinómios de grau *igual a n* não é um espaço linear porque os axiomas de fecho não são satisfeitos. Por exemplo, a soma de dois polinómios de grau n não terá necessariamente grau n.

EXEMPLO 8. O conjunto de todas as funções contínuas num dado intervalo. Se o intervalo é $[a, b]$ representamos este espaço linear por $C(a, b)$.

EXEMPLO 9. O conjunto de todas as funções deriváveis num dado ponto.

EXEMPLO 10. O conjunto de todas as funções integráveis num dado intervalo.

EXEMPLO 11. O conjunto de todas as funções f definidas no ponto 1, com $f(1) = 0$. O número 0 é fundamental neste exemplo. Se substituirmos 0 por um número c não nulo, violamos o axioma de fecho.

EXEMPLO 12. O conjunto de todas as soluções duma equação diferencial linear homogénea $y'' + ay' + by = 0$, com a e b constantes. Aqui mais uma vez o 0 é essencial. O conjunto de soluções duma equação diferencial não homogénea não satisfaz aos axiomas de fecho.

Estes exemplos e muitos outros mostram bem quanto o conceito de espaço linear está estendido à álgebra, geometria e análise. Quando se deduz um teorema a partir dos axiomas dum espaço linear, obtemos um resultado válido para cada exemplo concreto. Unificando diferentes exemplos, ganhamos desta maneira, um conhecimento mais aprofundado de cada um. Algumas vezes o conhecimento dum exemplo particular ajuda-nos a antecipar ou interpretar resultados válidos para outros exemplos e põe em evidência relações que de outro modo poderiam passar despercebidas.

15.4. Consequências elementares dos axiomas

Os teoremas que se seguem deduzem-se facilmente dos axiomas para um espaço linear.

TEOREMA 15.1. UNICIDADE DO ELEMENTO NEUTRO. *Em qualquer espaço linear existe um e um só elemento neutro.*

Demonstração. O axioma 5 diz-nos que existe pelo menos um elemento neutro. Suponhamos que existiam dois, por exemplo O_1 e O_2. Tomando $x = O_1$ e O_2 no Axioma 5, obtemos $O_1 + O_2 = O_1$. Analogamente, tomando $x = O_2$ e $O = O_1$, encontramos $O_2 + O_1 = O_2$. Mas $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$, devido à propriedade comutativa, pelo que $O_1 = O_2$.

TEOREMA 15.2. UNICIDADE DOS ELEMENTOS SIMÉTRICOS. *Em qualquer espaço linear todo o elemento admite unicamente um simétrico, isto é, para todo o x existe um e um só y tal que $x + y = O$.*

Demonstração. O Axioma 6 diz-nos que cada x admite pelo menos um simétrico, a saber $(-1)x$. Admitamos agora que x tinha dois simétricos, y_1 e y_2. Então $x + y_1 = O$ e $x + y_2 = O$. Somando y_2 a ambos os membros da primeira igualdade e utilizando os Axiomas 5, 4 e 3, encontramos

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2 ,$$

$$\text{e} \qquad y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1 .$$

Portanto $y_1 = y_2$, pelo que x tem precisamente um simétrico, o elemento $(-1)x$.

Notação. O simétrico de x representa-se por $-x$. A diferença $y - x$ é definida pela soma $y + (-x)$.

O teorema seguinte refere um certo número de propriedades que regem os cálculos algébricos elementares num espaço linear.

TEOREMA 15.3. *Num dado espaço linear sejam x e y elementos arbitrários e a e b escalares arbitrários. Então verificam-se as seguintes propriedades:*
(a) $0x = O$.
(b) $aO = O$.
(c) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$.
(d) *Se* $ax = O$, *então* $a = 0$ *ou* $x = O$.
(e) *Se* $ax = ay$ *e* $a \neq 0$, *então* $x = y$.
(f) *Se* $ax = bx$ *e* $x \neq O$, *e* $a = b$.
(g) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$.
(h) $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$ *e geralmente* $\sum_{i=1}^{n} x = nx$.

Vamos demonstrar (a), (b) e (c), deixando as demonstrações das restantes ao cuidado do leitor.

Demonstração de (a). Seja $z = 0x$. Desejamos provar que $z = O$. Somando z a si próprio e aplicando o Axioma 9 verificamos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z .$$

Adicionamos agora $-z$ a ambos os membros para obtermos $z = O$.

Demonstração de (b). Seja $z - aO$, adicionemos z a si próprio e utilizemos o Axioma 8.

Demonstração de (c). $z = (-a)x$. Adicionando z a ax e utilizando o Axioma 9, verificamos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O ,$$

pelo que z é o simétrico de ax, $z = -(ax)$. Analogamente, se adicionamos $a(-x)$ a ax e utilizamos o Axioma 8 e a propriedade (b), encontramos que $a(-x) = -(ax)$.

15.5. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 28 verificar se cada um dos conjuntos dados é um espaço linear real, com a adição e a multiplicação por escalares reais definidas da forma usual. Para os exercí-

31. Seja S o conjunto de todos os pares ordenados (x_1, x_2) de números reais. Em cada alínea determinar se sim ou não S é um espaço linear, com as operações de adição e multiplicação por escalares definidas como se indica. Se o conjunto não fôr um espaço linear, dizer quais os axiomas que não são verificados.
(a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\quad a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$.
(b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.
(c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$, $\quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.
(d) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$, $\quad a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|)$.
32. Provar a alínea (d) recorrendo a (h) do Teorema 15.3.

15.6. Subespaços dum espaço linear

Dado um espaço linear V, seja S um conjunto não vazio de V. Se S é também um espaço linear, com as mesmas operações de adição e multiplicação por escalares, então S diz-se um *subespaço* de V. O teorema que apresentamos a seguir dá um critério simples para determinar se sim ou não um subconjunto dum espaço linear é um subespaço.

TEOREMA 15.4. *Se S é um subconjunto não vazio dum espaço linear V, então S é um subespaço se, e só se, S satisfaz aos axiomas de fecho.*

Demonstração. Se S é um subespaço, verificam-se todos os axiomas para um espaço linear e por conseguinte, em particular, verificam-se os axiomas de fecho.

Demonstremos agora que, se S satisfaz aos axiomas de fecho, satisfaz igualmente aos outros. As propriedades comutativa e associativa para a adição (Axiomas 3 e 4) e os axiomas para a multiplicação por escalares (Axiomas 7 a 10) são automaticamente satisfeitos em S, porque são válidos para todos os elementos de V. Falta verificar os Axiomas 5 e 6, a existência em S do elemento neutro e a existência do simétrico de cada elemento de S.

Seja x um qualquer elemento de S. (S tem pelo menos um elemento visto que é não vazio). Pelo Axioma 2, ax está em S para todo o escalar a. Fazendo $a = 0$, resulta que $0x$ está em S. Mas $0x = O$, pelo Teorema 15.3(a), pelo que $O \in S$ e o Axioma 5 é satisfeito. Fazendo $a = -1$, vemos que $(-1)x$ pertence a S. Mas $x + (-1)x - O$ visto que x e $(-1)x$ estão em V e consequentemente o Axioma 6 é satisfeito em S. Deste modo S é um subespaço de V.

DEFINIÇÃO. *Seja S um subconjunto não vazio dum espaço linear V. Um elemento x de V da forma*

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i ,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pertencem todos a S e $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são escalares, diz-se uma combinação linear finita de elementos de S. O conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de S verificam os axiomas de fecho e por conseguinte é um subespaço de V. Chama-se este o subespaço gerado por S, e representa-se por $L(S)$. Se S é vazio, definimos $L(S)$ como $\{O\}$, o conjunto constando unicamente do elemento zero.

EXEMPLO 2. Se um elemento de S é um múltiplo escalar do outro, então S é dependente.

EXEMPLO 3. Se $O \in S$, então S é dependente.

EXEMPLO 4. O conjunto vazio é independente.

No Capítulo 12 foram discutidos muitos exemplos de conjuntos dependentes e independentes. Os exemplos seguintes ilustram esses conceitos em espaços funcionais. Em cada caso o espaço linear fundamental V é o conjunto de todas as funções reais definidas na reta real.

EXEMPLO 5. Sejam $u_1(t) = \cos^2 t$, $u_2(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $u_3(t) = 1$, para todo o número real t. A identidade de Pitágoras mostra que $u_1 + u_2 - u_3 = O$, pelo que as três funções u_1, u_2, u_3 são dependentes.

EXEMPLO 6. Seja $u_k(t) = t^k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, e t real. O conjunto $S = \{u_0, u_1, \ldots\}$ é independente. Para demonstrar isto, basta provar que, para cada n, os $n + 1$ polinómios $u_0, u_1, \ldots, u_n$ são independentes. Uma relação da forma $\Sigma\, c_k u_k = O$ significa que

$$\sum_{k=0}^{n} c_k t^k = 0 \tag{15.1}$$

para todo o real t. Quando $t = 0$, encontramos $c_0 = 0$. Derivando (15.1) e fazendo $t = 0$, encontramos $c_1 = 0$. Repetindo o processo, verificamos que cada coeficiente c_k é zero.

EXEMPLO 7. Se $a_1, \ldots, a_n$ são números reais distintos, as n funções exponenciais

$$u_1(x) = e^{a_1 x}, \ldots, u_n(x) = e^{a_n x}$$

são independentes. Podemos demonstrá-lo por indução relativamente a n. O resultado verifica-se trivialmente quando $n = 1$. Admitamos por conseguinte que é verdadeira para $n - 1$ funções exponenciais e consideremos os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{a_k x} = 0\,. \tag{15.2}$$

Seja a_M o maior dos n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Multiplicando ambos os membros de (15.2) por $e^{-a_M x}$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0\,. \tag{15.3}$$

Se $k \neq M$, o número $a_k - a_M$ é negativo. Deste modo, quando $x \to +\infty$ na equação (15.3), EXEMPLO 1. Em V_n seja $(x, y) = x \cdot y$, o produto escalar usual de x por y.

EXEMPLO 2. Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são dois vectores quaisquer de V_2, definir (x, y) pela fórmula

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 .$$

Este exemplo mostra que pode estar definido mais do que um produto interno num dado espaço linear.

EXEMPLO 3. Represente $C(a, b)$ o espaço linear de todas as funções reais contínuas definidas num intervalo $[a, b]$. Definamos o produto interno de duas funções f e g pela fórmula

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt .$$

Esta fórmula é análoga à equação (15.5) que define o produto escalar de dois vectores de V_n. Os valores das funções $f(t)$ e $g(t)$ desempenham o papel das componentes x_i e y_i e a integração substitui a soma.

EXEMPLO 4. No espaço $C(a, b)$, definimos

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)\, dt ,$$

com w uma função positiva dada em $C(a, b)$. A função w diz-se a *função peso*. No Exemplo 3 temos $w(t) = 1$ para todo o t.

EXEMPLO 5. No espaço linear dos polinómios reais, definimos

$$(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)\, dt .$$

Em virtude do fator exponencial, este integral impróprio converge para todo o par de polinómios f e g.

TEOREMA 15.8. *Num espaço euclidiano V, todo o produto interno verifica a desigualdade de Cauchy-Schwarz:*

$$|(x, y)|^2 \le (x, x)(y, y) \qquad \textit{para quaisquer } x \textit{ e } y \textit{ em } V.$$

Além disso o sinal de igualdade verifica-se se, e só se, x e y são dependentes.

Demonstração. Quando se demonstrou o resultado correspondente para vectores de V_n

Teorema 12.3), tivemos o cuidado de fazer notar que a demonstração era uma consequência das propriedades do produto escalar indicadas no Teorema 12.2 e não se fez depender da definição particular usada para deduzir estas propriedades. Deste modo, precisamente a mesma demonstração é válida em qualquer espaço euclidiano real. Quando aplicamos esta demonstração ao espaço euclidiano complexo, obtemos a desigualdade $(x, y)(y, x) \leq (x, x)(y, y)$ que é a mesma que a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(x, y)(y, x) = (x, y)\overline{(x, y)} = |(x, y)|^2 .$$

EXEMPLO. Aplicando o Teorema 15.8 ao espaço $C(a, b)$ com o produto interno $(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$, encontramos para a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\, dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\, dt\right).$$

O produto interno pode ser usado para introduzir o conceito métrico de comprimento em qualquer espaço euclidiano.

DEFINIÇÃO. *Num espaço euclidiano V, o número não negativo $\|x\|$ definido pela igualdade*

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

chama-se a norma do elemento x.

Exprimindo a desigualdade de Cauchy-Schwarz em termos de normas escreve-se

$$|(x, y)| \leq \|x\|\ \|y\| .$$

Visto ser possível definir um produto interno de diferentes maneiras, a norma dum elemento dependerá da escolha do produto interno. Esta falta de unicidade era de esperar. Tal fato é análogo ao de podermos atribuir diferentes números à medida do comprimento de dado segmento de reta, dependendo da escolha da unidade de medida. O teorema seguinte define propriedades fundamentais das normas que não dependem da escolha do produto interno.

TEOREMA 15.9. *Num espaço euclidiano, toda a norma goza das seguintes propriedades para todos os elementos x e y, e todo o escalar c:*

(a) $\|x\| = 0$ se $x = O$.
(b) $\|x\| > 0$ se $x \neq O$ (*positividade*).
(c) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$ (*homogeneidade*).
(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*desigualdade triangular*).

O sinal de igualdade verifica-se em (d) se $x = O$, se $y = O$, ou se $y = cx$ para algum $c > 0$.

Demonstração. As propriedades (a), (b) e (c) deduzem-se imediatamente dos axiomas do produto interno. Para demonstrar (d) observemos que

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} .$$

A soma $(x, y) + \overline{(x, y)}$ é real. A desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que $|(x, y)| \leq \|x\|$ $\|y\|$ e $|\overline{(x, y)}| \leq \|x\|\|y\|$, pelo que se tem

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

o que demonstra (d). Quando $y = cx$, com $c > 0$, temos

$$\|x + y\| = \|x + cx\| = (1 + c)\|x\| = \|x\| + \|cx\| = \|x\| + \|y\|.$$

Definição. *Num espaço euclidiano real V, o ângulo formado por dois elementos não nulos x e y define-se como sendo o número θ do intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ dado por*

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} . \tag{15.6}$$

Nota: A desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que o valor do quociente no segundo membro de (15.6) pertence ao intervalo $[-1, 1]$, pelo que existe um e um só θ no intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é igual ao valor daquele quociente.

15.11. Ortogonalidade num espaço euclidiano

Definição. *Num espaço euclidiano V, dois elementos x e y dizem-se ortogonais se o correspondente produto interno for zero. Um subconjunto S de V diz-se um subconjunto ortogonal se $(x, y) = 0$ para cada par de elementos distintos x e y de S. Um conjunto ortogonal diz-se ortonormado se cada um dos seus elementos tem norma* 1.

O elemento neutro é ortogonal a todo o elemento de V e é o único elemento ortogonal a si próprio. O teorema seguinte mostra uma relação entre ortogonalidade e dependência.

Teorema 15.10. *Num espaço euclidiano V, todo o conjunto ortogonal de elementos não nulos é independente. Em particular num espaço euclidiano de dimensão finita, com $\dim V = n$, todo o conjunto ortogonal formado por n elementos não nulos define uma base de V.*

Demonstração. Seja S um conjunto ortogonal de elementos não nulos de V e suponhamos que certa combinação linear finita de elementos de S é igual a zero, quer dizer

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O ,$$

onde cada $x_i \in S$. Multiplicando escalarmente ambos os membros por x_1 e tendo presente que $(x_1, x_i) = 0$ se $i \neq 1$, encontramos que $c_1(x_1, x_1) = 0$. Mas $(x_1, x_1) \neq 0$ visto que $x_1 \neq O$, donde resulta $c_1 = 0$. Repetindo o raciocínio, com x_1 substituido por x_j, encontramos cada $c_j = 0$, o que prova que S é independente. Se dim $V = n$ e se S é formado por n elementos, o Teorema 15.7(b) mostra que S é uma base de V.

Exemplo. No espaço linear real $C(0, 2\pi)$ com o produto interno $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$, seja S o conjunto de funções trigonométricas $\{u_0, u_1, ...\}$, definido da seguinte maneira

$$u_0(x) = 1\,, \qquad u_{2n-1}(x) = \cos nx\,, \qquad u_{2n}(x) = \operatorname{sen} nx\,, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots .$$

Se $m \neq n$, temos as relações de ortogonalidade

$$\int_0^{2\pi} u_n(x) u_m(x)\, dx = 0\,,$$

e portanto S é um conjunto ortogonal. Visto que nenhum elemento de S é o elemento zero, S é independente. A norma de cada elemento de S calcula-se facilmente. Temos $(u_0, u_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ e, para $n \geq 1$, temos

$$(u_{2n-1}, u_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi\,, \qquad (u_{2n}, u_{2n}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \pi\,.$$

Por conseguinte $\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$ e $\|u_n\| = \sqrt{\pi}$ para $n \geq 1$. Dividindo cada u_n pela respetiva norma, obtemos um conjunto ortonormado $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...\}$ com $\varphi_n = u_n / \|u_n\|$. Então resulta

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \qquad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\,, \qquad \varphi_{2n}(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\,, \qquad \text{para } n \geq 1\,.$$

Na seção 15.13 provaremos que todo o espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortogonal. O teorema que se segue mostra precisamente como calcular as componentes dum elemento relativamente a tal base.

Teorema 15.11. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita n e admita-se que $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base ortogonal de V. Se um elemento x se exprime como uma combinação linear dos elementos da base, seja*

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\,, \tag{15.7}$$

então as suas componentes na base ordenada $(e_1, e_2, ..., e_n)$ são dadas pelas fórmulas

$$c_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)} \quad \textit{para } j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{15.8}$$

(a) Provar que (f, g) é um produto interno para P_n.
(b) Calcular (f, g) quando $f(t) = t$ e $g(t) = at + b$.
(c) Se $f(t) = t$, determinar todos os polinómios lineares g ortogonais a f.

11. No espaço linear de todos os polinómios reais, definir $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)\, g(t)\, dt$.
(a) Provar que este integral impróprio converge absolutamente para quaisquer polinómios f e g.
(b) Se $x_n(t) = t^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, provar que $(x_n, x_m) = (m + n)!$.
(c) Calcular (f, g) quando $f(t) = (t + 1)^2$ e $g(t) = t^2 + 1$.
(d) Determinar todos os polinómios lineares $g(t) = a + bt$ ortogonais a $f(t) = 1 + t$.

12. No espaço linear de todos os polinómios reais, determinar se sim ou não (f, g) é um produto interno quando (f, g) é definido pela fórmula indicada. Caso (f, g) não seja um produto interno, indicar quais os axiomas que não são verificados. Em (c), f' e g' representam derivadas.
(a) $(f,g) = f(1)g(1)$.
(b) $(f,g) = \left| \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \right|$.
(c) $(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt$.
(d) $(f,g) = \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right)$.

13. V é formado por todos as sucessões infinitas $\{x_n\}$ de números reais para as quais as séries Σx_n^2 convergem. Se $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ são dois elementos de V, define-se

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \, .$$

(a) Provar que esta série converge absolutamente.
[*Sugestão.* Utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para calcular a soma $\sum_{n=1}^{M} |x_n y_n|$.]
(b) Provar que V é um espaço linear com (x, y) como produto interno.
(c) Calcular (x, y) se $x_n = 1/n$ e $y_n = 1/(n + 1)$ para $n > 1$.
(d) Calcular (x, y) se $x_n = 2$ e $y_n = 1/n!$ para $n \geq 1$.

14. Seja V o conjunto de todas as funções reais contínuas em $[0, +\infty]$ e tais que o integral $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t)\, dt$ converge. Definir $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)\, g(t)\, dt$.
(a) Provar que o integral para (f, g) converge absolutamente para cada par de funções f e g em V.
[*Sugestão:* Utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para calcular o integral $\int_0^M e^{-t} |f(t)\, g(t)|\, dt$].
(b) Provar que V é um espaço linear com (f, g) como produto interno.
(c) Calcular (f, g) se $f(t) = e^{-t}$ e $g(t) = t^n$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$

15. Num espaço euclidiano complexo, provar que o produto interno tem as seguintes propriedades para todos os elementos x, y e z e todos os complexos a e b.
(a) $(ax, by) = a\bar{b}(x, y)$.
(b) $(x, ay + bz) = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, z)$.

16. Provar que as identidades seguintes sao válidas em todo o espaço euclidiano

ortogonal a si próprio, pelo que $z_r = O$. Está, pois, completada a demonstração do teorema de ortogonalização.

Na construção precedente suponhamos que se tem $y_{r+1} = O$ para algum r. Então (15.13) mostra que x_{r+1} é uma combinação linear de $y_1, ..., y_r$ e por isso de $x_1, ..., x_r$, pelo que os elementos $x_1, ..., x_{r+1}$ são dependentes. Por outras palavras, se os primeiros k elementos $x_1, ..., x_k$ são independentes, então os elementos correspondentes $y_1, ..., y_k$ são *não nulos*. Neste caso os coeficientes a_i em (15.13) são dados por (15.14) e as fórmulas definindo $(y_1, ..., y_k)$ escrevem-se

$$y_1 = x_1\,, \qquad y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_{r+1}\,, y_i)}{(y_i\,, y_i)}\, y_i \qquad \text{para } r = 1, 2, \ldots, k-1\,. \quad (15.15)$$

Estas fórmulas descrevem o método de Gram-Schmidt para a construção dum conjunto ortogonal de elementos não nulos $y_1, ..., y_k$, os quais geram o mesmo subespaço que um dado conjunto independente $x_1, ..., x_k$. Em particular, se $x_1, ..., x_k$ é uma base dum espaço euclidiano de dimensão finita, então $y_1, ..., y_k$ é uma base ortogonal para o mesmo espaço. Podemos ainda converter esta numa base ortonormada pela *normalização* de cada uma dos seus elementos y_i isto é, pela divisão de cada um pela respetiva norma. Por conseguinte, como corolário do Teorema 15.13 podemos enunciar:

TEOREMA 15.14. *Todo o espaço euclidiano de dimensão finita possui uma base ortonormada.*

Se x e y são elementos dum espaço euclidiano, com $y \neq O$, o elemento

$$\frac{(x, y)}{(y, y)}\, y$$

diz-se a *projeção de x sobre y*. No método de Gram-Schmidt (15.15), construímos o elemento y_{r+1} subtraindo de x_{r+1} a projeção de x_{r+1} sobre cada um dos anteriores elementos $y_1, ..., y_r$. A figura 15.1 mostra essa construção geométrica no espaço vectorial V_3.

EXEMPLO 1. Em V_4 determinar uma base ortonormada para o subespaço gerado pelos três vectores $x_1 = (1, -1, 1, -1)$, $x_2 = (5, 1, 1, 1)$ e $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$.

Resolução. Aplicando o método de Gram-Schmidt, obtemos

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1)\,,$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2\,, y_1)}{(y_1\,, y_1)}\, y_1 = x_2 - y_1 = (4, 2, 0, 2)\,,$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0) .$$

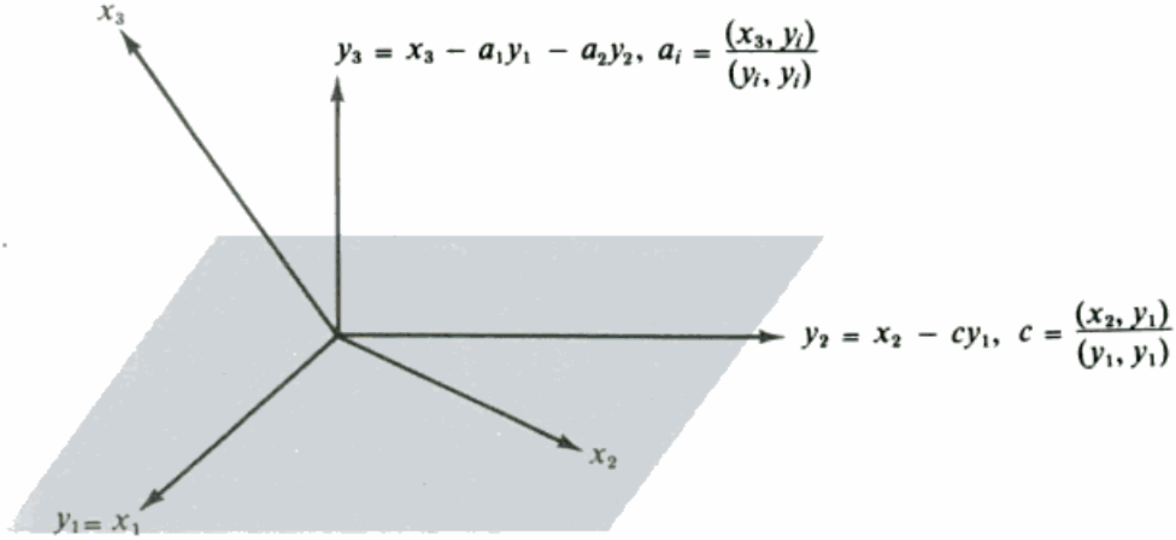


Fig. 15.1. O método de Gram-Schmidt em V_3. Um conjunto ortogonal $\{y_1, y_2, y_3\}$ foi construido a partir dum conjunto independente dado $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Visto que $y_3 = O$, os três vectores x_1, x_2, x_3 devem ser dependentes. Mas uma vez que y_1 e y_2 são não nulos, os vectores x_1 e x_2 são independentes. Por conseguinte $L(x_1, x_2, x_3)$ é um subespaço de dimensão 2. O conjunto $[y_1, y_2]$ é uma base ortogonal para este subespaço. Dividindo cada um dos y_1 e y_2 pela correspondente norma obtemos uma base ortonormada formada pelos dois vectores

$$\frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \qquad \text{e} \qquad \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1) .$$

EXEMPLO 2. *Polinómios de Legendre.* No espaço linear de todos os polinómios, com o produto interno $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$, consideremos a sucessão infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$, onde $x_n(t) = t^n$. Quando se aplica o teorema de ortogonalização a esta sucessão, obtém-se outra sucessão de polinómios $y_0, y_1, y_2, \ldots$, pela primeira vez encontrados pela matemático francês A.M. Legendre (1752-1833) nos seus trabalhos sobre a teoria do potencial. Os primeiros desses polinómios calculam-se facilmente pelo método de Gram-Schmidt. Em primeiro lugar temos $y_0(t) = x_0(t) = 1$. Uma vez que

$$(y_0, y_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2 \qquad \text{e} \qquad (x_1, y_0) = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0 ,$$

encontramos

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) = x_1(t) = t .$$

Utilizamos depois as relações

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2 . \tag{15.17}$$

Demonstração. Em primeiro lugar provamos que é possível a decomposição ortogonal (15.16). Visto que S tem dimensão finita, admite uma base ortonormada, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dado x, definimos os elementos s e $s^\perp$ do modo seguinte:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i , \qquad s^\perp = x - s . \tag{15.18}$$

Observa-se que cada termo (x, e_i) é a projeção de x sobre e_i. O elemento s é a soma das projeções de x sobre cada um dos elementos da base. Visto ser s uma combinação linear de elementos de base, s está em S. A definição de $s^\perp$ mostra que (15.16) é verdadeira. Para provar que $s^\perp$ está em $S^\perp$, consideramos o produto interno de $s^\perp$ com qualquer elemento da base e_j. Temos

$$(s^\perp, e_j) = (x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j) .$$

Mas de (15.18) resulta que $(s, e_j) = (x, e_j)$, pelo que $s^\perp$ é ortogonal a e_j, o que significa que $s^\perp$ é ortogonal a todo elemento de S ou seja que $s^\perp \in S^\perp$.

Demonstremos agora que a decomposição (15.16) é única. Admitamos a existência de duas representações para x, por exemplo

$$x = s + s^\perp \qquad \text{e} \qquad x = t + t^\perp , \tag{15.19}$$

onde s e t pertencem a S e $s^\perp$ e $t^\perp$ pertencem a $S^\perp$. Desejamos provar que $s = t$ e $s^\perp = t^\perp$. De (15.19) temos $s - t = t^\perp - s^\perp$, pelo que necessitamos unicamente demonstrar que $s - t = O$. Mas $s - t \in S$ e $t^\perp - s^\perp \in S^\perp$ e assim temos que $s - t$ é simultaneamente ortogonal e igual a $t^\perp - s^\perp$. Porque o elemento neutro é o único elemento ortogonal a si próprio, deve ser $s - t = O$ e portanto a decomposição é única.

Finalmente, provaremos que a norma de x é dada pela fórmula de Pitágoras. Temos

$$\|x\|^2 = (x, x) = (s + s^\perp, s + s^\perp) = (s, s) + (s^\perp, s^\perp) ,$$

sendo os restantes termos nulos uma vez que s e $s^\perp$ são ortogonais e portanto está demonstrado (15.17).

DEFINIÇÃO *Seja S um subespaço de dimensão finita dum espaço euclidiano V e seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormada para S. Se $x \in V$, o elemento s definido por*

$$s = \sum_{i=1} (x, e_i)e_i$$

diz-se a projeção de x sobre o subespaço S.

Demonstramos seguidamente que a projeção de x sobre S é a solução do problema de aproximação abordado no início desta seção.

16
TRANSFORMACÕES LINEARES E MATRIZES

1. Transformações lineares

Um dos últimos objetivos da análise é um amplo estudo de funções cujos domínio e contradomínio são subconjuntos de espaços lineares. Tais funções chamam-se *transformações, aplicações* ou *operadores*. Este capítulo trata dos exemplos mais simples, chamados *transformações lineares,* as quais aparecem em todos os ramos da Matemática. As propriedades de transformações mais gerais obtêm-se frequentemente aproximando-as mediante transformações lineares.

Em primeiro lugar vamos introduzir algumas notações e terminologia relativas a funções quaisquer. Sejam V e W dois conjuntos. O símbolo

$$T : V \to W$$

será usado para indicar que T é uma função cujo domínio é V e cujos valores estão em W. Para cada x de V, o elemento $T(x)$ em W chama-se a *imagem de x por meio da aplicação T* e dizemos que *T aplica x em $T(x)$*. Se A é um subconjunto qualquer de V, o conjunto de todas as imagens $T(x)$, para x em A, chama-se *a imagem de A por meio da aplicação T* e representa-se por $T(A)$. A imagem do domínio V, $T(V)$, é o contradomínio de T.

Suponhamos agora que V e W são espaços lineares admitindo o mesmo conjunto de escalares e definamos uma transformação linear do modo seguinte:

DEFINIÇÃO. *Se V e W são espaços lineares, uma função $T : V \to W$ diz-se uma transformação linear de V em W se possui as duas propriedades seguintes:*
(a) *$T(x + y) = T(x) + T(y)$ quaisquer que sejam x e y em V;*
(b) *$T(cx) = cT(x)$ para todo o x de V e todo o escalar c.*

Estas propriedades significam que T preserva a adição e a multiplicação por escalares. As duas propriedades podem combinar-se numa única fórmula que estabelece que

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$

para todo o par (x, y) em V e quaisquer que sejam os escalares a e b. Por indução temos também a relação mais geral

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

para n elementos quaisquer $x_1, ..., x_n$ de V e n escalares quaisquer $a_1, ..., a_n$.

O leitor comprovará com facilidade que os exemplos seguintes são transformações lineares.

EXEMPLO 1. *A transformação identidade.* A transformação $T : V \to V$, onde $T(x) = x$ para todo o x em V, chama-se a transformação identidade e representa-se por I ou por I_V.

EXEMPLO 2. *A transformação zero.* A transformação $T : V \to V$, que aplica cada elemento de V em O, chama-se a transformação zero e representa-se por O.

EXEMPLO 3. *Multiplicação por um escalar fixo c.* Aqui tem-se $T : V \to V$, onde $T(x) = cx$, para todo o x de V. Quando $c = 1$ cai-se na transformação identidade. Quando $c = 0$ é a transformação zero.

EXEMPLO 4. *Equações lineares.* Sejam $V = V_n$ e $W = W_m$. Dados mn números reais a_{ik}, onde $i = 1, 2, ..., m$ e $k = 1, 2, ..., n$, definamos $T : V_n \to V_m$ do modo seguinte: T aplica cada vector $x = (x_1, ..., x_n)$ de V_n no vector $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ de V_m segundo as equações

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

EXEMPLO 5. *Produto interno com um elemento fixo.* Seja V um espaço euclidiano. Para um elemento fixo z de V, definamos $T : V \to R$ do modo seguinte: Se $x \in V$, então $T(x) = (x, z)$, o produto interno de x com z.

EXEMPLO 7. *O operador derivação.* Seja V o espaço linear de todas as funções reais f deriváveis num intervalo aberto (a, b). A transformação linear que aplica cada função f de V na sua derivada f' chama-se o operador derivação e representa-se por D. Assim temos $D : V \to W$, onde $D(f) = f'$ para todo o f em V. O espaço W é formado por todas as derivadas f'.

EXEMPLO 8. *O operador integração.* Seja V o espaço linear de todas as funções reais contínuas num intervalo $[a, b]$. Se $f \in V$, defina-se $g = T(f)$ como sendo aquela função de V definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{se} \quad a \leq x \leq b\,.$$

Esta transformação T chama-se o operador integração.

16.2. Espaço nulo e contradomínio

Nesta seção, T representa uma transformação linear dum espaço linear V em um espaço linear W.

TEOREMA 6.1. *O conjunto $T(V)$ (o contradomínio de T) é um subespaço de W. Além disso, T aplica o elemento zero de V no elemento zero de W.*

Demonstração: Para demonstrar que $T(V)$ é um subespaço de W, necessitamos verificar unicamente os axiomas de fecho. Tomemos dois quaisquer elementos de $T(V)$, por exemplo $T(x)$ e $T(y)$. Então $T(x) + T(y) = T(x + y)$, pelo que $T(x) + T(y)$ está em $T(V)$. Também, para qualquer escalar c, temos $cT(x) = T(cx)$, pelo que $cT(x)$ está em $T(V)$. Deste modo $T(V)$ é um subespaço de W. Fazendo $c = 0$ na relação $T(cx) = cT(x)$ verificamos que $T(O) = O$.

DEFINIÇÃO. *O conjunto de todos os elementos de V que T aplica em O chama-se o núcleo de T e representa-se por $N(T)$. Assim tem-se*

$$N(T) = \{x \mid x \in V \quad \text{e} \quad T(x) = O\}\,.$$

O núcleo designa-se também por espaço nulo de T.

TEOREMA 16.2. *O núcleo de T é um subespaço de V.*

Demonstração. Se x e y estão em $N(T)$, o mesmo se verifica com $x + y$ e cx qualquer que seja c, já que

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = O \qquad \text{e} \qquad T(cx) = cT(x) = O.$$

Os exemplos apresentados a seguir referem-se aos núcleo das tranformações lineares dadas na seção 16.1.

EXEMPLO 1. *A transformação identidade.* O núcleo é $\{O\}$, o subespaço consistindo unicamente do elemento zero.

EXEMPLO 2. *A transformação zero.* Visto cada elemento de V ser aplicado no elemento zero, o núcleo é o próprio V.

EXEMPLO 3. *Multiplicação por um escalar fixo c.* Se $c \neq 0$, o núcleo contém unicamente O. Se $c = 0$, o núcleo é V.

EXEMPLO 4. *Equações lineares.* O núcleo consiste de todos os vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ de V_n para os quais

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

EXEMPLO 5. *Produto interno com um elemento fixo z.* O núcleo consiste de todos os elementos de V ortogonais a z.

EXEMPLO 6. *Projecção sobre um subespaço.* Se $x \in V$, tem-se a única decomposição ortogonal $x = s + s^{\perp}$ (pelo Teorema (15.15). Visto ser $T(x) = s$, tem-se $T(x) = O$ se e só se $x = s^{\perp}$, e assim o núcleo é $S^{\perp}$, o complemento ortogonal de S.

EXEMPLO 7. *Operador derivação.* O espaço nulo é formado por todas as funções que são constantes num dado intervalo.

EXEMPLO 8. *Operador integração.* O espaço nulo contém unicamente a função zero.

16.3. Nulidade e ordem

Nesta seção T representa ainda uma transformação linear dum espaço linear V num espaço linear W. Interessa-nos estabelecer uma relação entre a dimensão de V, do espaço nulo $N(T)$ e do contradomínio $T(V)$. Se V tem dimensão finita, então o espaço nulo também tem dimensão finita, porque é um subespaço de V. A dimensão de $N(T)$ chama-se *a nulidade* de T (dimensão do núcleo de T). No teorema que se segue prova-se que o contradomínio também tem dimensão finita; a essa dimensão dá-se o nome de *ordem* de T.

TEOREMA 16.3. TEOREMA DA NULIDADE MAIS DA ORDEM. *Se V é de dimensão finita, então $T(V)$ é também de dimensão finita e tem-se*

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V. \tag{16.1}$$

Por outras palavras, a nulidade mais a ordem duma transformação linear é igual à dimensão do seu domínio.

Demonstração. Sejam $n = \dim V$ e $e_1, e_2, \ldots, e_k$ uma base para $N(T)$, onde $k = \dim N(T) \leqq n$. Pelo Teorema 15.7, estes elementos formam uma parte de uma certa base de V, por exemplo a base

$$e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+r}, \tag{16.2}$$

com $k + r = n$. Pretendemos provar que os r elementos

$$T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+r}) \tag{16.3}$$

formam uma base para $T(V)$, o que prova que $\dim T(V) = r$. Uma vez que $k + r = n$, isto também prova (16.1).

Demonstremos primeiro que os r elementos em (16.3) geram $T(V)$. Se $y \in T(V)$, temos $y = T(x)$ para algum x em V, e podemos escrever $x = c_1e_1 + \ldots + c_{k+r}e_{k+r}$. Daqui resulta

$$[R(ST)](x) = R[(ST)(x)] = R[S[T(x)]] \qquad \text{e} \qquad [(RS)T](x) = (RS)[T(x)] = R[S[T(x)]],$$

o que prova que $R(ST) = (RS)T$.

DEFINIÇÃO. *Seja $T : V \to V$ uma função que aplica V em si próprio Definem-se as potências inteiras de T por indução do modo seguinte:*

$$T^0 = I, \qquad T^n = TT^{n-1} \quad \textit{para} \quad n \geq 1 .$$

Aqui I representa a transformação identidade. O leitor poderá verificar que a propriedade associativa implica a regra $T^m \cdot T^n = T^{m+n}$, quaisquer que sejam os inteiros não negativos m e n.

O teorema que se enuncia a seguir mostra que a composição de transformações *lineares* é ainda linear.

TEOREMA 16.6. *Se U, V, W são espaços lineares com os mesmos escalares e se $T : U \to V$ e $S : V \to W$ são transformações lineares, então a composição $ST : U \to W$ é linear.*

Demonstração. Para quaisquer x e y de U e quaisquer escalares a e b, temos

$$(ST)(ax + by) = S[T(ax + by)] = S[aT(x) + bT(y)] = aST(x) + bST(y) .$$

A composição pode combinar-se com as operações algébricas de adição e multiplicação por escalares em $\mathscr{L}(V, W)$ para dar origem ao seguinte.

TEOREMA 16.7. *Sejam U, V e W espaços lineares com os mesmos escalares; suponha-se que S e T pertencem a $\mathscr{L}(V, W)$ e seja c um escalar qualquer.*

(a) Para qualquer função R com valores em V, tem-se

$$(S + T)R = SR + TR \qquad e \qquad (cS)R = c(SR) .$$

(b) Para qualquer transformação linear $R : W \to U$ tem-se

$$R(S + T) = RS + RT \qquad e \qquad R(cS) = c(RS) .$$

A demonstração é uma aplicação imediata da definição de composição e é deixada ao leitor como exercício.

16.6. Inversas

No nosso estudo das funções duma variável real aprendemos a construir novas funções por inversão das funções monótonas. Pretendemos agora generalizar o processo de inversão a uma classe mais geral de funções.

Dada uma função T, é nosso objetivo encontrar, se possível, outra função S cuja composição com T seja a transformação identidade. Visto a composição não ser, em geral, DEFINIÇÃO. *Seja $T: V \to W$ biunívoca em V. A única inversa esquerda de T (que se sabe já ser também inversa direita) representa-se por T^{-1}. Diz-se que T é invertível e chama-se T^{-1} a inversa de T.*

Os resultados desta seção dizem respeito a funções quaisquer. Vamos em seguida aplicá-los a transformações lineares.

16.7. Transformações lineares biunívocas

Nesta seção, V e W representam espaços lineares com os mesmos escalares e $T: V \to W$ representa uma transformação linear em $\mathscr{L}(V, W)$. A linearidade de T permite-nos exprimir de diversas maneiras a propriedade para que uma transformação linear seja biunívoca.

TEOREMA 16.10. *Seja $T: V \to W$ uma transformação linear em $\mathscr{L}(V, W)$. São equivalentes as seguintes proposições:*

(a) *T é biunívoca em V.*
(b) *T é invertível e a sua inversa $T^{-1}: T(V) \to V$ é linear.*
(c) *Para todo o x em V, $T(x) = O$ implica $x = O$, isto é, o espaço nulo $N(T)$ contém unicamente o elemento zero de V.*

Demonstração. Vamos demonstrar que (a) implica (b), (b) implica (c) e (c) implica (a). Admitamos que (a) é verdadeira. Então T admite inversa T^{-1}(pelo Teorema 16.9), a qual se vai provar que é linear. Consideremos dois quaisquer elementos u e v em $T(V)$. Então $u = T(x)$ e $v = T(y)$ para algum x e algum y em V. Quaisquer que sejam os escalares a e b, temos

$$au + bv = aT(x) + bT(y) = T(ax + by),$$

visto T ser linear. Daqui resulta, aplicando T^{-1},

$$T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v),$$

pelo que T^{-1} é linear. Por conseguinte (a) implica (b).

Admitamos agora que (b) é verdadeira. Tomemos um x qualquer em V para o qual $T(x) = O$. Aplicando T^{-1}, encontramos que $x = T^{-1}(O) = O$, visto T^{-1} ser linear. Assim concluímos que (b) implica (c).

Finalmente, admitamos que (c) é verdadeira. Consideremos dois quaisquer elementos u e y em V com $T(u) = T(v)$. Devido à linearidade temos $T(u - v) = T(v) = O$, pelo que $u - v = O$. Portanto, T é biunívoca em V e a demonstração do teorema está completada.

Quando V tem dimensão finita, a propriedade da transformação ser biunívoca pode ser formulada noutros termos, como se indica no teorema que apresentamos a seguir.

TEOREMA 16.11. *Se $T: V \to W$ é uma transformação linear em $\mathscr{L}(V, W)$ e V tem dimensão*

16.9. Transformações lineares com valores determinados

Se V tem dimensão finita, podemos sempre construir uma transformação linear $T: V \to W$ com valores determinados para os elementos duma base de V, como se explica no seguinte

TEOREMA 16.12. *Se $e_1, \ldots, e_n$ constitui uma base dum espaço linear n-dimensional V e $u_1, \ldots, u_n$ são n elementos arbitrários dum espaço linear W, então existe uma e uma só transformação linear $T : V \to W$ tal que*

$$T(e_k) = u_k \qquad \textit{para } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16.7}$$

Esta transformação T aplica um elemento arbitrário x de V do modo seguinte:

$$\textit{Se} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \qquad \textit{então} \;\; T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k. \tag{16.8}$$

Demonstração. Cada x de V pode exprimir-se duma única maneira como combinação linear de $e_1, \ldots, e_n$, sendo os coeficientes $x_1, \ldots, x_n$ as componentes de x na base $(e_1, \ldots, e_n)$. Se definimos T por (16.8), é uma questão imediata a verificação de que T é linear. Se $x = e_k$ para certo k, então todas as componentes de x são 0, excepto a de ordem k, que é 1, pelo que (16.8) dá $T(e_k) = u_k$, como se pretendia provar.

Para demonstrar que existe unicamente uma transformação linear satisfazendo (16.7), designamos por T' outra transformação e calculamos $T'(x)$. Encontramos

$$T'(x) = T'\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k T'(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k = T(x).$$

Visto que $T'(x) = T(x)$ para todo o x em V, temos $T' = T$, o que completa a demonstração.

EXEMPLO. Determinar a transformação linear $T : V_2 \to V_2$ que aplica os elementos base $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ e $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ do modo seguinte:

$$T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \qquad T(\boldsymbol{j}) = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}.$$

Resolução. Se $x = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}$ é um elemento arbitrário de V_2, então $T(x)$ é dada por

$$T(x) = x_1T(\boldsymbol{i}) + x_2T(\boldsymbol{j}) = x_1(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + x_2(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) = (x_1 + 2x_2)\boldsymbol{i} + (x_1 - x_2)\boldsymbol{j}.$$

16.10. Representação matricial das transformações lineares

O Teorema 16.12 mostra que uma transformação linear $T : V \to W$ dum espaço linear de dimensão finita V fica completamente determinada pela sua ação sobre um dado conjunto de elementos duma base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de V. Suponhamos agora que o espaço W tem também dimensão finita, por exemplo dim $W = m$ e seja $w_1, ..., w_n$ uma base de W. (As dimensões m e n podem ou não ser iguais). Visto T ter valores em W, cada elemento $T(e_k)$ pode representar-se de maneira única como uma combinação linear dos elementos da base $w_1, w_2, ..., w_n$,

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i ,$$

onde $t_{1k}, ..., t_{mk}$ são as componentes de $T(e_k)$ na base ordenada $(w_1, w_2, ..., w_m)$. Disporemos verticalmente o m-sistema $(t_{1k}, ..., t_{mk})$ do modo seguinte:

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mk} \end{bmatrix} . \tag{16.9}$$

Esta disposição chama-se *um vector coluna* ou *uma matriz coluna*. Teremos um tal vector coluna para cada um dos n elementos $T(e_1), ..., T(e_n)$. Colocamo-los lado a lado, encerrando--os por um par de parêntesis retos de modo a obter-se a seguinte disposição rectangular:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} .$$

Este arranjo diz-se uma *matriz* formada por *m linhas e n colunas*. Chamamo-la uma matriz m por n ou uma matriz $m \times n$. A primeira linha é uma matriz $1 \times n$ $(t_{11}, t_{12}, ..., t_{1n})$. A matriz $m \times 1$ destacada em (16.9) é a coluna de ordem k. Os escalares t_{ik} estão afetados de dois índices, indicando o primeiro (o índice i) a *linha*, e o segundo (o índice k) a *coluna* em que se situa t_{ik}. Chamamos a t_{ik} o *elemento ik* da matriz. Também se utiliza por vezes uma notação mais compacta

$$(t_{ik}) \qquad \text{ou} \qquad (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n} ,$$

para representar a matriz cujo elemento ik é t_{ik}.

Assim, cada transformação linear T dum espaço n dimensional V sobre um espaço m dimensional W dá lugar a uma matriz $m \times n, (t_{ik})$, cujas colunas são as componentes de $T(e_1), ..., T(e_n)$ relativamente à base $(w_1, ..., w_m)$. A matriz considerada define a *representação ma-*

dos. A imagem $T(x)$ dum ponto arbitrário x de V é então dada pelas equações (16.12) e (16.13).

EXEMPLO 1. *Construção duma dada transformação linear a partir de uma matriz dada.* Suponhamos que partimos com a matriz 2×3 de elementos

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Escolhamos as bases usuais de vectores unitários coordenados para V_3 e V_2. Então, a matriz dada representa uma transformação linear $T: V_3 \to V_2$ a qual aplica um vector arbitrário (x_1, x_2, x_3) de V_3 no vector (y_1, y_2) de V_2 segundo as equações lineares

$$y_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = x_1 + 0x_2 + 4x_3 .$$

EXEMPLO 2. *Construção da representação matricial duma transformação linear dada.* Seja V o espaço linear de todos os polinómios reais $p(x)$ de grau ≤ 3. Este espaço tem dimensão 4 e escolhamos a base $(1, x, x^2, x^3)$. Seja D o operador derivação que aplica cada polinómio $p(x)$ de V na sua derivada $p'(x)$. Podemos considerar D como uma transformação linear de V em W, onde W é o espaço tridimensional de todos os polinómios reais de grau ≤ 2. Em W escolhemos a base $(1, x, x^2)$. Para determinar a representação matricial de D, relativamente a esta escolha de bases, transformamos (derivamos) cada elemento da base de V e exprimimo-lo como uma combinação linear dos elementos da base de W. Assim, encontramos

$$D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \qquad D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \qquad D(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2.$$

Os coeficientes destes polinómios determinam *as colunas* da representação matricial de D. Deste modo, a representação pedida vem dada pela matriz 3×4:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para evidenciar o fato de que a representação matricial depende não só dos elementos das bases, mas também da respetiva ordem, invertamos a ordem dos elementos da base de W e utilizemos, em seu lugar, a base ordenada $(x^2, x, 1)$. Então os elementos da base de V são transformados nos mesmos polinómios obtidos atrás, mas as componentes destes polinómios relativamente à nova base $(x^2, x, 1)$ aparecem por ordem inversa. Portanto, a representação *to para os r elementos da diagonal*

$$t_{11} = t_{22} = \cdots = t_{rr} = 1 .$$

Demonstração: Construímos, em primeiro lugar, uma base para W. Porque $T(V)$ é um subespaço de W com dim $T(V) = r$, o espaço $T(V)$ tem uma base de r elementos em W, sejam $w_1, w_2, ..., w_r$. Pelo Teorema 15.7 estes elementos formam um subconjunto duma certa base de W. Deste modo podemos juntar os elementos $w_{r+1}, ..., w_m$ de modo que

$$(w_1 , \ldots , w_r , w_{r+1} , \ldots , w_m) \tag{16.16}$$

seja uma base de W.

Seguidamente construímos uma base para V. Cada um dos primeiros r elementos w_i em (16.16) é a imagem de pelo menos um elemento de V. Escolhamos um tal elemento de V e designemo-lo por e_i. Então $T(e_i) = w_i$ para $i = 1, 2,..., r$, pelo que (16.14) é satisfeita. Seja agora k a dimensão do espaço nulo $N(T)$. Pelo Teorema 16.3 temos $n = k + r$. Visto ser dim $N(T) = k$, o espaço $N(T)$ admite uma base formada por k elementos de V, que designamos por $e_{r+1}, ..., e_{r+k}$. Para cada um destes elementos, a equação (16.15) é satisfeita. Portanto, para completar a demonstração, devemos provar que o conjunto ordenado

$$(e_1 , \ldots , e_r , e_{r+1} , \ldots , e_{r+k}) \tag{16.17}$$

é uma base para V. Porque dim $V = n = r + k$, necessitamos unicamente mostrar que estes elementos são independentes. Suponhamos que certa combinação linear deles seja zero, por exemplo

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i e_i = O . \tag{16.18}$$

Aplicando T e usando as equações (16.14) e (16.15) encontramos

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = O .$$

Mas $w_1, ..., w_r$ são independentes e por isso $c_1 = ... = c_r = 0$. Daqui resulta que os r primeiros termos em (16.18) são zero, pelo que (16.18) se reduz a

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} c_i e_i = O .$$

Mas $e_{r+1}, ..., e_{r+k}$ são independentes visto formarem uma base para $N(T)$, e por isso $c_{r+1} = = ... = c_{r+k} = 0$. Porque todos os c_i em (16.18) são nulos, os elementos de (16.17) formam uma base para V e o teorema está demonstrado.

Exemplo. Consideremos o exemplo 2 da seção 16.10, onde D é o operador derivação que aplica o espaço V dos polinómios de grau ≤ 3 no espaço W dos polinómios de grau ≤ 2. Neste exemplo, o contradomínio $T(V) = W$, pelo que T tem ordem 3. Aplicando o método usado para demonstrar o Teorema 16.14, definimos uma base qualquer para W, por exemplo a base $(1, x, x^2)$. Um conjunto de polinómios de V que se aplica nestes elementos é $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3)$. Aplicamos este conjunto para obtermos uma base para V juntando-lhe o polinómio constante 1, o qual é uma base para o espaço nulo de D. Deste modo, se utilizamos a base $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3, 1)$ para V e a base $(1, x, x^2)$ para W, a correspondente representação matricial para D tem a forma diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

16.12. Exercícios

Em todos os exercícios em que intervenha o espaço vectorial V_n considera-se a base usual formada pelos vectores coordenados unitários, a menos que se diga expressamente o contrário. Nos exercícios relativos à matriz duma transformação linear $T: V \to W$ com $V = W$, toma-se a mesma base quer em V quer em W, a menos que seja indicada outra escolha.

1. Determinar a matriz de cada uma das seguintes transformações lineares de V_n em V_n.
   (a) a transformação identidade.
   (b) a transformação zero.
   (c) multiplicação por um escalar dado c.
2. Determinar a matriz de cada uma das seguintes projeções.
   (a) $T : V_3 \to V_2$, onde $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.
   (b) $T : V_3 \to V_2$, onde $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$.
   (c) $T : V_5 \to V_2$, onde $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$.
3. Uma transformação linear $T : V_2 \to V_2$ aplica os vectores da base $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ da maneira seguinte:

$$T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \qquad T(\boldsymbol{j}) = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}.$$

   (a) Calcular $T(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})$ e $T^2(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})$ em função de $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$.
   (b) Determinar as matrizes de T e T^2.
   (c) Resolver a alinea (b) se a base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ é substituida por (e_1, e_2), onde $e_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $e_2 = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.
4. Uma transformação linear $T : V_2 \to V_2$ define-se do modo seguinte: Cada vector (x, y)

DEFINIÇÃO. *Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são duas matrizes $m \times n$ e se c é um escalar qualquer, definem-se as matrizes $A + B$ e cA do modo seguinte:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad cA = (ca_{ij}).$$

A soma define-se unicamente quando A e B são do mesmo tipo $m \times n$ (mesmo número de linhas e mesmo número de colunas).

EXEMPLO. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

temos pois

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (-1)B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Definimos a *matriz nula O,* como sendo a matriz $m \times n$ na qual todos os elementos são 0. Com estas definições é um exercício simples verificar que o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ define um espaço linear. Representamos este espaço linear por $M_{m,n}$. Se os elementos são números reais, o espaço $M_{m,n}$ é um espaço linear real. Se os elementos são complexos, $M_{m,n}$ é um espaço linear complexo. É igualmente fácil provar que este espaço tem dimensão mn. Com efeito, uma base para $M_{m,n}$ consiste de mn matrizes, tendo cada uma delas um elemento igual a 1 e todos os outros iguais a 0. Por exemplo, as seis matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

formam uma base para o conjunto de todas as matrizes 2×3.

16.14. Isomorfismo entre transformações lineares de matrizes

Voltamos agora à relação entre matrizes e transformações lineares. Sejam V e W espaços lineares de dimensão finita, com dim $V = n$ e dim $W = m$. Escolhamos uma base $(e_1, \ldots, e_n)$ para V e uma base $(w_1, \ldots, w_n)$ para W. Nesta discussão estas bases consideram-se fixas. Seja $\mathscr{L}(V, W)$ o espaço linear de todos as transformações lineares de V em W. Se $T \in \mathscr{L}(V, W)$, seja $m(T)$ a matriz de T relativamente às bases dadas. Lembramos que $m(T)$ se define como segue:

A imagem de cada elemento base e_k exprime-se como uma combinação linear dos elementos da base de W:

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16.19}$$

Os coeficientes escalares t_{ik} são os elementos *ik* de *m(T)*. Assim temos

$$m(T) = (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n}. \tag{16.20}$$

A equação (16.20) define uma nova função *m* cujo domínio é $\mathscr{L}(V, W)$ e cujos valores são matrizes de $M_{m,n}$. Uma vez que cada matriz $m \times n$ é a matriz *m(T)* para algum *T* em $\mathscr{L}(V, W)$, o contradomínio de *m* é $M_{m,n}$. O teorema que apresentamos a seguir mostra que a transformação $m: \mathscr{L}(V, W) \to M_{m,n}$ é linear e biunívoca em $\mathscr{L}(V, W)$.

TEOREMA 16.15. *Para todo o S e todo o T em (V, W) e todo o escalar c, tem-se*

$$m(S + T) = m(S) + m(T) \qquad e \qquad m(cT) = cm(T).$$

Além disso,

$$m(S) = m(T) \qquad \textit{implica} \quad S = T,$$

pelo que m é biunívoca em $\mathscr{L}(V, W)$.

Demonstração: A matriz *m(T)* é formada pelos coeficientes t_{ik} de (16.19). Analogamente, a matriz *m(S)* é formada pelos coeficientes s_{ik} nas equações

$$S(e_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik} w_i \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16.21}$$

Uma vez que se tem

$$(S + T)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (s_{ik} + t_{ik}) w_i \qquad e \qquad (cT)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (ct_{ik}) w_i,$$

obtemos $m(S + T) = (s_{ik} + t_{ik}) = m(S) + m(T)$ e $m(c\,T) = (c\,t_{ik}) = cm(T)$, o que prova que *m* é linear.

Para provar que *m* é biunívoca, suponhamos que $m(S) = m(T)$, onde $S = (s_{ik})$ e $T = (t_{ik})$. As equações (16.19) e (16.21) mostram que $S(e_k) = T(e_k)$ para cada elemento da base e_k, pelo que $S(x) = T(x)$ para todo *x* de *V* e por conseguinte $S = T$.

Nota: A função *m* diz-se um *isomorfismo*. Para uma dada escolha das bases, *m* estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto de transformações lineares, $\mathscr{L}(V, W)$ e o conjunto $M_{m,n}$ de matrizes $m \times n$. As operações de adição e multiplicação por escalares conservam-se através desta correspondência. Os espaços lineares $\mathscr{L}(V, W)$ e $M_{m,n}$ dizem-se *isomorfos*. Teorema 16.11 mostra que o domínio duma transformação linear biunívoca tem a mesma dimensão que o respetivo contradomínio. Portanto, dim $\mathscr{L}(V, W) =$ dim $M_{m,n} = m\,n$.

Se $V = W$ e se escolhermos a mesma base em V e W, então a matriz $m(I)$ que corresponde à transformação identidade $I : V \to V$ é uma matriz diagonal $n \times n$, com cada elemento da diagonal igual à unidade e todos os restantes iguais a 0. Esta é a *matriz identidade* ou *matriz unidade* e representa-se por I ou por I_n.

16.15. Multiplicação de matrizes

Algumas transformações lineares podem multiplicar-se por meio da composição. Vamos passar a definir multiplicação de matrizes de tal maneira que o produto de duas matrizes corresponda à composição das transformações lineares que representam.

Recordamos que se $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares, a sua composição $ST: U \to W$ é uma transformação linear dada por

$$ST(x) = S[T(x)] \qquad \text{para todo } x \text{ em } U.$$

Suponhamos que U, V e W são de dimensão finita, por exemplo

$$\dim U = n\,, \qquad \dim V = p\,, \qquad \dim W = m\,.$$

Escolhamos bases para U, V e W. Relativamente a estas bases, a matriz $m(S)$ é uma matriz $m \times p$, a matriz T é uma matriz $p \times n$ e a matriz de ST é uma matriz $m \times n$. A definição que a seguir se apresenta de multiplicação de matrizes permite-nos deduzir a relação $m(ST) = m(S)m(T)$, o que estende aos produtos a propriedade de isomorfismo.

DEFINICÃO. *Sejam A uma matriz $m \times p$ qualquer, e B outra matriz $p \times n$ qualquer, por exemplo*

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p} \qquad e \qquad B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,n}\,.$$

O produto AB define-se como sendo a matriz $m \times n$, $C = (e_{ij})$, cujo elemento ij é dado por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\,. \tag{16.22}$$

Nota: O produto AB só se define quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Se escrevemos A_i para a linha de ordem i de A e B^j para a coluna de ordem j de B e imaginamos estas como vectores p-dimensionais, então a soma (16.22) é simplesmente o produto

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Calcular, para cada alínea, $AB - BA$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$.

5. Se A é uma matriz quadrada, provar que $A^nA^m = A^{m+n}$, quaisquer que sejam os inteiros $m \geq 0$ e $n \geq 0$.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verificar que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e calcular A^n.

7. Seja $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Verificar que $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ e calcular A^n.

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verificar que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular A^3 e A^4. Tentar escrever uma fórmula geral para A^n e demonstrá-la por indução.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Provar que $A^2 = 2A - I$ e calcular A^{100}.

10. Determinar todas as matrizes A, 2×2, tais que $A^2 = O$.

11. (a) Provar que uma matriz A, 2×2, comuta com toda a matriz 2×2 se e só se A comuta com cada uma das quatro matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Achar todas as matrizes A.

12. A equação $A^2 = I$ é satisfeita por cada uma das matrizes 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde b e c são números reais arbitrários. Determinar todas as matrizes A, 2×2, tais que $A^2 = I$.

uma solução particular b do sistema não homogéneo. Adicionando b a cada vector v do espaço nulo de T, obtemos todas as soluções $x = v + b$ do sistema não homogéneo.

Seja k a dimensão de $N(T)$ (a nulidade de T). Se pudermos encontrar k soluções *independentes* $v_1, ..., v_k$ do sistema homogéneo, elas formarão uma base para $N(T)$ e podemos obter cada v em $N(T)$ formando todas as combinações lineares possíveis

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_kv_k ,$$

onde $t_1, ..., t_k$ são escalares arbitrários. Esta combinação linear chama-se a *solução geral do* sistema homogéneo. Se b é uma solução particular do sistema não homogéneo, então todas as soluções x são dadas por

$$x = b + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k .$$

Esta combinação linear diz-se a *solução geral do sistema não homogéneo*. Ao teorema (16.18) pode então dar-se a nova forma.

TEOREMA 16.19. *Seja $T: V_n \to V_m$ uma transformação tal que $T(x) = y$, onde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_m)$ e*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad \textit{para} \;\; i = 1, 2, \ldots, m .$$

Seja k a nulidade de T. Se $v_1, ..., v_k$ são k soluções independentes do sistema homogéneo $T(x) = O$, e se b é uma solução particular do sistema não homogéneo $T(x) = c$, então a solução geral do sistema não homogéneo é

$$x = b + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k ,$$

onde $t_1, ..., t_k$ são escalares arbitrários.

Este teorema não nos diz como determinar uma solução particular b do sistema não homogéneo nem nos diz como determinar as soluções $v_1, \ldots, v_k$ do sistema homogéneo. Diz-nos, apenas, o que pode obter-se quando o sistema não homogéneo tem uma solução. O exemplo seguinte, embora muito simples, ilustra o teorema.

EXEMPLO. O sistema $x + y = 2$ admite como sistema homogéneo associado, $x + y = 0$. Por tal fato, o espaço nulo é formado por todos os vectores de V_2 da forma $(t, -t)$ com t arbitrário. Porque $(t, -t) = t(1, -1)$, este é um subespaço unidimensional de V_2 com base $(1, -1)$. Uma solução particular do sistema não homogéneo é $(0, 2)$. Por conseguinte, a solução geral do sistema não homogéneo é dada por

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ y - 2z &= 13 \\ z &= 31\,. \end{aligned}$$

Estas equações podem resolver-se sucessivamente, partindo da terceira e caminhando em sentido ineverso, para obtermos

$$z = 31, \qquad y = 13 + 2z = 13 + 62 = 75, \qquad x = 5 + 2y - z = 5 + 150 - 31 = 124\,.$$

Ou, então, podemos continuar o processo de Gauss-Jordan convertendo em zeros todos os elementos situados acima da primeira diagonal na segunda e terceira colunas. Multiplicando a segunda linha de (16.27) pọr 2 e adicionando o resultado à primeira linha, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right].$$

Finalmente, multiplicamos a terceira linha por 3 e adicionamos o resultado à primeira e em seguida multiplicamos a terceira linha por 2 e adicionamos o resultado à segunda para obtermos a matriz (16.25).

EXEMPLO 2. *Um sistema com mais do que uma solução.* Consideremos o seguinte sistema de 3 equações com 5 incógnitas

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + u - v &= -3 \\ x - 2y + z - u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v &= 10\,. \end{aligned} \tag{16.28}$$

A correspondente matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & 10 \end{array}\right].$$

Os coeficientes de x, y, z e os segundos membros são os mesmos do Exemplo 1. Se efetuarmos as mesmas operações linha referidas no Exemplo 1, obtemos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 31 \end{array}\right].$$

O correspondente sistema de equações pode resolver-se relativamente a x, y, z em função de u e v dando-nos

$$\begin{aligned} x &= 124 + 16u - 19v \\ y &= 75 + 9u - 11v \\ z &= 31 + 3u - 4v\,. \end{aligned}$$

Se fizermos $u = t_1$ e $v = t_2$, com t_1 e t_2 números reais arbitrários e determinarmos x, y, z por estas equações, o vector (x, y, z, u, v), em V_5, dado por

$$(x, y, z, u, v) = (124 + 16t_1 - 19t_2\,,\ 75 + 9t_1 - 11t_2\,,\ 31 + 3t_1 - 4t_2\,,\ t_1\,,\ t_2)$$

é uma solução. Separando as partes contendo T_1 e T_2, podemos escrever a igualdade anterior na forma

$$(x, y, z, u, v) = (124, 75, 31, 0, 0) + t_1(16, 9, 3, 1, 0) + t_2(-19, -11, -4, 0, 1)\,.$$

Esta equação dá a solução geral do sistema. O vector (124, 75, 31, 0, 0) é uma solução particular do sistema não homogéneo (16.28). Os dois vectores (16, 9, 3, 1, 0) e (−19, −11, −4, 0, 1) são soluções do correspondente sistema homogéneo. Uma vez que são independentes, constituem uma base para o espaço de todas as soluções do sistema homogéneo.

EXEMPLO 3. *Um sistema sem solução.* Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - 4y + 5z &= 10\,. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Este sistema é quase idêntico ao do Exemplo 1, excepto que o coeficiente de z na terceira equação se mudou de 6 para 5. A correspondente matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right].$$

Efetuando as mesmas operações do Exemplo 1 sobre as linhas de matriz anterior que permitiram a passagem de (16.24) a (16.27), obtemos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right]. \tag{16.30}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

O método de eliminação conduz-nos a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right].$$

A matriz à direita da linha divisória é a matriz inversa que se pretendia obter, sendo a matriz à esquerda dessa linha a matriz identidade.

Não é necessário saber à priori se A é não singular. Se A é *singular* (não regular), podemos ainda aplicar o método de Gauss-Jordan, mas acontecerá que no processo de diagonalização alguns dos elementos da diagonal virão nulos e não será possível transformar A na matriz identidade.

16.20. Exercícios

Aplicando o método de Gauss-Jordan a cada um dos sistemas seguintes, determinar a solução geral, caso exista:

1. $\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 4z &= 11 \\ -y + z &= 3. \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1. \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3. \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + u &= 1 \\ x + y - 3z + 2u &= 2 \\ 6x + y - 4z + 3u &= 7. \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x + y - 3z + u &= 5 \\ 2x - y + z - 2u &= 2 \\ 7x + y - 7z + 3u &= 3. \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x + y + 2z + 3u + 4v &= 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v &= 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v &= 0. \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x - 2y + z + 2u &= -2 \\ 2x + 3y - z - 5u &= 9 \\ 4x - y + z - u &= 5 \\ 5x - 3y + 2z + u &= 3. \end{aligned}$

9. Demonstrar que o sistema $x + y + 2z = 2$, $2x - y + 3z = 2$, $5x - y + az = 6$, tem uma solução única se $a \neq 8$. Determinar todas as soluções se $a = 8$.

10. (a) Determinar todas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2\,. \end{aligned}$$

(b) Determinar todas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \\ x + y + z \quad\quad &= 6 . \end{aligned}$$

11. Este exercício mostra-nos como determinar todas as matrizes não singulares 2×2. Provar que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I .$$

Deduzir que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é não singular se e só se $ad - bc \neq 0$, caso em que a sua inversa é

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Determinar a inversa de cada uma das matrizes dos Exercícios 12 a 16

12. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

16.21. Exercícios vários sobre matrizes

1. Se uma matriz quadrada tem uma fila (linha ou coluna) de zeros, provar que é singular.
2. Para cada uma das proposições seguintes relativas a matrizes $n \times n$, dar uma demonstração ou apresentar um contra exemplo.
   (a) Se $AB + BA = O$, então $A^2B^3 = B^3A^2$.
   (b) Se A e B são não singulares, então $A + B$ é não singular.
   (c) Se A e B são não singulares, então AB é não singular.
   (d) Se A, B e $A + B$ são não singulares, então $A - B$ é não singular.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

Introdução

I* 1.4. Exercícios (pg. 9)

1. (a) $\frac{2}{3}b^3$ (b) b^3 (c) $\frac{1}{12}b^3$ (d) $\frac{2}{3}b^3 + b$ (e) $\frac{1}{3}ab^3 + bc$
2. (c) $\frac{1}{4}ab^4 + bc$
3. (b) $s_n < \dfrac{b^{k+1}}{k+1} < S_n$ (c) $\dfrac{ab^{k+1}}{k+1} + bc$

I 2.5. Exercícios (pg. 18)

1. $A = \{1, -1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1\}$, $D = \{2\}$, $E = \{1, -17\}$, $F = \{1, -17, -8 + \sqrt{47}, -8 - \sqrt{47}\}$.
2. $A \subseteq A$, $B \subseteq A$, $B \subseteq B$, $B \subseteq C$, $B \subseteq E$, $B \subseteq F$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$, $C \subseteq C$, $C \subseteq E$, $C \subseteq F$, $D \subseteq D$, $E \subseteq E$, $E \subseteq F$, $F \subseteq F$. (Não ter em consideração as inclusões "próprias").
3. (a) Verdadeiro (b) Verdadeiro (c) Falso (d) Verdadeiro (e) Falso (f) Falso.
4. (a) Verdadeiro (b) Verdadeiro (c) Verdadeiro (d) Verdadeiro (e) Falso (f) Falso.
5. $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, S$
6. (a) Falso (b) Falso (c) Falso (d) Verdadeiro (e) Falso (f) Falso (g) Verdadeiro (h) Falso (i) Verdadeiro.

17. (c) $A \subset C$ (d) sim (e) não

I 4.4. Exercícios (pg. 42)

2. $1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$
3. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$
4. $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$
5. $\dfrac{n+1}{2n}$
6. (b) $A(1)$ Falsa. (c) $1 + 2 + \cdots + n < \dfrac{(2n+1)^2}{8}$

7. $n_1 = 3$

I 4.7. Exercícios (pg. 48)

1. (a) 10 (b) 15 (c) 170 (d) 288 (e) 36 (f) $\frac{5}{6}$
8. (b) $n + 1$
9. Constante $= 2$
11. (a) Verdadeira (b) Falsa (c) Falsa (d) Falsa (e) Falsa (f) Falsa.
12. $\dfrac{n}{n+1}$

I 4.9. Exercícios (pg. 52)

2. $(a_1, b_2), (a_2, b_5), (a_3, b_7), (a_4, b_{10}), (a_5, b_3), (a_6, b_8), (a_7, b_9), (a_8, b_4), (a_9, b_6), (a_{10}, b_1)$
3. (a) Falsa (b) Verdadeira (c) Verdadeira (d) Falsa (e) Falsa.

I* 4.10. Exercícios vários referentes ao método de indução (pg. 53)

1. (a) 10 (b) 1 (c) 7 (d) 21 (e) 680 (f) 1
2. (b) 17 (c) 9 (d) Não.
5. $\prod_{k=1}^{0} a_k = 1;\ \prod_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$
8. 2^n
9. Verdadeira se cada $a_k \geq 0$.
11. $n \geq 4$

Capítulo 1

1.5. Exercícios (pg. 68)

1. $f(2) = 3, f(-2) = -1, -f(2) = -3, f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}, 1/f(2) = \frac{1}{3}, f(a + b) = a + b + 1,$
   $f(a) + f(b) = a + b + 2, f(a)f(b) = ab + a + b + 1$
2. $f(2) + g(2) = 2, f(2) - g(2) = 4, f(2)g(2) = -3, f(2)/g(2) = -3, f[g(2)] = 0,$
   $g[f(2)] = -2, f(a) + g(-a) = 2 + 2a, f(t)g(-t) = (1 + t)^2$
3. $\varphi(0) = 4, \varphi(1) = 2, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 2, \varphi(-1) = 6, \varphi(-2) = 8, t = 1.$
4. (a) Todo o x (b) Todo x e y (c) Todo x e h (d) Todo y (e) Todo t (f) Todo a.
5. (a) $|x| \leq 2$ (b) $|y| \leq 1$ (c) $|t| \geq \frac{1}{2}$ (d) $0 \leq a \leq 4$ (e) $|s| \leq 4$
   (f) $|x| \leq 2, \quad x \neq 0$
6. (b) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (c) $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$ (d) O domínio é vazio.
7. Intersectam-se quando $x = 0, 1, -1$.
8. Intersectam-se quando $x = -1, -3$.
10. (a) $p(x) = 1$ (b) $p(x) = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$ (c) $p(x) = ax(x-1) + 1$, a arbitráriory
    (d) $p(x) = ax(x-1) + b$, a e b arbitrários
11. (a) $p(x) = ax(1-x) + b$, a e b arbitrários (b) $p(x) = c$, c arbitrários
    (c) $p(x) = ax$, a arbitrário (d) $p(x) = c$, c arbitrário
12. (a) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$ (b) $\sum_{k=0}^{n} x^k$ (c) $\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k$

1.11. Exercícios (pg. 77)

5. $[nx] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right]$

1.15. Exercícios (pg. 85)

1. (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 4 (e) 6 (f) -6
2. Um exemplo. $s(x) = \frac{5}{2}$ se $0 \le x < 2$, $s(x) = -1$ se $2 \le x \le 5$
5. (b) $2\sum_{k=1}^{8} k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(21 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{7})$
6. (c) $x = 1, x = \frac{5}{2}$
7. (a) 13
10. (a) $f(3) = 1, f(4) = -1, f[f(3)] = 0$ (b) $p = 14, p = 15$
11. (a), (d), (e)
12. (a), (b), (c)

1.26. Exercícios (pg. 100)

1. 9
2. 18
3. 16
4. 0
5. 1
6. 2
7. 0
8. 0
9. 6
10. 11
11. $\frac{21}{8}$
12. 18
13. $\frac{1}{3}$
14. $-\frac{1}{3}$
15. 2
16. $\frac{62}{27}$
17. -78
18. $\frac{2592}{35}$
19. $5^6/21$
20. $-2^{11}/11$
21. (a) $0, \frac{3}{2}$ (b) 0
22. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $c/2$
23. $p(x) = 6x - 6x^2$
24. $p(x) = 4x + 8x^2 + 3x^3$
27. $(1/A)\int_{Aa+B}^{Ab+B} f(x)\,dx$ se $A \ne 0$; $(b-a)f(B)$ se $A = 0$.

Capítulo 2

2.4. Exercícios (pg. 113)

1. $\frac{32}{3}$
2. $\frac{32}{3}$
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{4}{3}$
5. $\frac{1}{12}$
6. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \dfrac{1}{12}$
7. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \dfrac{1}{6}$
8. $\frac{1}{3}(10 - 4\sqrt{2})$
9. $\frac{1}{4}(5\sqrt{5} - 3)$
10. $\frac{7}{4}$
11. $\frac{7}{3}$
12. $\frac{7}{3}$
13. $\dfrac{9\sqrt{3} - 1}{27}$
14. 5
15. $c = \frac{1}{2}$
16. $a = -2$
17. (a) $9\pi/2$ (b) $\pi/2$ (c) -6π

2.8. Exercícios (pg. 126)

Nota: Nos exercícios 1 a 13 n representa um inteiro arbitrário.

1. (b) $\frac{1}{2}\pi + n\pi$
2. (a) $\frac{1}{2}\pi + 2n\pi$ (b) $2n\pi$ (c) $\frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ (d) $(2n+1)\pi$
6. $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$; $\operatorname{cotg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}$
7. $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
8. $A = C\cos\alpha$, $B = C \operatorname{sen}\alpha$
9. $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$. Se $A^2 + B^2 \neq 0$, escolher α de tal maneira que $\cos\alpha = A/c$, $\operatorname{sen}\alpha = B/C$. If $A = B = 0$, escolher α.
10. $C = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 5\pi/4$
11. $C = \sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$
12. $\frac{1}{4}\pi + n\pi$
13. $\frac{1}{2}\pi + 2n\pi$; $\pi + 2n\pi$
17. (a) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (b) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1 (e) 2 (f) 0 (g) 0 (h) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
18. $\frac{1}{2}\pi^2 + 2$
19. $1 + \pi^3/24$
20. 0
21. $2\sqrt{2} - 2$
22. $\frac{1}{2}\pi$
23. $\sqrt{3} + \pi/6$
24. $\sqrt{3} + \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x + \pi/6$ se $0 \leq x \leq 2\pi/3$; $2\sqrt{3} - \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x + 5\pi/6$ se $2\pi/3 \leq x \leq \pi$
25. $(x^6 - x^3)/3 + \cos x - \cos(x^2)$
26. 1
27. 1

2.11. Exercícios (pg. 133)

5. $4\pi^3/3$
6. π
7. 2π
8. 4π
9. 8π
10. $\pi/8$
11. $\pi/2$
12. 2
13. 2
14. $3\pi/2$
5. $9\pi/2$

2.13. Exercícios (pg. 136)

1. $\pi c^2 b^3/3$
2. $\pi/2$
3. $2\pi/3$
4. $33\pi/5$
5. $\pi^2/2$
6. $\pi^2/4$
7. π^2
8. $\pi/2$
9. $3\pi/10$
10. $\pi/2$
11. $2\pi\sqrt{3}$
12. $\frac{6}{5}$
13. $(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3})\pi r^3$
14. $a = \frac{4}{3}$
15. $16\sqrt{3}/3$
16. $4a^5/5$
17. $\dfrac{h}{6}(B_1 + 4M + B_2)$
18. (a) $8\pi/5$ (b) 2π (c) $10\pi/3$ (d) $16\pi/15$

2.15. Exercícios (pg. 140)

1. 60. libras/pé
2. 125 joules; 0,8 metro
3. (a) 441 joules (b) 425 joules
4. $a = 3$, $b = -2$

5. 3750 libras/pé
6. 5000 libras/pé
7. 20 000 libras/pé.
8. 21 800 libras/pé.

2.17. Exercícios (pg. 142)

1. $(a^2 + ab + b^2)/3$
2. $\frac{7}{12}$
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{45}{28}$
5. $2/\pi$
6. $2/\pi$
7. $2/\pi$
8. $1/\pi$
9. $\frac{1}{2}$
10. $\frac{1}{2}$
11. $c = a/\sqrt{3}$; $c = a/(n + 1)^{1/n}$
12. (a) $w(x) = x$ (b) $w(x) = x^2$ (c) $w(x) = x^3$
14. Todas três.
16. (a) $L/2$ (b) $L^3/3$ (c) $L/\sqrt{3}$
17. (a) $7L/12$ (b) $5L^3/8$ (c) $\sqrt{15}\,L/6$
18. (a) $2L/3$ (b) $L^4/4$ (c) $\sqrt{2}\,L/2$
19. (a) $11L/18$ (b) $31L^4/192$ (c) $\sqrt{62}\,L/12$
20. (a) $3L/4$ (b) $L^5/5$ (c) $\sqrt{15}\,L/5$
21. (a) $21L/32$ (b) $19L^5/240$ (c) $\sqrt{190}\,L/20$
22. $p(x) = x^2$ para $0 \le x \le L$ dá $\bar{x} = 3L/4$
23. (a) $6/\pi$ (b) $3\sqrt{2}/2$
24. $T = 2\pi$ sec; $80\sqrt{3}$

2.19. Exercícios (pg. 148)

1. $x + x^2/2 + x^3/3$
2. $2y + 2y^2 + 8y^3/3$
3. $\frac{5}{6} + 2x + 2x^2 + 8x^3/3$
4. $-2x + 2x^2 - x^3$
5. $(3x^5 + 5x^3 + 136)/15$
6. $x^{10}/5 + 2x^6/3 - x^5/5 - 2x^3/3 + x^2 - x$
7. $x + \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{5}{3}$
8. $\frac{2}{3}(x^3 - x^{3/2}) + \frac{4}{5}(x^{5/2} - x^{5/4})$
9. $\operatorname{sen} x$
10. $\frac{1}{2}x^2 + \operatorname{sen}(x^2)$
11. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \cos(x^2) - \cos x$
12. $\frac{1}{3}(x^3 - \cos 3x + 1)$
13. $\frac{1}{3}(x^6 - x^3 + \cos 3x - \cos(3x^2))$
14. $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y$
15. $2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$
16. $\frac{3}{4}(x + \pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
17. $0, \pm\sqrt{2}$
18. (c) $P(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x])$ (d) $\frac{1}{12}$
20. (b) $g(2) = 2A, g(5) = 5A$ (c) $A = 0$

Capítulo 3

3.6. Exercícios (pg. 164)

1. $\frac{1}{4}$
2. -1
3. 4
4. 1
5. $2t$
6. -1
7. 1
8. 0
9. 0
10. 0
11. 1
12. -1
13. 1
14. -1

22. $a = (\text{sen } c - b)/c$ se $c \neq 0$; se $c = 0$ não existe solução a menos que $b = 0$, em cujo caso servirá qualquer a.
23. $a = (2 \cos c - b)/c^2$ se $c \neq 0$; se $c = 0$ não existe solução a menos que $b = 2$, caso em que servirá um a qualquer.
24. A tangente é contínua para todo o valor de x, excepto em $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, com n inteiro; a cotagente é contínua para todo o valor de x, excepto em $x = n\pi$, com n um inteiro qualquer.
25. $f(x) \to 1$ quando $x \to 0$. Define-se $f(0) = 1$ para a continuidade em 0.
28. Não.
29. Não.
30. $f(x) \to 0$ quando $x \to 0$. Define-se $f(0) = 0$ para a continuidade em 0.
32. $f(x) \to 0$ quando $x \to 0$. Define-se $f(0) = 0$ para a continuidade em 0.

3.8. Exercícios (pg. 168)

1. $x^2 - 1$, todo o x
2. $(x - 1)^2$, todo o x
3. $|x|$, todo o x
4. 0, definida unicamente em $x = 0$.
5. $x, x \geq 0$
6. $-x, x \geq 0$
7. $\text{sen}\sqrt{x}, x \geq 0$
8. $\sqrt{\text{sen } x}$, $2k\pi \leq x \leq (2k + 1)\pi$, k inteiro.
9. $\sqrt{x + \sqrt{x}}, x > 0$
10. $\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x > 0$
11. -3
12. $\sqrt{3}$
13. 1
14. 1
15. 1
16. 2
17. 0
18. 2
19. 1
20. $\frac{1}{2}$
21. x^2 sen $x \geq 0$; 0 se $x \leq 0$.
22. 1 se $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$; 0 para os restantes valores de x.
23. x^2 se $x \geq 0$; 0 se $x < 0$

3.15. Exercícios (pg. 177)

1. $g(y) = y - 1$; todo o y
2. $g(y) = \frac{1}{2}(y - 5)$; todo o y
3. $g(y) = 1 - y$; todo o y
4. $g(y) = y^{1/3}$; todo o y
5. $g(y) = y$ se $y < 1$; $\sqrt{y}$ se $1 \leq y \leq 16$; $(y/8)^2$ se $y > 16$.

3.20. Exercícios (pg. 183)

3. 0,099669 com arredondamento da sexta casa decimal.

Capítulo 4

4.6. Exercícios (pg. 197)

1. $f'(0) = 1, f'(\frac{1}{2}) = 0, f'(1) = -1, f'(-10) = -19$
2. (a) $1, -2$ (b) $0, -1$ (c) $3, -4$
3. $2x + 3$
4. $4x^3 + \cos x$
5. $4x^3 \operatorname{sen} x + x^4 \cos x$
6. $-1/(x + 1)^2$
7. $-2x/(x^2 + 1)^2 + 5x^4 \cos x - x^5 \operatorname{sen} x$
8. $-1/(x - 1)^2$
9. $\operatorname{sen} x/(2 + \cos x)^2$
10. $-\dfrac{2x^5 + 9x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$
11. $\dfrac{1 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(2 - \cos x)^2}$
12. $\dfrac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 + x^2} - \dfrac{2x^2 \operatorname{sen} x}{(1 + x^2)^2}$
13. (b) $v_0/32$ seg (c) $-v_0$ pés/segundo (d) 16 pés/seg.; 160 pés/seg; $16T$ pés/segundo.
    (f) $f(t) = v_0 t - 10 t^2$ é um exemplo.
14. $3x^2$, onde x é a medida duma aresta.
16. $\frac{1}{2}x^{-1/2}$
17. $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$
18. $\frac{3}{2}x^{1/2}$
19. $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$
20. $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{4}x^{-3/4}$
21. $-\frac{1}{2}x^{-3/2} - \frac{1}{3}x^{-4/3} - \frac{1}{4}x^{-5/4}$
22. $\dfrac{1 - x}{2\sqrt{x}(1 + x)^2}$
23. $\dfrac{2 + \sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2}$
26. $\sec x\ (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)$.
27. $x \sec^2 x + \operatorname{tg} x$.
28. $-(x^{-2} + 4x^{-3} + 9x^{-4})$
29. $\dfrac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}$
30. $\dfrac{2(1 - 2x)}{(1 - x + x^2)^2}$
31. $\dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$
32. $-\dfrac{1 + \cos x}{(x + \operatorname{sen} x)^2}$
33. $\dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$
34. $-\dfrac{(2x^2 + 3) \operatorname{sen} x + 4x \cos x}{(2x^2 + 3)^2}$
35. $\dfrac{(2ax + b)(\operatorname{sen} x + \cos x) + (ax^2 + bx + c)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{1 + \operatorname{sen} 2x}$
36. $a = d = 1;\ b = c = 0$
37. $a = c = e = 0;\ b = f = 2;\ d = -1$
38. (a) $\dfrac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$

(b) $\dfrac{n^2x^{n+3} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} + (n+1)^2x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}$

4.9. Exercícios (pg. 204)

1. 1, 3
2. (a) $-1, \frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}, 0$ (c) $-2, \frac{3}{2}$
3. $(2n+1)\pi$, com n um inteiro qualquer.
4. $a = -2, b = 4$
5. $a = 1, b = 0, c = -1$
6. (a) $x_1 + x_2 + a$ (b) $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$
7. Tangente em $(3, -3)$; intersecta a curva em $(0, 0)$.
8. $m = -2, b = -2, a = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$
9. $a = 2c, b = -c^2$
10. $a = \dfrac{3}{2c}, b = -\dfrac{1}{2c^3}$
11. $a = \cos c, b = \operatorname{sen} c - c\cos c$
12. $-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$; $\dfrac{1+3\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^3}$; $-\dfrac{3}{4}\dfrac{1+4\sqrt{x}+5x}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^4}$
13. $a = -4, \quad b = 5, \quad c = -1, \quad d = -2$
14. (a) $\dfrac{15}{4}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$
15. (a) verdadeira (b) verdadeira (c) falsa se $f'(a) \neq 0$. O limite é $2f'(a)$ (d) falsa se $f'(a) \neq 0$. O limite e $\dfrac{1}{2}f'(a)$.
16. (a) $D^*(f+g) = (1 + g/f)D^*f + (1 + f/g)D^*g$ quando $f(x)$ e $g(x)$ não são 0.
    $D^*(f \cdot g) = g^2\, D^*f + f^2\, D^*g$;
    $D^*(f/g) = (g^2\, D^*f - f^2\, D^*g)/g^4$ quando $g(x) \neq 0$
    (b) $D^*f(x) = 2f(x)\, Df(x)$
    (c) $f(x) = c$ para todo o x

4.12. Exercícios (pg. 211)

1. $-2\cos x(1 + 2\operatorname{sen} x)$
2. $x/\sqrt{1+x^2}$
3. $(2x^3 - 4x)\operatorname{sen} x^2 - 2x\cos x^2 + 2\operatorname{sen} x^3 + 6x^3\cos x^3$
4. $-\operatorname{sen} 2x \cos(\cos 2x)$
5. $n\operatorname{sen}^{n-1} x\cos(n+1)x$
6. $\cos x\cos(\operatorname{sen} x)\cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]$
7. $\dfrac{2\operatorname{sen} x(\cos x\operatorname{sen} x^2 - x\operatorname{sen} x\cos x^2)}{\operatorname{sen}^2 x^2}$
8. $2/(\operatorname{sen}^2 x)$
9. $-\dfrac{16\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}$

10. $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

11. $4(4-x^2)^{-3/2}$

12. $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$

13. $-(1+x^2)^{-3/2}$

14. $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\,g(x)}{8\sqrt{x}\,g(x)\sqrt{x+g(x)}}$, onde $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

15. $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{2/3}}$

16. $f'(x)=(x+1)^{-2}$; $g'(x)=(2x+1)^{-2}$

17.

x	$h(x)$	$h'(x)$	$k(x)$	$k'(x)$
0	0	−10	0	5
1	1	5	1	12
2	2	4	2	−10
3	3	12	3	4

18.

x	$g'(x)$	$g''(x)$
0	0	0
1	3	10
2	30	36

19. (a) $2xf'(x^2)$ (c) $f'[f(x)]f'(x)$
(b) $[f'(\operatorname{sen}^2 x)-f'(\cos^2 x)]\operatorname{sen}2x$ (d) $f'(x)f'[f(x)]f'\{f[f(x)]\}$

20. (a) 75 cm^3/seg (b) 300 cm^3/seg (c) $3x^2$ cm^3/seg

21. 400 milhas por hora.

22. (a) $20\sqrt{5}$ pés/seg. (b) $50\sqrt{2}$ pés/seg.

23. 7,2 mi/hr

24. (a) e (b) $5/(4\pi)$ pés/min.;

25. $c=1+36\pi$

26. $dV/dh=75\pi$ pés^3/pés; $dr/dt=1/(15\pi)$ pés/seg.

27. $\dfrac{66}{7}$ cm^2/sec

28. $n=33$

29. (a) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4.15. Exercícios (pg. 219)

3. (b) $c=\frac{1}{2}$, $c=\sqrt{2}$

6. (a) $\theta = \frac{1}{2}$, $\theta \to \frac{1}{2}$

(b) $\theta = \dfrac{x + \frac{1}{3}h}{x + \sqrt{x^2 + xh + \frac{1}{3}h^2}}$; $\theta \to \frac{1}{2}$ se $x > 0$

7. (b) f tem quando muito $k + r$ zeros em $[a, b]$.

4.19. Exercícios (pg. 224)

1. (a) $\dfrac{3}{2}$ (b) f decresce se $x < 3/2$; cresce se $x > 3/2$ (c) f' cresce para todo o x.
2. (a) $\pm \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (b) f cresce se $|x| > \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$; decresce se $|x| < \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.
(c) f' cresce se $x > 0$; decresce se $x < 0$.
3. (a) ± 1 (b) f cresce se $|x| > 1$; decresce se $|x| < 1$ (c) f' cresce se $x > 0$; decresce se $x < 0$.
4. (a) 1,3 (b) f cresce se $x < 1$ ou se $x > 3$; decresce se $1 < x < 3$; (c) f' cresce se $x > 2$; decresce se $x < 2$.
5. (a) 1 (b) f cresce se $x > 1$; decresce se $x < 1$ (c) f' cresce para todo o x.
6. (a) nenhum (b) f cresce se $x < 0$; decresce se $x > 0$.
(c) f' cresce se $x < 0$, ou se $x > 0$.
7. (a) $2^{1/3}$ (b) f cresce se $x < 0$, ou se $x > 2^{1/3}$; decresce se $0 < x < 2^{1/3}$.
(c) f' cresce se $x < 0$, ou se $x > 0$;
8. (a) 2 (b) f cresce se $x < 1$, ou se $1 < x < 2$; decresce se $2 < x < 3$, ou se $x > 3$
(c) f' cresce se $x < 1$, ou se $x > 3$; decresce se $1 < x < 3$.
9. (a) ± 1 (b) f cresce se $|x| < 1$; decresce se $|x| > 1$ (c) f' cresce se $-\sqrt{3} < x < 0$, ou se $x > \sqrt{3}$ decresce se $x < -\sqrt{3}$, ou se $0 < x < \sqrt{3}$.
10. (a) 0 (b) f cresce se $x < -3$, ou se $-3 < x < 0$; decresce se $0 < x < 3$, ou se $x > 3$ (c) f' cresce se $|x| > 3$; decresce se $|x| < 3$.

Nota: Nos Exercícios 11,12 e 13 n, representa um inteiro qualquer.

11. (a) $\dfrac{1}{2}n\pi$ (b) f cresce se $n\pi < x < (n + \dfrac{1}{2})\pi$; decresce se $(n - \dfrac{1}{2})\pi < x < n\pi$ (c) f' cresce se $(n - \dfrac{1}{4})\pi < x < (n + \dfrac{1}{4})\pi$; decresce se $(n + \dfrac{1}{4})\pi < x < (n + \dfrac{3}{4})\pi$.
12. (a) $2n\pi$ (b) f cresce para todo o x.
(c) f' cresce se $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$; decresce se $(2n - 1)\pi < x < 2n\pi$.
13. (a) $(2n + \dfrac{1}{2})\pi$ (b) f cresce para todo o x.
(c) f' cresce se $(2n + \dfrac{1}{2})\pi < x < (2n + \dfrac{3}{2})\pi$; decresce se $(2n - \dfrac{1}{2})\pi < x < (2n + \dfrac{1}{2})\pi$.
14. (a) 0 (b) f cresce se $x > 0$; decresce se $x < 0$ (c) f' cresce para todo x.

4.21. Exercícios (pg. 227)

2. $\dfrac{1}{4}L$ metros de largo, $\dfrac{1}{2}L$ de comprido.
3. Largura $\dfrac{1}{2}\sqrt{2A}$, comprimento $\sqrt{2A}$.

7. $\sqrt{2}\,L$
10. $r = h = R/\sqrt{2}$
12. $r = \frac{1}{2}R, \quad h = \frac{1}{2}H$
13. $r = 2R/3, \quad h = H/3$
14. $h = \frac{4}{3}R, \quad r = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,R$
15. Um retângulo cuja base é dupla da altura.
16. Trapézio isósceles, base inferior o diâmetro, base superior o raio.
17. (a) $6\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$
    (b) $8 + 2\sqrt{7}, 2 + 2\sqrt{7}, 5 - \sqrt{7}$
18. $\sqrt{5}$
19. (a) $20\sqrt{3}$ milhas por hora; \$10,39.
    (b) $40\sqrt{2}$ milhas por hora; \$16,97.
    (c) 60 milhas por hora; \$22,00.
    (d) 60 milhas por hora; \$27,00.
    (e) 60 milhas por hora; \$32,00.
20. $\pi/4$
21. Cresce $= \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ polegadas, ângulo = arctg $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.
22. (a) $\max = 3\sqrt{3}\,r$; $\min = 4r$
    (b) $\frac{1}{4}L$
23. O retângulo tem por base $4P/(3\pi + 8)$, altura $P(4 + \pi)/(6\pi + 16)$.
24. $V = 48\pi$ para $0 \le h < 2$; $V = 4\pi(4 + h)^3/(9h)$ para $h \ge 2$
26. $A = 2(\frac{24}{7})^{7/2}$
27. $m(t) = 0$ se $t^2 \ge \frac{1}{3}$; $m(t) = t^2 - \frac{1}{3}$ se $t^2 \le \frac{1}{3}$

*4.23. Exercícios (pg. 235)

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$;
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -16xy$
2. $f_x = \operatorname{sen}(x + y) + x\cos(x + y)$; $f_y = x\cos(x + y)$; $f_{yy} = -x\operatorname{sen}(x + y)$;
   $f_{xx} = 2\cos(x + y) - x\operatorname{sen}(x + y)$; $f_{xy} = f_{yx} = \cos(x + y) - x\operatorname{sen}(x + y)$
3. $D_1 f = y + y^{-1}$; $D_2 f = x - xy^{-2}$; $D_{1,1} f = 0$; $D_{2,2} f = 2xy^{-3}$; $D_{1,2} f = D_{2,1} f = 1 - y^{-2}$
4. $f_x = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$; $f_y = y(x^2 + y^2)^{-1/2}$; $f_{xx} = y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$;
   $f_{yy} = x^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$; $f_{xy} = f_{yx} = -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$
5. $f_{yy} = 6x^2y\cos(x^2y^3) - 9x^4y^4\operatorname{sen}(x^2y^3)$;
   $f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2\cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\operatorname{sen}(x^2y^3)$
6. $f_{xy} = f_{yx} = 6\cos(2x - 3y)\cos[\cos(2x - 3y)] + 6\operatorname{sen}^2(2x - 3y)\operatorname{sen}[\cos(2x - 3y)]$
7. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -2(x + y)(x - y)^{-3}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y(x - y)^{-3}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x(x - y)^{-3}$
8. $f_{xx} = -3xy^2(x^2 + y^2)^{-5/2}$; $f_{yy} = -x(x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$;
   $f_{xy} = f_{yx} = y(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$

26. 3

27. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi + 2} - A\right)$

34. (a) $p(x) = -x^2 + x - 1$

35. (a) $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$; $P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$; $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$;
$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$; $P_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

Capítulo 6

6.9. Exercícios (pg. 276)

1. (a) 1 (b) $(a + b)/(1 + ab)$
2. (a) 0 (b) $\dfrac{e-1}{e+1}$ (c) 4 (d) $\dfrac{(e^2-1)^2}{4e^2}$
3. Cresce se $0 < x < e$, decresce se $x > e$; convexa se $x > e^{3/2}$, côncava se $0 < x < e^{3/2}$.
4. $(2x)/(1 + x^2)$
5. $x/(1 + x^2)$
6. $x/(x^2 - 4)$
7. $1/(x \log x)$
8. $(2/x) + 1/(x \log x)$
9. $x/(x^4 - 1)$
10. $\dfrac{n(x + \sqrt{1 + x^2})^n}{\sqrt{1 + x^2}}$
11. $1/[2(1 + \sqrt{x + 1})]$
12. $\log (x + \sqrt{x^2 + 1})$
13. $1/(a - bx^2)$
14. $2 \operatorname{sen}(\log x)$
15. $-1/(x \log^2 x)$
16. $\frac{1}{3} \log |2 + 3x| + C$
17. $x \log^2 |x| - 2x \log |x| + 2x + C$
18. $\frac{1}{2}x^2 \log |x| - \frac{1}{4}x^2 + C$
19. $\frac{1}{2}x^2 \log^2 |x| - \frac{1}{2}x^2 \log |x| + \frac{1}{4}x^2 + C$
20. 3
21. $\log |\operatorname{sen} x| + C$
22. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \log |ax| - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$ se $n \neq -1$; $\frac{1}{2} \log^2 |ax| + C$ se $n = -1$
23. $\dfrac{x^3}{3} (\log^2 |x| - \frac{2}{3} \log |x| + \frac{2}{9}) + C$
24. $\log |\log x| + C$
25. -2
26. $\frac{2}{3}(-2 + \log |x|)\sqrt{1 + \log |x|} + C$
27. $\dfrac{x^4}{4} \log^3 |x| - \frac{3}{16}x^4 \log^2 |x| + \frac{3}{32}x^4 \log |x| - \frac{3}{128}x^4 + C$
34. $4 \log x$
35. $3 + 3 \log x$.
36. $a \log a$

6.17. Exercícios (pg. 290)

1. $3e^{3x-1}$
2. $8xe^{4x^2}$
3. $-2xe^{-x^2}$
4. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
5. $-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
6. $2^x \log 2$
7. $2^{1+x^2}x \log 2$
8. $(\cos x)e^{\operatorname{sen} x}$
9. $-(\operatorname{sen} 2x)e^{\cos^2 x}$
10. 1
11. $e^x e^{e^x}$
12. $e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}$
13. $e^x(x - 1) + C$
14. $-e^{-x}(x + 1) + C$
15. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
16. $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + C$
17. $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$
18. $-\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2} + C$
19. $b = e^a$, a arbitrário
21. $x^x(1 + \log x)$
22. $1 + (1 + 2x + 2x^2)e^{x^2}$
23. $4(e^x + e^{-x})^{-2}$
24. $a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a} \log a + a^x a^{a^x}(\log a)^2$
25. $1/[x \log x \log(\log x)]$
26. $e^x(1 + e^{2x})^{-1/2}$
27. $x^x x^{x^x}\left[\dfrac{1}{x} + \log x + (\log x)^2\right]$
28. $(\log x)^x\left(\log\log x + \dfrac{1}{\log x}\right)$
29. $2x^{-1+\log x} \log x$
30. $\dfrac{(\log x)^{x-1}}{x^{1+\log x}}[x - 2(\log x)^2 + x \log x \log(\log x)]$
31. $(\operatorname{sen} x)^{1+\cos x}[\cot^2 x - \log(\operatorname{sen} x)] - (\cos x)^{1+\operatorname{sen} x}[\operatorname{tg}^2 x - \log(\cos x)]$
32. $x^{-2+1/x}(1 - \log x)$
33. $\dfrac{54x - 36x^2 + 4x^3 + 2x^4}{3(1 - x)^2(3 - x)^{2/3}(3 + x)^{5/3}}$
34. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{b_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{x - a_k}$

6.19. Exercícios (pg. 293)

16. $\frac{5}{3}$
17. $\frac{3}{4}$
18. $\operatorname{sh} x = \dfrac{5}{12}$, $\operatorname{ch} x = 13/12$.
19. $\frac{37}{12}$
20. $\frac{24}{25}$

6.22. Exercícios (pg. 299)

12. $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ se $|x| < 2$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$ se $|x - 1| < \sqrt{2}$

14. $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ se $|x| > 1$

15. $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$ se $x \neq (k + \dfrac{1}{2})\,\pi$, k inteiro.

16. $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ se $x \geq 0$

17. $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$

18. $-\dfrac{2x}{|x|\,(1+x^2)}$ se $x \neq 0$

19. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}$ s $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$

20. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

21. $\dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{\sin 2x}}$ se $k\pi < x < (k + \frac{1}{2})\pi$

22. $\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ se $0 < |x| < 1$

23. $1/(1+x^2)$ se $x \neq 1$

24. $\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}(\arccos x^2)^3}$ if $|x| < 1$

25. $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\,\arccos(1/\sqrt{x})}$ se $x > 1$

27. $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2} + \dfrac{(1+2x^2)\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{5/2}}$

29. $\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{|a|} + C$

30. $\operatorname{arcsen}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

31. $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

32. $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}(\sqrt{b/a}\,x) + c$ se $ab > 0$;

$\dfrac{a}{2\,|a|\sqrt{-ab}}\log\left|\dfrac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}}\right| + C$ se $ab < 0$

33. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$

34. $\dfrac{1}{2}[(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x] + C.$

35. $\dfrac{x^3}{3}\arccos x - \dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + C$

36. $\dfrac{1}{2}(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

37. $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

38. $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C.$

39. $\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}) + C$

40. $\dfrac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$

41. $\dfrac{(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$

42. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{1+x^2}) + C$

43. $\operatorname{arctg} e^x + C$

44. $\dfrac{1}{2}\log(1+e^{-2x}) - \dfrac{\operatorname{arc\,cotg} e^x}{e^x} + C.$

45. $a\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

46. $\dfrac{2(b-a)}{|b-a|}\operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} + C$

47. $\frac{1}{4}|b-a|(b-a)\operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} + \frac{1}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}\,[2x-(a+b)] + C$

6.25. Exercícios (pg. 310)

1. $\log|x-2| + \log|x+5| + C$
2. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + C$
3. $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$
4. $\frac{1}{2}x^2 - x + \log\left|\frac{x^3(x+2)}{x-1}\right| + C$
5. $\log|x+1| - \frac{3}{(2x+1)^2} + \frac{3}{2x+1} + C$
6. $2\log|x-1| + \log(x^2+x+1) + C$
7. $x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}(x/2) + C$
8. $2\log|x| - \log|x+1| + C$
9. $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$
10. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\log\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C$
11. $\frac{1}{x+1} + \log|x+1| + C$
12. $\frac{1}{2}\log|x^2-1| - \log|x| + C$
13. $x + \frac{4}{5}\log|x-2| - \frac{9}{5}\log|x+3| + C$
14. $\log|x-2| - \frac{4}{x-2} + C$
15. $\frac{1}{2-x} - \operatorname{arctg}(x-2) + C$
16. $4\log|x+1| - \frac{3}{2}\log|x| - \frac{5}{2}\log|x+2| + C$
17. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + C$
18. $\frac{1}{3}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + C$
19. $\log|x| + \frac{1}{x^2+1} + C$
20. $\frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-2}{x}\right| + C$
21. $\log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - x + \operatorname{arctg} x + C$
22. $\frac{1}{4}\log\ (x-1)/(x+1)\ - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

6. (a) $x \geq 1$ (c) $F(ax) - F(a)$; $F(x) - \dfrac{e^x}{x} + e$; $xe^{1/x} - e - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7. (a) não existe tal função. (b) $-2^x \log 2$ (c) $\frac{1}{2}x \pm 1$
9. (a) $g(3x) = 3e^{2x}g(x)$ (b) $g(nx) = ne^{(n-1)x}g(x)$ (c) 2 (d) $C = 2$
10. $f(x) = b^{x/a}g(x)$, sendo g uma função periódica de período a.
12. (a) $-Ae^{-a}$ (b) $\frac{1}{2}A$ (c) $A + 1 - \frac{1}{2}e$ (d) $e \log 2 - A$
13. (b) $c_0 + nc_1 + n(n-1)c_2 + n(n-1)(n-2)c_3$

    (c) Se $p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$, então $f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{m} k! \binom{n}{k} c_k$.
16. (a) $\frac{2}{3}x^2(x + |x|)$

    (b) $x - \frac{1}{3}x^3$ se $|x| \leq 1$; $x - \frac{1}{2}x\,|x| + \dfrac{1}{6}\dfrac{|x|}{x}$ se $|x| > 1$

    (c) $1 - e^{-x}$ se $x \geq 0$; $e^x - 1$ se $x < 0$

    (d) x se $|x| \leq 1$; $\frac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}\dfrac{|x|}{x}$ se $|x| > 1$
17. $f(x) = \sqrt{(2x + 1)/\pi}$
18. (a) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$ (b) $\frac{1}{4}\pi(1 - e^{-4t})$ (c) $\frac{1}{2}\pi[1 - e^{-2t}(2t + 1)]$ (d) π
19. (a) $\log 3 - 2 \log 2$ (b) não existe nenhum x real.
20. (a) verdadeira (b) falsa (c) verdadeira (d) falsa se $x < 0$.
25. (d) $\displaystyle\int_0^x e^{-t}t^n\,dt = n!e^{-x}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$
27. (a) $f(t) = 2\sqrt{t} - 1$ se $t > 0$

    (b) $f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$ se $0 \leq t \leq 1$

    (c) $f(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}$ se $|t| \leq 1$

    (d) $f(t) = t$ se $t \leq 0$; $f(t) = e^t - 1$ se $t > 0$
28. (b) $C_n = -2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{\log^k 2}$ (c) $b = \log 2$ (d) $e^2\,\mathrm{Li}\,(e^{2x-2})$
29. $g(y) = -e^y$; todo o y
30. (b) constante $= \frac{3}{2}$

Capítulo 7

7.8. Exercícios (pg. 331)

8. (b) $\dfrac{55\sqrt{2}}{672} + R$, onde $|R| < \dfrac{\sqrt{2}}{7680} \leq 2\cdot 10^{-4}$.
9. $0{,}9461 + R$, onde $|R| < 2\cdot 10^{-4}$.

7.11. Exercícios (pg. 338)

1. $1 + x \log 2 + \frac{1}{2}x^2 \log^2 2$
2. $\cos 1 + (\cos 1 - \operatorname{sen} 1)(x - 1) - \frac{1}{2}(2 \operatorname{sen} 1 + \cos 1)(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(\operatorname{sen} 1 - 3 \cos 1)(x - 1)^3$
3. $x - x^2 - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{59x^5}{120} + \dfrac{x^6}{8}$
4. $a = 0, \quad b = 1, \quad c = -\frac{1}{2}$
5. $-\frac{2}{3}$
6. a/b
7. $\frac{2}{3}$
8. $-\frac{1}{6}$
9. $\frac{1}{2}$
10. 1
11. 1
12. $\log a/\log b$
13. $\frac{1}{3}$
14. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{1}{6}$
16. -1
17. -1
18. $\frac{1}{6}$
19. 1
20. -2
21. $\frac{1}{6} \log a$
22. $\frac{1}{6}$
23. $1/e$
24. e^3
25. $-e/2$
26. $e^{-1/2}$
27. $e^{1/6}$
28. $\frac{1}{2}$
29. $\frac{1}{2}$
30. $a = 2$; limite $= \frac{3}{2}$
33. $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 4$; limite $= e^2$

7.13. Exercícios (pg. 343)

1. $\frac{14}{3}$
2. -2
3. $\frac{1}{3}$
4. $-\frac{1}{6}$
5. $(a/b)^2$
6. $\frac{1}{6}$
7. $1/\sqrt{2a}$
8. -2
9. 1
10. $-\frac{1}{3}$
11. $n(n + 1)/2$
12. $\frac{1}{3}(a^2 - b^2)/(a^2b^2)$
13. 6 quando $x \to 0$; $4/\pi$ quando $x \to \pi/2$.
14. $a = -3$; $b = \frac{9}{2}$
15. $a = 4$; $b = 1$
16. (a) $T(x) = \operatorname{tg} x/2 - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$ (b) $S(x) = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$ (c) $\dfrac{3}{2}$.
17. tE/L
18. $-\dfrac{At \cos kt}{2k}$

7.17. Exercícios (pg. 351)

1. 0
2. 1
3. $\frac{1}{3}$
4. $1/\sqrt{b}$
5. $\frac{1}{24}$
6. 1
7. 0
8. $e/2$
9. $+\infty$
10. 1
11. 0
12. 0
13. $\frac{1}{2}$
14. 0
15. 0
16. 1
17. -1
18. 1
19. e
20. 1
21. $1/e$
22. 1
23. e^e
24. $e^{2/\pi}$
25. $-\frac{1}{2}$
26. $\log 2$
27. $\frac{1}{2}$
28. $c = \frac{1}{5}$; limite $= \frac{7}{5}$
29. $\frac{1}{2}$
30. $c = 1$; limite $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$
32. (b) 11,55 anos (c) 11,67 anos.

Capítulo 8

8.5. Exercícios (pg. 362)

1. $y = e^{3x} - e^{2x}$
2. $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^5$
3. $y = 4\cos x - 2\cos^2 x$
4. $y = x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}$
5. $x = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$
6. $y = (x + C)/\operatorname{sen} x$
7. $y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)(C - e^{-x^2})$
8. $y = \operatorname{sen} x + C/\operatorname{sen} x$
9. $y = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\left(x + \frac{1}{x-2} + C\right)$
10. $y = xT(x) + Cx$
11. $f(x) = 1 + \log x$
12. Somente a função dada.
14. $y = (\sqrt{2}e^{2x} + e^{2x} - e^{x})^2$
15. $y = 1/(x^2 - x + 2 - e^{-x})$
16. $y = (x^3 - x)^2$
17. $y = 1/(x^2 + x - x^2 \log x)$
18. (a) $y = \left(\frac{e^x + e^{2-x}}{2x}\right)^{1/2}$ (b) $y = -\left(\frac{e^x + e^{2-x}}{2x}\right)^{1/2}$ (c) $y^2 = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$
20. (a) $y = \frac{Ce^{3x} + 2}{Ce^{3x} - 1}$ sendo $C = \frac{b+2}{b-1}$ (b) $y = \frac{e^{3x} + 2C}{e^{3x} - C}$ sendo $C = \frac{b-1}{b+2}$

8.7. Exercícios (pg. 364)

1. $100\,(1 - 2^{-1/16}) = 4{,}2$ por cento.
2. Quatro vezes a quantidade inicial.
3. (a) $T = (\log n)/k$ (b) $w(t) = (b - t)/(b - a)$
4. $256(1 - e^{-t/8})$ se $0 \le t \le 10$; $16 + 166e^{20-2t}$ se $t \ge 10$
6. $v \to \sqrt{mg/k}$
7. (c) 54,5 min (d) $T = \frac{1}{10k}[1 + (600 - t)k + (1400k - 1)e^{-kt}]$
8. $55°$
9. 19,5 libras.
10. 54,7 libras.
13. Para a equação (8.20), $x = x_0\, e^{\kappa(t-t_0)}$; para a equação (8.22), $\alpha = Mk$.
15. $x = M\left[1 + \exp\left(-M\int_{t_0}^{t} k(u)\,du\right)\right]^{-1}$
16. (a) 200 milhões (b) 217 milhões.
17. (a) 0,026 por ano (b) 0,011 por ano; 260 milhões; 450 milhões.
18. $dx/dt = kx(1 - at)$; $x = x_0 e^{k(t - at^2/2)}$; curva (d)

8.14. Exercícios (pg. 381)

1. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
2. $y = c_1\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$
3. $y = c_1 + c_2e^{4x}$
4. $y = c_1 + c_2e^{-4x}$
5. $y = e^{x}(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\operatorname{sen}\sqrt{2}x)$
6. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$
7. $y = e^{x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x)$
8. $y = e^{x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x)$

9. $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x)$
10. $y = e^{x}(c_1 + c_2 x)$
11. $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{-3x/2}$
12. $y = -\cos(5x - 15)$
13. $y = \dfrac{a}{2}e^{b(x-1)} + \dfrac{b}{2}e^{a(x-1)}$, onde $a = 2 - \sqrt{5}, b = 2 + \sqrt{5}$
14. $y = 2e^{-2x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$
15. $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x-\pi} \operatorname{sen} 5x$; $v(x) = \frac{5}{6}e^{-2x-\pi} \operatorname{sen} 3x$
16. $u(x) = 6(e^{4x} - e^{-x})/5$; $v(x) = e^{x} - e^{-5x}$
17. $k = n^2\pi^2$; $f_k(x) = C \operatorname{sen} n\pi x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
19. (b) Não (c) se $k \neq 0$ a condição é $a_1 - a_2 \neq n\pi/k$.
20. (a) $y'' - y = 0$
    (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
    (c) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$
    (d) $y'' + 4y = 0$
    (e) $y'' - y = 0$

8.17. Exercícios (pg. 387)

1. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} - x$
2. $y = c_1e^{x} + c_2 - 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$
3. $y = c_1e^{-x} + c_2 + \frac{1}{3}x^3$
4. $y = e^{x}(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}x) - \frac{8}{27} + \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
5. $y = c_1e^{x} + c_2e^{4x} + \frac{9}{32} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x^2$
6. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} - \frac{7}{12} + \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$
7. $y = (c_1 + \frac{1}{4}x)e^{2x} + c_2e^{-2x}$
8. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}e^{-2x}$
9. $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + \frac{1}{3}x)e^{x}$
10. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x}$
11. $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + \frac{1}{3}x)e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x}$
12. $y = (c_1 + c_2x + \frac{1}{3}x^3)e^{x} + x + 2$
13. $y = (c_1 + c_2x - \log|x|)e^{-x}$
14. $y = c_1 \operatorname{sen} x + (c_1 + \log|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x|) \cos x - 2.$
15. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + (e^{x} - e^{-x})\log(1 + e^{x}) - xe^{x} - 1$
16. $y = (c_1 + \frac{1}{3}x)e^{x} + \frac{1}{3}e^{-x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}(e^{x} + e^{-2x})\log(1 + e^{x})$
17. $y = \begin{cases} (c_1 + c_2x)e^{-3x} & \text{se} \quad x < 1 \text{ ou } x > 2, \\ (a + bx)e^{-3x} + \frac{1}{9} & \text{se} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$
18. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{6}xe^{3x}$
19. $y = (c_1 - \frac{1}{6}x)\cos 3x + (c_2 - \frac{1}{18})\operatorname{sen} 3x$
20. $y = (c_1 - \frac{1}{2}x)\cos x + c_2 \operatorname{sen} x$
21. $y = c_1 \cos x + (c_2 + \frac{1}{2}x)\operatorname{sen} x$
22. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + x\cos x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$
23. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + x \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\cos x$
24. $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{5}e^{2x}(3 \operatorname{sen} x + \cos x)$
25. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{1}{40}e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

8.19. Exercícios (pg. 393)

1. $2\sqrt{2}$
2. $\pm 140\pi$
3. $A = C, \quad m = k, \quad \beta = \alpha - \frac{1}{2}\pi$
4. $y = 3\cos 4\pi x$
5. $C = (y_0^2 + v_0^2)^{1/2}$
6. $y = \frac{1}{3}\sqrt{6}, \quad y'' = -12y = -4\sqrt{6}$
7. $y = -A \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{3}$, sendo A positivo.
8. $I(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t + 1 - \cos t & \text{se} \quad 0 \le t \le 2\pi, \\ \operatorname{sen} t \quad \text{se} \quad t \ge 2\pi \end{cases}$
9. (a) $1/(2\pi\sqrt{2})$ (b) $R < \sqrt{2}$
10. $r(t) = \frac{1}{2}gt^2 - ct + c\left(t - \dfrac{w}{k}\right)\log\left(1 - \dfrac{kt}{w}\right)$
11. $r(t) = ct + c\left(\dfrac{w}{k} - t\right)\log\left(1 - \dfrac{kt}{w}\right)$
12. $r(t) = \dfrac{wv_0}{k}\log\dfrac{w}{w - kt}$

8.22. Exercícios (pg. 396)

1. $y' + \frac{2}{3} = 0$
2. $y' + 2y = 0$
3. $yy' - x = 0$
4. $xy' + y = 0$
5. $2xy' - y = 0$
6. $(x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0$
7. $(x - 1)y' - xy = 0$
8. $(x^2 - 4)y' - y = 0$
9. $y' + y \operatorname{tg} x = 0.$
10. $\sqrt{1 - x^2}\,y' + y^2 + 1 = 0$
11. $(x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0$
12. $(x^2 + 2xy - y^2 - 2)y' - y^2 - 2xy + x^2 + 2 = 0$
14. $x + y = -1$ é simultaneamente uma curva integral e uma isoclínica.
15. $y = Cx + C^2$; envolvente: $y = -\frac{1}{4}x^2$

8.24. Exercícios (pg. 400)

1. $y^3 = \frac{3}{4}x^4 + C$
2. $\cos x = Ce^{1/\cos y}$
3. $y(C + \log|x + 1|) = 1$
4. $y - 2 = C(y - 1)e^x$
5. $y^2 + 2\sqrt{1 - x^2} = C$
6. $y = C(x - 1)e^x$
7. $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arcsen} x = C.$
8. $(1 + y^2)(1 + x^2) = Cx^2$
9. $y^4(x + 2) = C(x - 2)$
10. $1 + y^2 = Cx^2e^{x^2}$
11. $(y + \frac{1}{2})e^{-2y} = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + C$
12. $x^2 - 1 = C(y^2 + 1)$
13. $f(x) = 2e^{x-1}$
14. $f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$
15. $f(x) = -\log(1 + x^2)$
16. $f(x) = \pm 1$; $f(x) = \operatorname{sen}(x + C)$; também aquelas funções contínuas cujos gráficos podem

obter-se unindo porções das curvas $y = \text{sen}(x + C)$ com partes das retas $y = \pm 1$. Um de tais exemplos é $f(x) = -1$ para $x \leq 0$, $f(x) = \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{2})$ para $0 \leq x \leq 3\pi$, $f(x) = 1$ para $x \geq 3\pi$.

17. $f(x) = C$
18. $f(x) = Ae^{x/C}$
19. $f(x) = 0$
20. $f(x) = 0$

8.26. Exercícios (pg. 403)

2. $x^2 + y^2 = C$
3. $y = x \log |Cx|$
4. $x^2 + y^2 = Cx^4$
5. $y^2 = C(x^2 + y^2)^3$
6. $x^2 + 2Cy = C^2, \quad C > 0$
7. $y(Cx^2 - 1) = x$
8. $\text{arctg}\,\dfrac{x}{y} + \log|y| = C$
9. $\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} + \log\dfrac{y^3}{x} = C$
10. $\text{tg}\,\dfrac{y}{2x} = Ce^x.$
11. $(x + y)^3 = Cx^4y^4$

8.28. Exercícios (pg. 412)

1. $3x - 2y = C$
2. $x^2 - y^2 = C$
3. $x^2 + y^2 - Cx + 1 = 0$
4. $2x^2 + y^2 = C$
5. $2y^2 - x^2 = C$
6. $y^2 = x + C$
7. $xy = C$
8. $y^2 - \log(\text{sen}^2 x) = C$
9. $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1$
10. $x^2 + y^2 - C(x + y) + 2 = 0$
11. $y = -2x \log x$
12. $y = -\dfrac{1}{k}x \log x$
13. $f(x) = Cx^n$, ou $f(x) = Cx^{1/n}$
14. $f(x) = Cx^{n/2}$, ou $f(x) = Cx^{1/(2n)}$
15. $y = \dfrac{6}{\pi}\dfrac{x}{x^3 + 2}$
16. $y = \frac{3}{2}(1 - e^{x-1}); \quad b = \dfrac{3}{2e} - 3$
17. $y = -6x^2 + 5x + 1$
18. 59,6 sec
20. $\dfrac{2\pi R^2\sqrt{h}}{9A_0}$ sec, sendo R o raio da base e h a altura do cone.
21. $y = e^x.$
22. $y^3 = -\dfrac{1}{3}x + C\,x^{-1/2}$ para $x > 0$, ou $y^3 = -\dfrac{1}{3}x$ para todo o x.
23. $m = -1$; $y^2 \log|y| = \dfrac{1}{2}e^{-2x} + Cy^2.$
24. (a) $a = 0, b = 1/4$ (b) $f(x) = 2x^{1/2}.$
25. (b) $y = e^{4x} - e^{-x^3/3}.$
26. (a) $1/(t + 1)$ gramas em t anos (b) 1 grama $^{-1}$ ano $^{-1}$.
27. $[1 - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})\,t]^2$ gramas em t anos; $2 + \sqrt{2}$ anos.

28. (a) $365\,e^{-2,65t}$ cidadãos em t anos (b) $365(1-e^{-2,65t})$ mortes em t anos.
29. 6,96 milhas por segundo = 25,056 milhas por hora.
30. (a) mínimo relativo em 0 (b) $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{20}{9}$ (d) $\dfrac{2}{3}$.
31. (b) mínimo (c) $\dfrac{1}{2}$.

Capítulo 9

9.6. Exercícios (pg. 422)

1. (a) $2i$ (b) $-i$ (c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ (d) $18+i$ (e) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ (f) $1+i$ (g) 0 (h) $1+i$
2. (a) $\sqrt{2}$ (b) 5 (c) 1 (d) 1 (e) $\sqrt{2}$ (f) $\sqrt{65}$
3. (a) $r=2, \theta=\frac{1}{2}\pi$ (b) $r=3, \theta=-\frac{1}{2}\pi$ (c) $r=1, \theta=\pi$ (d) $r=1, \theta=0$ (e) $r=2\sqrt{3}, \theta=5\pi/6$ (f) $r=1, \theta=\frac{1}{4}\pi$ (g) $r=2\sqrt{2}, \theta=\frac{1}{4}\pi$ (h) $r=2\sqrt{2}, \theta=-\frac{1}{4}\pi$ (i) $r=\frac{1}{2}\sqrt{2}, \theta=-\frac{1}{4}\pi$ (j) $r=\frac{1}{2}, \theta=-\frac{1}{2}\pi$
4. (a) $y=0$, x arbitrário (b) $x>0, y=0$ (c) Todo o x e y (d) $x=0$, y arbitrário; ou $y=0$, x arbitrário (e) $x=1, y=0$ (f) $x=1, y=0$

9.10. Exercícios (pg. 429)

1. (a) i (b) $-2i$ (c) -3 (d) 1 (e) $1+i$ (f) $(1+i)/\sqrt{2}$ (g) $\sqrt{2}\,i$ (h) $-i$
2. (a) $y=0$, x arbitrário (b) $x=y=0$ (c) $x=0, y=(2n+1)\pi$, sendo n um inteiro qualquer. (d) $x=1, y=\frac{1}{2}\pi+2n\pi$, sendo n um inteiro qualquer.
3. (b) $z=2n\pi i$, sendo n um inteiro qualquer.
6. $c_{-k}=\frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k})$ para $k=1, 2, \ldots, n$
10. (c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$, $-i$
    (d) $a+bi$, $-a-bi$, $-b+ai$, $b-ai$, sendo $a=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ e $b=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
    (e) $a-bi$, $-a+bi$, $b+ai$, $-b-ai$, sendo a e b os de (d)
11. (a) $1, e^{-\pi/2}, e^{-\pi}$ (c) $-\pi<\arg(z_1)+\arg(z_2)\le\pi$
13. $B=A/(b-\omega^2+a\omega i)$

Capítulo 10

10.4. Exercícios (pg. 442)

1. (a) Converge (b) 0
2. (a) Converge (b) -1
3. (a) Diverge
4. (a) Converge (b) $\frac{1}{5}$
5. (a) Converge (b) 0
6. (a) Diverge
7. (a) Converge (b) 0
8. (a) Diverge
9. (a) Converge (b) 1
10. (a) Diverge
11. (a) Converge (b) 0
12. (a) Converge (b) $\frac{1}{3}$
13. (a) Converge (b) 0
14. (a) Converge (b) 0

15. (a) Converge (b) 0
16. (a) Converge (b) 0
17. (a) Converge (b) e^2
18. (a) Diverges
19. (a) Converge (b) 0
20. (a) Diverges
21. (a) Converge (b) 0
22. (a) Diverge
23. $N > 1/\epsilon$
24. $N > 1/\epsilon$
25. $N > 1/\epsilon$
26. $N > 1/\epsilon$
27. $N > \sqrt{2/\epsilon}$
28. $N > \dfrac{\log \epsilon}{\log (9/10)}$

34. (c) Seja $s_n = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\,\dfrac{b-a}{n})$, e definir t_n analogamente como uma soma de 1 a n. Ambas as sucessões $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ convergem para o integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

10.9. Exercícios (pg. 452)

22. (a) 1 (b) $2e - 3$ (c) $e + 1$
23. (b) 5
24. (a) Idêntica (b) não idêntica (c) não idêntica (d) idêntica.

***10.10. Exercícios sobre desenvolvimentos decimais (pg. 455)**

1. $\frac{4}{9}$
2. $\frac{51}{99}$
3. $\frac{200}{99}$
4. $\frac{41}{333}$
5. $\frac{1}{7}$

10.14. Exercícios (pg. 461)

1. Divergente
2. Convergente
3. Convergente
4. Convergente
5. Convergente
6. Convergente
7. Convergente
8. Convergente
9. Divergente
10. Convergente
11. Divergente
12. Convergente
13. Divergente
14. Convergente
15. Convergente para $s > 1$; divergente para $s \leq 1$
16. Convergente
17. Convergente
18. Convergente

10.16. Exercícios (pg. 465)

1. Convergente
2. Convergente
3. Convergente
4. Divergente
5. Divergente
6. Divergente
7. Divergente
8. Convergente
9. Convergente
10. Divergente
11. Convergente
12. Divergente
13. Convergente

14. Convergente se $0 < r < 1$, ou quando $x = k\pi$, k inteiro qualquer.

10.20. Exercícios (pg. 474)

1. Simplesmente convergente.
2. Simplesmente convergente.
3. Divergente para $s \leq 0$, simplesmente convergente para $0 < s \leq 1$; absolutamente convergente para $s > 1$.
4. Absolutamente convergente
5. Absolutamente convergente
6. Absolutamente convergente
7. Divergente
8. Divergente
9. Divergente
10. Simplesmente convergente
11. Absolutamente convergente
12. Divergente
13. Absolutamente convergente
14. Absolutamente convergente
15. Divergente
16. Absolutamente convergente
17. Absolutamente convergente
18. Absolutamente convergente
19. Simplesmente convergente
20. Simplesmente convergente
21. Divergente
22. Simplesmente convergente
23. Divergente
24. Simplesmente convergente
25. Divergente para $s \leq 0$, simplesmente convergente para $0 < s \leq 1$: absolutamente convergente para $s > 1$.
26. Absolutamente convergente
27. Absolutamente convergente
28. Divergente
29. Absolutamente convergente
30. Absolutamente convergente
31. Absolutamente convergente
32. Absolutamente convergente
33. $z = 0$
34. Todo o z
35. Todo o z que satisfaça a $|z| < 3$.
36. Todo o z
37. Todo o z excepto inteiros negativos.
38. Todo o $z \neq 1$ que satisfaça a $|z| \leq 1$.
39. $|z| < e^{-1/85}$
40. Todo o z
41. Todo o $z \neq 0$ que satisfaça a $0 \leq |z-1| \leq 1$
42. Todo o $z \neq -1$ que satisfaça a $|2z+3| \leq 1$
43. Todo o $z = x + iy$ com $x \geq 0$
44. Todo o z que satisfaça a $|2 + 1/z| > 1$
45. Todo o z que satisfaça a $|2 + 1/z| > 1$
46. Todo o $z \neq 0$
47. $|x - k| \leq \pi/4$, k inteiro qualquer.
48. $|x - k| \leq \pi/6$, k inteiro qualquer.

10.22. Exercícios de revisão (pg. 480)

1. (a) 0
   (b) Converge se $c \leq 1$; o limite é 0 se $c < 1$; o limite é 1 se $c = 1$; diverge se $c > 1$.
2. (a) 1 (b) o maior dos dois números a e b.
3. $\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2$
4. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
5. 0
7. Divergente
8. Convergente se $s < \frac{1}{2}$; divergente se $s \geq \frac{1}{2}$
9. Convergente
10. Divergente
11. Divergente
14. $c \leq 3$
15. $a \geq 3$
17. Quando $a \geq -1$, o limite e $\dfrac{a+1}{a+2}$; quando $a \leq -1$, o limite é 0.

10.24. Exercícios (pg. 488)

1. Divergente
2. Convergente
3. Convergente
4. Convergente
5. Convergente
6. Convergente
7. Convergente
8. Convergente
9. Divergente
10. Convergente se $s > 1$; divergente se $s \leq 1$
11. $C = \frac{1}{2}$; o integral tem o valor $\frac{1}{4} \log \frac{5}{4}$
12. $C = \frac{1}{2}$; o integral tem o valor $\frac{1}{4} \log \frac{8}{3}$
13. $C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; o integral tem o valor $\dfrac{3}{\sqrt{2}} \log \sqrt{2}$
14. $a = b = 2e - 2$
15. $a = 1$; $b = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$
16. (b) Ambos divergem
17. (c) Divergem

Capítulo 11

11.7. Exercícios (pg. 500)

1. $r = 2$; convergente para $|z| < 2$
2. $r = 2$; convergente para $|z| \leq 2$, $z \neq 2$
3. $r = 2$; convergente para $|z + 3| \leq 2$, $z \neq -1$
4. $r = \frac{1}{2}$; convergente para $|z| \leq \frac{1}{2}$
5. $r = \frac{1}{2}$; convergente para $|z| < \frac{1}{2}$
6. $r = e$; convergente para $|z| < e$
7. $r = 1$; convergente para $|z + 1| \leq 1$
8. $r = +\infty$
9. $r = 4$; convergente para $|z| < 4$
10. $r = 1$; convergente para $|z| < 1$
11. $r = 1$
12. $r = 1/e$
13. $r = +\infty$ se $a = k\pi$, k inteiro; $r = 1$ se $a \neq k\pi$.
14. $r = e^{-a}$
15. $r = \max(a, b)$
16. $r = \min(1/a, 1/b)$

11.13. Exercícios (pg. 509)

1. $|x| < 1$; $1/(1 + x^2)$
2. $|x| < 3$; $1/(3 - x)$
3. $|x| < 1$; $x/(1 - x)^2$
4. $|x| < 1$; $-x/(1 + x)^2$
5. $|x| < \frac{1}{2}$; $\dfrac{1}{1 + 2x} + \dfrac{\log(1 + 2x)}{2x}$

6. $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$; $\quad -\log(1 - 2x)$
7. $-2 < x < 2$; $\dfrac{2}{x}$ arctg $x/2$.
8. Todo o x; e^{-x^3}
9. Todo o x; $x^{-3}(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2)$ se $x \neq 0$, 0 se $x = 0$
10. Todo o x; $\dfrac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$ se $x \neq 1$; $\frac{1}{2}$ se $x = 1$

22. $-\dfrac{\sqrt{2}\, 2^{97}}{98!}$
23. $a_0 = 4\sqrt{2}$, $\quad a_1 = 0$, $\quad a_2 = 5\sqrt{2}$, $\quad a_3 = 0$, $\quad a_4 = \frac{15}{8}\sqrt{2}$

11.16. Exercícios (pg. 515)

1. $a_{n+2} = \dfrac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)}\, a_n$ para $n \geq 0$; $f(x) = 1 - 3x^2$
2. $a_{n+2} = \dfrac{(n+4)(n-3)}{(n+2)(n+1)}\, a_n$ para $n \geq 0$; $f(x) = 2x - \dfrac{10}{3}x^3$
3. Todo o x
4. Todo o x
5. Todo o x; $a = 1$, $b = 0$
6. Todo o x; $f(x) = e^{x^2}$
7. Todo o x; $f(x) = e^x - x - 1$
8. Todo o x; $f(x) = \cos 2x$
9. Todo o x, $f(x) = x + \operatorname{sh} 3x$.

12. $y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$
13. $y = x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{14}x^7 + \frac{23}{1120}x^{10} + \cdots$
14. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{060}x^8 + \frac{7}{8800}x^{11} + \cdots$
15. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$
16. $$y = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots[(3n-1)\cdot(3n)]}\right) + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots[(3n)\cdot(3n+1)]}\right)$$
17. $y = c_0\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right) + c_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$
18. $a_1 = -1$, $\quad a_2 = 0$, $\quad a_3 = \frac{2}{3}$; $\quad f(x) = (x+1)e^{-2x}$
19. $a_5 = 0$, $\quad a_6 = -\dfrac{7}{8!}$; $\quad f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ se $x \neq 0$; $\quad f(0) = \frac{1}{2}$; $\quad f(\pi) = -2/\pi^2$
20. (c) $\sqrt{2} = 1{,}4142135623$

21. (b) $\sqrt{3} = 1.732050807568877$

Capítulo 12

12.4. Exercícios (pg. 525)

1. (a) $(5, 0, 9)$ (b) $(-3, 6, 3)$ (c) $(3, -1, 4)$ (d) $(-7, 24, 21)$ (e) $(0, 0, 0)$
5. $x = \frac{1}{5}(3c_1 - c_2), \quad y = \frac{1}{5}(2c_2 - c_1)$
6. (a) $(x + z, x + y + z, x + y)$ (c) $x = 2, \quad y = 1, \quad z = -1$
7. (a) $(x + 2z, x + y + z, x + y + z)$ (b) Um exemplo, $x = -2$, $y = z = 1$.
8. (a) $(x + z, x + y + z, x + y, y)$ (c) $x = -1, \quad y = 4, \quad z = 2$
12. As diagonais de um paralelogramo intersetam-se ao meio.

12.8. Exercícios (pg. 531)

1. (a) -6 (b) 2 (c) 6 (d) 0 (e) 4
2. (a) $(A \cdot B)C = (21, 28, -35)$ (b) $A \cdot (B + C) = 64$ (c) $(A + B) \cdot C = 72$

   (d) $A(B \cdot C) = (30, 60, -105)$ (e) $A/(B \cdot C) = \left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{-7}{15}\right)$
5. Um exemplo: $(1, -5, -3)$
6. Um exemplo: $x = -2, y = 1$.
7. $C = \frac{4}{9}(-1, -2, 2), \quad D = \frac{1}{9}(22, -1, 10)$
8. $C = \frac{1}{11}(1, 2, 3, 4, 5), \quad D = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{44}, \frac{1}{33}, \frac{-5}{88}, \frac{-7}{55}\right)$
9. (a) $\sqrt{74}$ (b) $\sqrt{14}$ (c) $\sqrt{53}$ (d) 5
10. (a) $(1, -1)$ ou $(-1, 1)$ (b) $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$ (c) $(3, 2)$ ou $(-3, -2)$

    (d) $(b, -a)$ ou $(-b, a)$
11. (a) $\frac{1}{\sqrt{42}}(4, -1, 5)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, -3, 1)$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$

    (d) $\frac{1}{\sqrt{42}}(-5, -4, -1)$ (e) $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1, -5, 4)$
12. A e B, C e D, C e E, D e E.
13. (a) $(2, -1)$ e $(-2, 1)$ (b) $(2, 1)$ e $(-2, -1)$ (c) $(1, 2)$ e $(-1, -2)$

    (d) $(1, 2)$ e $(-1, -2)$
14. Um exemplo: $C = (8, 1, 1)$
15. Um exemplo: $C = (1, -5, -3)$.
16. $P = \frac{11}{25}(3, 4), \quad Q = \frac{2}{25}(-4, 3)$
17. $P = \frac{5}{2}(1, 1, 1, 1), \quad Q = \frac{1}{2}(-3, -1, 1, 3)$
18. $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$
20. A soma dos quadrados dos lados dum paralelogramo qualquer é igual à soma dos qua-

drados das diagonais:

22. $4;\ 12\sqrt{2}$
23. $C = \frac{1}{11}(1, 2, 3, 4, 5), \quad D = \dfrac{1}{11}\left(10, \dfrac{7}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-5}{4}, \dfrac{-14}{5}\right)$
24. $C = tA, \quad D = B - tA,$ sendo $t = (A \cdot B)/(A \cdot A)$

12.11. Exercícios (pg. 536)

1. $\frac{11}{9}B$
2. $\frac{5}{2}B$
3. (a) $\dfrac{6}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{-2}{7}$ (b) $\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{-2}{7}\right)$ e $\left(\dfrac{-6}{7}, \dfrac{-3}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$
5. $0, \sqrt{\frac{35}{41}}, \sqrt{\frac{6}{41}}$
6. $7\pi/8$
8. $\pi/6$
9. 0
10. (b) A equação é válida para x e y quaisquer se $\cos\theta = 1$; se $\cos\theta \neq 1$ a única solução é $x = y = 0$.
14. Todas excepto (b).
17. (c) Todas excepto o teorema 12.4 (a).
18. (a) Todas

12.15. Exercícios (pg. 545)

1. (a) $x = y = \frac{1}{2}$ (b) $x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$ (c) $x = 4, \quad y = -1$
   (d) $x = 1, \quad y = 6$
2. $x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{7}{8}$
3. $x = 3, y = -4$
7. Todo o $t \neq 0$
9. (c) $7i - 4(i + j)$
10. (b) $j = B - A, \quad k = \frac{1}{3}(C - B)$ (c) $\frac{1}{3}(15A - 14B + 5C)$
11. $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{C, D\}$
12. (a) Independente (b) Um exemplo; $D = A$ (c) Um exemplo: $E = (0, 0, 0, 1)$; (d) Escolhendo $E = (0, 0, 0, 1)$ temos $X = 2A + B - C + 3E$.
13. (c) $t = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
14. (a) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\}$ (b) O conjunto dado (c) O conjunto dado.
17. $\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}, \quad \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$
18. $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$,
    $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$
19. $L(U) \subseteq L(T) \subseteq L(S)$
20. Um exemplo: $A = \{E_1, \ldots, E_n\}, \quad B = \{E_1 + E_2, E_2 + E_n, \ldots, E_{n-1} + E_n, E_n + E_1\}$

12.17. Exercícios (pg. 548)

1. (a) $-1 - i$ (b) $-1 + i$ (c) $1 - i$ (d) $-1 + i$ (e) $-1 - i$
   (f) $2 - i$ (g) $-i$ (h) $-1 + 2i$ (i) $-3 - 2i$ (j) $2i$
2. Um exemplo: $(1 + i, -5 - 3i, 1 - 3i)$

8. $\pi/3$
9. $3A - B + 2C$

Capítulo 13

13.5. Exercícios (pg. 557)

1. (b), (d) e (e).
2. (a) e (e).
3. (c), (d) e (e).
4. (b), (e), e (f).
5. (a) Não (b) Não (c) Não.
6. *A, B, C, D, F são* colineares.
7. Intersetam-se em (5, 9, 13).
8. *(b)* Não.
9. (a) $9t^2 + 8t + 9$ (b) $\frac{1}{3}\sqrt{65}$

13.8. Exercícios (pg. 563)

1. (c) e (e).
2. (a), (b) e (c).
3. (a) $x = 1 + t, \quad y = 2 + s + t, \quad z = 1 + 4t$
   (b) $x = s + t, \quad y = 1 + s, \quad z = s + 4t$
4. (a) (1, 2, 0) e (2, −3, −3). (b) $M = \{(1, 2, 0) + s(1, 1, 2) + t(-2, 4, 1)\}$
6. (a), (b), e (c) $x - 2y + z = -3$
7. (a) $(0, -2, -1)$ e $(-1, -2, 2)$
   (b) $M = \{(0, -2, -1) + s(-1, 0, 3) + t(3, 3, 6)\}$
8. Dois exemplos: (−5, 2, 6) e (−14, 3, 17).
9. (a) Sim (b) Dois exemplos: (1, 0, −1) e (−1, 0, 1).
10. $(-2, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$
11. (a), (b) e (c) Não.
13. $x - y = -1$

13.11. Exercícios (pg. 569)

1. (a) $(-2, 3, -1)$ (b) $(4, -5, 3)$ (c) $(4, -4, 2)$ (d) $(8, 10, 4)$
   (e) $(8, 3, -7)$ (f) $(10, 11, 5)$ (g) $(-2, -8, -12)$ (h) $(2, -2, 0)$
   (i) $(-2, 0, 4)$
2. (a) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{26}}(-4, 3, 1)$ (b) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2054}}(-41, -18, 7)$ (c) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$
3. (a) $\frac{15}{2}$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{35}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
4. $8\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
6. (b) $\cos\theta$ é negativo. (c) $\sqrt{5}$
9. (a) uma solução é $B = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}$ (b) $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ é a única solução.
11. (a) Três possibilidades; $D = B + C - A = (0, 0, 2)$, $D = A + C - B = (4, -2, 2)$,
    $D = A + B - C = (-2, 2, 0)$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

11. $d = 5, \quad r = 25/(5 + 4\cos\theta + 3\,\mathrm{sen}\,\theta)$
12. $d = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad r = 1/(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\sqrt{2}), \quad r = 1/(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\sqrt{2})$
13. (a) $r = 1{,}5 \times 10^8/(1 + \cos\theta)$; $7{,}5 \times 10^7$ quilómetros (b) $r = 5 \times 10^7/(1 - \cos\theta)$; $2{,}5 \times 10^7$ quilómetros

13.24. Exercícios (pg.592)

1. Centro em $(0, 0)$; focos em $(\pm 8, 0)$; vértices em $(\pm 10, 0)$; $e = \frac{4}{5}$
2. Centro em $(0, 0)$; focos em $(0, \pm 8)$; vértices em $(0, \pm 10)$; $e = \frac{4}{5}$
3. Centro em $(2, -3)$; focos em $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$; vértices em $(6, -3)$, $(-2, -3)$; $e = \sqrt{7}/4$
4. Centro em $(0, 0)$; focos em $(\pm\frac{4}{3}, 0)$; vértices em $(\pm\frac{5}{3}, 0)$; $e = \frac{4}{5}$
5. Centro em $(0, 0)$; focos em $(\pm\sqrt{3}/6, 0)$; vértices em $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$; $e = \frac{1}{2}$
6. Centro em $(-1, -2)$; focos em $(-1, 1)$, $(-1, -5)$; vértices em $(-1, 3)$, $(-1, -7)$; $e = \frac{3}{5}$
7. $7x^2 + 16y^2 = 7$
8. $\dfrac{(x+3)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$
9. $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$
10. $\dfrac{(x+4)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$
11. $\dfrac{(x-8)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$
12. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$
13. Centro em $(0, 0)$; focos em $(\pm 2\sqrt{41}, 0)$; vértices em $(\pm 10, 0)$; $e = \sqrt{41}/5$
14. Centro em $(0, 0)$; focos em $(0, \pm 2\sqrt{41})$; vértices em $(0, \pm 10)$; $e = \sqrt{41}/5$
15. Centro em $(-3, 3)$; focos em $(-3 \pm \sqrt{5}, 3)$; vértices em $(-1, 3)$, $(-5, 3)$; $e = \sqrt{5}/2$
16. Centro em $(0, 0)$; focos em $(\pm 5, 0)$; vértices em $(\pm 4, 0)$; $e = 5/4$
17. Centro em $(0, 0)$; focos em $(0, \pm 3)$; vértces em $(0, \pm 2)$; $e = \frac{3}{2}$
18. Centro em $(1, -2)$; focos em $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$; vértices em $(3, -2)$, $(-1, -2)$; $e = \frac{1}{2}\sqrt{13}$
19. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$
20. $y^2 - x^2 = 1$
21. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
22. $(y-4)^2 - \dfrac{(x+1)^2}{3} = 1$
23. $\dfrac{8(y+3)^2}{27} - \dfrac{5(x-2)^2}{27} = 1$
24. $\pm\sqrt{\frac{23}{3}}$
25. $4x^2 - y^2 = 11$
26. Vértice em $(0, 0)$; diretriz $x = 2$; eixo $y = 0$
27. Vértice em $(0, 0)$; diretriz $x = -\frac{3}{4}$; eixo $y = 0$

28. Vértice em $(\frac{1}{2}, 1)$; diretriz $x = -\frac{5}{2}$; eixo $y = 1$
29. Vértice em $(0, 0)$; diretriz $y = -\frac{3}{2}$; eixo $x = 0$
30. Vértice em $(0, 0)$; diretriz $y = 2$; eixo $x = 0$
31. Vértice em $(-2, -\frac{9}{4})$; diretriz $y = -\frac{13}{4}$; eixo $x = -2$
32. $x^2 = -y$
33. $y^2 = 8x$
34. $(x + 4)^2 = -8(y - 3)$
35. $(y + 1)^2 = 5(x - \frac{7}{4})$
36. $(x - \frac{3}{2})^2 = 2(y + \frac{1}{8})$
37. $(y - 3)^2 = -8(x - 1)$
38. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 40x + 20y - 100 = 0$

13.25. Exercícios variados sobre cónicas (pg. 594)

3. $B > 0, \quad A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})B$
4. $\frac{2}{3}bh$
5. 16π
6. (a) $\frac{8}{3}$ (b) 2π (c) $48\pi/5$
7. $x^2/12 + y^2/16 = 1$
8. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 1$
9. $y^2 - 4x^2 - 4y + 4x = 0$
10. (a) $e = \sqrt{2/(p + 2)}$; focos em $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$ (b) $6x^2 - 3y^2 = 4$
15. (b) $y = Cx^2, \quad C \neq 0$
16. $(4, 8)$
17. (a) $x = \frac{4}{3}a$ (b) $27pq^2 = 4a^3$
18. $(x - \frac{2}{5})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{4}{5}$

Capítulo 14

14.4 Exercícios (pg. 601)

1. $F'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 4t^3)$; $F''(t) = (0, 2, 6t, 12t^2)$
2. $F'(t) = (-\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t, \sec^2 t)$; $F''(t) = (-\cos t, 2\cos 2t, -4\operatorname{sen} 2t, 2\sec^2 t \operatorname{tg} t)$
3. $F'(t) = ((1 - t^2)^{-1/2}, -(1 - t^2)^{-1/2})$; $F''(t) = (t(1 + t^2)^{-3/2}, -t(1 + t^2)^{-3/2})$
4. $F'(t) = (2e^t, 3e^t)$; $F''(t) = (2e^t, 3e^t)$
5. $F'(t) = (\operatorname{sh} t, 2\operatorname{ch} 2t, -3e^{-3t})$; $F''(t) = (\operatorname{ch} t, 4\operatorname{sh} 2t, 9e^{-3t})$.
6. $F'(t) = (2t/(1 + t^2), 1/(1 + t^2), -2t/(1 + t^2))$;
   $F''(t) = ((2 - 2t^2)/(1 + t^2)^2, -2t/(1 + t^2)^2, (6t^2 - 2)/(1 + t^2)^3)$
8. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, e - 1)$
9. $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \log \frac{1}{2}\sqrt{2})$
10. $\left(\log \dfrac{1 + e}{2}, 1 - \log \dfrac{1 + e}{2}\right)$
11. $(1, e - 2, 1 - 2/e)$
12. 0
15. $G'(t) = F(t) \times F''(t)$
20. $F(t) = \frac{1}{6}t^3A + \frac{1}{2}t^2B + tC + D$

22. $F''(1) = A, \quad F(3) = (6 + 3 \log 3)A$
23. $F(x) = e^x(x + 1)A - eA$

14.7. Exercícios (pg. 610)

1. $\boldsymbol{v}(t) = (3 - 3t^2)\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} + (3 + 3t^2)\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{a}(t) = -6t\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k}; \quad v(t) = 3\sqrt{2}\,(1 + t^2)$
2. $\boldsymbol{v}(t) = -\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{a}(t) = -\cos t\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}; \quad v(t) = (1 + e^{2t})^{1/2}$
3. $\boldsymbol{v}(t) = 3(\cos t - t\operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + 3(\operatorname{sen} t + t\cos t)\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{a}(t) = -3(2\operatorname{sen} t + t\cos t)\boldsymbol{i} +$ $3(2\cos t - t\operatorname{sen} t)\boldsymbol{j}; \quad v(t) = (9t^2 + 25)^{1/2}$
4. $\boldsymbol{v}(t) = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + 2\cos\frac{t}{2}\,\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{a}(t) = \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\frac{t}{2}\,\boldsymbol{k}; \quad v(t) = 2$
5. $\boldsymbol{v}(t) = 6t\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{a}(t) = 6\boldsymbol{i} + 12t\boldsymbol{j}; \quad v(t) = 6t^2 + 3$
6. $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{a}(t) = -\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + \cos t\,\boldsymbol{k}; \quad v(t) = \sqrt{2}$
9. $A = ab\omega^3, \quad B = a^2\omega^3$
11. (b) $8e^{4t}/\cos^2\theta$
15. (a) $x(t) = 4\cos 2t, \quad y(t) = 3\operatorname{sen} 2t$ (b) $x^2/16 + y^2/9 = 1$
16. $3T/4$

14.9. Exercícios (pg. 615)

1. (a) $T = \frac{1}{10}\sqrt{2}\,(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}); \quad N = -\frac{4}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3}{5}\boldsymbol{j}$ (b) $\boldsymbol{a} = 12\sqrt{2}\,T + 6N$
2. (a) $T = -(1 + e^{2\pi})^{-1/2}\boldsymbol{j} + e^{\pi}(1 + e^{2\pi})^{-1/2}\boldsymbol{k}; \quad N = \dfrac{(1 + e^{2\pi})\boldsymbol{i} + e^{2\pi}\boldsymbol{j} + e^{\pi}\boldsymbol{k}}{(1 + e^{2\pi})^{1/2}(1 + 2e^{2\pi})^{1/2}}$
   (b) $\boldsymbol{a} = (1 + e^{2\pi})^{-1/2}[e^{2\pi}T + (1 + 2e^{2\pi})^{1/2}N]$
3. (a) $T = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}; \quad N = \boldsymbol{j}$ (b) $\boldsymbol{a} = 6N$
4. (a) $T = \boldsymbol{i}; \quad N = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k});$ (b) $\boldsymbol{a} = \sqrt{2}\,N$
5. (a) $T = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}); \quad N = \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$ (b) $\boldsymbol{a} = 12T + 6N$
6. (a) $T = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}; \quad N = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\boldsymbol{k}$ (b) $\boldsymbol{a} = N$
9. Contra exemplo para b) e d): movimento sobre uma hélice.
11. Um exemplo $r(t) = 2\int e^{2t}\cos t\,dt\,\boldsymbol{i} + 2\int e^{2t}\operatorname{sen} t\,dt\,\boldsymbol{j} + e^{2t}\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}(t)$ forma um ângulo constante com k, mas $a(t)$ nunca é zero nem paralelo a $\boldsymbol{v}(t)$.
12. (a) Sentido positivo. (b) 3 (c) $2\pi/\sqrt{3}$
13. $x^2/3 + y^2/4 = 1$
14. $y^2 = 4x; \quad y^2 = 8 - 4x$
15. (b) $\|A\|\,\|B\|\operatorname{sen}\theta$

14.13. Exercícios (pg. 623)

1. $8a$
2. $\sqrt{2}\,(e^2 - 1)$
3. $2\pi^2 a$
4. $4(a^3 - b^3)/(ab)$
5. $2a(\text{ch}\dfrac{T}{2}\sqrt{\text{ch}T} - 1) - \sqrt{2}\,a\log\left(\dfrac{\sqrt{2}\text{ch}(T/2) + \sqrt{\text{ch}T}}{1 + \sqrt{2}}\right)$
6. $2\sqrt{2}\,\pi$
7. 50

qual $r \to 0$ quando θ cresce indefinidamente; para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ é uma circunferência em torno da origem; para $\pi/2 < \alpha < \pi$ é uma espiral para a qual r cresce indefinidamente quando θ cresce indefinidamente.

16. Tome-se como semi-eixo positivo x a reta que vai desde a posição observada a quatro milhas de distância à base de lançamento. Continui-se ao longo desta reta três milhas (para evitar a possibilidade de o projectil voltar à base) e depois siga-se a espiral $r = e^{\theta/\sqrt{8}}$.
17. $\log \sqrt{x^2 + y^2} + \text{arctg}\,(y/x) = C$

14.21. Exercícios de revisão (pg. 638)

1. $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\theta/(2 + \text{tg}^2\theta)$
3. $(c/m^2, 2c/m)$
4. (a) $y - y_0 = m(x - x_0) + c/m$; tangente em $(x_0 + c/m^2, y_0 + 2c/m)$
   (b) $y - y_0 = m(x - x_0) - cm^2$; tangente em $(x_0 + 2cm, y_0 + cm^2)$
6. $(y_1 - y_0)(y - y_0) = 2c(x + x_1 - 2x_0)$; $x_1 y = 2y_1 x - x_1 y_1$;
   $(x_1 - x_0)(y - y_0) = 2(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$
7. (a) $(0, \frac{1}{2})$
   (b) Escrever $Q = (0, b(x))$. Se $f''(0) \neq 0$ então $b(x) \to f(0) + \frac{1}{f''(0)}$ quando $x \to 0$. Doutro modo, $|b(x)| \to +\infty$ quando $x \to 0$.
8. $r = \frac{1 + c}{2} \to \frac{1}{2}$ quando $c \to 0$.
13. $(2, 1), (-2, -1)$
14. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
15. $3x^2 - y^2 = 3a^2$; $\frac{A(r)}{r^3} \to \frac{1}{36a}$
21. (a) $f(\theta) = k\,\text{sen}\,(\theta + C)$, ou $f(\theta) = k$
    (b) $f(\theta) = Ce^{\theta/\sqrt{k^2-1}}$, onde $k^2 > 1$
    (c) $f(\theta) = (2/k)\sec(\theta + C)$, ou $f(\theta) = 2/k$

Capítulo 15

15.5. Exercícios (pg. 645)

1. Sim
2. Sim
3. Sim
4. Sim
5. Não
6. Sim
7. Sim
8. Sim
9. Sim
10. Sim
11. Não
12. Sim
13. Sim
14. Não
15. Sim
16. Sim
17. Sim
18. Sim
19. Sim
20. Sim
21. Sim
22. Sim
23. Não
24. Sim
25. Não
26. Sim
27. Sim
28. Sim
31. (a) Não (b) Não (c) Não (d) Não

15.9. Exercícios (pg. 651)

1. Sim; 2
2. Sim; 2
3. Sim; 2
4. Sim; 2
5. Sim; 1
6. Não
7. Não
8. Não
9. Sim; 1
10. Sim; 1
11. Sim; n
12. Sim; n
13. Sim; n
14. Sim; n
15. Sim; n
16. Sim; n
17. sim; $\dim = 1 + \dfrac{1}{2}n$ se n é par; $\dfrac{1}{2}(n+1)$ se n é ímpar.
18. sim; $\dim = \dfrac{1}{2}n$ se n é par; $\dfrac{1}{2}(n+1)$ se n é ímpar.
19. Sim; $k+1$
20. Não
21. (a) $\dim = 3$ (b) $\dim = 3$ (c) $\dim = 2$ (d) $\dim = 2$
23. (a) se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o conjunto é independente, $\dim = 3$; se a ou b são nulos, o conjunto é dependente; $\dim = 2$ (b) independente, $\dim = 2$ (c) se $a \neq 0$, independente, $\dim = 3$; se $a = 0$, dependente, $\dim = 2$ (d) independente; $\dim = 3$ (e) dependente; $\dim = 2$ (f) independente $\dim = 2$ (g) independente $\dim = 2$ (h) dependente; $\dim = 2$ (i) independente; $\dim = 2$ (j) independente; $\dim = 2$.

15.12. Exercícios (pg. 658)

1. (a) Não (b) Não (c) Não (d) Não (e) Sim.
8. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{e^2+1}$ (b) $g(x) = b\left(x - \dfrac{e^2+1}{4}\right)$, b arbitrário
10. (b) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}a + \dfrac{n+1}{2}b$ (c) $g(t) = a\left(t - \dfrac{2n+1}{3n}\right)$, a arbitrário
11. (c) 43 (d) $g(t) = a(1 - \frac{2}{3}t)$, a arbitrário
12. (a) Não (b) Não (c) Não (d) Não.
13. (c) 1 (d) $e^2 - 1$
14. (c) $n!/2^{n+1}$

15.16. Exercícios (pg. 669)

1. (a) e (b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,(1, 1, 1)$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}\,(1, -2, 1)$
2. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}\,(-1, 1, 2, 0)$, $\frac{1}{6}\sqrt{3}\,(1, -1, 1, 3)$

   (b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,(1, 1, 0, 1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{42}}(1, -2, 6, 1)$
6. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\log^2 3$
7. $e^2 - 1$
8. $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) + \dfrac{3}{e}x$; $1 - 7e^{-2}$
9. $\pi - 2\,\mathrm{sen}\,x$
10. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

Capítulo 16

16.4. Exercícios (pg. 675)

1. Linear, nulidade 0, ordem 2.
2. Linear, nulidade 0, ordem 2.
3. Linear, nulidade 1, ordem 1.
4. Linear, nulidade 1, ordem 1.
5. Não linear.
6. Não linear.
7. Não linear.
8. Não linear.
9. Linear, nulidade 0, ordem 2.
10. Linear, nulidade 0, ordem 2.
11. Linear, nulidade 0, ordem 2.
12. Linear, nulidade 0, ordem 2.
13. Não linear.
14. Linear, nulidade 0, ordem 2.
15. Não linear.
16. Linear, nulidade 0, ordem 3.
17. Linear, nulidade 1, ordem 2.
18. Linear, nulidade 0, ordem 3.
19. Não linear.
20. Não linear.
21. Não linear.
22. Não linear.
23. Linear, nulidade 1, ordem 2.
24. Linear, nulidade 0, ordem $n + 1$.
25. Linear, nulidade 1, ordem infinita.
26. Linear, nulidade infinita, ordem 2.
27. Linear, nulidade 2, ordem infinita.
28. $N(T)$ é o conjunto das sucessões constantes; $T(V)$ é o conjunto das sucessões com limite 0.
29. (d) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$ é uma base para $T(V)$; $\dim T(V) = 3$, (e) $N(T) = S$ (f) Se $T(f) = cf$ sendo $c \neq 0$, então $c \in T(V)$, pelo que se tem $f(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$; se $c_1 = 0$, então $c = \pi$ e $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ onde c_1 e c_2 são arbitrários, mas não simultâneamente nulos; se $c_1 \neq 0$, então $c = 2\pi$ e $f(x) = c_1$, com c_1 arbitrário, mas não nulo.

16.8. Exercícios (pg. 684)

3. Sim; $x = v$, $y = u$
4. Sim; $x = u$, $y = -v$
5. Não
6. Não
7. Não
8. Sim; $x = \log u$, $y = \log v$
9. Não

10. Sim; $x = u - 1, \quad y = v - 1$
11. Sim; $x = \frac{1}{2}(v + u), \quad y = \frac{1}{2}(v - u)$
12. Sim; $x = \frac{1}{3}(v + u), \quad y = \frac{1}{3}(2v - u)$
13. Sim; $x = w, \quad y = v, \quad z = u$
14. Não
15. Sim; $x = u, \quad y = \frac{1}{2}v, \quad z = \frac{1}{3}w$
16. Sim; $x = u, \quad y = v, \quad z = w - u - v$
17. Sim; $x = u - 1, \quad y = v - 1, \quad z = w + 1$
18. Sim; $x = u - 1, \quad y = v - 2, \quad z = w - 3$
19. Sim; $x = u, \quad y = v - u, \quad z = w - v$
20. Sim; $x = \frac{1}{2}(u - v + w), \quad y = \frac{1}{2}(v - w + u); \quad z = \frac{1}{2}(w - u + v)$

25. $(S + T)^2 = S^2 + ST + TS + T^2$;
$(S + T)^3 = S^3 + TS^2 + STS + S^2T + ST^2 + TST + T^2S + T^3$

26. (a) $(ST)(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x)$; $(TS)(x, y, z) = (z, z + y, z + y + x)$;
$(ST - TS)(x, y, z) = (x + y, x - z, -y - z)$; $S^2(x, y, z) = (x, y, z)$;
$T^2(x, y, z) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$;
$(ST)^2(x, y, z) = (3x + 2y + z, 2x + 2y + z, x + y + z)$;
$(TS)^2(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$;
$(ST - TS)^2 = (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$;
(b) $S^{-1}(u, v, w) = (w, v, u)$; $T^{-1}(u, v, w) = (u, v - u, w - v)$;
$(ST)^{-1}(u, v, w) = (w, v - w, u - v)$; $(TS)^{-1}(u, v, w) = (w - v, v - u, u)$
(c) $(T - I)(x, y, z) = (0, x, x + y)$; $(T - I)^2(x, y, z) = (0, 0, x)$;
$(T - I)^n(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se $n \geq 3$

28. (a) $Dp(x) = 3 - 2x + 12x^2$; $Tp(x) = 3x - 2x^2 + 12x^3$; $(DT)p(x) = 3 - 4x + 36x^2$;
$(TD)p(x) = -2x + 24x^2$; $(DT - TD)p(x) = 3 - 2x + 12x^2$;
$(T^2D^2 - D^2T^2)p(x) = 8 - 192x$ (b) $p(x) = ax$, a um escalar arbitrário.
(c) $p(x) = ax^2 + b$, a e b escalares arbitrários. (d) Todo o p de V.

31. (a) $Rp(x) = 2$; $Sp(x) = 3 - x + x^2$; $Tp(x) = 2x + 3x^2 - x^3 + x^4$;
$(ST)p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$; $(TS)p(x) = 3x - x^2 + x^3$; $(TS)^2p(x) = 3x - x^2 + x^3$;
$(T^2S^2)p(x) = -x^2 + x^3$; $(S^2T^2)p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$; $(TRS)p(x) = 3x$;
$(RST)p(x) = 2$
(b) $N(R) = \{p \mid p(0) = 0\}$; $R(V) = \{p \mid p$ é constante$\}$; $N(S) = \{p \mid p$ é constante$\}$;
$S(V) = V$; $N(T) = \{O\}$; $T(V) = \{p \mid p(0) = 0\}$ (c) $T^{-1} = S$
(d) $(TS)^n = I - R$; $S^nT^n = I$

32. T não é biunívoca em V porque aplica todas as sucessões constantes na mesma sucessão.

16.12. Exercícios (pg. 692)

1. (a) A matriz identidade $I = (\delta_{jk})$, onde $\delta_{jk} = 1$ se $j = k$ e $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$.
(b) A matriz zero $O = (a_{jk})$, onde cada $a_{jk} = 0$.
(c) A matriz $(c\delta_{jk})$, onde (δ_{jk}) é a matriz identidade da alínea (a).

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. (a) $-5i + 7j, \quad 9i - 12j$
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. (a) $3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$; nulidade 0, ordem 3. (b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a) $T(4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = (0, -2)$; nulidade 1, ordem 2. (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $e_1 = \boldsymbol{j}$, $e_2 = \boldsymbol{k}$, $e_3 = \boldsymbol{i}$, $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (1, -1)$

8. (a) $(5, 0, -1)$; nulidade 0, ordem 2. (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $e_1 = \boldsymbol{i}$, $e_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 0, 2)$, $w_3 = (0, 1, 0)$

9. (a) $(-1, -3, -1)$; nulidade 0, ordem 2. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $e_1 = \boldsymbol{i}$, $e_2 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}$, $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1)$

10. (a) $e_1 - e_2$; nulidade 0, ordem 2. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $a = 5$, $b = 4$

11. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$

19. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. Escolher $(x^3, x^2, x, 1)$ como uma base para V, e (x^2, x) como uma base para W. Então a matriz de TD é $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

16.16. Exercícios (pg. 700)

1. $B + C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$, $A(2B - 3C) = \begin{bmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a e b arbitrários (b) $\begin{bmatrix} -2a & a \\ -2b & b \end{bmatrix}$, a e b arbitrários

3. (a) $a = 9$, $b = 6$, $c = 1$, $d = 5$ (b) $a = 1$, $b = 6$, $c = 0$, $d = -2$

4. (a) $\begin{bmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16.21. Exercícios variados sobre matrizes (pg. 712)

3. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$, onde b e c são arbitrários e a é uma solução qualquer da equação $a^2 - a + bc = 0$.

10. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Índice alfabético