CENGAGE Learning

cálculo

TRADUÇÃO DA 6ª EDIÇÃO NORTE-AMERICANA

POSSUI MATERIAL DE APOIO
(para professores que comprovadamente adotam a obra)

VOLUME 2

JAMES STEWART

CÁLCULO

VOLUME II

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo : volume 2 / James Stewart ; tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins ; revisão técnica Helena Maria Ávila de Castro. -- São Paulo : Cengage Learning, 2009.

Título original: Calculus.
6. ed. americana.
ISBN 978-85-221-0661-5

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios etc. I. Título.

09-07221

CDD-515
515.076

Índice para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

CÁLCULO

VOLUME II

Tradução da 6ª edição norte-americana

JAMES STEWART

MCMASTER UNIVERSITY

Tradução Técnica

ANTONIO CARLOS MORETTI

Doutor em Engenharia Industrial pelo Georgia Institute of Technology e Professor Livre-Docente do Imeec – Unicamp

ANTONIO CARLOS GILLI MARTINS

Doutor em Matemática pela Unicamp e Professor Doutor do Imeec – Unicamp

Revisão Técnica

HELENA MARIA ÁVILA DE CASTRO

Professora Doutora do IME-USP

CENGAGE Learning™

Austrália • Brasil • Japão • Coreia • México • Cingapura • Espanha• Reino Unido • Estados Unidos

Cálculo – Volume II
James Stewart

Gerente Editorial: Patricia La Rosa

Editora de Desenvolvimento: Ligia Cosmo Cantarelli
Fernanda Batista dos Santos

Supervisora de Produção Editorial: Fabiana Alencar Albuquerque

Produtora Editorial: Monalisa Neves

Título Original: Calculus – Early Transcendentals

(ISBN-13: 978-0-495-38273-7; ISBN-10: 0-495-38273-6)

Tradução Técnica: Antonio Carlos Moretti
Antonio Carlos Gilli Martins

Revisão Técnica: Helena Maria Ávila de Castro

Copidesque: Fábio Larsson

Revisão: Adriane Peçanha
Cristiane Mayumi Morinaga

Diagramação: Cia. Editorial

Capa: Souto Crescimento de Marca

© 2008 Cengage Brooks/Cole, parte da Cengage Learning.
© 2010 Cengage Learning Edições Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, sejam quais forem os meios empregados, sem a permissão, por escrito, da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Para informações sobre nossos produtos, entre em contato pelo telefone **0800 11 19 39**

Para permissão de uso de material desta obra, envie seu pedido para **direitosautorais@cengage.com**

© 2010 Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

ISBN-13: 978-85-221-0661-5
ISBN-10: 85-221-0661-4

Cengage Learning
Condomínio E-Business Park
Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 4
Lapa de Baixo – CEP 05069-900
São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900 – Fax: (11) 3665-9901
SAC: 0800 11 19 39

Para suas soluções de curso e aprendizado, visite
www.cengage.com.br

Impresso no Brasil.
Printed in Brazil.
6 7 8 9 10 12 11 10 09 08

PREFÁCIO

Esta versão da 6ª edição de *Cálculo* utiliza em todos os exemplos e exercícios o Sistema Internacional de Unidades (SI). Em algumas exceções, porém, as unidades originais foram mantidas: para algumas aplicações em engenharia, acredito ser do interesse de alguns engenheiros familiarizarem-se com as unidades empregadas nos Estados Unidos. Também foram mantidas as unidades em exercícios específicos nos quais o uso de outro sistema de medidas não faria sentido (por exemplo, os que tratam de beisebol).

Procurei tornar mais internacional a natureza dos exercícios e exemplos que envolvessem dados do mundo real, de forma que agora, em grande parte, os dados se referem a outros países, que não os Estados Unidos. Os exemplos e exercícios tratam da tarifa postal de Hong Kong; da dívida pública canadense; dos índices de desemprego na Austrália; da incidência de luz solar em Ancara, na Turquia; de isotérmicas da China; do porcentual da população rural na Argentina; das populações da Malásia, Indonésia, México e Índia; do consumo de energia elétrica em Ontário, entre muitos outros.

Além de adaptar alguns exercícios para o sistema internacional de unidades e internacionalizar os dados, alguns outros exercícios foram também alterados, de forma que cerca de 10% dos exercícios diferem da versão anterior.

FILOSOFIA DO LIVRO

A arte de ensinar, diz Mark van Doren, é a arte de propiciar o descobrimento. Tentei escrever um livro que auxiliasse o estudante em sua descoberta do cálculo – tanto pela utilidade prática da disciplina quanto por sua surpreendente beleza. Nesta edição, bem como nas cinco anteriores, meu objetivo foi mostrar ao estudante a utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, mas ao mesmo tempo desejei transmitir a beleza intrínseca à matéria. Não há dúvida de que Newton teve uma enorme sensação de triunfo quando realizou suas maiores descobertas, e minha intenção é que os estudantes partilhem um pouco deste sentimento.

A ênfase aqui é na compreensão de conceitos. Creio que quase todos concordam que este deve ser o objetivo principal do ensino do cálculo. Na verdade, o ímpeto que norteia o atual movimento de reforma no ensino do cálculo vem da Conferência de Tulane de 1986, que teve como principal recomendação:

Concentrar-se na compreensão de conceitos.

Tentei atingir este objetivo por meio da chamada *Regra dos Três*: "Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente". A visualização e as experiências numéricas e gráficas, entre outras ferramentas, alteraram fundamentalmente a forma como ensinamos os raciocínios conceituais. Mais recentemente, a *Regra dos Três* expandiu-se em uma *Regra dos Quatro*, valorizando também o ponto de vista verbal (ou descritivo).

Na redação desta 6ª edição, parti da premissa de que é possível almejar à compreensão dos conceitos e ao mesmo tempo conservar as melhores tradições do cálculo convencional. Este livro possui elementos de reforma, mas que estão contextualizados no currículo tradicional.

O QUE HÁ DE NOVO NA 6ª EDIÇÃO?

Estas são algumas das alterações nesta 6ª edição de *Cálculo*:

- No início do livro, foram incluídos quatro testes de verificação: Álgebra Básica, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria. Foram fornecidas as respostas, e os estudantes que não tiveram bom desempenho são encaminhados aos locais em que podem encontrar a ajuda necessária (nos Apêndices).
- Alguns docentes cujos cursos não alcançavam o capítulo de equações diferenciais afirmavam ser inadequado que a seção sobre Crescimento e Decrescimento Exponencial estivesse colocada ali. Por essa razão, esta parte foi deslocada para o Capítulo 3 (Volume I), o que causou a reorganização do Capítulo 9.
- As Seções 11.10 e 11.11 foram também combinadas em uma única seção. Antes, acreditava-se que separar as séries binomiais em uma seção própria enfatizava sua importância, porém alguns professores não trabalhavam esta seção. Incorporou-se as séries binomiais na Seção 11.10.
- O material sobre coordenadas esféricas e cilíndricas (previamente na Seção 12.7) foi transferido para o Capítulo 15, no qual é dado no contexto do cálculo das integrais triplas.
- Foram reformuladas ou incluídas algumas frases e notas para tornar o texto mais elucidativo.
- Algumas ilustrações foram redesenhadas.
- Os dados de alguns exemplos e exercícios foram atualizados e modernizados.
- Inúmeros exemplos foram incluídos ou alterados.
- Foram acrescentados alguns passos na resolução de certos problemas.
- Mais de 25% dos exercícios são novos. Alguns de meus favoritos: 11.6.38, 11.11.30, 14.5.44 e 14.8.20-21.
- Existem também alguns interessantes novos problemas nas Seções "Problemas Quentes".

CARACTERÍSTICAS

EXERCÍCIOS CONCEITUAIS

A melhor maneira de treinar a compreensão dos conceitos é resolvendo os problemas sugeridos. Com esta finalidade, desenvolvi diversos tipos de exercício. Em alguns, é exigida a explicação dos conceitos fundamentais da seção (ver, por exemplo, os primeiros exercícios das Seções 11.2, 14.2 e 14.3). Da mesma forma, as seções de revisão começam com uma *Verificação de Conceitos* e *Testes Verdadeiro-Falso*. Outros exercícios verificam a compreensão dos conceitos mediante o uso de gráficos e tabelas (como nos Exercícios 9.1.11-12, 10.1.24-27, 11.10.2, 13.2.1-2, 13.3.33-37, 14.1.1-2, 14.1.30-38, 14.3.3-10, 14.6.1-2, 14.7.3-4, 15.1.5-10, 16.1.11-18, 16.2.17-18, 16.31-2).

Outra modalidade de exercícios parte da descrição verbal para verificar o entendimento dos conceitos. Particularmente, valorizo problemas que combinam e confrontam processos gráficos, numéricos e algébricos (ver Exercício 9.4.2).

EXERCÍCIOS COM DIFICULDADE PROGRESSIVA

Cada grupo de exercícios progride em complexidade, partindo da verificação de conceitos básicos e problemas para treinar técnicas, até problemas mais desafiadores envolvendo demonstrações e aplicações.

DADOS REAIS

Minha equipe e eu nos empenhamos em pesquisar dados do mundo real em bibliotecas, empresas, agências governamentais e na internet que pudessem apresentar e ilustrar os conceitos de cálculo. Por este motivo, muitos exercícios e exemplos lidam com funções definidas por tais dados numéricos ou gráficos. As funções com duas variáveis são ilustradas por uma tabela que mostra o índice de sensação térmica em função da temperatura do ar e da velocidade do vento (Exemplo 2 da Seção 14.1). As derivadas parciais são apresentadas na Seção 14.3 por meio do exame de uma das colunas da tabela do *humidex* (índice de temperatura aparente usado no Canadá) como uma função da temperatura real e da umidade relativa do ar. Este mesmo exemplo também aparece mais à frente, quando são discutidas as aproximações lineares (Exemplo 3 da Seção 14.4). As derivadas direcionais são apresentadas na Seção 14.6 usando um mapa de contornos de temperaturas para estimar a taxa de variação da temperatura na direção sudoeste de Chongqing. As integrais duplas são usadas para calcular a precipitação média de neve no Colorado entre 20-21 de dezembro de 2006 (Exemplo 4 da Seção 15.1). E os campos vetoriais são apresentados por meio da descrição dos campos vetoriais de velocidade do vento na Baía de São Francisco.

PROJETOS

Uma maneira de despertar o interesse dos alunos – e facilitar a aprendizagem – é fazer com que trabalhem (às vezes em grupos) em projetos mais aprofundados, que transmitam um verdadeiro sentimento de realização quando completados. Incluí quatro tipos de projetos: os *Projetos Aplicados* são aplicações que visam despertar a imaginação dos estudantes. Na Seção 9.3, o projeto pede que se determine se uma bola jogada para cima demora mais para alcançar sua altura máxima ou para retornar à posição inicial – e a resposta pode ser surpreendente. O projeto após a Seção 14.8 aplica os multiplicadores de Lagrange para determinar as massas dos três estágios de um foguete, buscando minimizar a massa total e ao mesmo tempo permitir que o foguete atinja a velocidade desejada; os *Projetos de Laboratório* envolvem tecnologia – o projeto após a Seção 10.2 mostra como as curvas de Bézier são usadas para traçar as formas que representam as letras em uma impressora *laser*; os *Projetos Escritos* exigem que os alunos comparem os métodos atuais àqueles desenvolvidos pelos fundadores do cálculo – por exemplo, o método criado por Fermat para encontrar as tangentes. Neles, também são oferecidas sugestões de bibliografia; e os *Projetos de Descoberta* incentivam a descoberta por meio da percepção de padrões ou antecipam questões a serem aprofundadas posteriormente. Podem ainda explorar aspectos geométricos: os tetraedros (após a Seção 14.7), as hiperesferas (após a Seção 15.6) e as intersecções de três cilindros (após a Seção 15.7).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os alunos normalmente têm mais dificuldades naqueles problemas em que não há um único procedimento bem definido para chegar à solução. Acredito que não ocorreram muitos avanços na área de resolução de problemas após a estratégia em quatro estágios propostos por George Polya. Este método é utilizado explícita e implicitamente em todo o livro. Incluí também seções denominadas *Problemas Quentes*, apresentando exemplos de como lidar com problemas de cálculo mais desafiadores. Ao selecionar os diversos problemas nestas seções, tentei seguir este conselho, dado por David Hilbert: "Um problema matemático deve ser difícil a ponto de nos desafiar, mas não inacessível a ponto de zombar de nossos esforços". Ao propor problemas difíceis em tarefas e provas, costumo corrigi-los de forma diferenciada: neles, procuro valorizar principalmente as ideias que levam à resposta e a aplicação dos princípios de resolução de problemas mais relevantes.

TECNOLOGIA

A disponibilidade de tecnologia não diminui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos. Este livro pode ser utilizado com ou sem o emprego de ferramentas tecnológicas – dois símbolos especiais são usados para indicar precisamente

quando um tipo especial de ferramenta é necessária. O símbolo indica um exercício que definitivamente requer o uso dessas tecnologias (o que não quer dizer que seu uso nos demais exercícios seja proibido). O símbolo SCA aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92). Mas a tecnologia não torna lápis e papel obsoletos. Frequentemente, são preferíveis os cálculos e esboços feitos à mão, ao se tentar ilustrar e reforçar algum conceito. Tanto professores quanto estudantes precisam aprender a discernir quando é mais adequado o uso das máquinas ou o cálculo manual.

No site da Cengage (www.cengage.com.br) há material de apoio com slides, uma importante ferramenta no dia a dia do aprendizado. O material de apoio é uma cortesia para professores que adotam a obra e a indicam na ementa do curso

CONTEÚDO – VOLUME II

TESTES DE VERIFICAÇÃO O livro começa com quatro testes de verificação: Álgebra Básica, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria.

UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO Temos aqui um panorama da matéria, incluindo uma série de questões para nortear o estudo do cálculo.

9 ■ EQUAÇÕES DIFERENCIAIS O destaque deste tratamento inicial das equações diferenciais é o tema dos modelos. Os campos direcionais e o método de Euler são estudados antes de equações lineares e separáveis serem resolvidas explicitamente, com a intenção de permitir que sejam analisadas pela abordagem qualitativa, numérica e analítica. Aplicam-se estes métodos a modelos exponenciais, logísticos e de crescimento populacional. As primeiras quatro ou cinco seções deste capítulo são uma boa introdução às equações diferenciais de primeira ordem. Ao término, uma seção opcional usa o modelo predador-presa para ilustrar os sistemas de equações diferenciais.

10 ■ EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS E COORDENADAS POLARES Este capítulo trata das equações paramétricas e coordenadas polares, aplicando a eles os princípios de cálculo. As curvas parametrizadas são bem adequadas a projetos de laboratório: os dois aqui apresentados envolvem famílias de curvas e curvas de Bézier. Uma breve explicação das seções cônicas em coordenadas polares prepara o estudo das leis de Kepler no Capítulo 13.

11 ■ SEQUÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS Os testes de convergência são justificados intuitivamente (ver p. 697), bem como demonstrados formalmente. As estimativas numéricas das somas de séries dependem de qual teste foi usado para demonstrar a convergência. Enfatiza-se as séries de Taylor, os polinômios e suas aplicações na física. Também são mencionadas as estimativas de erro, inclusive em ferramentas gráficas.

12 ■ VETORES E A GEOMETRIA DO ESPAÇO A geometria analítica tridimensional foi dividida em dois capítulos. Aqui, são estudados os vetores, produtos escalares e vetoriais, retas, planos e superfícies.

13 ■ FUNÇÕES VETORIAIS Aqui, são estudadas as funções a valores vetoriais, suas derivadas e integrais, o comprimento e curvatura de curvas espaciais e a velocidade e aceleração ao longo destas curvas, finalizando com as Leis de Kepler.

14 ■ DERIVADAS PARCIAIS As funções de duas ou mais variáveis são estudadas do ponto de vista verbal, numérico, visual e algébrico. As derivadas parciais são introduzidas mediante a análise de uma particular coluna de uma tabela com índices de conforto térmico (temperatura aparente do ar) como função da temperatura medida e da umidade relativa. As derivadas direcionais são estimadas por meio de mapas de contorno de temperatura, pressão e precipitação de neve.

15 ■ INTEGRAIS MÚLTIPLAS Para calcular as médias de temperatura e precipitação de neve em dadas regiões, utilizamos mapas de contorno e a Regra do Ponto Médio. São usadas integrais duplas e triplas no cálculo de probabilidades, área de superfície, e, em projetos, do volume de hiperesferas e da intersecção de três cilindros. As coordenadas esféricas e cilíndricas são introduzidas no contexto de cálculo de integrais triplas.

16 ■ CÁLCULO VETORIAL A apresentação de campos vetoriais é feita por meio de figuras dos campos de velocidade do vento na Baía de São Francisco. Exploramos também as semelhanças entre o Teorema Fundamental para integrais de linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente.

17 ■ EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM Como as equações diferenciais de primeira ordem foram tratadas no Capítulo 9, este último capítulo trata das equações diferenciais lineares de segunda ordem, sua aplicação em molas vibrantes e circuitos elétricos e na solução em séries.

MATERIAL DE APOIO A 6ª edição de *Cálculo* é dotada de material de apoio elaborado sob minha supervisão, que procura facilitar a compreensão por parte dos alunos e propiciar criatividade no ensino.

AGRADECIMENTOS

A preparação desta edição envolveu muito tempo e contou com a leitura de muitos revisores. Eu agradeço imensamente o tempo despendido para compreender a motivação da minha abordagem para este livro.

Aprendi algo com cada um deles.

REVISORES DA 6ª EDIÇÃO

Marilyn Belkin, *Villanova University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Frederick Gass, *Miami University*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*

REVISORES DE TECNOLOGIA

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin-Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri-St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado at Denver and Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri-Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama in Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York at Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*

Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
Capt. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

REVISORES DA EDIÇÃO ANTERIOR

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie-Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin-Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston-Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University-New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota-Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin-Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina at Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*

John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York at Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan-Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University-Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin-Madison*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University-Trumbull*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin-Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University-Los Angeles*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin-Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan-Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University-Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

COLABORADORES DA 6ª EDIÇÃO BRASILEIRA

Professores da Universidade de Caxias do Sul

Adalberto Ayjara Dornelles Filho
Adriana Miorelli Adami
Adriana Speggiorin Verza
Daiane Scopel Boff
Eliana Maria do Sacramento Soares
Helena Maria Ludke
Isolda Giani de Lima
Juliana Dotto
Kelen Berra de Mello
Laurete Zanol Sauer
Luciana Muler Somavilla
Magda Mantovani Lorandi
Marilia Schmidt de Azambuja
Mauren Turra Pize
Monica Scotti
Raquel Milani
Rejane Pergher
Solange Galiotto Sartor
Valdecir Bottega
Vania Maria Pinheiro Slaviero

AO ALUNO

A leitura de um livro-texto de cálculo difere da leitura de um jornal ou de um romance, ou mesmo de um livro de física. Não desanime se precisar ler o mesmo trecho muitas vezes antes de entendê-lo. E, durante a leitura, você deve sempre ter lápis, papel e calculadora à mão, para fazer contas e desenhar diagramas.

Alguns estudantes preferem partir diretamente para os exercícios passados como dever de casa, consultando o texto somente ao topar com alguma dificuldade. Acredito que ler e compreender toda a seção antes de lidar com os exercícios é muito mais interessante. Você deve prestar especial atenção às definições e compreender o significado exato dos termos. E, antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho. Assim, será muito mais proveitoso quando você observar a resolução.

Parte do objetivo deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Procure escrever os estágios da resolução de forma articulada, passo a passo, com frases explicativas – e não somente uma série de equações e fórmulas desconexas.

As respostas da maioria dos exercícios ímpares são dadas no fim do livro, no Apêndice I. Alguns exercícios pedem explicações, interpretações ou descrições por extenso. Em tais casos, não há uma forma única de escrever a resposta, então não se preocupe se a sua ficou muito diferente. Da mesma forma, também há mais de uma maneira de expressar uma resposta algébrica ou numérica. Assim, se a sua resposta diferir daquela que consta no livro, não assuma imediatamente que a sua está errada. Por exemplo, se você chegou em $\sqrt{2} - 1$ e a resposta impressa é $1/(1 + \sqrt{2})$, você está certo, e a racionalização do denominador mostrará que ambas são equivalentes.

O símbolo  indica que o exercício exige o uso de uma calculadora gráfica ou um computador com software adequado (na Seção 1.4, no Volume I, discutimos o uso desses dispositivos e algumas das armadilhas que você pode encontrar). Mas isso não significa que não possa utilizar esses equipamentos para verificar seus resultados nos demais exercícios. O símbolo  é utilizado nos exercícios em que são necessários todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92).

Outro símbolo com o qual você vai deparar é o  , que o alerta para um erro comum. O símbolo registra as situações em que percebi que uma boa parte dos alunos tende a cometer o mesmo erro.

O cálculo é uma matéria fascinante e, com justiça, é considerado uma das maiores realizações da inteligência humana. Espero que você descubra não apenas o quanto esta disciplina é útil, mas também o quão intrinsecamente bela ela é.

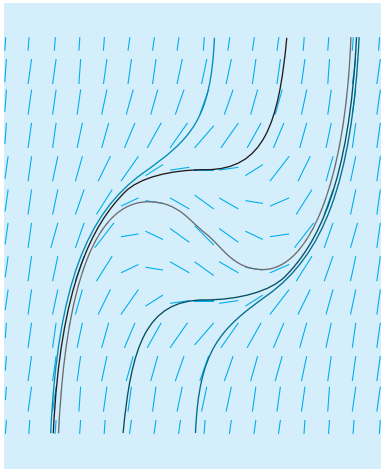
JAMES STEWART

SUMÁRIO

TESTES DE VERIFICAÇÃO XVII

UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO XXII

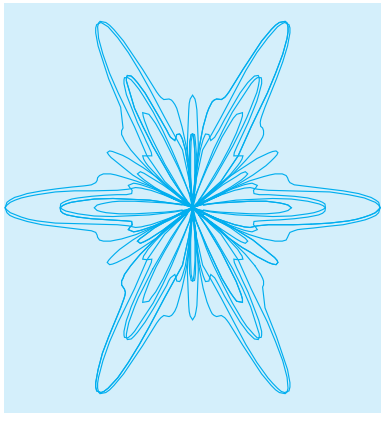
9 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 536



9.1 Modelagem com Equações Diferenciais 537
9.2 Campos de Direções e o Método de Euler 542
9.3 Equações Separáveis 549
Projeto Aplicado ■ Quão Rapidamente um Tanque Esvazia? 557
Projeto Aplicado ■ O Que É Mais Rápido: Subir ou Descer? 559
9.4 Modelos para Crescimento Populacional 560
Projeto Aplicado ■ Cálculo e Beisebol 569
9.5 Equações Lineares 571
9.6 Sistemas Predador-Presa 576
Revisão 583

Problemas Quentes 586

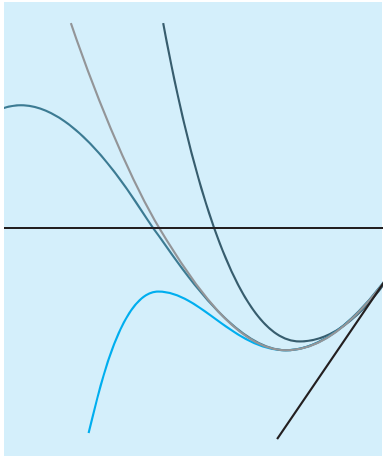
10 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS E COORDENADAS POLARES 588



10.1 Curvas Definidas por Equações Paramétricas 589
Projeto de Laboratório ■ Rolando Círculos ao Redor de Círculos 597
10.2 Cálculo com Curvas Parametrizadas 598
Projeto de Laboratório ■ Curvas de Bézier 606
10.3 Coordenadas Polares 607
10.4 Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares 617
10.5 Seções Cônicas 621
10.6 Seções Cônicas em Coordenadas Polares 628
Revisão 635

Problemas Quentes 638

11 SEQUÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS 640



11.1 Sequências 641
Projeto de Laboratório ■ Sequências Logísticas 652
11.2 Séries 652
11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas 661
11.4 Os Testes de Comparação 668
11.5 Séries Alternadas 673
11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz 678
11.7 Estratégia para Testar as Séries 684
11.8 Séries de Potências 687
11.9 Representações de Funções como Séries de Potências 692
11.10 Séries de Taylor e de Maclaurin 698
Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo 711
Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial 711
11.11 Aplicações de Polinômios de Taylor 712
Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas 720
Revisão 721

Problemas Quentes 725

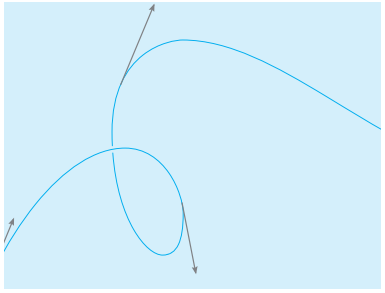
12 VETORES E A GEOMETRIA DO ESPAÇO 728



12.1 Sistema de Coordenadas Tridimensionais 729
12.2 Vetores 734
12.3 O Produto Escalar 742
12.4 O Produto Vetorial 749
Projeto de Descoberta ■ A Geometria do Tetraedro 756
12.5 Equações de Retas e Planos 756
Projeto de Laboratório ■ Pondo 3D em Perspectiva 765
12.6 Cilindros e Superfícies Quádricas 766
Revisão 773

Problemas Quentes 776

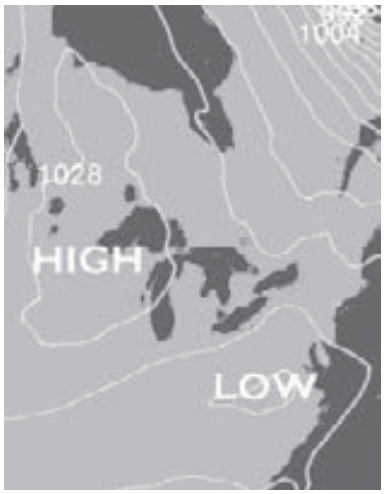
13 FUNÇÕES VETORIAIS 778



13.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais 779
13.2 Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais 785
13.3 Comprimento de Arco e Curvatura 791
13.4 Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração 799
Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler 807
Revisão 809

Problemas Quentes 812

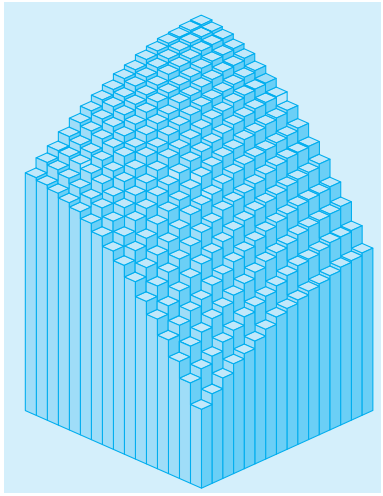
14 DERIVADAS PARCIAIS 814



14.1 Funções de Várias Variáveis 815
14.2 Limites e Continuidade 829
14.3 Derivadas Parciais 836
14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares 848
14.5 Regra da Cadeia 857
14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente 865
14.7 Valores Máximo e Mínimo 877
Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba 887
Projeto de Descoberta ■ Aproximação Quadrática e Pontos Críticos 887
14.8 Multiplicadores de Lagrange 888
Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes 895
Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica 896
Revisão 897

Problemas Quentes 902

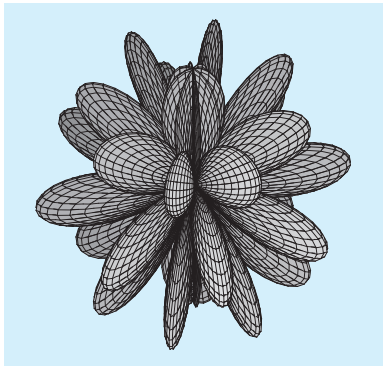
15 INTEGRAIS MÚLTIPLAS 904



15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 905
15.2 Integrais Iteradas 913
15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 918
15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 926
15.5 Aplicações das Integrais Duplas 931
15.6 Integrais Triplas 940
Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 950
15.7 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 950
Projeto de Descoberta ■ A Intersecção de Três Cilindros 954
15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 954
Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 960
15.9 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 961
Revisão 969

Problemas Quentes 972

16 CÁLCULO VETORIAL 974

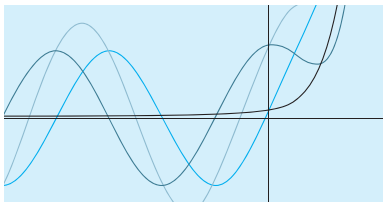


16.1 Campos Vetoriais 975
16.2 Integrais de Linha 981
16.3 Teorema Fundamental das Integrais de Linha 992
16.4 Teorema de Green 1000
16.5 Rotacional e Divergente 1007
16.6 Superfícies Parametrizadas e Suas Áreas 1015
16.7 Integrais de Superfície 1025
16.8 O Teorema de Stokes 1036
Projeto Escrito ■ Três Homens e Dois Teoremas 1041

16.9 O Teorema do Divergente 1041
16.10 Resumo dos Teoremas 1047
Revisão 1048

Problemas Quentes 1051

17 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM 1052



17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1053
17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1058
17.3 Aplicações das Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1065
17.4 Soluções em Séries 1072
Revisão 1076

APÊNDICES

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
B Geometria Analítica e Retas A10
C Cônicas: Gráficos das Equações de Segundo Grau A16
D Trigonometria A23
E Notação de Somatória (ou Notação Sigma) A32
F Demonstrações dos Teoremas A37
G O Logaritmo Definido como uma Integral A47
H Números Complexos A54
I Respostas dos Exercícios de Números Ímpares A61

ÍNDICE REMISSIVO A93

TESTES DE VERIFICAÇÃO

O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Os testes a seguir têm a intenção de diagnosticar falhas que você possa ter nessas áreas. Depois de fazer cada teste, é possível conferir suas respostas com as respostas dadas e, se necessário, refrescar sua memória consultando o material de revisão fornecido.

A TESTES DE VERIFICAÇÃO: ÁLGEBRA

1. Calcule cada expressão sem usar uma calculadora.

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada expressão. Escreva suas respostas sem expoentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Expanda e simplifique.

(a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$

(c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)$ (d) $(2x + 3)^2$

(e) $(x + 2)^3$

4. Fatore cada expressão.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$

(c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (d) $x^4 + 27x$

(e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique as expressões racionais.

(a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

(c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalize a expressão e simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

7. Reescreva, completando o quadrado.

(a) x^2+x+1 (b) $2x^2-12x+11$

8. Resolva a equação. (Encontre apenas as soluções reais.)

(a) $x+5=14-\frac{1}{2}x$ (b) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x}$

(c) $x^2-x-12=0$ (d) $2x^2+4x+1=0$

(e) $x^4-3x^2+2=0$ (f) $3|x-4|=10$

(g) $2x(4-x)^{-1/2}-3\sqrt{4-x}=0$

9. Resolva cada desigualdade. Escreva suas respostas usando a notação de intervalos.

(a) $-4<5-3x\leqslant 17$ (b) $x^2<2x+8$

(c) $x(x-1)(x+2)>0$ (d) $|x-4|<3$

(e) $\dfrac{2x-3}{x+1}\leqslant 1$

10. Diga se cada equação é verdadeira ou falsa.

(a) $(p+q)^2=p^2+q^2$ (b) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ (d) $\dfrac{1+TC}{C}=1+T$

(e) $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$ (f) $\dfrac{1}{a/x-b/x}=\dfrac{1}{a-b}$

RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO A: ÁLGEBRA

1. (a) 81 (b) -81 (c) $\frac{1}{81}$ (d) 25 (e) $\frac{9}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$

2. (a) $6\sqrt{2}$ (b) $48a^5b^7$ (c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. (a) $11x-2$ (b) $4x^2+7x-15$ (c) $a-b$ (d) $4x^2+12x+9$ (e) $x^3+6x^2+12x+8$

4. (a) $(2x-5)(2x+5)$ (b) $(2x-3)(x+4)$ (c) $(x-3)(x-2)(x+2)$ (d) $x(x+3)(x^2-3x+9)$ (e) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ (f) $xy(x-2)(x+2)$

5. (a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x-3}$ (c) $\dfrac{1}{x-2}$ (d) $-(x+y)$

6. (a) $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

7. (a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ (b) $2(x-3)^2-7$

8. (a) 6 (b) 1 (c) $-3, 4$ (d) $-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ (f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$ (g) $\frac{12}{5}$

9. (a) $[-4, 3)$ (b) $(-2, 4)$ (c) $(-2, 0)\cup(1, \infty)$ (d) $(1, 7)$ (e) $(-1, 4]$

10. (a) Falso (b) Verdadeiro (c) Falso (d) Falso (e) Falso (f) Verdadeiro

B TESTES DE VERIFICAÇÃO: GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e
(a) tem inclinação -3
(b) é paralela ao eixo x
(c) é paralela ao eixo y
(d) é paralela à reta $2x - 4y = 3$

2. Encontre uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.

3. Encontre o centro e o raio do círculo com equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sejam $A(-7, 4)$ e $B(5, -12)$ pontos no plano.
(a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B.
(b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as intersecções com os eixos?
(c) Encontre o ponto médio do segmento AB.
(d) Encontre o comprimento do segmento AB.
(e) Encontre uma equação para a mediatriz de AB.
(f) Encontre uma equação para o círculo para o qual AB é um diâmetro.

5. Esboce a região do plano xy definidas pelas equações ou inequações.
(a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$
(b) $|x| < 4$ e $|y| < 2$
(c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$
(d) $y \geqslant x^2 - 1$
(e) $x^2 + y^2 < 4$
(f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO B: GEOMETRIA ANALÍTICA

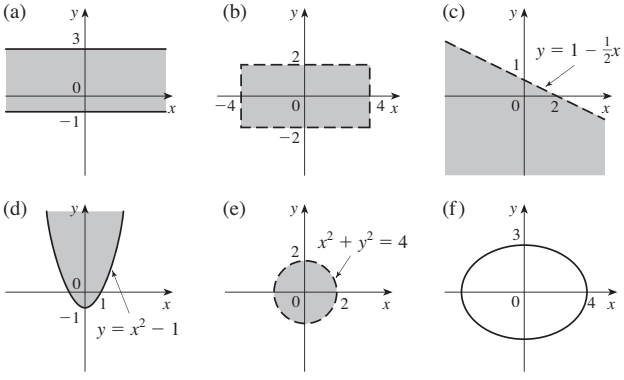
1. (a) $y = -3x + 1$
(b) $y = -5$
(c) $x = 2$
(d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

3. Centro $(3, -5)$, raio 5

4. (a) $-\frac{4}{3}$
(b) $4x + 3y + 16 = 0$; intersecção com o eixo x, -4; intersecção com o eixo y, $-\frac{16}{3}$
(c) $(-1, -4)$
(d) 20
(e) $3x - 4y = 13$
(f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

5.



Se você teve dificuldade com estes problemas, consulte a revisão de geometria analítica, nos Apêndices B e C.

C TESTES DE VERIFICAÇÃO: FUNÇÕES

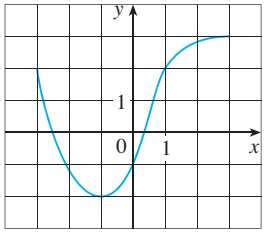


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. O gráfico de uma função f é dado à esquerda.
(a) Diga o valor de $f(-1)$.
(b) Estime o valor de $f(2)$.
(c) Para quais valores de x vale que $f(x) = 2$?
(d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.

2. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente da diferença $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta.

3. Encontre o domínio da função
(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

4. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f?
(a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x - 3) + 2$

5. Sem usar uma calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico.
(a) $y = x^3$ (b) $y = (x+1)^3$ (c) $y = (x-2)^3 + 3$
(d) $y = 4 - x^2$ (e) $y = \sqrt{x}$ (f) $y = 2\sqrt{x}$
(g) $y = -2^x$ (h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$
(a) Calcule $f(-2)$ e $f(1)$. (b) Esboce o gráfico de f.

7. Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, encontre cada uma das seguintes funções.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO C: FUNÇÕES

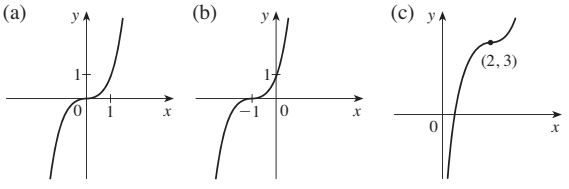
1. (a) -2 (b) 2,8
(c) -3,1 (d) -2,5, 0,3
(e) $[-3, 3], [-2, 3]$

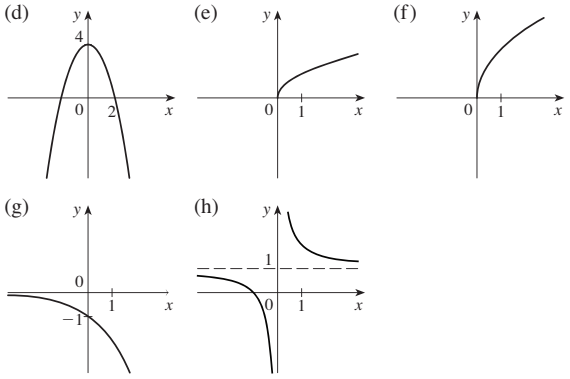
2. $12 + 6h + h^2$

3. (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
(b) $(-\infty, \infty)$
(c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

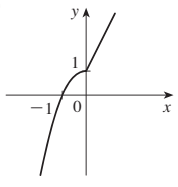
4. (a) Refletindo em torno do eixo x.
(b) Expandindo verticalmente por um fator 2, a seguir transladando 1 unidade para baixo.
(c) Transladando 3 unidades para a direita e duas unidades para cima.

5.





6. (a) $-3, 3$
(b)



7. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
(c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Se você teve dificuldade com estes problemas, consulte as Seções 1.1 a 1.3 deste livro.

D TESTES DE VERIFICAÇÃO: TRIGONOMETRIA

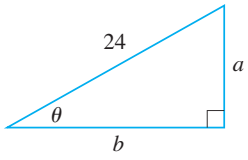


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

1. Converta de graus para radianos.
(a) 300° (b) -18°

2. Converta de radianos para graus.
(a) $5\pi/6$ (b) 2

3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm cujo ângulo central é 30°.

4. Encontre os valores exatos.
(a) $\operatorname{tg}(\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

5. Expresse os comprimentos a e b na figura em termos de θ.

6. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule $\operatorname{sen}(x + y)$.

7. Demonstre as identidades.
(a) $\operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

(b) $\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

8. Encontre todos os valores de x tais que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ e $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sem usar uma calculadora.

RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO D: TRIGONOMETRIA

1. (a) $5\pi/3$ (b) $-\pi/10$

2. (a) 150° (b) $360/\pi \approx 114{,}6^\circ$

3. 2π cm

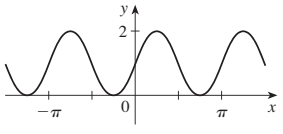
4. (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2

5. (a) $24 \operatorname{sen}\theta$ (b) $24 \cos\theta$

6. $\frac{1}{15}\left(4 + 6\sqrt{2}\right)$

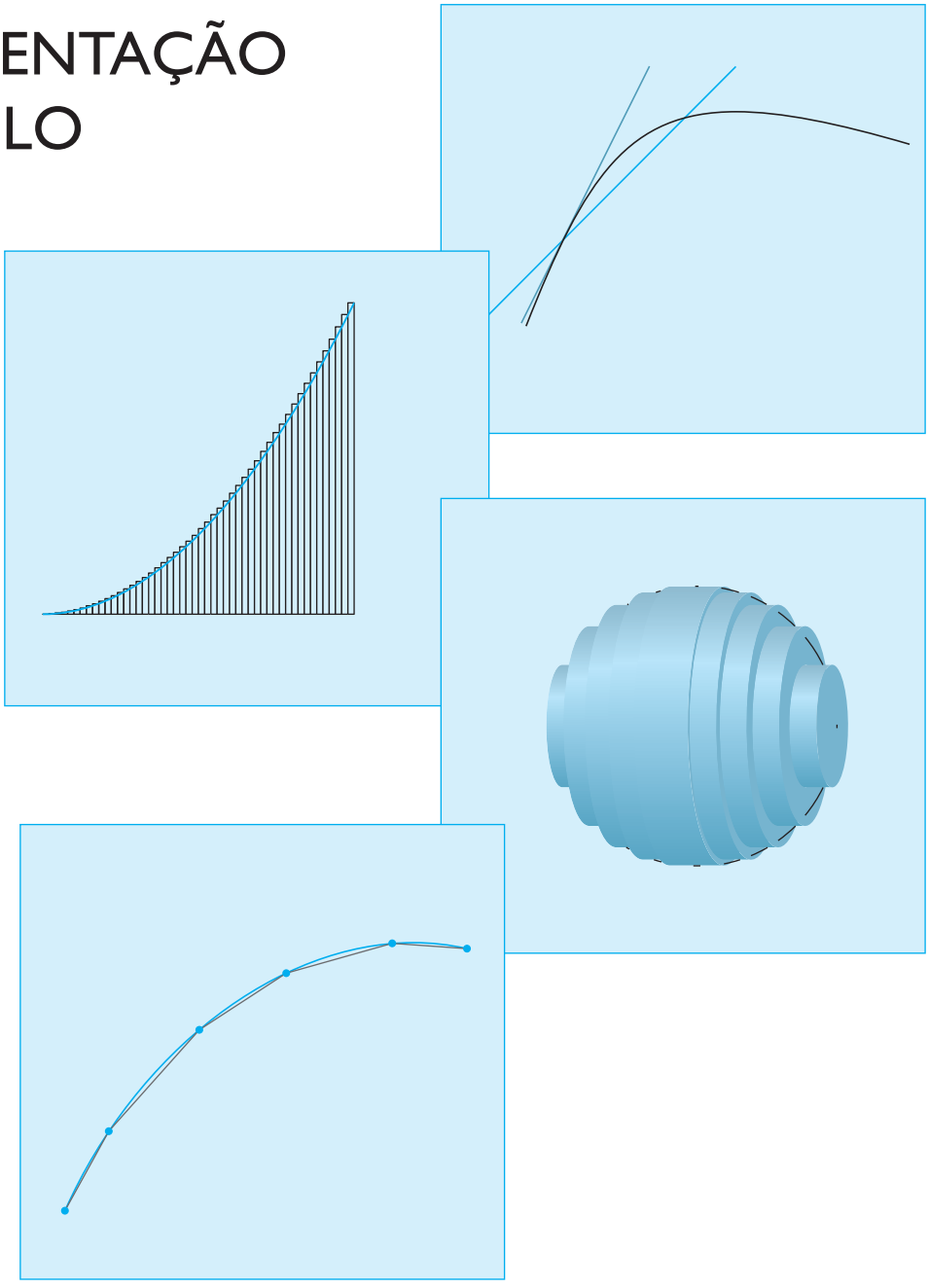
8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

9.

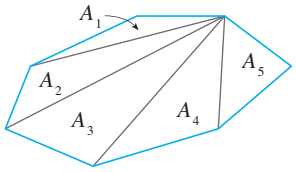


Se você teve dificuldade com estes problemas, consulte o Apêndice D deste livro.

UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO



O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. O cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, pode ser útil ter uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais aprofundado. Vamos dar aqui uma olhada em algumas das principais ideias do cálculo, mostrando como surgem os limites quando tentamos resolver diversos problemas.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

O PROBLEMA DA ÁREA

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2 500 anos atrás, quando foram encontradas áreas usando o chamado "método da exaustão". Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 e, em seguida, somando as áreas obtidas.

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles. A Figura 2 ilustra esse procedimento no caso especial de um círculo, com polígonos regulares inscritos.

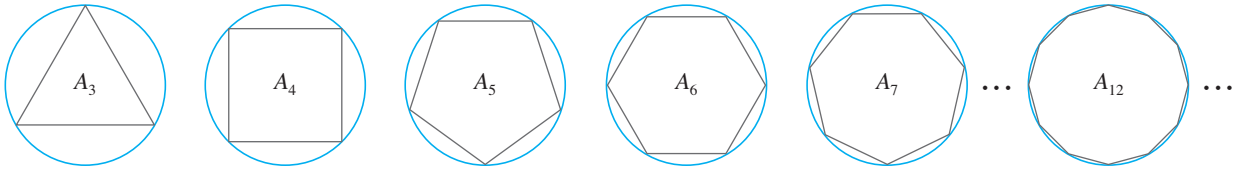


FIGURA 2

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Os gregos, porém, não usaram explicitamente os limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usou a exaustão para demonstrar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Usamos uma ideia semelhante no Capítulo 5 para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos (como na Figura 4), fazer decrescer a largura dos retângulos e então calcular A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

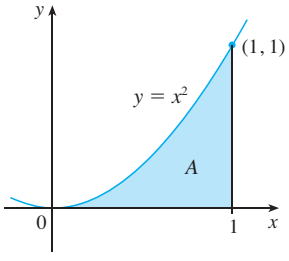


FIGURA 3

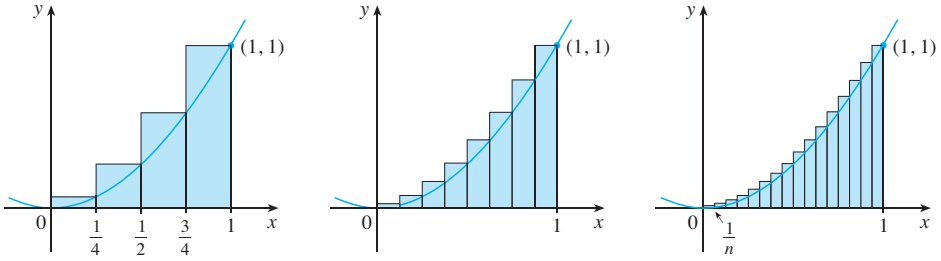


FIGURA 4

O problema da área é central no ramo do cálculo chamado *cálculo integral*. As técnicas que desenvolvemos no Capítulo 5 para encontrar áreas também possibilitam o cálculo do volume de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra e o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque.

O PROBLEMA DA TANGENTE

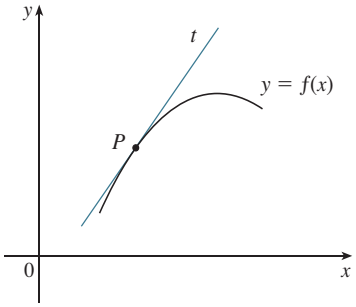


FIGURA 5
A reta tangente em P

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$, em um dado ponto P. (Demos uma definição precisa de reta tangente no Capítulo 2. Por ora, você pode pensá-la como a reta que toca a curva em P, como na Figura 5.) Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que, para calcular a inclinação, é necessário conhecer dois pontos sobre t, e temos somente o ponto P. Para contornar esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. Da Figura 6 vemos que

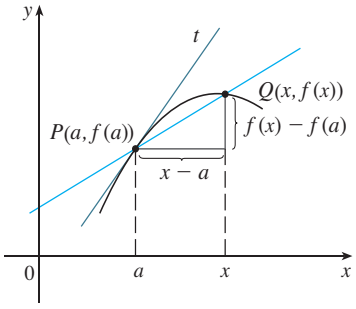


FIGURA 6
A reta secante PQ

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \boxed{1}$$

Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Uma vez que x tende a a quando Q tende a P, também podemos usar a Equação 1 para escrever

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \boxed{2}$$

Exemplos específicos desse procedimento foram dados no Capítulo 2.

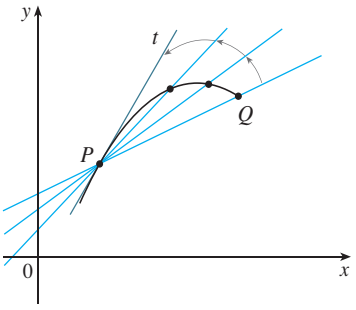


FIGURA 7
Retas secantes aproximando-se da reta tangente

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que não foi inventado até mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais ideias por trás do cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre Fermat (1601--1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Os dois ramos do cálculo e seus problemas principais, o da área e o da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, têm uma estreita conexão. O problema da área e o da tangente são problemas inversos, em um sentido que foi explicado no Capítulo 5.

VELOCIDADE

Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 km/h, o que essa informação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora o carro terá percorrido 48 km. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a velocidade ser, em um dado momento, 48 km/h?

Para analisar essa questão, vamos examinar o movimento de um carro percorrendo uma estrada reta e suponha que possamos medir a distância percorrida por ele (em metros) em intervalos de 1 segundo, como na tabela a seguir:

t = Tempo decorrido (s)	0	2	4	6	8	10
d = Distância (m)	0	2	10	25	43	78

Como primeiro passo para encontrar a velocidade após 4 segundos de movimento, calcularemos qual a velocidade média no intervalo de tempo $4 \leqslant t \leqslant 8$:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

$$= \frac{43 - 10}{8 - 4}$$

$$= 8{,}25 \text{ m/s}$$

Analogamente, a velocidade média no intervalo $4 \leqslant t \leqslant 6$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{25 - 10}{5 - 4} = 7{,}5 \text{ m/s}$$

Nossa intuição é de que a velocidade no instante $t = 4$ não pode ser muito diferente da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 4$. Assim, imaginaremos que a distância percorrida foi medida em intervalos de 0,2 segundo, como na tabela a seguir:

t	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80

Então, podemos calcular, por exemplo, a velocidade média no intervalo de tempo [4, 5]:

$$\text{velocidade média} = \frac{16{,}80 - 10{,}00}{5 - 4} = 6{,}8 \text{ m/s}$$

Os resultados desses cálculos estão mostrados na tabela:

Intervalo de tempo	[4, 6]	[4, 5]	[4, 4,8]	[4, 4,6]	[4, 4,4]	[4, 4,2]
Velocidade média (m/s)	7,5	6,8	6,2	5,75	5,4	5,1

As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 5; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 4$ a velocidade seja cerca de 5 m/s. No Capítulo 2 definimos a velocidade instantânea de um objeto em movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores.

Na Figura 8 mostramos uma representação gráfica do movimento de um carro traçando a distância percorrida como uma função do tempo. Se escrevermos $d = f(t)$, então $f(t)$ é o número de metros percorridos após t segundos. A velocidade média no intervalo de tempo $[4, t]$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

que é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v quando $t = 4$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 4; isto é,

$$v = \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

e, da Equação 2, vemos que isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em P.

Dessa forma, ao resolver o problema da tangente em cálculo diferencial, também estamos resolvendo problemas relativos à velocidade. A mesma técnica aplica-se a problemas relativos à taxa de variação nas ciências naturais e sociais.

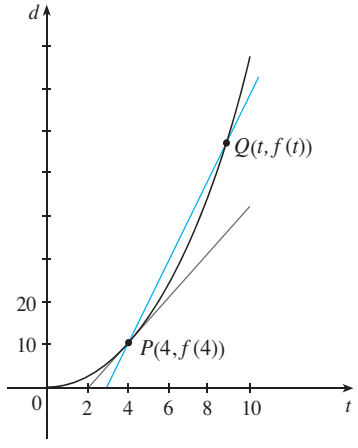


FIGURA 8

O LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

No século V a.C., o filósofo grego Zenão propôs quatro problemas, hoje conhecidos como *Paradoxos de Zenão*, com o intento de desafiar algumas das ideias correntes em sua época sobre espaço e tempo. O segundo paradoxo de Zenão diz respeito a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenão argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga: se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$ a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2. No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3. Esse processo continuaria indefinidamente, e, dessa forma, aparentemente a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.

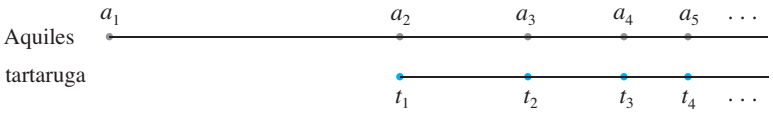


FIGURA 9

Uma forma de explicar esse paradoxo usa a ideia de *sequência*. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, conhecidas como sequências.

Em geral, uma sequência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem definida. Por exemplo, a sequência

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

pode ser descrita pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Podemos visualizar essa sequência marcando seus termos sobre uma reta real, como na Figura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da sequência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Dizemos então que o limite da sequência é 0 e indicamos isso por

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo n suficientemente grande.

O conceito de limite de uma sequência ocorre sempre que usamos a representação decimal de um número real. Por exemplo, se

$$a_1 = 3{,}1$$

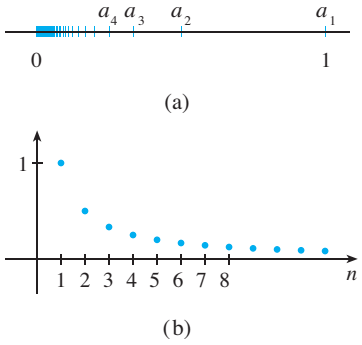


FIGURA 10

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 3{,}14 \\
a_3 &= 3{,}141 \\
a_4 &= 3{,}1415 \\
a_5 &= 3{,}14159 \\
a_6 &= 3{,}141592 \\
a_7 &= 3{,}1415926 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

então $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$

Os termos nessa sequência são aproximações racionais de π.

Vamos voltar ao paradoxo de Zenão. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga formam as sequências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, nas quais $a_n < t_n$ para todo n. Podemos mostrar que ambas as sequências têm o mesmo limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

É precisamente nesse ponto p que Aquiles ultrapassa a tartaruga.

A SOMA DE UMA SÉRIE

Outro paradoxo de Zenão, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: "Uma pessoa em certo ponto de uma sala não pode caminhar até a parede. Para tanto ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante, e então novamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim". (Veja a Figura 11.)

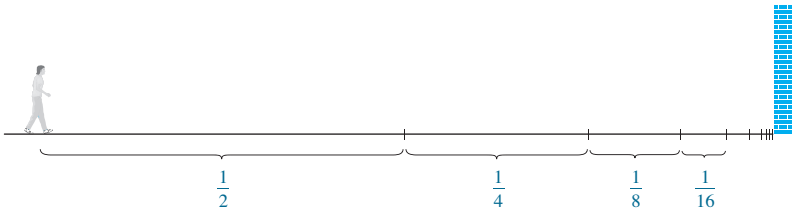


FIGURA 11

Como, naturalmente, sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \qquad \boxed{3}$$

Zenão argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém, há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0{,}\overline{3} = 0{,}3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

dessa forma, em algum sentido, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais geralmente, se d_n denotar o n-ésimo algarismo na representação decimal de um número, então

$$0,d_1d_2\,d_3\,d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Retornando à série da Equação 3, denotamos por s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0{,}5\\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0{,}75\\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0{,}875\\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0{,}9375\\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0{,}96875\\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0{,}984375\\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0{,}9921875\\
&\vdots\\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0{,}99902344\\
&\vdots\\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0{,}99998474
\end{aligned}$$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode ser mostrado que tomando n suficientemente grande (isto é, adicionando um número suficientemente grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece então razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

No Capítulo 11 discutiremos mais essas ideias. Usaremos então a ideia de Newton de combinar séries infinitas com cálculo diferencial e integral.

RESUMO

Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o cálculo à parte de outras áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites.

Depois de inventar sua versão de cálculo, *sir* Isaac Newton a usou para explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje, o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa

de como aumenta o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo que sai do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas. Vamos explorar neste livro algumas dessas aplicações do cálculo.

Para transmitir uma noção da potência dessa matéria, finalizaremos esta apresentação com uma lista de perguntas que você poderá responder usando o cálculo:

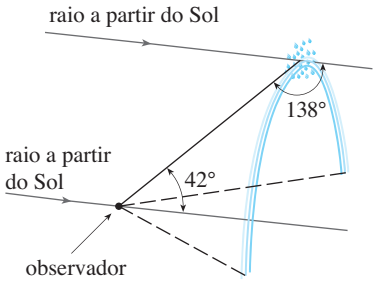
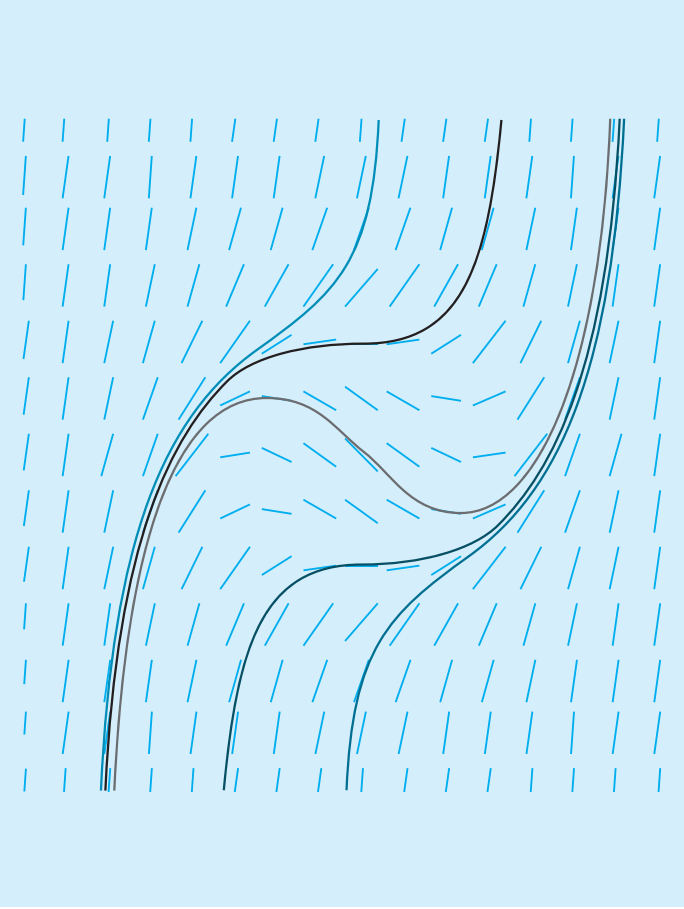


FIGURA 12

1. Como você explicaria o fato, ilustrado na Figura 12, de que o ângulo de elevação de um observador até o ponto mais alto em um arco-íris é 42º?
2. Como você poderia explicar as formas das latas nas prateleiras de um supermercado?
3. Qual o melhor lugar para se sentar em um cinema?
4. A qual distância de um aeroporto um piloto deve começar a descida?
5. Como podemos juntar curvas para desenhar formas que representam letras em uma impressora a *laser*?
6. Onde um jogador deveria se posicionar para apanhar uma bola de beisebol lançada por outro jogador e mandá-la para a *home plate*?
7. Uma bola lançada para cima leva mais tempo para atingir sua altura máxima ou para cair de volta à sua altura original?
8. Como você pode explicar o fato de planetas e satélites se moverem em órbitas elípticas?
9. Como você pode distribuir o escoamento de água entre as turbinas de uma usina hidrelétrica de modo a maximizar a energia total produzida?
10. Se uma bola de gude, uma bola de *squash*, uma barra de aço e um cano de ferro rolarem por uma encosta, qual deles atingirá o fundo primeiro?

9

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS



Os campos de direções nos permitem esboçar soluções de equações diferenciais sem fórmulas explícitas.

Talvez a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando os físicos ou cientistas sociais usam o cálculo, em geral o fazem para analisar uma equação diferencial surgida no processo de modelagem de algum fenômeno que estão estudando. Embora seja frequentemente impossível encontrar uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial, veremos que as aproximações gráficas e numéricas fornecem a informação necessária.

■ Agora é uma boa hora para ler ou reler a discussão de modelagem matemática na página 15, no Volume 1.

Na descrição do processo de modelagem na Seção 1.2, no Volume I, falamos a respeito da formulação de um modelo matemático de um problema real por meio de raciocínio intuitivo sobre o fenômeno ou por meio de uma lei física fundamentada em evidência experimental. O modelo matemático frequentemente tem a forma de uma *equação diferencial*, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Isso não surpreende, porque em um problema real normalmente notamos que mudanças ocorrem e queremos predizer o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam. Vamos começar examinando vários exemplos de como as equações diferenciais aparecem quando modelamos um fenômeno físico.

MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Um dos modelos para o crescimento de uma população baseia-se na hipótese de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Essa hipótese é razoável para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade a doenças).

Vamos identificar e dar nomes às variáveis nesse modelo:

t = tempo (a variável independente)

P = número de indivíduos da população (a variável dependente)

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt. Assim, nossa hipótese de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população é escrita como a equação

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{1}$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A Equação 1 é nosso primeiro modelo para o crescimento populacional; é uma equação diferencial porque contém uma função desconhecida P e sua derivada dP/dt.

Tendo formulado um modelo, vamos olhar para suas consequências. Se desconsiderarmos uma população nula, então $P(t) > 0$ para todo t. Dessa forma, se $k > 0$, então a Equação 1 mostra que $P'(t) > 0$ para todo t. Isso significa que a população está sempre aumentando. De fato, quando $P(t)$ aumenta, a Equação 1 mostra que dP/dt torna-se maior. Em outras palavras, a taxa de crescimento aumenta quando a população cresce.

A Equação 1 pede que encontremos uma função cuja derivada seja um múltiplo constante dela própria. Sabemos do Capítulo 3, no Volume 1, que as funções exponenciais têm esta propriedade. De fato, se fizermos $P(t) = Ce^{kt}$, então

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Portanto, qualquer função exponencial da forma $P(t) = Ce^{kt}$ é uma solução da Equação 1. Quando estudarmos essa equação em detalhes na Seção 9.4, veremos que não existe outra solução.

Se fizermos C variar em todos os números reais, obtemos a *família* de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ cujos gráficos são mostrados na Figura 1. Mas as populações têm apenas valores positivos e, assim, estamos interessados somente nas soluções com $C > 0$. E estamos provavelmente preocupados apenas com valores de t maiores que o instante inicial $t = 0$. A

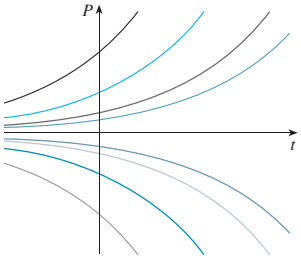


FIGURA 1
A família de soluções de $dP/dt = kP$

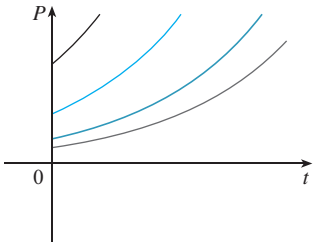


FIGURA 2
A família de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ com $C > 0$ e $t \geqslant 0$

Figura 2 mostra as soluções com significado físico. Fazendo $t = 0$, temos $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que a constante C acaba sendo a população inicial, $P(0)$.

A Equação 1 é apropriada para a modelagem do crescimento populacional sob condições ideais, mas devemos reconhecer que um modelo mais realista deveria refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. Muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população se estabiliza quando ela se aproxima de sua *capacidade de suporte* K (ou diminui em direção a K se ela excede o valor de K). Para um modelo considerar ambos os casos, fazemos duas hipóteses:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ se P for pequeno (inicialmente a taxa de crescimento é proporcional a P).
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ se $P > K$ (P diminui se exceder K).

Uma expressão simples que incorpora ambas as hipóteses é dada pela equação

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{2}$$

Observe que, se P é pequeno quando comparado com K, então P/K está próximo de 0 e, portanto, $dP/dt \approx kP$. Se $P > K$, então $1 - P/K$ é negativo e assim $dP/dt < 0$.

A Equação 2 é chamada *equação diferencial logística* e foi proposta pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840 como um modelo para o crescimento populacional mundial. Desenvolveremos técnicas que nos permitam encontrar soluções explícitas da equação logística na Seção 9.4, mas, enquanto isso, podemos deduzir as características qualitativas das soluções diretamente da Equação 2. Primeiro, observamos que as funções constantes $P(t) = 0$ e $P(t) = K$ são soluções, porque, em qualquer um dos casos, um dos fatores do lado direito da Equação 2 é zero. (Isso certamente tem sentido físico: se a população for 0 ou estiver na capacidade de suporte, permanecerá dessa maneira.) Essas duas soluções constantes são denominadas *soluções de equilíbrio*.

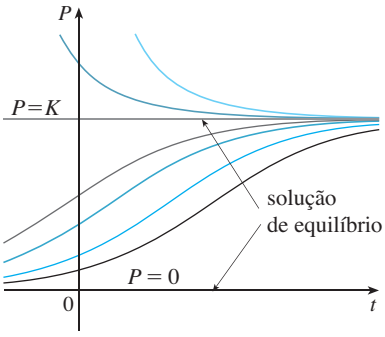


FIGURA 3
Soluções da equação logística

Se a população inicial $P(0)$ estiver entre 0 e K, então o lado direito da Equação 2 é positivo; assim, $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Se a população ultrapassa a capacidade de suporte ($P > K$), então $1 - P/K$ é negativo; assim $dP/dt < 0$ e a população diminui. Observe que, em qualquer um dos casos, se a população se aproxima da capacidade de suporte ($P \to K$), então $dP/dt \to 0$, o que significa que a população se estabiliza. Dessa forma, esperamos que as soluções da equação diferencial logística tenham gráficos que se pareçam com aqueles da Figura 3. Observe que os gráficos se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = K$.

UM MODELO PARA O MOVIMENTO DE UMA MOLA

Vamos olhar agora para um modelo físico. Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola vertical (como na Figura 4). Na Seção 6.4, no Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

$$\text{força elástica} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada *constante da mola*). Se ignorarmos qualquer força externa de resistência (por causa da resistência do ar ou do atrito), então, pela segunda Lei de Newton (força é igual à massa vezes a aceleração), temos

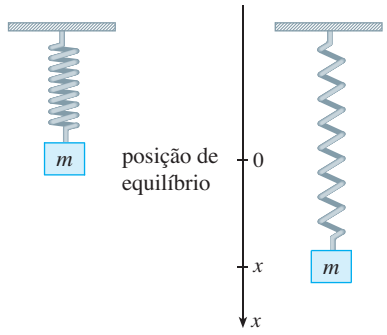


FIGURA 4

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Esse é um exemplo do que chamamos *equação diferencial de segunda ordem*, porque envolve derivadas segundas. Vamos ver o que podemos deduzir da solução diretamente da equação. Podemos reescrever a Equação 3 na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que diz que a derivada segunda de x é proporcional a x, mas tem o sinal oposto. Conhecemos duas funções com essa propriedade, as funções seno e cosseno. De fato, todas as soluções da Equação 3 podem ser escritas como combinações de certas funções seno e cosseno (veja o Exercício 4). Isso não é surpreendente; esperamos que a mola oscile em torno de sua posição de equilíbrio e, assim, é natural pensar que funções trigonométricas estejam envolvidas.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GERAIS

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. Dessa maneira, as Equações 1 e 2 são de primeira ordem e a Equação 3 é de segunda ordem. Em todas as três equações, a variável independente é chamada t e representa o tempo, mas, em geral, a variável independente não precisa representar o tempo. Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$y' = xy \tag{4}$$

entendemos que y seja uma função desconhecida de x.

Uma função f é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo.

Quando nos pedem para *resolver* uma equação diferencial, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma

$$y' = f(x)$$

Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Mas, em geral, resolver uma equação diferencial não é uma tarefa fácil. Não existe uma técnica sistemática que nos permita resolver todas as equações diferenciais. Na Seção 9.2, contudo, veremos como esboçar os gráficos das soluções mesmo quando não temos uma fórmula explícita. Também aprenderemos como achar aproximações numéricas para as soluções.

EXEMPLO 1 Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUÇÃO Usamos a Regra do Quociente para derivar a expressão em relação a y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é solução da equação diferencial. □

■ A Figura 5 ilustra os gráficos de sete membros da família do Exemplo 1. A equação diferencial mostra que se $y \approx \pm 1$, então $y' \approx 0$. Isso é visualizado pelo achatamento dos gráficos próximo de $y = 1$ e $y = -1$.

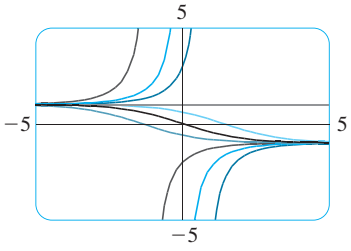


FIGURA 5

Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a *solução geral*) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.

Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0). Fisicamente, isso corresponde a medir o estado de um sistema no instante t_0 e usar a solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

EXEMPLO 2 Encontre uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do Exemplo 1, obtemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c, temos $2 - 2c = 1 + c$, o que fornece $c = \frac{1}{3}$. Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

□

9.1 EXERCÍCIOS

1. Mostre que $y = x - x^{-1}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$.

2. Verifique que $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ é uma solução do problema de valor inicial

$$y' + (\operatorname{tg} x)\, y = \cos^2 x \qquad y(0) = -1$$

no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

3. (a) Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação diferencial $2y'' + y' - y = 0$?

(b) Se r_1 e r_2 são os valores que você encontrou na parte (a), mostre que todo membro da família de funções $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ também é uma solução.

4. (a) Para quais valores de k a função $y = \cos kt$ satisfaz a equação diferencial $4y'' = -25y$?

(b) Para estes valores de k, verifique que todo membro da família de funções $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ também é uma solução.

5. Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$?

(a) $y = e^t$ (b) $y = e^{-t}$

(c) $y = te^{-t}$ (d) $y = t^2 e^{-t}$

6. (a) Mostre que cada membro da família de funções $y = Ce^{x^2/2}$ é uma solução da equação diferencial $y' = xy$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando vários membros da família de soluções na mesma tela.

(c) Encontre a solução da equação diferencial $y' = xy$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 5$.

(d) Encontre a solução da equação diferencial $y' = xy$ que satisfaça a condição inicial $y(1) = 2$.

7. (a) O que você pode dizer da solução da equação $y' = -y^2$ apenas olhando a equação diferencial?

(b) Verifique que todos os membros da família $y = 1/(x + C)$ são soluções da equação na parte (a).

(c) Você pode pensar em uma solução da equação diferencial $y' = -y^2$ que não seja membro da família na parte (b)?

(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0{,}5$$

8. (a) O que você pode dizer sobre o gráfico de uma solução da equação $y' = xy^3$ quando x está próximo de 0? E se x for grande?

(b) Verifique que todos os membros da família $y = (c - x^2)^{-1/2}$ são soluções da equação diferencial $y' = xy^3$.

(c) Trace vários membros da família de soluções na mesma tela. Os gráficos confirmam o que você predisse na parte (a)?

(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}2P\left(1 - \frac{P}{4\,200}\right)$$

(a) Para quais valores de P a população está aumentando?

(b) Para quais valores de P a população está diminuindo?

(c) Quais são as soluções de equilíbrio?

10. A função $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

(a) Quais são as soluções constantes da equação?

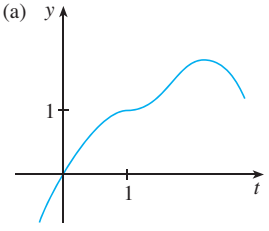
(b) Para quais valores de y a função está aumentando?

(c) Para quais valores de y a função está diminuindo?

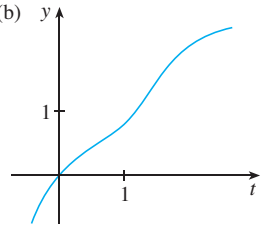
11. Explique por que as funções cujos gráficos são dados a seguir *não podem* ser soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$

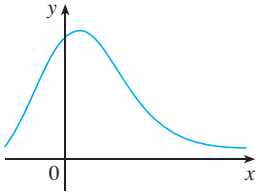
(a)



(b)



12. A função, cujo gráfico é dado a seguir, é uma solução de uma das seguintes equações diferenciais. Decida qual é a equação correta e justifique sua resposta.



A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

13. Os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as **curvas de aprendizado**. Uma curva de aprendizado é o gráfico de uma função $P(t)$, o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. A derivada dP/dt representa a taxa na qual o desempenho melhora.

(a) Quando você acha que P aumenta mais rapidamente? O que acontece a dP/dt quando t aumenta? Explique.

(b) Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, explique a razão pela qual a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P), \qquad k \text{ uma constante positiva}$$

é um modelo razoável para o aprendizado.

(c) Faça um esboço de uma possível solução da equação diferencial.

14. Suponha que você tenha acabado de servir uma xícara de café recém-coado com uma temperatura de 95 °C em uma sala onde a temperatura é de 20 °C.

(a) Quando você acha que o café esfria mais rapidamente? O que acontece com a taxa de resfriamento com o passar do tempo? Explique.

(b) A **Lei de Resfriamento de Newton** afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Resfriamento de Newton nessa situação particular. Qual a condição inicial? Tendo em vista sua resposta na parte (a), você acha que essa equação diferencial é um modelo apropriado para o resfriamento?

(c) Faça um esboço para o gráfico da solução do problema de valor inicial na parte (b).

9.2 CAMPOS DE DIREÇÕES E O MÉTODO DE EULER

Infelizmente é impossível resolver a maioria das equações diferenciais de forma a obter uma fórmula explícita para a solução. Nesta seção, mostraremos que, mesmo sem uma solução explícita, podemos ainda aprender muito sobre a solução por meio de uma abordagem gráfica (campos de direções) ou de uma abordagem numérica (método de Euler).

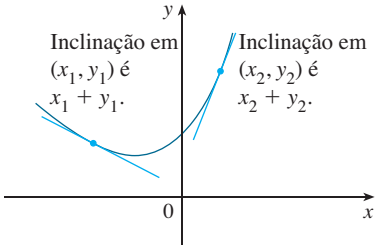


FIGURA 1
Uma solução de $y' = x + y$

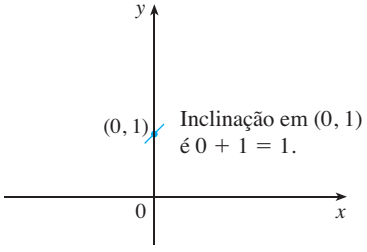


FIGURA 2
Início da curva solução que passa por (0, 1)

CAMPOS DE DIREÇÕES

Suponha que nos peçam para esboçar o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

Não conhecemos uma fórmula para a solução, então como é possível que esbocemos seus gráficos? Vamos pensar sobre o que uma equação diferencial significa. A equação $y' = x + y$ nos diz que a inclinação em qualquer ponto (x, y) no gráfico (chamado *curva solução*) é igual à soma das coordenadas x e y no ponto (veja a Figura 1). Em particular, como a curva passa pelo ponto (0, 1), sua inclinação ali deve ser $0 + 1 = 1$. Assim, uma pequena porção da curva solução próxima ao ponto (0, 1) parece um segmento de reta curto que passa por (0, 1) com inclinação 1 (veja a Figura 2).

Como um guia para esboçar o restante da curva, vamos desenhar pequenos segmentos de reta em diversos pontos (x, y) com inclinação $x + y$. O resultado, denominado *campo de direções*, é mostrado na Figura 3. Por exemplo, o segmento de reta no ponto (1, 2) tem inclinação $1 + 2 = 3$. O campo de direções nos permite visualizar o formato geral das curvas solução pela indicação da direção na qual as curvas prosseguem em cada ponto.

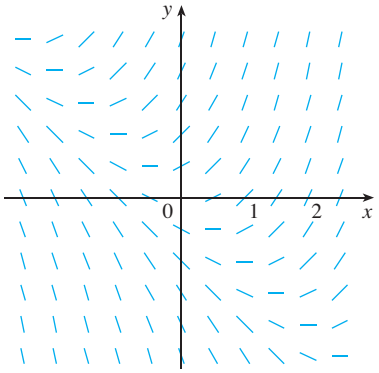


FIGURA 3
Campo de direções para $y' = x + y$

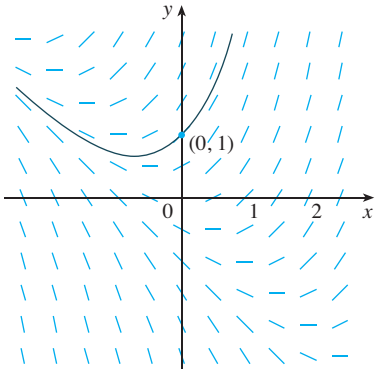


FIGURA 4
A curva solução que passa por (0, 1)

Agora, podemos esboçar a curva solução pelo ponto (0, 1), seguindo o campo de direções como na Figura 4. Observe que desenhamos a curva de modo a torná-la paralela aos segmentos de reta próximos.

Em geral, suponha que tenhamos uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$y' = F(x, y)$$

onde $F(x, y)$ é alguma expressão em x e y. A equação diferencial diz que a inclinação da curva solução no ponto (x, y) na curva é $F(x, y)$. Se desenharmos pequenos segmentos de reta com inclinação $F(x, y)$ em vários pontos (x, y), o resultado será chamado **campo de direções** (ou **campo de inclinações**). Esses segmentos de reta indicam a direção na qual uma curva solução está seguindo, de modo que o campo de direções nos ajuda a visualizar o formato geral dessas curvas.

EXEMPLO 1

(a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use a parte (a) para esboçar a curva solução que passa pela origem.

SOLUÇÃO

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	. . .
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	. . .

Agora, podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

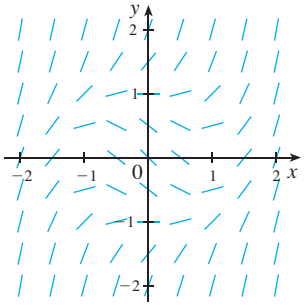


FIGURA 5

(b) Podemos começar na origem e nos mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação -1). Continuamos a desenhar a curva solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos. A curva solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva solução para a esquerda da mesma maneira. □

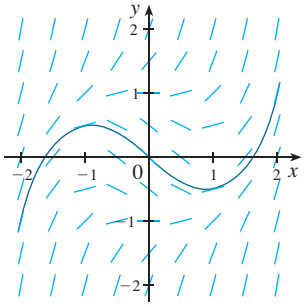


FIGURA 6

Quanto mais segmentos desenharmos no campo de direções, mais clara se tornará a figura. É claro que é tedioso calcular as inclinações e desenhar segmentos de reta para um número muito grande de pontos manualmente, mas os computadores facilitam essa tarefa. A Figura 7 apresenta um campo de direções mais detalhado, desenhado por um computador, para a equação diferencial no Exemplo 1. Isso nos permite desenhar, com uma precisão razoável, as curvas solução exibidas na Figura 8 com intersecções com o eixo y iguais a $-2, -1, 0, 1$ e 2.

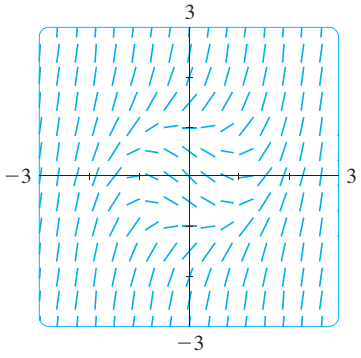


FIGURA 7

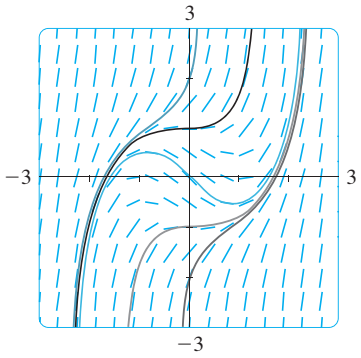


FIGURA 8

Depois disso, vamos ver como campos de direções dão uma percepção das situações físicas. O circuito elétrico simples, mostrado na Figura 9, contém uma força eletromotriz

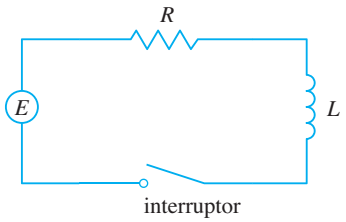


FIGURA 9

(geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms (Ω) e um indutor com indutância de L henrys (H).

A Lei de Ohm fornece a queda na voltagem em razão do resistor como RI. A queda de voltagem por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad \boxed{1}$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem que modela a corrente I no instante t.

EXEMPLO 2 Suponha que no circuito simples da Figura 9 a resistência seja de 12 Ω, a indutância 4 H e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.
(a) Desenhe um campo de direções para a Equação 1 com esses valores.
(b) O que você pode dizer sobre o valor-limite da corrente?
(c) Identifique quaisquer soluções de equilíbrio.
(d) Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, de forma que a corrente comece com $I(0) = 0$, use o campo de direções para esboçar a curva solução.

SOLUÇÃO
(a) Se fizermos $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$ na Equação 1, obteremos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

O campo de direções para essa equação diferencial é mostrado na Figura 10.

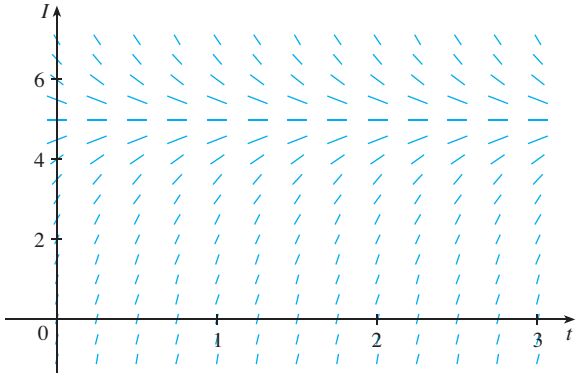


FIGURA 10

(b) Do campo de direções parece que todas as soluções se aproximam do valor 5 A, isto é,

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 5$$

(c) Parece que a função constante $I(t) = 5$ é uma solução de equilíbrio. De fato, podemos verificar isso diretamente da equação diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Se $I(t) = 5$, então o lado esquerdo é $dI/dt = 0$ e o lado direito é $15 - 3(5) = 0$.
(d) Usamos o campo de direções para esboçar a curva solução que passa por $(0, 0)$, como indicado na Figura 11.

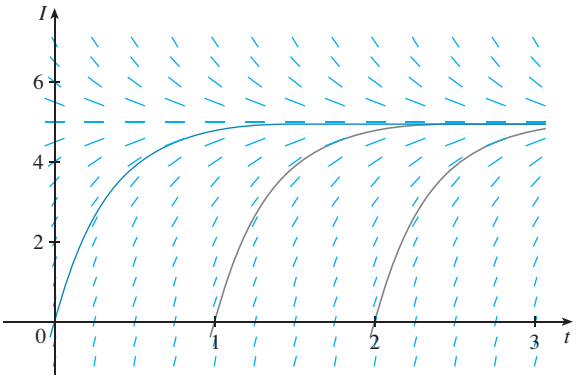


FIGURA 11

Observe que na Figura 10 os segmentos de reta ao longo de qualquer reta horizontal são paralelos. Isso ocorre porque a variável independente t não aparece do lado direito da equação $I' = 15 - 3I$. Em geral, uma equação diferencial do tipo

$$y' = f(y)$$

onde a variável independente não aparece do lado direito é chamada **autônoma**. Para tal equação, as inclinações correspondentes a dois pontos diferentes com a mesma coordenada y devem ser iguais. Isso significa que, se conhecermos uma solução para uma equação diferencial autônoma, então poderemos obter infinitas outras apenas pelo deslocamento do gráfico da solução conhecida para a esquerda ou para a direita. Na Figura 11, mostramos as soluções que resultam do deslocamento da curva solução do Exemplo 2 uma ou duas unidades de tempo (ou seja, segundos) para a direita. Elas correspondem ao fechamento do interruptor quando $t = 1$ ou $t = 2$.

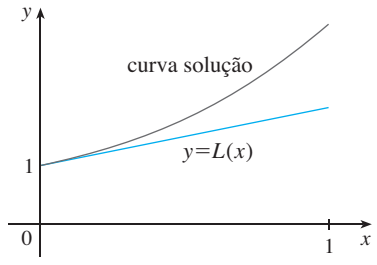


FIGURA 12

Primeira aproximação de Euler

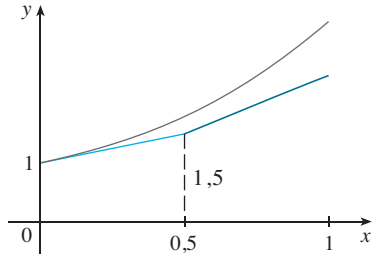


FIGURA 13

Aproximação de Euler com o passo 0,5

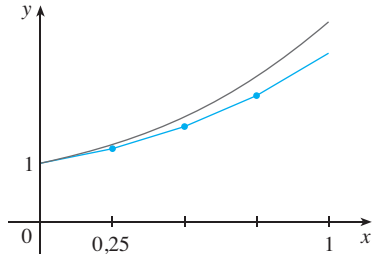


FIGURA 14

Aproximação de Euler com o passo 0,25

MÉTODO DE EULER

A ideia básica por trás dos campos de direções pode ser usada para encontrar aproximações numéricas para as soluções das equações diferenciais. Ilustramos o método no problema de valor inicial que utilizamos para introduzir os campos de direções:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

A equação diferencial nos conta que $y'(0) = 0 + 1 = 1$; dessa forma, a curva solução tem inclinação 1 no ponto $(0, 1)$. Como uma primeira aproximação para a solução, poderíamos usar uma aproximação linear $L(x) = x + 1$. Em outras palavras, poderíamos usar a reta tangente em $(0, 1)$ como uma aproximação grosseira para a curva solução (veja a Figura 12).

A ideia de Euler era melhorar essa aproximação prosseguindo apenas uma pequena distância ao longo da reta tangente e, então, fazer uma correção no meio do caminho, mudando a direção, como indicado pelo campo de direções. A Figura 13 mostra o que acontece se começamos ao longo da reta tangente, mas paramos quando $x = 0{,}5$. (Essa distância horizontal percorrida é denominada *passo*.) Como $L(0{,}5) = 1{,}5$, temos $y(0{,}5) \approx 1{,}5$ e tomamos $(0{,}5, 1{,}5)$ como o ponto de partida para um novo segmento de reta. A equação diferencial nos diz que $y'(0{,}5) = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$, assim, usamos a função linear

$$y = 1{,}5 + 2(x - 0{,}5) = 2x + 0{,}5$$

como uma aproximação para a solução para $x > 0{,}5$ (veja o segmento azul-escuro na Figura 13). Se diminuirmos o passo de 0,5 para 0,25, obteremos uma aproximação de Euler melhor (veja a Figura 14).

Em geral, o método de Euler diz para começarmos no ponto dado pelo valor inicial e prosseguirmos na direção indicada pelo campo de direções. Paramos após um intervalo de tempo, olhamos para a inclinação na nova localização e prosseguimos naquela direção.

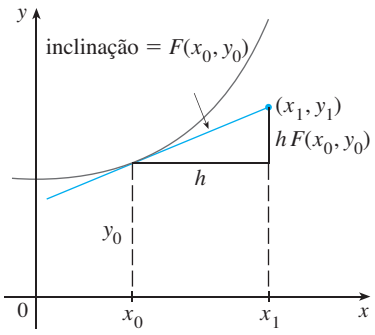


FIGURA 15

Continuamos parando e mudando de direção de acordo com o campo de direções. O método de Euler não produz a solução exata para um problema de valor inicial. Mas, pela diminuição do passo (e, portanto, aumentando o número de correções no meio do caminho), obtemos aproximações sucessivamente melhores para a solução exata. (Compare as Figuras 12, 13 e 14.)

Para o problema de valor inicial de primeira ordem geral $y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$, nosso objetivo é encontrar valores aproximados para a solução em números igualmente espaçados $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots$, onde h é o passo. A equação diferencial nos diz que a inclinação em (x_0, y_0) é $y' = F(x_0, y_0)$, assim a Figura 15 nos mostra que o valor aproximado para a solução quando $x = x_1$ é

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

Analogamente,

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

Em geral,

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

EXEMPLO 3 Use o método de Euler com o passo 0,1 para construir uma tabela de valores aproximados para a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUÇÃO Sabemos que $h = 0{,}1, x_0 = 0, y_0 = 1$ e $F(x, y) = x + y$. Desse modo, temos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0 + 1) = 1{,}1$$
$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22$$
$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1{,}22 + 0{,}1(0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}362$$

Isso significa que, se $y(x)$ é a solução exata, então $y(0{,}3) \approx 1{,}362$.

Prosseguindo com cálculos similares, temos os valores na tabela:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485

□

Para uma tabela com valores mais precisos no Exemplo 3, poderíamos diminuir o tamanho do passo. Contudo, para um número grande de pequenos passos a quantidade de cálculos é considerável e, assim, precisamos programar uma calculadora ou um computador para fazer os cálculos. A seguinte tabela mostra os resultados da aplicação do método de Euler com diminuição do tamanho do passo para o problema de valor inicial do Exemplo 3.

Passo	Estimativa de Euler para y (0,5)	Estimativa de Euler para $y(1)$
0,500	1,500000	2,500000
0,250	1,625000	2,882813
0,100	1,721020	3,187485
0,050	1,757789	3,306595
0,020	1,781212	3,383176
0,010	1,789264	3,409628
0,005	1,793337	3,423034
0,001	1,796619	3,433848

■ Pacotes computacionais que produzem aproximações numéricas para as soluções de equações diferenciais usam métodos que são refinamentos do método de Euler. Embora o método de Euler seja simples, ele não é preciso, mas é a ideia básica na qual os métodos mais precisos se baseiam.

Observe que as estimativas de Euler na tabela parecem estar se aproximando de limites, a saber, os valores verdadeiros de $y(0,5)$ e $y(1)$. A Figura 16 mostra os gráficos das aproximações de Euler com os passos 0,5; 0,25; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01 e 0,005. Eles estão se aproximando da curva solução exata à medida que o passo h se aproxima de 0.

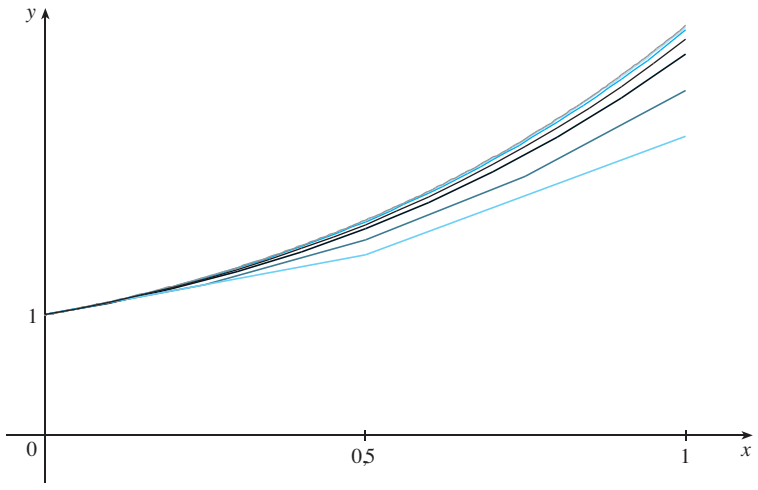


FIGURA 16
Aproximações de Euler tendendo à solução exata

EXEMPLO 4 No Exemplo 2 discutimos um circuito elétrico simples com resistência 12 Ω, indutância 4 H e uma pilha com voltagem 60 V. Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, modelamos a corrente I no instante t pelo problema de valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime a corrente no circuito meio segundo após o fechamento do interruptor.

SOLUÇÃO Usamos o método de Euler com $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ e o passo $h = 0,1$ obtendo:

$$I_1 = 0 + 0,1(15 - 3 \cdot 0) = 1,5$$
$$I_2 = 1,5 + 0,1(15 - 3 \cdot 1,5) = 2,55$$
$$I_3 = 2,55 + 0,1(15 - 3 \cdot 2,55) = 3,285$$
$$I_4 = 3,285 + 0,1(15 - 3 \cdot 3,285) = 3,7995$$
$$I_5 = 3,7995 + 0,1(15 - 3 \cdot 3,7995) = 4,15965$$

Assim, a corrente após 0,5 s é

$$I(0,5) \approx 4,16 \text{ A}$$ □

9.2 EXERCÍCIOS

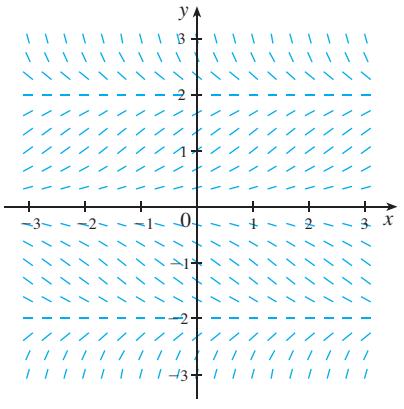
1. É mostrado um campo de direções para a equação diferencial $y' = y(1 - \frac{1}{4}y^2)$.

(a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = -1$

(iii) $y(0) = -3$ (iv) $y(0) = 3$

(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.



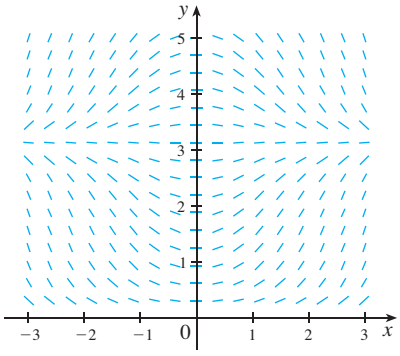
2. É mostrado um campo de direções para a equação diferencial $y' = x \operatorname{sen} y$.

(a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 2$ (iii) $y(0) = \pi$

(iv) $y(0) = 4$ (v) $y(0) = 5$

(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.



3–6 Ligue a equação diferencial a seu campo de direções (I-IV). Dê as razões para sua resposta.

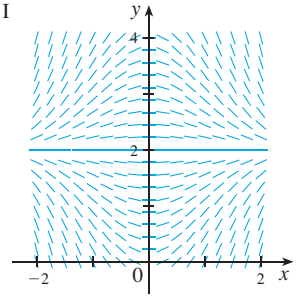
3. $y' = 2 - y$

4. $y' = x(2 - y)$

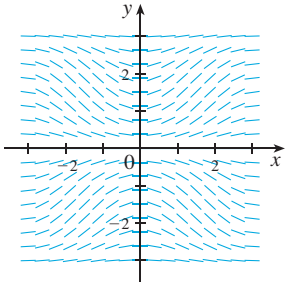
5. $y' = x + y - 1$

6. $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

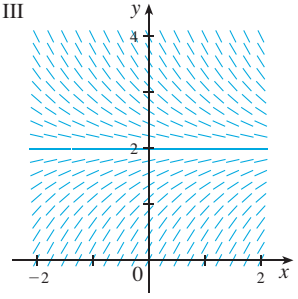
I



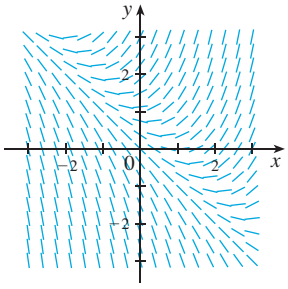
II



III



IV



7. Use o campo de direções II (acima) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2$ (c) $y(0) = -1$

8. Use o campo de direções IV (acima) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 1$

9–10 Esboce o campo de direções para a equação diferencial. Use-o para esboçar três curvas solução.

9. $y' = 1 + y$

10. $y' = x^2 - y^2$

11–14 Esboce o campo de direções das equações diferenciais dadas. Use-os para esboçar a curva solução que passa pelo ponto dado.

11. $y' = y - 2x$ $(1, 0)$

12. $y' = 1 - xy$ $(0, 0)$

13. $y' = y + xy$ $(0, 1)$

14. $y' = x - xy$ $(1, 0)$

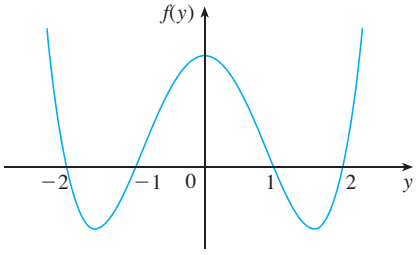
SCA **15–16** Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial dada. Obtenha uma impressão e esboce uma curva solução que passe por $(0, 1)$. Use o SCA para desenhar a curva solução e compare o resultado com seu esboço.

15. $y' = y \operatorname{sen} 2x$

16. $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

SCA **17.** Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial $y' = y^3 - 4y$. Obtenha uma impressão e esboce as soluções que satisfazem a condição inicial $y(0) = c$ para diversos valores de c. Para quais valores de c o limite $\lim_{t \to \infty} y(t)$ existe? Quais são os possíveis valores para esse limite?

18. Faça o esboço de um campo de direções para a equação diferencial autônoma $y' = f(y)$, onde o gráfico de f é como o exibido. Como o comportamento-limite das soluções depende do valor de $y(0)$?



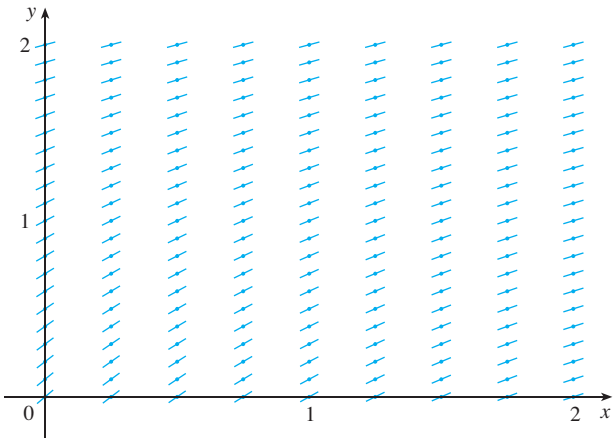
19. (a) Use o método de Euler com cada um dos passos dados para estimar o valor de $y(0,4)$, onde y é a solução do problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.

(i) $h = 0,4$ (ii) $h = 0,2$ (iii) $h = 0,1$

(b) Sabemos que a solução exata do problema de valor inicial na parte (a) é $y = e^x$. Desenhe, o mais precisamente que puder, o gráfico de $y = e^x$, $0 \leq x \leq 0,4$, junto com as aproximações de Euler, usando os passos da parte (a). (Seus esboços devem se parecer com as Figuras 12, 13 e 14.) Use seus esboços para decidir se suas estimativas na parte (a) estão subestimadas ou superestimadas.

(c) O erro no método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Calcule os erros feitos na parte (a) ao usar o método de Euler para estimar o verdadeiro valor de $y(0, 4)$; a saber, $e^{0,4}$. O que acontece com o erro cada vez que o passo cai pela metade?

20. Um campo de direções para uma equação diferencial é apresentado. Desenhe, com uma régua, os gráficos das aproximações de Euler para a curva solução que passa pela origem. Use os passos $h = 1$ e $h = 0,5$. As estimativas de Euler estarão superestimadas ou subestimadas? Explique.



21. Use o método de Euler com o passo 0,5 para calcular os valores aproximados de y, y_1, y_2, y_3 e y_4 da solução do problema de valor inicial $y' = y - 2x, y(1) = 0$.

22. Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = 1 - xy$, $y(0) = 0$.

23. Use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar $y(0, 5)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. (a) Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(1, 4)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = x - xy$, $y(1) = 0$.

(b) Repita a parte (a) com o passo 0,1.

25. (a) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler para calcular $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) $h = 1$ (ii) $h = 0,1$

(iii) $h = 0,01$ (iv) $h = 0,001$

(b) Verifique que $y = 2 + e^{-x^3}$ é a solução exata da equação diferencial.

(c) Encontre os erros ao usar o método de Euler para calcular $y(1)$ com os passos da parte (a). O que acontece com o erro quando o passo é dividido por 10?

26. (a) Programe seu sistema de computação algébrica usando o método de Euler com o passo 0,01 para calcular $y(2)$, onde y é a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

(b) Verifique seu trabalho usando o SCA para desenhar a curva solução.

27. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com resistência de R ohms (Ω). A queda de voltagem no capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

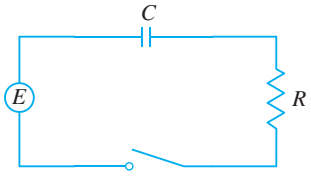
Mas $I = dQ/dt$, de modo que temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5 Ω, a capacitância seja 0,05 F e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.

(a) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.

(b) Qual é o valor-limite da carga?



(c) Existe uma solução de equilíbrio?

(d) Se a carga inicial for $Q(0) = 0$ C, use o campo de direções para esboçar a curva solução.

(e) Se a carga inicial for $Q(0) = 0$ C, use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar a carga depois de meio segundo.

28. No Exercício 14 na Seção 9.1 consideramos uma xícara de café a 95 °C em uma sala com temperatura de 20 °C. Suponha que o café esfrie a uma taxa de 1 °C por minuto quando sua temperatura for 70 °C.

(a) Como fica a equação diferencial nesse caso?

(b) Desenhe um campo de direções e use-o para esboçar a curva solução para o problema de valor inicial. Qual é o valor-limite da temperatura?

(c) Use o método de Euler com o passo $h = 2$ minutos para estimar a temperatura do café após 10 minutos.

9.3 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Observamos as equações diferenciais de primeira ordem de um ponto de vista geométrico (campos de direções) e de um ponto de vista numérico (método de Euler). E do ponto de vista simbólico? Seria bom ter uma fórmula explícita para uma solução de uma equação diferencial. Infelizmente, isso não é sempre possível. Mas, nesta seção, examinaremos um tipo de equação diferencial que *pode* ser resolvida explicitamente.

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de x vezes uma função de y. Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

■ A técnica para resolver as equações diferenciais separáveis foi primeiro usada por James Bernoulli (em 1690) para resolver um problema sobre pêndulos e por Leibniz (em uma carta para Huygens em 1691). John Bernoulli explicou o método geral em um artigo publicado em 1694.

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. De modo equivalente, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver essa equação, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado. Então integramos ambos os lados da equação:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

A Equação 2 define y implicitamente como uma função de x. Em alguns casos, poderemos isolar y e escrevê-lo em termos de x.

Usamos a Regra da Cadeia para justificar este procedimento: se h e g satisfazem (2), então,

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

logo,

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

e

$$h(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

EXEMPLO 1

(a) Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Ache a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

■ A Figura 1 ilustra o gráfico de vários membros da família de soluções da equação diferencial do Exemplo 1. A solução do problema com valor inicial da parte (b) é mostrada em azul.

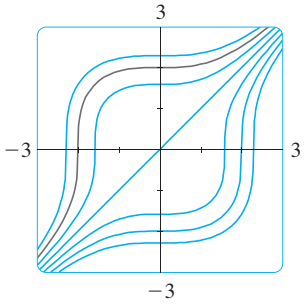


FIGURA 1

SOLUÇÃO

(a) Escrevemos a equação na forma diferencial e integramos os dois lados:

$$y^2\,dy = x^2\,dx$$
$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$
$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$.)

Isolando y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

onde $K = 3C$. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K.)
(b) Se fizermos $x = 0$ na equação geral da parte (a), temos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$, devemos fazer $\sqrt[3]{K} = 2$ e assim temos $K = 8$.

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$ □

EXEMPLO 2 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUÇÃO Escrevendo a equação em uma forma diferencial e integrando ambos os lados, temos

$$(2y + \cos y)\, dy = 6x^2\, dx$$

$$\int (2y + \cos y)\, dy = \int 6x^2\, dx$$

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C \qquad (3)$$

onde C é uma constante. A Equação 3 fornece uma solução geral implícita. Nesse caso é impossível resolver a equação para expressar y explicitamente como uma função de x. □

■ Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar as curvas definidas por equações implícitas. A Figura 2 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções da equação diferencial no Exemplo 2. Olhando as curvas da esquerda para a direita, os valores de C são 3, 2, 1, 0, −1, −2 e −3.

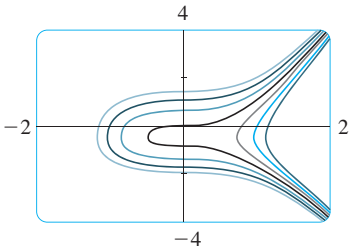


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Resolva a equação $y' = x^2 y$.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

■ Se uma solução y é uma função que satisfaz $y(x) \neq 0$ para algum x, segue de um teorema de existência e unidade para soluções de equações diferenciais que $y(x) \neq 0$ para todo x.

Se $y \neq 0$, podemos reescrevê-la em uma notação diferencial e integrá-la:

$$\frac{dy}{y} = x^2\, dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\, dx$$

$$\ln |y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Essa equação define y implicitamente como uma função de x. Mas, nesse caso, podemos resolver explicitamente para y, como a seguir

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

de modo que

$$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Podemos verificar facilmente que a função $y = 0$ também é uma solução da equação diferencial dada. Dessa forma, podemos escrever a solução geral na forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

onde A é uma constante arbitrária ($A = e^C$ ou $A = -e^C$ ou $A = 0$). □

■ A Figura 3 mostra o campo de direções para a equação diferencial do Exemplo 3. Compare-o com a Figura 4, na qual utilizamos a equação $y = Ae^{x^3/3}$ para traçar as soluções com diversos valores diferentes de A. Se usar os campos de direções para esboçar as curvas solução que interceptam o eixo y em 5, 2, 1, 1 e 2, você obterá as curvas da Figura 4.

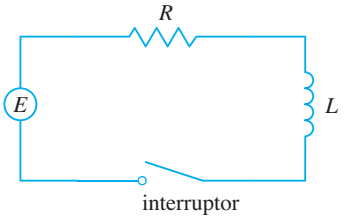


FIGURA 5

■ A Figura 6 revela como a solução no Exemplo 4 (a corrente) se aproxima de seu valor-limite. A comparação com a Figura 11, na Seção 9.2 mostra que pudemos desenhar uma curva solução bem precisa a partir do campo de direções.

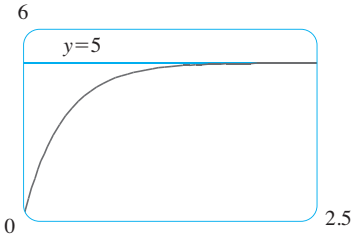


FIGURA 6

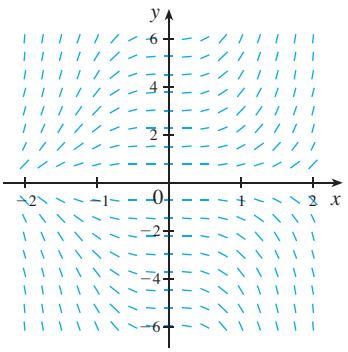


FIGURA 3

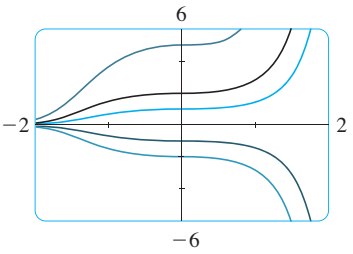


FIGURA 4

EXEMPLO 4 Na Seção 9.2, modelamos a corrente $I(t)$ no circuito elétrico mostrado na Figura 5 pela equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é12 Ω, a indutância é 4 H, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e o interruptor é ligado quando $t = 0$. Qual o valor-limite da corrente?

SOLUÇÃO Com $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$, a equação torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

e o problema de valor inicial é

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Reconhecemos essa equação como separável e a resolvemos da seguinte forma:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos $5 - \frac{1}{3}A = 0$, assim $A = 15$ e a solução é

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

A corrente-limite, em ampères, é

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$ □

TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS

Uma **trajetória ortogonal** de uma família de curvas é uma curva que intercepta cada curva da família ortogonalmente, isto é, com ângulo reto (veja a Figura 7). Por exemplo, cada membro da família $y = mx$ de retas que passa pela origem é uma trajetória ortogonal da

família $x^2 + y^2 = r^2$ de círculos concêntricos com o centro na origem (veja a Figura 8). Dizemos que as duas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

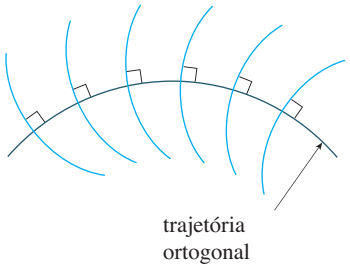


FIGURA 7

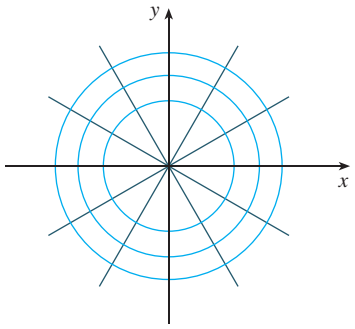


FIGURA 8

EXEMPLO 5 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas $x = ky^2$, onde k é uma constante arbitrária.

SOLUÇÃO As curvas $x = ky^2$ formam uma família de parábolas cujo eixo de simetria é o eixo x. A primeira etapa é encontrar uma equação diferencial única que seja satisfeita por todos os membros da família. Se derivarmos $x = ky^2$, obteremos

$$1 = 2ky\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Essa é uma equação diferencial que depende de k, mas precisamos de uma equação que seja válida para todos os valores k simultaneamente. Para eliminar k observamos que, da equação geral da parábola dada $x = ky^2$, temos $k = x/y^2$, e assim a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\,\dfrac{x}{y^2}\,y}$$

ou,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Isso significa que a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) em uma das parábolas é $y' = y/(2x)$. Em uma trajetória ortogonal, a inclinação da reta tangente deve ser o oposto do inverso dessa inclinação. Portanto, as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

Essa equação diferencial é separável e a resolvemos como segue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C \tag{4}$$

onde C é uma constante arbitrária positiva. Então, as trajetórias ortogonais são a família de elipses dada pela Equação 4 e esboçada na Figura 9. □

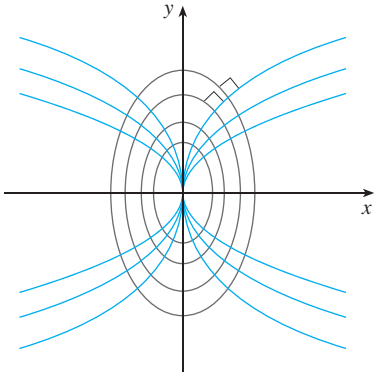


FIGURA 9

As trajetórias ortogonais ocorrem em vários ramos da física. Por exemplo, em um campo eletrostático, as linhas de força são ortogonais às linhas de potencial constante. Também as linhas de corrente em aerodinâmica são trajetórias ortogonais às curvas de velocidade constante.

PROBLEMAS DE MISTURAS

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denota a quantidade de substância no tanque no instante t, então $y'(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável. Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outras.

EXEMPLO 6 Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5 000 L de água. Água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

SOLUÇÃO Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Foi-nos dado que $y(0) = 20$ e queremos encontrar $y(30)$. Fazemos isso encontrando uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$. Observe que dy/dt é a taxa de variação da quantidade de sal, assim,

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída})$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$\text{taxa de entrada} = \left(0{,}03 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}75 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

O tanque sempre contém 5 000 L de líquido, então a concentração no tempo t é $y(t)/5\,000$ (medida em quilogramas por litro). Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{5\,000} \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200} \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Então, da Equação 5, temos

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtemos

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

■ A Figura 10 mostra o gráfico da função $y(t)$ do Exemplo 6. Observe que, com o passar do tempo, a quantidade de sal se aproxima de 150 kg.

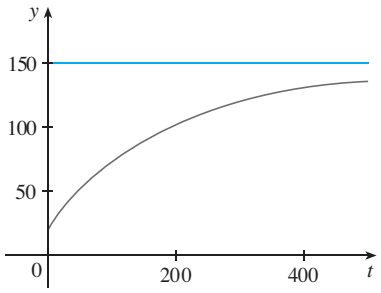


FIGURA 10

Como $y(0) = 20$, temos $-\ln 130 = C$, logo

$$-\ln |150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Portanto,

$$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Como $y(t)$ é contínua, $y(0) = 20$ e o lado direito nunca é zero, deduzimos que $150 - y$ é sempre positiva. Então, $|150 - y| = 150 - y$ e daí

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1 \text{ kg}$$ □

9.3 EXERCÍCIOS

1-10 Resolva a equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$

3. $(x^2 + 1)y' = xy$

4. $y' = y^2 \operatorname{sen} x$

5. $(1 + \operatorname{tg} y)\, y' = x^2 + 1$

6. $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{1 + \sqrt{r}}{1 + \sqrt{u}}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1 + y^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec\theta}$

9. $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11-18 Ache a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada.

11. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \qquad y(1) = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \cos x}{1 + y^2}, \qquad y(0) = 1$

13. $x \cos x = (2y + e^{3y})y', \qquad y(0) = 0$

14. $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, \qquad P(1) = 2$

15. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \qquad u(0) = -5$

16. $xy' + y = y^2, \qquad y(1) = -1$

17. $y' \operatorname{tg} x = a + y, \qquad y(\pi/3) = a, \qquad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = KL^2 \ln t, \qquad L(1) = -1$

19. Encontre uma equação da curva que passe pelo ponto (0, 1) e cuja inclinação em (x, y) seja xy.

20. Encontre a função f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ e $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resolva a equação diferencial $y' = x + y$, usando a mudança de variáveis $u = x + y$.

22. Resolva a equação diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$, usando a mudança de variáveis $v = y/x$.

23. (a) Resolva a equação diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.
(b) Resolva o problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$ e faça um gráfico de solução.
(c) O problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$ tem solução? Explique.

24. Resolva a equação $e^{-y}y' + \cos x = 0$ e trace vários membros da família de soluções. Como a curva solução muda quando a constante C varia?

25. Resolva o problema de valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, e trace a solução (se seu SCA fizer gráficos implícitos).

26. Resolva a equação $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ e trace vários membros da família de soluções (se seu SCA fizer gráficos implícitos). Como muda a curva solução quando a constante C varia?

27-28
(a) Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial. Imprima-o e esboce algumas curvas solução sem resolver a equação diferencial.
(b) Resolva a equação diferencial.
(c) Use o SCA para desenhar vários membros da família de soluções obtida na parte (b). Compare com as curvas da parte (a).

27. $y' = 1/y$

28. $y' = x^2/y$

29-32 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas. Usando uma calculadora (ou um computador), desenhe vários membros de cada família na mesma tela.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 27, na Seção 9.2, para encontrar uma expressão para a carga no instante t. Encontre o valor-limite da carga.

34. No Exercício 28, na Seção 9.2, discutimos uma equação diferencial que modela a temperatura de uma xícara de café a 95 °C em uma sala a 20 °C. Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para a temperatura do café no instante t.

35. No Exercício 13, na Seção 9.1, formulamos um modelo para o aprendizado na forma da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde $P(t)$ mede o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade depois de um tempo de treinamento t, M é o nível máximo de desempenho e k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma expressão para $P(t)$. Qual é o limite dessa expressão?

36. Em uma reação química elementar, as moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto C: $\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$. A lei de ação das massas afirma que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações de A e B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Veja o Exemplo 4, na Seção 3.7, no Volume I.) Então, se as concentrações iniciais forem $[\mathrm{A}] = a$ mols/L e $[\mathrm{B}] = b$ mols/L e escrevermos $x = [\mathrm{C}]$, então teremos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

(a) Assumindo que $a \neq b$, encontre x como uma função de t. Use o fato de que a concentração inicial de C é 0.

(b) Encontre $x(t)$ assumindo que $a = b$. Como essa expressão para $x(t)$ é simplificada se soubermos que $[\mathrm{C}] = \frac{1}{2}a$ depois de 20 segundos?

37. Em contraste com a situação do Exercício 36, as experiências mostram que a reação $\mathrm{H}_2 + \mathrm{Br}_2 \rightarrow 2\,\mathrm{HBr}$ satisfaz a lei de troca

$$\frac{d[\mathrm{Hbr}]}{dt} = k[\mathrm{H}_2][\mathrm{Br}_2]^{1/2}$$

e, portanto, para essa reação a equação diferencial torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

onde $x = [\mathrm{HBr}]$ e a e b são concentrações iniciais de hidrogênio e bromo.

(a) Escreva x como uma função de t no caso em que $a = b$. Use o fato de que $x(0) = 0$.

(b) Se $a > b$, escreva t como uma função de x. (*Sugestão*: ao efetuar a integração, faça a substituição $u = \sqrt{b - x}$.)

38. Uma esfera com raio de 1 m está a uma temperatura de 15 °C. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de 2 m e temperatura de 25 °C. A temperatura $T(r)$ a uma distância r do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S = dT/dr$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem. Encontre uma expressão para a temperatura $T(r)$ entre as duas esferas.

39. Uma solução de glicose é administrada por via intravenosa na corrente sanguínea a uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada, ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então, um modelo para a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea é

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Suponha que a concentração no instante $t = 0$ é C_0. Determine a concentração em um instante qualquer t, resolvendo a equação diferencial.

(b) Assumindo que $C_0 < r/k$, calcule $\lim_{t \to \infty} C(t)$ e interprete sua resposta.

40. Um pequeno país tem \$ 10 bilhões em papel-moeda em circulação e a cada dia \$ 50 milhões chegam aos bancos daquele lugar. O governo decide introduzir uma nova moeda, fazendo com que os bancos troquem notas velhas por novas sempre que a moeda antiga entrar nos bancos. Denote por $x = x(t)$ a quantidade de moeda nova em circulação no instante t, com $x(0) = 0$.

(a) Formule um modelo matemático na forma de um problema de valor inicial que represente o "fluxo" da nova moeda em circulação.

(b) Resolva o problema de valor inicial encontrado na parte (a).

(c) Quanto tempo levará para a nova moeda representar 90% da moeda em circulação?

41. Um tanque contém 1 000 L de água salgada com 15 kg de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quanto sal há no tanque (a) após t minutos e (b) após 20 minutos?

42. O ar em uma sala com volume 180 m^3 contém 0,15% de dióxido de carbono inicialmente. Ar mais fresco com apenas 0,05 % de dióxido de carbono entra na sala a uma taxa de 2 m^3/min e o ar misturado sai na mesma taxa. Encontre a porcentagem de dióxido de carbono na sala como uma função do tempo. O que acontece a longo prazo?

43. Um barril com 2 000 L de cerveja contém 4% de álcool (por volume). Cerveja com 6% de álcool é bombeada para dentro do barril a uma taxa de 20 L/min e a mistura é bombeada para fora do barril à mesma taxa. Qual é a porcentagem de álcool depois de uma hora?

44. Um tanque contém 1 000 L de água pura. Água salgada com 0,05 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 5 L/min. Água salgada com 0,04 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 L/min. Quanto sal há no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de uma hora?

45. Quando uma gota de chuva cai, ela aumenta de tamanho; assim, sua massa em um instante t é uma função de t, $m(t)$. A taxa do aumento da massa é $km(t)$ para alguma constante positiva k. Quando aplicamos a Lei do Movimento de Newton à gota de chuva, obtemos $(mv)' = gm$, onde v é a velocidade da gota de chuva (dirigida para baixo) e g é a aceleração da gravidade. A velocidade terminal da gota de chuva é $\lim_{t \to \infty} v(t)$. Encontre uma expressão para a velocidade terminal em termos de g e k.

46. Um objeto de massa m está se movendo horizontalmente por um meio que resiste ao movimento com uma força que é uma função da velocidade; isto é,

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = f(v)$$

onde $v = v(t)$ e $s = s(t)$ representam a velocidade e a posição do objeto no instante t, respectivamente. Por exemplo, pense em um barco se movendo pela água.

(a) Suponha que a força de resistência seja proporcional à velocidade, isto é, $f(v) = -kv$, k uma constante positiva. (Esse modelo é apropriado para os valores pequenos de v.) Sejam $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$ os valores iniciais de v e s. Determine v e s em um instante qualquer t. Qual é a distância total que o objeto percorre a partir do instante $t = 0$?

(b) Suponha que a força de resistência seja proporcional ao quadrado da velocidade, isto é, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Este modelo foi proposto pela primeira vez por Newton.) Sejam v_0 e s_0 os valores iniciais de v e s. Determine v e s em um instante qualquer t. Qual é a distância total que o objeto percorre nesse caso?

47. Seja $A(t)$ a área de uma cultura de tecido em um instante t e seja M a área final do tecido quando o crescimento está completo. A maioria das divisões celulares ocorre na periferia do tecido, e o número de células na periferia é proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Assim, um modelo razoável para o crescimento de tecido é obtido assumindo-se que a taxa de crescimento da área seja conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ e $M - A(t)$.

(a) Formule uma equação diferencial e use-a para mostrar que o tecido cresce mais rápido quando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

(b) Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para $A(t)$. Use um sistema de computação algébrica para fazer a integração.

48. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força gravitacional em um objeto de massa m que tenha sido lançado verticalmente para cima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

onde $x = x(t)$ é a distância do objeto acima da superfície no instante t; R, o raio da Terra; e g, a aceleração da gravidade. Também, pela Segunda Lei de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$, e dessa forma

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponha que um foguete seja lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0. Seja h a altura máxima acima da superfície alcançada pelo objeto. Mostre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugestão:* Pela Regra da Cadeia, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h \to \infty} v_0$. Esse limite é chamado *velocidade de escape* da Terra.

(c) Use $R = 6\,370$ km e $g = 9{,}8$ m/s^2 para calcular v_e em quilômetros por segundo.

PROJETO APLICADO

QUÃO RAPIDAMENTE UM TANQUE ESVAZIA?

Se água (ou outro líquido) está vazando de um tanque, esperamos que o escoamento seja maior no começo (quando o tanque estiver mais cheio) e que vá gradualmente diminuindo à medida que o nível de água do tanque diminui. Mas queremos uma descrição matemática mais precisa de como o escoamento decresce a fim de responder às perguntas que os engenheiros fazem: após quanto tempo o tanque estará completamente vazio? Quão cheio o tanque deve estar para garantir uma pressão mínima a um sistema de irrigação?

Sejam $h(t)$ e $V(t)$ a altura e o volume de água em um tanque no instante t. Se a água escorre por um buraco com área a no fundo do tanque, então a Lei de Torricelli diz que:

I

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

onde g é a aceleração da gravidade. Logo, a taxa na qual a água escoa do tanque é proporcional à raiz quadrada da altura da água.

1. (a) Suponha que o tanque seja cilíndrico com altura igual a 2 m e raio igual a 1 m e que o buraco seja um círculo com raio igual a 2 cm. Se tomarmos $g = 10$ m/s^2, mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}0004\sqrt{20h}$$

(b) Resolva esta equação para encontrar a altura da água no instante t, supondo que o tanque esteja cheio em $t = 0$.

(c) Quanto tempo iria demorar para o tanque ficar completamente vazio?

2. O modelo teórico dado pela Equação 1 não é muito preciso, se levarmos em conta a rotação e viscosidade do líquido. Em vez dele, o modelo

$$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \qquad \boxed{2}$$

é em geral usado e a constante k (que depende das propriedades físicas do líquido) é determinada a partir dos dados relacionados com o vazamento do tanque.

(a) Suponha que o buraco esteja posicionado na lateral de uma garrafa e que a altura h da água (acima do buraco) decresça de 10 cm para 3 cm em 68 segundos. Use a Equação 2 para encontrar uma expressão para $h(t)$. Calcule $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

(b) Perfure um buraco de 4 mm perto do fundo de uma garrafa plástica de um refrigerante de 2 litros. Faça marcas de 0 a 10, com "0" correspondendo ao topo do buraco. Com um dedo tampando o buraco, encha a garrafa com água até a marca de 10 cm. Tire seu dedo do buraco e registre os valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Provavelmente, você vai descobrir que demorará cerca de 68 segundos para o nível chegar a $h = 3$ cm.) Compare seus dados com os valores de $h(t)$ da parte (a). Quão bem o modelo previu os valores reais?

■ Esta parte do projeto é mais bem executada como uma demonstração em classe ou como um projeto em grupo com três estudantes em cada grupo: um para marcar o tempo, outro para estimar a altura a cada 10 segundos e um terceiro para registrar esses valores.

3. Em muitas partes do mundo, a água para os sistemas de combate a incêndios em grandes hotéis e hospitais é fornecida pela ação da gravidade em tanques cilíndricos colocados nos telhados desses prédios. Suponha que tanque tenha um raio de 3 m e o diâmetro de sua saída de água seja de 6 cm. Um engenheiro tem de garantir que a pressão da água seja, no mínimo, de 104 kPa por um período de 10 minutos. (Quando um incêndio acontece, o sistema elétrico pode falhar e pode levar cerca de 10 minutos para que o gerador de emergência e bombas anti-incêndio sejam ativados.) Qual a altura que o engenheiro deve especificar para o tanque a fim de garantir essa exigência? (Use o fato de que a pressão da água a uma profundidade de d metros é $P = 10\,d$ quilopascals. Veja a Seção 8.3.)

4. Nem todos os tanques têm a forma de cilindros. Suponha que um tanque tenha uma seção transversal de área $A(h)$, em uma altura h. Então, o volume de água até a altura h é $V = \int_0^h A(u)\,du$ e, portanto, o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá $dV/dh = A(h)$. Segue que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt} = A(h)\,\frac{dh}{dt}$$

e assim a Lei de Torricelli torna-se

$$A(h)\,\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponha que o tanque tenha o formato de uma esfera de raio igual a 2 m e que esteja cheia, inicialmente, até a metade de sua capacidade de água. Se o raio do buraco circular é 1 cm e assumimos que $g = 10$ m/s^2, mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$(4h - h^2)\,\frac{dh}{dt} = -0{,}0001\sqrt{20h}$$

(b) Em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

PROJETO APLICADO

O QUE É MAIS RÁPIDO: SUBIR OU DESCER?

Suponha que você jogue uma bola para o ar. Você acha que ela leva mais tempo para alcançar sua altura máxima ou para cair de volta à Terra a partir de sua altura máxima? Resolveremos esse problema neste projeto, mas, antes de começar, pense sobre a situação e dê um palpite com base em sua intuição prática.

1. Uma bola de massa m é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial positiva v_0. Assumimos que as forças agindo na bola sejam a força da gravidade e a força de resistência do ar com sentido oposto ao sentido do movimento e com módulo $p|v(t)|$, onde p é uma constante positiva e $v(t)$ é a velocidade da bola no instante t. Tanto na subida quanto na descida, a força total agindo na bola é $-pv - mg$. (Durante a subida, $v(t)$ é positiva e a resistência age para baixo; durante a descida, $v(t)$ é negativa e a resistência age para cima.) Assim, pela Segunda Lei de Newton, a equação de movimento é

$$mv' = -pv - mg$$

Resolva essa equação diferencial para mostrar que a velocidade é

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

■ Ao modelar a força em virtude da resistência do ar, várias funções têm sido usadas, dependendo das características físicas e velocidade da bola. Aqui, usamos um modelo linear, $-pv$, mas um modelo quadrático ($-pv^2$ na subida e pv^2 na descida) é outra possibilidade para velocidades altas (veja o Exercício 46 na Seção 9.3). Para uma bola de golfe, experiências mostraram que um bom modelo é $-pv^{1,3}$ na subida e $p|v|^{1,3}$ na descida. Mas, não importando a função força $-f(v)$ usada [onde $f(v) > 0$ para $v > 0$ e $f(v) < 0$ para $v < 0$], a resposta à questão permanece a mesma. Veja F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually." Amer. Math. Monthly 108 (2001), p. 437-440.

2. Mostre que a altura da bola, até ela atingir o chão, é

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

3. Seja t_1 o tempo que a bola leva para alcançar sua altura máxima. Mostre que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Calcule esse tempo para uma bola com massa 1 kg e velocidade inicial 20 m/s. Suponha que a força de resistência do ar seja $\frac{1}{10}$ da velocidade.

4. Seja t_2 o instante no qual a bola volta para a Terra. Para a bola do Problema 3, estime t_2 usando um gráfico da função altura $y(t)$. O que é mais rápido: ir para cima ou voltar para baixo?

5. Em geral, não é fácil encontrar t_2 porque é impossível resolver a equação $y(t) = 0$ explicitamente. Podemos, entretanto, usar um método indireto para determinar se a subida ou a descida é mais rápida; determinamos se $y(2t_1)$ é positivo ou negativo. Mostre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{P^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

onde $x = e^{pt_1/m}$. Então, mostre que $x > 1$ e que a função

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

é crescente para $x > 1$. Use esse resultado para decidir se $y(2t_1)$ é positivo ou negativo. O que você pode concluir? A subida ou a descida é mais rápida?

9.4 MODELOS PARA CRESCIMENTO POPULACIONAL

Nesta seção investigaremos equações diferenciais que são usadas para modelar o crescimento populacional: a lei de crescimento natural, a equação logística e diversas outras.

A LEI DE CRESCIMENTO NATURAL

Um dos modelos para o crescimento populacional que consideramos na Seção 9.1 baseava-se na suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Essa é uma hipótese razoável? Suponha que tenhamos uma população (de bactérias, por exemplo) com tamanho $P = 1\,000$ que, em um certo instante, esteja crescendo a uma taxa de $P' = 300$ bactérias por hora. Agora, tomemos outras 1 000 bactérias do mesmo tipo, colocando-as com a primeira população. Cada metade da nova população cresce a uma taxa de 300 bactérias por hora. Seria razoável esperar que a população total de 2 000 aumentasse a uma taxa de 600 bactérias por hora inicialmente (desde que houvesse espaço e nutrientes suficientes). Assim, se dobrarmos o tamanho, dobraremos a taxa de crescimento. Em geral, se $P(t)$ é o valor de uma quantidade y no instante t, e se a taxa de variação de P com relação a t é proporcional a $P(t)$ em qualquer instante, então

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP} \qquad 1$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada **lei do crescimento natural**. Se k for positivo, então a população aumenta; se k for negativo, ela diminui.

Como a Equação 1 é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelo método da Seção 9.3:

$$\int \frac{dP}{dt} = \int k\, dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

onde $A\ (= \pm e^C$ ou $0)$ é uma constante arbitrária. Para vermos o significado da constante A, observamos que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Portanto, A é o valor inicial da função.

■ Exemplos e exercícios sobre a utilização de (2) são dados na Seção 3.8, no Volume I.

2 A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

é

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Outra maneira de escrever a Equação 1 é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

que diz que a **taxa de crescimento relativa** (a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população) é constante. Então, (2) diz que uma população com taxa de crescimento relativo constante deve crescer exponencialmente.

Podemos levar em conta a emigração (ou a remoção) de uma população modificando a Equação 1: se a taxa de emigração for constante, então a taxa de variação da população é modelada pela equação diferencial

3

$$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

Veja o Exercício 13 para a solução e consequências da Equação 3.

O MODELO LOGÍSTICO

Como discutimos na Seção 9.1, uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se $P(t)$ for o tamanho da população no instante t, assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{se } P \text{ for pequeno}$$

Isso diz que a taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho. Em outras palavras, a taxa de crescimento relativo é praticamente constante quando a população é pequena. Mas também queremos refletir o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** K, a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas hipóteses é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Multiplicando por P, obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como a equação diferencial logística:

4

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Observe na Equação 4 que, se P for pequeno comparado com K, então P/K está próximo de 0, e dessa forma $dP/dt \approx kP$. Contudo, se $P \to K$ (a população se aproxima de sua capacidade de suporte), então $P/K \to 1$, assim $dP/dt \to 0$. Podemos deduzir informações sobre quando as soluções aumentam ou diminuem diretamente da Equação 4. Se a população P estiver entre 0 e K, então o lado direito da equação é positivo, desse modo $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte ($P > K$), então $1 - P/K$ é negativo, portanto $dP/dt < 0$ e a população diminui.

Vamos começar nossa análise mais detalhada da equação diferencial logística olhando para um campo de direções.

EXEMPLO 1 Desenhe um campo de direções para a equação logística com $k = 0{,}08$ e capacidade de suporte $K = 1\,000$. O que você pode deduzir sobre as soluções?

SOLUÇÃO Nesse caso a equação diferencial logística é

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right)$$

Um campo de direções para essa equação é mostrado na Figura 1. Mostramos apenas o primeiro quadrante porque as populações negativas não têm significado e estamos interessados apenas no que acontece depois de $t = 0$.

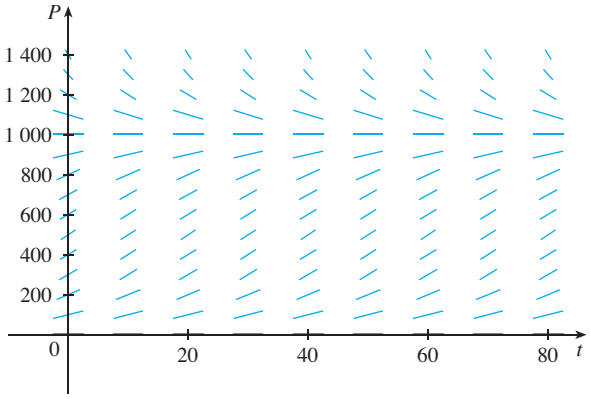


FIGURA 1
Campo de direções para a equação logística no Exemplo 1

A equação logística é autônoma (dP/dt depende apenas de P, não de t); assim, as inclinações são as mesmas ao longo de qualquer reta horizontal. Como esperado, as inclinações são positivas para $0 < P < 1\,000$ e negativas para $P > 1\,000$.

As inclinações são pequenas quando P está próximo de 0 ou 1 000 (a capacidade de suporte). Observe que as soluções se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = 1\,000$.

Na Figura 2 usamos o campo de direções para esboçar as curvas solução com populações iniciais $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ e $P(0) = 1\,300$. Observe que as curvas solução abaixo de $P = 1\,000$ estão aumentando, e aquelas que começam acima de $P = 1\,000$ estão diminuindo. As inclinações são maiores quando $P \approx 500$, portanto as curvas solução que começam abaixo de $P = 1\,000$ têm pontos de inflexão quando $P \approx 500$. De fato, podemos demonstrar que todas as curvas solução que começam abaixo de $P = 500$ têm um ponto de inflexão quando P é exatamente 500 (veja o Exercício 9).

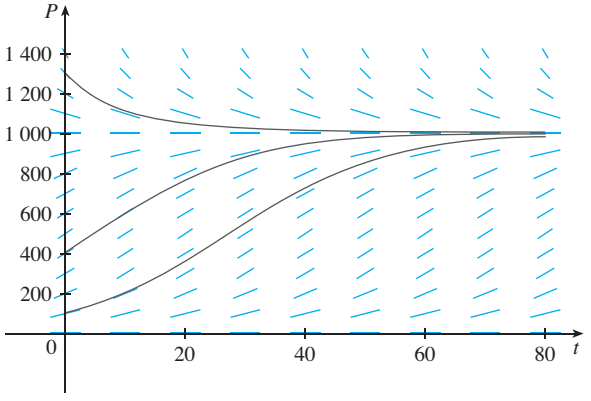


FIGURA 2
Curvas solução para a equação logística no Exemplo 1

□

A equação logística (4) é separável e podemos resolvê-la explicitamente usando o método da Seção 9.3. Como

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

temos

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/K)} = \int k\,dt \qquad \boxed{5}$$

Para calcular a integral no lado esquerdo, escrevemos

$$\frac{1}{P(1 - P/K)} = \frac{K}{P(K - P)}$$

Usando frações parciais (veja a Seção 7.4, no Volume I) temos,

$$\frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}$$

Isso nos permite reescrever a Equação 5:

$$\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = \int k\,dt$$

$$\ln |P| - \ln |K - P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{K - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{K - P}{P} \right| = e^{-kt - C} = e^{-C} e^{-kt}$$

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt} \qquad \boxed{6}$$

onde $A = \pm e^{-C}$. Isolando P na Equação 3, obtemos

$$\frac{K}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

assim,

$$P = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos o valor de A colocando $t = 0$ na Equação 6. Se $t = 0$, então $P = P_0$ (a população inicial); portanto,

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Então, a solução para a equação logística é

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{K - P_0}{P_0} \tag{7}$$

Usando a expressão para $P(t)$ na Equação 7, vemos que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = K$$

que é o esperado.

EXEMPLO 2 Escreva a solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar os tamanhos da população $P(40)$ e $P(80)$. Quando a população alcançará 900?

SOLUÇÃO A equação diferencial é uma equação logística com $k = 0{,}08$, capacidade de suporte $K = 1\,000$ e população inicial $P_0 = 100$. Assim, a Equação 7 fornece a população no instante t como

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + Ae^{-0{,}08t}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{1\,000 - 100}{100} = 9$$

Então,

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}08t}}$$

Assim, os tamanhos da população quando $t = 40$ e 80 são

$$P(40) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-3{,}2}} \approx 731{,}6 \qquad P(80) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-6{,}4}} \approx 985{,}3$$

A população alcançará 900 quando

$$\frac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}08t}} = 900$$

Resolvendo essa equação para t, temos

$$\begin{aligned} 1 + 9e^{-0{,}08t} &= \tfrac{10}{9} \\ e^{-0{,}08t} &= \tfrac{1}{81} \\ -0{,}08t &= \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81 \\ t &= \frac{\ln 81}{0{,}08} \approx 54{,}9 \end{aligned}$$

Dessa forma, a população atinge 900 quando t é aproximadamente 55. Como uma verificação de nosso trabalho, traçamos a curva da população na Figura 3 e observamos onde ela intercepta a reta $P = 900$. O cursor indica que $t \approx 55$. □

■ Compare a curva solução na Figura 3 com a curva solução mais baixa que desenhamos no campo de direções na Figura 2.

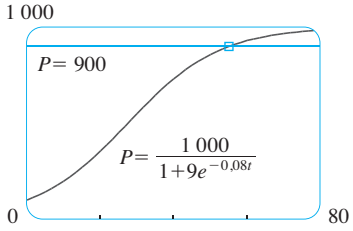


FIGURA 3

COMPARAÇÃO DO CRESCIMENTO NATURAL COM OS MODELOS LOGÍSTICOS

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário paramécio e usou uma equação logística para modelar seus dados. A tabela fornece suas contagens diárias da população de protozoários. Ele estimou a taxa relativa de crescimento inicial como 0,7944 e a capacidade de suporte como 64.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EXEMPLO 3 Encontre os modelos exponencial e logístico para os dados de Gause. Compare os valores previstos com os valores observados e comente o ajuste.

SOLUÇÃO Dadas a taxa de crescimento relativo $k = 0{,}7944$ e a população inicial $P_0 = 2$, o modelo exponencial é

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0{,}7944t}$$

Gause usou o mesmo valor de k para seu modelo logístico. [Isso é razoável porque $P_0 = 2$ é pequeno comparado com a capacidade de suporte ($K = 64$). A equação

$$\frac{1}{P_0}\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

mostra que o valor de k para o modelo logístico está muito próximo do valor para o modelo exponencial.]

A seguir, a solução da equação logística na Equação 7 fornece

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0{,}7944t}}$$

onde

$$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Assim,

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}}$$

Usamos essas equações para calcular os valores previstos (arredondados para o inteiro mais próximo) e os comparamos na tabela a seguir.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	. . .										

Observamos na tabela e no gráfico da Figura 4 que, para os primeiros três ou quatro dias, o modelo exponencial fornece resultados comparáveis àqueles do método logístico mais sofisticado. Para $t \geqslant 5$, contudo, o modelo exponencial é muito impreciso, mas o modelo logístico se ajusta bem às observações.

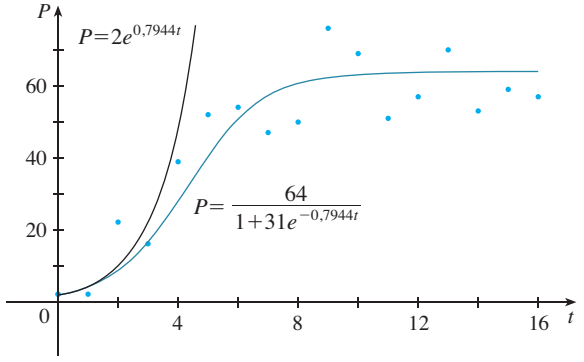


FIGURA 4
Os modelos exponencial e logístico para a população de paramécios

□

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9 847	1992	10 036
1982	9 856	1994	10 109
1984	9 855	1996	10 152
1986	9 862	1998	10 175
1988	9 884	2000	10 186
1990	9 962		

Muitos países que anteriormente passavam por um crescimento exponencial estão descobrindo agora que suas taxas de crescimento populacional estão diminuindo e que o modelo logístico fornece um modelo mais adequado. A tabela na margem mostra os valores, em meados do ano de $B(t)$, da população da Bélgica, em milhares, em certos anos entre 1980 e 2000. A Figura 5 mostra esses dados junto com uma função logística transladada obtida por meio de uma calculadora com recursos para ajustar funções logísticas a estes pontos por regressão. Vemos que o modelo logístico fornece um ajuste muito bom.

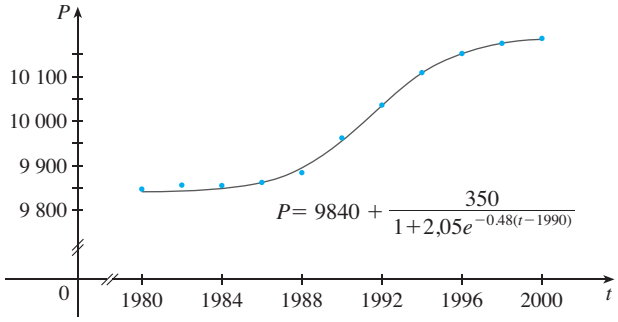


FIGURA 5
Modelo logístico para a população da Bélgica

OUTROS MODELOS PARA O CRESCIMENTO POPULACIONAL

A Lei do Crescimento Natural e a equação diferencial logística não são as únicas equações propostas para modelar o crescimento populacional. No Exercício 18 veremos a função de crescimento de Gompertz e nos Exercícios 19 e 20 investigaremos os modelos de crescimento sazonal.

Dois dos outros modelos são modificações do modelo logístico. A equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$$

tem sido usada para modelar as populações que estão sujeitas à remoção de uma maneira ou de outra. (Pense em uma população de peixes sendo capturada a uma taxa constante.) Essa equação é explorada nos Exercícios 15 e 16.

Para algumas espécies existe um nível mínimo populacional m abaixo do qual as espécies tendem a se extinguir. (Os adultos podem não encontrar parceiros adequados.) Essas populações têm sido modeladas pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

onde o fator extra, $1 - m/P$, leva em conta as consequências de uma população esparsa (veja o Exercício 17).

9.4 EXERCÍCIOS

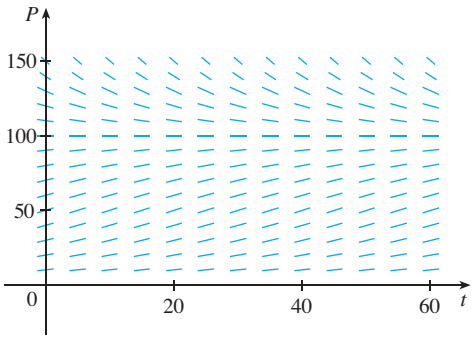
1. Suponha que uma população se desenvolva de acordo com a equação logística

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}05P - 0{,}0005P^2$$

onde t é medido em semanas.

(a) Qual é a capacidade de suporte? Qual é o valor de k?

(b) Um campo de direções para essa equação é mostrado à direita. Onde as inclinações estão próximas de 0? Onde elas são maiores? Quais soluções são crescentes? Quais soluções são decrescentes?



(c) Use o campo de direções para esboçar as soluções para as populações iniciais de 20, 40, 60, 80, 120 e 140. O que essas soluções têm em comum? Como diferem? Quais soluções têm pontos de inflexão? Em qual nível populacional elas ocorrem?

(d) Quais são as soluções de equilíbrio? Como as outras soluções estão relacionadas a essas soluções?

2. Suponha que uma população cresça de acordo com o modelo logístico com capacidade de suporte 6 000 e $k = 0{,}0015$ por ano.

(a) Escreva a equação diferencial logística para esses dados.

(b) Desenhe um campo de direções (à mão ou com um sistema de computação algébrica). O que ele lhe diz sobre as curvas solução?

(c) Use o campo de direções para esboçar as curvas solução para as populações iniciais de 1 000, 2 000, 4 000 e 8 000. O que você pode dizer sobre a concavidade dessas curvas? Qual o significado dos pontos de inflexão?

(d) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler com passo $h = 1$ para estimar a população depois de 50 anos se a população inicial for 1 000.

(e) Se a população inicial for 1 000, escreva uma fórmula para a população depois de t anos. Use-a para calcular a população depois de 50 anos e compare com sua estimativa na parte (d).

(f) Trace a solução da parte (e) e compare com a curva solução que você esboçou na parte (c).

3. O cardume de atum do Pacífico foi modelado pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

onde $y(t)$ é a biomassa (massa total dos membros da população) em quilogramas no instante t (medido em anos), a capacidade de suporte é estimada como $K = 8 \times 10^7$ kg, e $k = 0{,}71$ por ano.

(a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule a biomassa um ano depois.

(b) Quanto tempo levará para a biomassa alcançar 4×10^7 kg?

4. A tabela fornece o número de células de levedura em uma cultura nova de laboratório.

Tempo (horas)	Células de levedura	Tempo (horas)	Células de levedura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) Marque os dados e use o gráfico para estimar a capacidade de suporte para a população de levedura.

(b) Use os dados para estimar a taxa de crescimento inicial relativo.

(c) Encontre um modelo exponencial e um modelo logístico para esses dados.

(d) Compare os valores previstos com os valores observados, na tabela e nos gráficos. Compare como seus modelos se ajustam aos dados.

(e) Utilize seu modelo logístico para estimar o número de células de levedura depois de sete horas.

5. A população mundial era cerca de 5,3 bilhões em 1990. A taxa de natalidade na década de 1990 variou entre 35 e 40 milhões por ano, e a taxa de mortalidade variou entre 15 e 20 milhões por ano. Vamos supor que a capacidade de suporte para a população mundial seja de 100 bilhões.

(a) Escreva uma equação diferencial logística para esses dados. (Como a população inicial é pequena comparada à capacidade de suporte, você pode tomar k como uma estimativa da taxa de crescimento relativo inicial.)

(b) Utilize o modelo logístico para prever a população mundial em 2000 e compare a população real de 6,1 bilhões.

(c) Use o modelo logístico para prever a população mundial nos anos 2100 e 2500.

(d) Quais seriam as suas previsões se a capacidade de suporte fosse de 50 bilhões?

6. (a) Faça uma conjectura para a capacidade de suporte da população dos Estados Unidos. Use-a, e também o fato de que a população era de 250 milhões em 1990, para formular um modelo logístico para a população norte-americana.

(b) Determine o valor de k em seu modelo usando o fato de que a população norte-americana em 2000 era de 275 milhões.

(c) Use seu modelo para prever a população dos Estados Unidos nos anos 2100 e 2200.

(d) Utilize seu modelo para prever o ano no qual a população ultrapassará 350 milhões.

7. Um modelo para a propagação de um boato é que a taxa de propagação é proporcional ao produto da fração y da população que ouviu o boato pela fração que não ouviu o boato.

(a) Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y.

(b) Resolva a equação diferencial.

(c) Uma cidade pequena tem 1 000 habitantes. Às 8 horas, 80 pessoas tinham ouvido o boato. Ao meio-dia, metade da cidade tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?

8. Os biólogos colocaram em um lago 400 peixes e estimaram a capacidade de suporte (a população máxima de peixes daquela espécie no lago) como 10 000. O número de peixes triplicou no primeiro ano.

(a) Presumindo que o tamanho da população de peixes satisfaça a equação logística, encontre uma expressão para o tamanho da população depois de t anos.

(b) Quanto tempo levará para a população aumentar para 5 000?

9. (a) Mostre que, se P satisfizer a equação logística (1), então

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{2P}{K}\right)$$

(b) Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade de sua capacidade de suporte.

10. Para um valor fixo de K (digamos $K = 10$), a família de funções logísticas dada pela Equação 7 depende do valor inicial P_0 e da constante de proporcionalidade k. Trace vários membros dessa família. Como muda o gráfico quando P_0 varia? Como muda o gráfico quando k varia?

11. A tabela dá a população do Japão em meados do ano, em milhares, de 1960 a 2005.

Ano	População	Ano	População
1960	94 092	1985	120 754
1965	98 883	1990	123 537
1970	104 345	1995	125 341
1975	111 573	2000	126 700
1980	116 807	2005	127 417

Use uma calculadora gráfica para ajustar tanto uma função exponencial quanto uma função logística a estes dados. Marque os pontos, trace ambas as funções e comente a precisão dos modelos. [*Sugestão*: Subtraia 94 000 de cada valor da população. Então, depois de obter um modelo de sua calculadora, some 94 000 para obter seu modelo final. Pode ser útil escolher $t = 0$ como 1960 ou 1980.]

12. A tabela fornece a população da Espanha em meados do ano, em milhares, de 1955 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1955	29 319	1980	37 488
1960	30 641	1985	38 535
1965	32 085	1990	39 351
1970	33 876	1995	39 750
1975	35 564	2000	40 016

Use uma calculadora gráfica para ajustar tanto uma função exponencial quanto uma função logística a estes dados. Marque os pontos, trace ambas as funções e comente a precisão dos modelos. [*Sugestão*: Subtraia 29 000 de cada valor da população. Então, depois de obter um modelo de sua calculadora, some 29 000 para obter seu modelo final. Pode ser útil escolher $t = 0$ como 1955 ou 1975.]

13. Considere a população $P = P(t)$ com taxas de natalidade e mortalidade relativas constantes α e β, respectivamente, e uma taxa de emigração constante m, onde α, β, e m são constantes positivas. Suponha que $\alpha > \beta$. Então, a taxa de variação da população no instante t é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{onde} \qquad k = \alpha - \beta$$

(a) Encontre a solução desta equação que satisfaça a condição inicial $P(0) = P_0$.

(b) Que condições sobre m levarão a uma expansão exponencial da população?

(c) Que condições sobre m resultarão em uma população constante? E em um declínio da população?

(d) Em 1847, a população da Irlanda era de cerca de 8 milhões e a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade relativas era 1,6 % da população. Por causa da fome da batata nas décadas de 1840 e 1850, cerca de 210 000 habitantes por ano emigraram da Irlanda. A população estava crescendo ou decrescendo naquela época?

14. Seja c um número positivo. Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

onde k é uma constante positiva, é chamada *equação do dia do juízo final* porque o expoente na expressão ky^{1+c} é maior que o expoente 1 do crescimento natural.

(a) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = y_0$.

(b) Mostre que existe um instante finito $t = T$ (dia do juízo final) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.

(c) Uma raça especialmente fértil de coelhos tem o termo de crescimento $ky^{1,01}$. Se 2 destes coelhos se cruzarem inicialmente e a ninhada for de 16 coelhos depois de três meses, quando será o dia do juízo final?

15. Vamos modificar a equação logística do Exemplo 1 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) - 15$$

(a) Suponha que $P(t)$ represente uma população de peixes no instante t, onde t é medido em semanas. Explique o significado do termo -15.

(b) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.

(c) Quais são as soluções de equilíbrio?

(d) Use o campo de direções para esboçar várias curvas solução. Descreva o que acontece à população de peixes para várias populações iniciais.

(e) Resolva essa equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou com um sistema de computação algébrica. Use as populações iniciais de 200 e 300. Trace as soluções e compare com seus esboços na parte (d).

16. Considere a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) - c$$

como um modelo para uma população de peixes, onde t é medido em semanas e c é uma constante.

(a) Use um SCA para desenhar campos de direções para diversos valores de c.

(b) A partir dos campos de direções na parte (a), determine os valores de c para os quais há pelo menos uma solução de equilíbrio. Para quais valores de c a população de peixes sempre desaparece?

(c) Use a equação diferencial para demonstrar o que você descobriu graficamente na parte (b).

(d) Qual sua recomendação para o limite de pesca semanal para essa população de peixes?

17. Existe evidência considerável para apoiar a teoria de que, para algumas espécies, existe uma população mínima m de forma que

as espécies se tornarão extintas se o tamanho da população cair abaixo de m. Essa condição pode ser incorporada à equação logística pela introdução do fator $(1 - m/P)$. Então o modelo logístico modificado é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < P < K$ e decrescente se $0 < P < m$.

(b) Para o caso onde $k = 0{,}08$, $K = 1\,000$ e $m = 200$, desenhe um campo de direções e use-o para esboçar várias curvas solução. Descreva o que acontece à população para várias populações iniciais. Quais são as soluções de equilíbrio?

(c) Resolva a equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou um sistema de computação algébrica. Use a população inicial P_0.

(d) Use a solução na parte (c) para mostrar que se $P_0 < m$, então a espécie se tornará extinta. [*Sugestão*: Mostre que o numerador em sua expressão para $P(t)$ é 0 para algum valor de t.]

18. Outro modelo para a função crescimento para uma população limitada é dado pela **função de Gompertz**, que é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c\ln\left(\frac{K}{P}\right)P$$

onde c é uma constante e K é a capacidade de suporte.

(a) Resolva essa equação diferencial.

(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

(c) Trace a função de crescimento de Gompertz para $K = 1\,000$, $P_0 = 100$ e $c = 0{,}05$, e compare-a com a função logística no Exemplo 2. Quais são as similaridades? Quais são as diferenças?

(d) Sabemos do Exercício 9 que a função logística cresce mais rapidamente quando $P = K/2$. Use a equação diferencial de Gompertz para mostrar que a função de Gompertz cresce mais rápido quando $P = K/e$.

19. Em **um modelo de crescimento sazonal**, uma função periódica do tempo é introduzida para considerar variações sazonais na taxa de crescimento. Essas variações podem, por exemplo, ser causadas por mudanças sazonais na oferta de alimentos.

(a) Encontre a solução do modelo de crescimento sazonal

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

onde k, r e ϕ são constantes positivas.

(b) Traçando a solução para vários valores de k, r e ϕ, explique como os valores de k, r e ϕ afetam a solução. O que você pode dizer sobre $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

20. Suponha que alteremos a equação diferencial no Exercício 19 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resolva essa equação diferencial com a ajuda de uma tabela de integrais ou um SCA.

(b) Trace a solução para vários valores de k, r e ϕ. Como os valores de k, r e ϕ afetam a solução? O que você pode dizer sobre $\lim_{t\to\infty} P(t)$ nesse caso?

21. Os gráficos das funções logísticas (Figuras 2 e 3) são extremamente similares ao gráfico da função tangente hiperbólica (Figura 3 na Seção 3.11). Explique a similaridade, mostrando que a função logística dada pela Equação 7 pode ser escrita como

$$P(t) = \tfrac{1}{2}K[1 + \operatorname{tgh}(\tfrac{1}{2}k(t - c))]$$

onde $c = (\ln A)/k$. Portanto, a função logística é apenas uma tangente hiperbólica transladada.

PROJETO APLICADO

CÁLCULO E BEISEBOL

Neste projeto exploraremos três das diversas aplicações do cálculo ao beisebol. As interações físicas do jogo, especialmente a colisão da bola com o taco, são complexas e seus modelos são discutidos em detalhes no livro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3. ed. (Nova York: HarperPerennial, 2002).

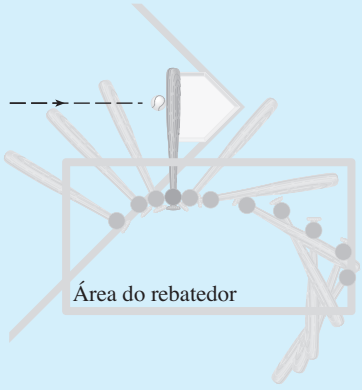
1. Pode ser surpreendente saber que a colisão entre a bola de beisebol e o taco dura apenas cerca de um milésimo de segundo. Aqui, descobriremos a força média no taco durante essa colisão calculando primeiro a mudança no momento da bola.

O *momento* p de um objeto é o produto de sua massa m e sua velocidade v, isto é, $p = mv$. Suponha que um objeto movendo-se ao longo de uma linha reta esteja sujeito a uma força $F = F(t)$, que é uma função contínua do tempo.

(a) Mostre que a mudança no momento no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é igual à integral de F de t_0 a t_1; isto é, mostre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$$

Essa integral é chamada *impulso* da força no intervalo de tempo.



Uma vista superior da posição de um taco de beisebol, mostrada a cada quinquagésimo de segundo durante um movimento típico (adaptado de *The Physics of Baseball*).

(b) Um arremessador joga uma bola rápida a 90 mi/h para o rebatedor, que a rebate diretamente de volta ao lançador. A bola está em contato com o taco por 0,001 s e deixa o taco com a velocidade de 110 mi/h. Uma bola de beisebol pesa 5 onças e, em unidades americanas usuais, sua massa é medida em *slugs*: $m = w/g$ onde $g = 32$ pés/s^2.

(i) Calcule a mudança no momento da bola.

(ii) Determine a força média no taco.

2. Neste problema calculamos o trabalho necessário para um lançador arremessar uma bola rápida a 90 mi/h primeiro considerando a energia cinética.

A *energia cinética* K de um objeto de massa m e velocidade v é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$. Suponha que um objeto de massa m movendo-se em linha reta esteja sujeito a uma força $F = F(s)$ que depende de sua posição s. De acordo com a Segunda Lei de Newton

$$F(s) = ma = m\frac{dv}{dt}$$

onde a e v denotam a aceleração e a velocidade do objeto.

(a) Mostre que o trabalho realizado para mover o objeto de uma posição s_0 para uma posição s_1 é igual à variação na energia cinética do objeto; isto é, mostre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

onde $v_0 = v(s_0)$ e $v_1 = v(s_1)$ são as velocidades do objeto nas posições s_0 e s_1. *Sugestão*: Pela Regra da Cadeia,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

(b) Quantas libras-pés de trabalho são necessárias para jogar uma bola de beisebol a 90 mi/h?

3. (a) Um *outfielder* (jogador que ocupa o campo externo) apanha uma bola de beisebol a 280 pés do *home plate* e a joga diretamente para o pegador com uma velocidade inicial de 100 pés/s. Suponha que a velocidade $v(t)$ da bola depois de t segundos satisfaça a equação diferencial $dv/dt = -\frac{1}{10}v$ por causa da resistência do ar. Quanto tempo leva para a bola atingir o *home plate*? (Ignore qualquer movimento vertical da bola.)

(b) O diretor do time se pergunta se a bola alcançaria o *home plate* mais rápido se ela fosse relançada por um *infielder* (jogador da parte central do campo). O *shortstop* (jogador que fica entre a segunda e a terceira bases) pode se posicionar diretamente entre o *outfielder* e o *home plate*, pegar a bola jogada pelo *outfielder*, girar e jogá-la para o pegador com uma velocidade inicial de 105 pés/s. O diretor cronometra o tempo de relançamento do *shortstop* (pegar, girar, jogar) em metade de um segundo. A que distância do *home plate* deve se posicionar o *shortstop* para minimizar o tempo total para a bola atingir a base? O diretor deve encorajar uma jogada direta ou uma jogada relançada? O que aconteceria se o *shortstop* pudesse jogar a bola a 115 pés/s?

(c) Para qual velocidade de arremesso do *shortstop* a jogada relançada leva o mesmo tempo que a direta?

9.5 EQUAÇÕES LINEARES

Uma equação diferencial **linear** de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

onde P e Q são funções contínuas em um dado intervalo. Esse tipo de equação ocorre frequentemente em vários ramos da ciência, como veremos.

Um exemplo de uma equação linear é $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, esta pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \tag{2}$$

Observe que essa equação diferencial não é separável, porque é impossível fatorar a expressão para y' como uma função de x vezes uma função de y. Mas ainda podemos resolver a equação observando que, pela Regra do Produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação como

$$(xy)' = 2x$$

Se integrarmos ambos os lados dessa equação, obteremos

$$xy = x^2 + C \qquad \text{ou} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Se nos tivesse sido dada a equação diferencial na forma da Equação 2, teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x.

Ocorre que toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida de uma maneira similar pela multiplicação de ambos os lados da Equação 1 por uma função adequada $I(x)$, chamada *fator integrante*. Tentamos encontrar I de modo que o lado esquerdo da Equação 1, quando multiplicado por I, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y)) = (I(x)y)' \tag{3}$$

Se pudermos encontrar tal função I, a Equação 1 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Integrando ambos os lados teremos

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + C$$

de modo que a solução será

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right] \tag{4}$$

Para encontrarmos esse I, expandimos a Equação 3 e cancelamos termos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Esta é uma equação separável para I, que resolvemos como a seguir:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln |I| = \int P(x)\,dx$$
$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

onde $A = \pm e^C$. Estamos procurando um fator de integração particular, não o mais geral; assim, tomamos A = 1 e usamos

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx} \quad \boxed{5}$$

Então, a fórmula para a solução geral da Equação 1 é fornecida pela Equação 4, onde I é dado pela Equação 5. Em vez de memorizar essa fórmula, contudo, apenas lembramos a forma do fator integrante.

> Para resolver a equação diferencial linear $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos os lados pelo **fator integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos os lados.

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUÇÃO A equação dada é linear porque ela tem a forma da Equação 1 com $P(x) = 3x^2$ e $Q(x) = 6x^2$. Um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{x^3}, obtemos

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Integrando ambos os lados, temos

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$
$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

□

■ A Figura 1 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções no Exemplo 1. Observe que todos eles se aproximam de 2 quando $x \to \infty$.

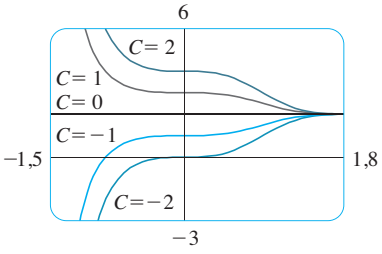


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUÇÃO Devemos primeiro dividir ambos os lados pelo coeficiente de y' para colocar a equação diferencial na forma padrão:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0 \quad \boxed{6}$$

O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

A multiplicação de ambos os lados da Equação 6 por x fornece

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Então,

$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

■ A solução do problema de valor inicial no Exemplo 2 é mostrada na Figura 2.

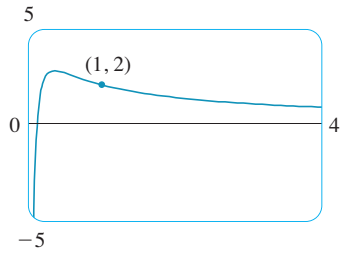


FIGURA 2

e assim,
$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Como $y(1) = 2$, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$ □

EXEMPLO 3 Resolva $y' + 2xy = 1$.

SOLUÇÃO A equação dada está na forma padrão de uma equação linear. Multiplicando pelo fator integrante

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

obtemos
$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

ou
$$\left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}$$

Portanto,
$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}dx + C$$

■ Embora as soluções da equação diferencial no Exemplo 3 sejam expressas em termos de uma integral, elas ainda podem ser traçadas por um sistema de computação algébrica (Figura 3).

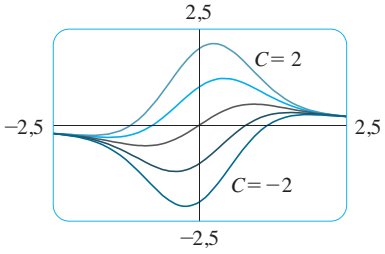


FIGURA 3

Lembre-se da Seção 7.5, no Volume I, que $\int e^{x^2}dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares. Apesar disso, é uma função perfeitamente boa e podemos deixar a resposta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}dx + Ce^{-x^2}$$

Outra maneira de escrever a solução é

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + Ce^{-x^2}$$

(Qualquer número pode ser escolhido para o extremo inferior de integração.) □

APLICAÇÃO A CIRCUITOS ELÉTRICOS

Na Seção 9.2 consideramos o circuito elétrico simples mostrado na Figura 4: uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também contém um resistor com uma resistência de R ohms (Ω) e um indutor com uma indutância de L henries (H).

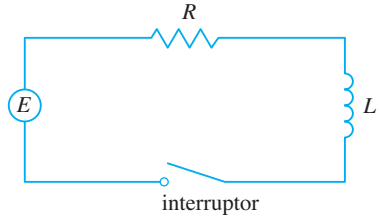


FIGURA 4

A Lei de Ohm diz que a queda na voltagem por causa do resistor é RI. A queda de voltagem por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \quad \boxed{7}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem. A solução fornece a corrente I no instante t.

■ A equação diferencial no Exemplo 4 é linear e separável; assim, um método alternativo é resolvê-la como uma equação separável (Exemplo 4 na Seção 9.3). Se trocarmos a pilha por um gerador, contudo, obteremos uma equação que é linear, mas não é separável (Exemplo 5).

EXEMPLO 4 Suponha que no circuito simples da Figura 4 a resistência seja 12 Ω e a indutância seja 4 H. Se uma pilha fornecer uma voltagem constante de 60 V e o interruptor for fechado quando $t = 0$, então a corrente começa com $I(0) = 0$. Encontre (a) $I(t)$, (b) a corrente depois de 1 s e (c) o valor-limite da corrente.

■ A Figura 5 mostra como a corrente no Exemplo 4 se aproxima de seu valor-limite.

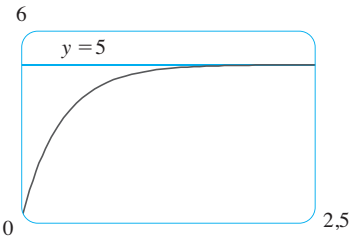


FIGURA 5

SOLUÇÃO

(a) Se colocarmos $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$ na Equação 7, obteremos o problema de valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

ou

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Multiplicando pelo fator integrante $e^{\int 3t\,dt} = e^{3t}$, obtemos

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos $5 + C = 0$, assim $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(b) Depois de um segundo a corrente é

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4{,}75 \text{ A}$$

(c) O valor-limite da corrente é dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t}\ 5 - 0 = 5$$ □

EXEMPLO 5 Suponha que a resistência e a indutância permaneçam as mesmas que no Exemplo 4, mas, em vez de uma pilha, usaremos um gerador que produz uma voltagem variável de $E(t) = 60 \text{ sen } 30t$ volts. Encontre $I(t)$.

■ A Figura 6 mostra o gráfico da corrente quando a pilha é trocada por um gerador.

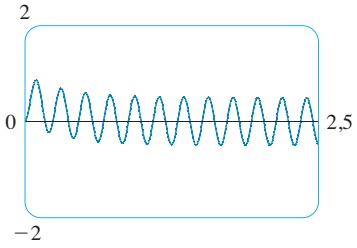


FIGURA 6

SOLUÇÃO Dessa vez a equação diferencial torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \text{ sen } 30t \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \text{ sen } 30t$$

O mesmo fator integrante e^{3t} fornece

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}\text{ sen } 30t$$

Usando a Fórmula 98 da Tabela de Integrais, obtemos

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\text{ sen } 30t\,dt = 15\,\frac{e^{3t}}{909}(3 \text{ sen } 30t - 30\cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\text{sen } 30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

assim,

$$I(t) = \tfrac{5}{101}(\text{sen } 30t - 10\cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$ □

9.5 EXERCÍCIOS

1-4 Determine se a equação diferencial é linear.

1. $y' + e^x y = x^2 y^2$

2. $y + \operatorname{sen} x = x^3 y'$

3. $xy' + \ln x - x^2 y = 0$

4. $xy + \sqrt{x} = e^x y'$

5-14 Resolva a equação diferencial.

5. $y' + 2y = 2e^x$

6. $y' = x + 5y$

7. $xy' - 2y = x^2$

8. $x^2 y' + 2xy = \cos^2 x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$

11. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

12. $x \dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4 e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t \ln t \dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15-20 Resolva o problema de valor inicial.

15. $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0$

16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 0$

17. $\dfrac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2 e^{t^2}, \quad v(0) = 5$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21-22 Resolva a equação diferencial e use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar vários membros da família de soluções. Como a curva solução muda quando C varia?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $y' + (\cos x)y = \cos x$

23. Uma **equação diferencial de Bernoulli** [em homenagem a James Bernoulli (1654-1705)] é da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, se $n = 0$ ou 1, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24-25 Use o método do Exercício 23 para resolver a equação diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. Resolva a equação de segunda ordem $xy'' + 2y' = 12x^2$ por meio da substituição $u = y'$.

27. No circuito apresentado na Figura 4, uma pilha fornece uma voltagem constante de 40 V, a indutância é 2 H, a resistência é 10 Ω e $I(0) = 0$.
(a) Encontre $I(t)$.
(b) Calcule a corrente após 0,1 s.

28. No circuito mostrado na Figura 4, um gerador fornece uma voltagem de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, a indutância é 1 H, a resistência é 20 Ω e $I(0) = 1$ A.
(a) Encontre $I(t)$.
(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.
(c) Use uma ferramenta gráfica para desenhar o gráfico da função corrente.

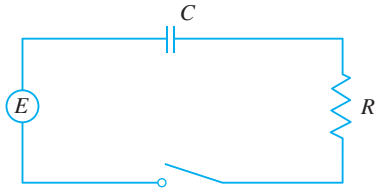
29. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R ohms (Ω). A queda de voltagem no capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas $I = dQ/dt$ (veja o Exemplo 3, na Seção 3.7, no Volume I), assim, temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5 Ω e a capacitância, 0,05 F; que a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V e que a carga inicial seja $Q(0) = 0$ C. Encontre a carga e a corrente no instante t.



30. No circuito do Exercício 29, $R = 2$ Ω, $C = 0{,}01$ F, $Q(0) = 0$ e $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Calcule a carga e a corrente no instante t.

31. Seja $P(t)$ o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. O gráfico de P é chamado *curva de aprendizagem*. No Exercício 13 na Seção 9.1 propusemos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como um modelo razoável para a aprendizagem, onde k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial linear e use sua solução para traçar a curva de aprendizagem.

32. Dois novos trabalhadores foram contratados para uma linha de montagem. João processou 25 unidades durante a primeira hora e 45 unidades durante a segunda. Marcos processou 35 unidades durante a primeira hora e 50 unidades na segunda. Usando o modelo do Exercício 31 e assumindo que $P(0) = 0$, estime o número máximo de unidades por hora que cada trabalhador é capaz de processar.

33. Na Seção 9.3 analisamos os problemas de misturas nos quais o volume de fluido permanecia constante e vimos que estes fornecem equações separáveis (veja o Exemplo 6 naquela seção). Se as taxas de entrada e de saída do sistema forem diferentes, então o volume não é constante e a equação diferencial resultante é linear, mas não separável.

Um tanque contém 100 L de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0,4 kg/L é adicionada a uma taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 L/min. Se $y(t)$ for a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resolva essa equação e calcule a concentração depois de 20 minutos.

34. Um tanque com capacidade de 400 L está cheio com uma mistura de água e cloro com uma concentração de 0,05 g de cloro por litro. Para reduzir a concentração de cloro, água doce é bombeada no tanque a uma taxa de 4 L/s. A mistura é agitada e é retirada a uma taxa de 10 L/s. Calcule a quantidade de cloro no tanque em função do tempo.

35. Um objeto de massa m é solto a partir do repouso e presumimos que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do objeto. Se $s(t)$ for a distância percorrida depois de t segundos, então a velocidade é $v = s'(t)$ e a aceleração é $a = v'(t)$. Se g for a aceleração da gravidade, então a força para baixo no objeto é $mg - cv$, onde c é uma constante positiva, e a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resolva essa equação linear para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

(b) Qual é a velocidade-limite?

(c) Calcule a distância que o objeto caiu depois de t segundos.

36. Se ignorarmos a resistência do ar, poderemos concluir que os objetos mais pesados não caem mais rápido que objetos mais leves. Mas, se considerarmos a resistência do ar, nossa conclusão muda. Use a expressão para a velocidade de queda de um objeto no Exercício 35(a) para calcular dv/dm e mostrar que os objetos mais pesados caem mais rápido que os mais leves.

9.6 SISTEMAS PREDADOR-PRESA

Consideramos diversos modelos para o crescimento de uma única espécie que vive sozinha em um ambiente. Nesta seção estudaremos os modelos mais realistas, que levam em consideração a interação de duas espécies no mesmo ambiente. Veremos que esses modelos tomam a forma de um par de equações diferenciais acopladas.

Primeiro levaremos em conta a situação na qual uma espécie, chamada presa, tem um amplo suprimento alimentar e a segunda espécie, denominada predador, se alimenta da presa. Exemplos de presa e predador incluem coelhos e lobos em uma floresta isolada, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas e bactérias e amebas. Nosso modelo terá duas variáveis dependentes e ambas serão funções do tempo. Seja $C(t)$ o número de presas (usando C de coelhos) e $L(t)$ o número de predadores (com L de lobos) no instante t.

Na ausência de predadores, o amplo suprimento de alimentos suportaria o crescimento exponencial de presas, isto é,

$$\frac{dC}{dt} = kC \qquad \text{onde } k \text{ é uma constante positiva}$$

Na ausência de presas, assumimos que a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é,

$$\frac{dL}{dt} = -rL \qquad \text{onde } r \text{ é uma constante positiva}$$

Com ambas as espécies presentes, contudo, supomos que a causa principal de morte entre as presas seja serem comidas por predadores, e as taxas de natalidade e sobrevivência dos predadores dependam da disponibilidade de comida, a saber, as presas. Também supomos que as duas espécies se encontrem a uma taxa que é proporcional a ambas as populações e é, portanto, proporcional ao produto CL. (Quanto maior for qualquer uma das populações, maior é a chance do encontro.) Um sistema de duas equações diferenciais que incorporam essas hipóteses é mostrado a seguir:

L representa os predadores.
C representa as presas.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dC}{dt} = kC - aCL \qquad \frac{dL}{dt} = -rL + bCL$$

onde k, r, a e b são constantes positivas. Observe que o termo $-aCL$ diminui a taxa natural de crescimento das presas e o termo bCL aumenta a taxa de crescimento natural dos predadores.

■ As equações de Lotka-Volterra foram propostas como um modelo para explicar as variações de tubarões e peixes no mar Adriático pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940).

As equações em (1) são conhecidas como **equações predador-presa**, ou **equações de Lotka-Volterra**. Uma **solução** desse sistema de equações é um par de funções $C(t)$ e $L(t)$, que descreve as populações de presas e predadores como funções do tempo. Como o sistema é acoplado (C e L ocorrem em ambas as equações), não podemos resolver uma equação e depois a outra: temos de resolvê-las de maneira simultânea. Infelizmente, porém, em geral é impossível encontrar fórmulas explícitas para C e L como funções de t. Podemos, contudo, usar métodos gráficos para analisar as equações.

EXEMPLO 1 Suponha que as populações de coelhos e lobos sejam descritas pelas equações de Lotka-Volterra (1) com $k = 0{,}08$, $a = 0{,}001$, $r = 0{,}02$ e $b = 0{,}00002$. O tempo t é medido em meses.

(a) Encontre as soluções constantes (chamadas s**oluções de equilíbrio**) e interprete a resposta.

(b) Use o sistema de equações diferenciais para encontrar uma expressão para dL/dC.

(c) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial resultante no plano CL. Então, use o campo de direções para esboçar algumas curvas solução.

(d) Suponha que, em algum instante no tempo, existam 1 000 coelhos e 40 lobos. Desenhe a curva solução correspondente e use-a para descrever as mudanças em ambos os níveis de população.

(e) Use a parte (d) para fazer esboços de C e L como funções de t.

SOLUÇÃO

(a) Com os valores dados de k, a, r e b, as equações de Lotka-Volterra se tornam

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08C - 0{,}001CL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0{,}02L + 0{,}00002CL$$

Tanto C como L serão constantes se ambas as derivadas forem 0, isto é,

$$C' = C(0{,}08 - 0{,}001L) = 0$$
$$L' = L(-0{,}02 + 0{,}00002C) = 0$$

Uma solução é dada por $C = 0$ e $L = 0$. (Isso faz sentido: se não existirem coelhos ou lobos, as populações não vão aumentar.) A outra solução constante é

$$L = \frac{0{,}08}{0{,}001} = 80 \qquad C = \frac{0{,}02}{0{,}00002} = 1\,000$$

Assim, as populações de equilíbrio consistem em 80 lobos e 1 000 coelhos. Isso significa que 1 000 coelhos são suficientes para sustentar uma população constante de 80 lobos. Não existem muitos lobos (o que resultaria em menos coelhos) nem poucos lobos (o que resultaria em mais coelhos).

(b) Usamos a Regra da Cadeia para eliminar t:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dC}\,\frac{dC}{dt}$$

assim,

$$\frac{dL}{dC} = \frac{\dfrac{dL}{dt}}{\dfrac{dC}{dt}} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08c - 0{,}001CL}$$

(c) Se pensarmos em L como uma função de C, teremos a equação diferencial

$$\frac{dL}{dC} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

Desenhamos o campo de direções para essa equação diferencial na Figura 1 e o usamos para esboçar várias curvas solução na Figura 2. Se nos movermos ao longo de uma curva solução, veremos como a relação entre C e L muda com o passar do tempo. Observe que as curvas parecem ser fechadas no sentido de que, se viajamos ao longo de uma curva, sempre retornamos ao mesmo ponto. Observe também que o ponto (1 000, 80) está dentro de todas as curvas solução. Esse ponto é denominado *ponto de equilíbrio*, porque corresponde à solução de equilíbrio $C = 1\,000, L = 80$.

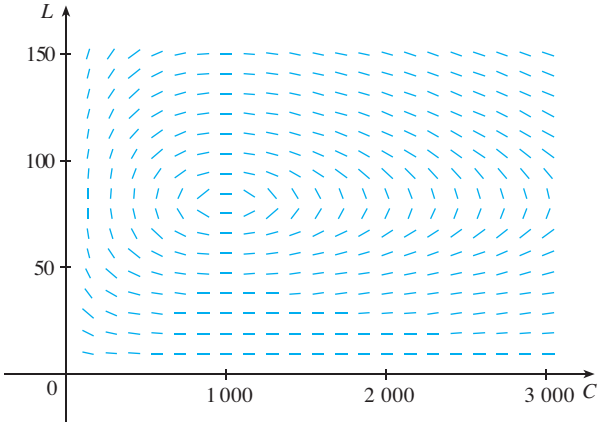


FIGURA 1 Campo de direções para o sistema predador-presa

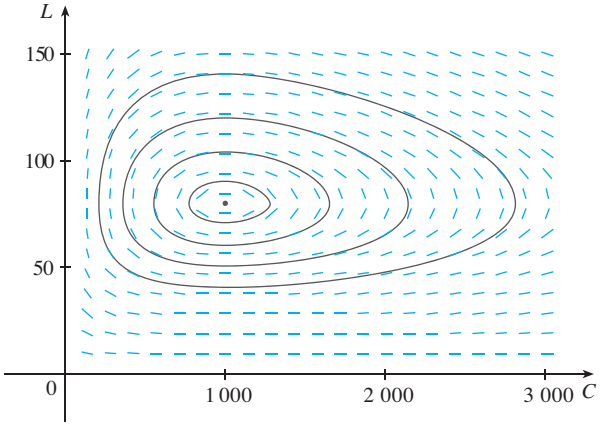


FIGURA 2 Retrato de fase do sistema

Quando representamos as soluções de um sistema de equações diferenciais como na Figura 2, referimo-nos ao plano CL como o **plano de fase** e chamamos as curvas solução de trajetórias de fase. Assim, uma **trajetória de fase** é um caminho traçado pelas soluções (C, L) com o passar do tempo. Um **retrato de fase** consiste em pontos de equilíbrio e trajetórias de fase típicas, como mostrado na Figura 2.

(d) Começar com 1 000 coelhos e 40 lobos corresponde a desenhar a curva solução no ponto $P_0(1\,000, 40)$. A Figura 3 mostra essa trajetória de fase com o campo de direções removido. Começando no instante no tempo $t = 0$ e deixando t aumentar, movemo-nos no sentido horário ou no anti-horário ao redor da trajetória de fase? Se colocarmos $C = 1\,000$ e

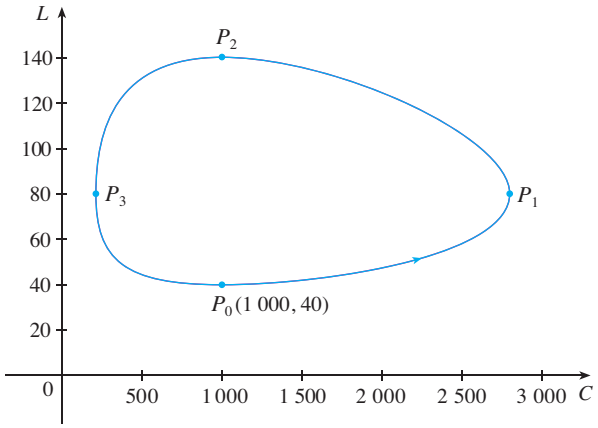


FIGURA 3
Trajetória da fase em (1 000, 40)

$L = 40$ na primeira equação diferencial, teremos

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08(1\,000) - 0{,}001(1.000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Como $dC/dt > 0$, concluímos que C está aumentando em P_0 e assim nos movemos no sentido anti-horário ao longo da trajetória de fase.

Vemos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; dessa forma, a população de coelhos aumenta. Isso resulta em mais lobos e eventualmente existem tantos lobos que os coelhos têm dificuldade para evitá-los. Assim, o número de coelhos começa a declinar (em P_1, onde estimamos que C atinja a população máxima ao redor de 2 800). Isso significa que algum tempo depois a população de lobos começa a cair (em P_2, onde $C = 1\,000$ e $L \approx 140$). Mas isso beneficia os coelhos; portanto, sua população depois começa a aumentar (em P_3, onde $L = 80$ e $C \approx 210$). Como consequência, a população de lobos eventualmente começa a aumentar também. Isso acontece quando as populações retornam a seus valores iniciais de $C = 1\,000$ e $L = 40$ e o ciclo inteiro começa novamente.

(e) Da descrição na parte (d) de como as populações de coelhos e lobos aumentam e diminuem, podemos esboçar os gráficos de $C(t)$ e $L(t)$. Suponha que os pontos P_1, P_2 e P_3 na Figura 3 sejam alcançados nos tempos t_1, t_2 e t_3. Então podemos esboçar gráficos de C e L como na Figura 4.

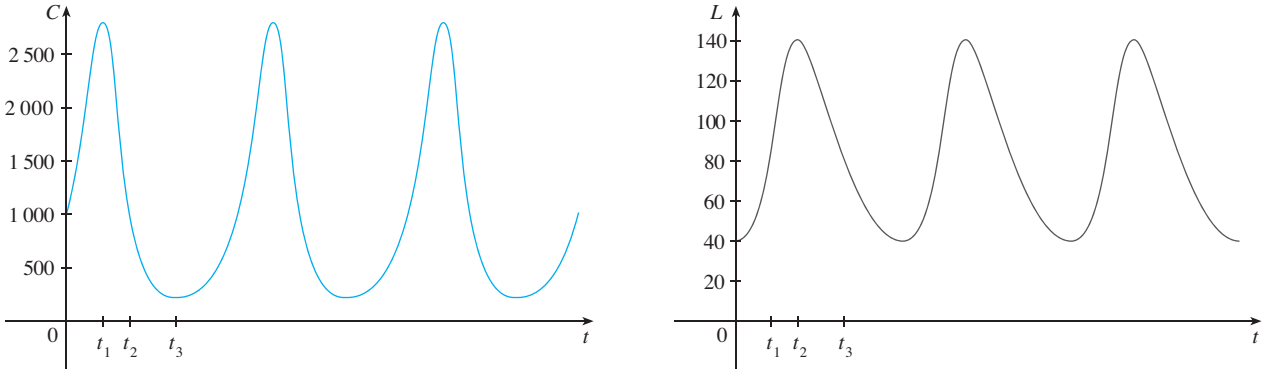


FIGURA 4
Gráficos das populações de coelhos e lobos como função do tempo

Para tornar os gráficos mais fáceis de comparar, os desenhamos nos mesmos eixos, mas com escalas diferentes para C e L, como na Figura 5. Observe que os coelhos atingem sua população máxima cerca de um quarto de ciclo antes dos lobos.

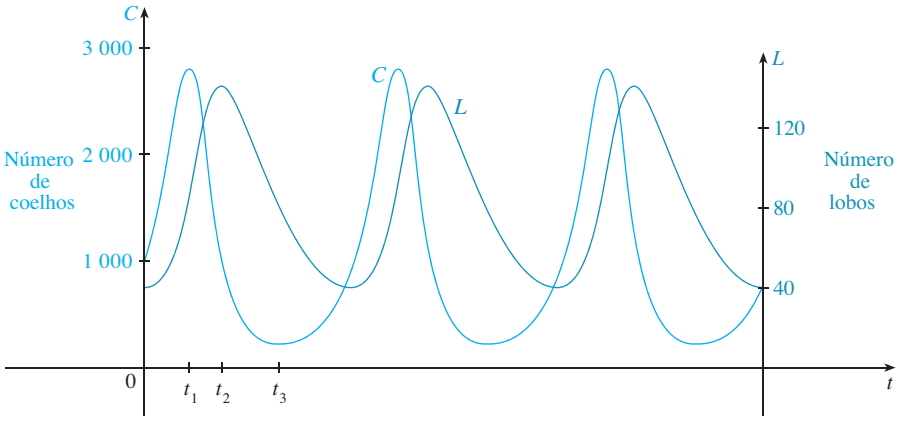


FIGURA 5
Comparação das populações de coelhos e lobos

Uma parte importante do processo de modelagem, como discutimos na Seção 1.2, é interpretar nossas conclusões matemáticas como previsões do mundo real e testar as previsões com dados reais. A Hudson's Bay Company, que começou a comercializar peles de animais no Canadá em 1670, manteve registros dede 1840. A Figura 6 mostra gráficos do número de peles de lebre e de seu predador, o lince canadense, comercializadas pela companhia em um período de 90 anos. Você pode ver que as oscilações acopladas na população de lebres e linces, prevista pelo modelo de Lotka-Volterra, realmente ocorrem e o período desses ciclos é de aproximadamente dez anos.

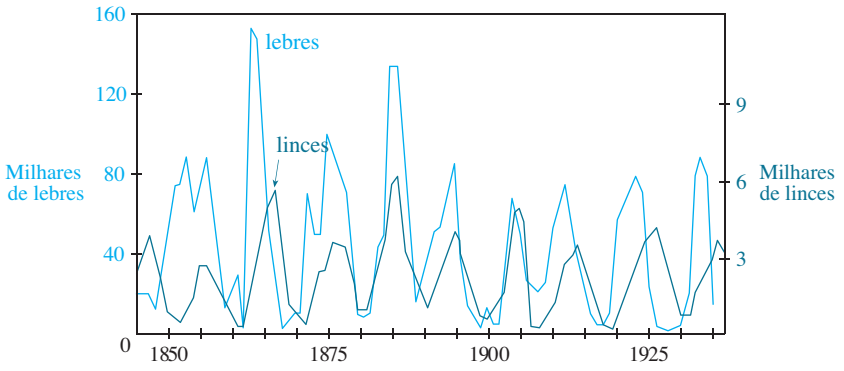


FIGURA 6
A abundância relativa de lebres e linces dos registros da Hudson's Bay Company

Embora o modelo relativamente simples de Lotka-Volterra tivesse algum sucesso em explicar e prever as populações acopladas, modelos mais sofisticados também têm sido propostos. Uma maneira de modificar as equações de Lotka-Volterra é supor que, na ausência de predadores, a presa cresce de acordo com um modelo logístico com capacidade de suporte K. Então as equações de Lotka-Volterra (1) são substituídas pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{dC}{dt} = kC\left(1 - \frac{C}{K}\right) - aCL \qquad \frac{dL}{dt} = -rL + bCL$$

Esse modelo é investigado nos Exercícios 9 e 10.

Também têm sido propostos modelos para descrever e prever níveis de população de duas espécies que competem pelos mesmos recursos ou cooperam por benefícios mútuos. Esses modelos serão explorados no Exercício 2.

9.6 EXERCÍCIOS

1. Para cada sistema predador-presa, determine qual das variáveis, x ou y, representa a população de presas e qual representa a população de predadores. O crescimento das presas é restrito apenas pelos predadores ou por outros fatores também? Os predadores alimentam-se apenas das presas ou eles têm outras fontes de alimentação? Explique.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -0{,}05x + 0{,}0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0{,}1y - 0{,}005xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}2x - 0{,}0002x^2 - 0{,}006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0{,}015x + 0{,}00008xy$

2. Cada sistema de equações diferenciais é um modelo para duas espécies que competem pelas mesmas fontes ou cooperam por mútuo benefício (plantas em floração e insetos polinizadores, por exemplo). Decida se cada sistema descreve competição ou cooperação e explique por que este é um modelo razoável. (Pergunte-se qual é o efeito que o aumento de uma das espécies tem na taxa de crescimento da outra.)

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}12x - 0{,}0006x^2 - 0{,}00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0{,}08x + 0{,}00004xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}15x - 0{,}0002x^2 - 0{,}0006xy$

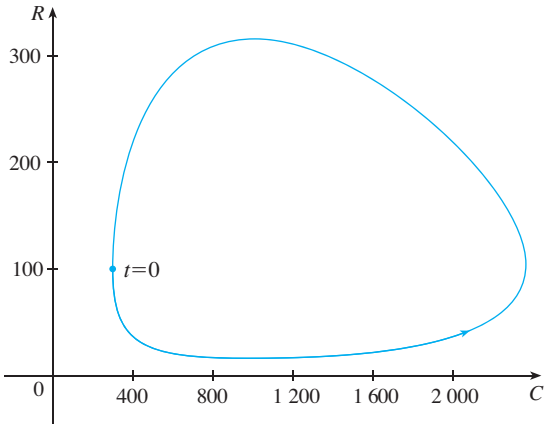
$\dfrac{dy}{dt} = 0{,}2y - 0{,}00008y^2 - 0{,}0002xy$

3-4 Uma trajetória de fase é mostrada para as populações de coelhos (C) e raposas (R).

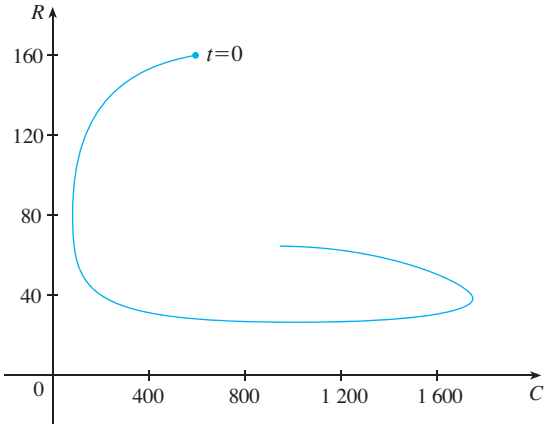
(a) Descreva como cada população muda com o passar do tempo.

(b) Use sua descrição para fazer um esboço grosseiro dos gráficos de C e R como funções do tempo.

3.

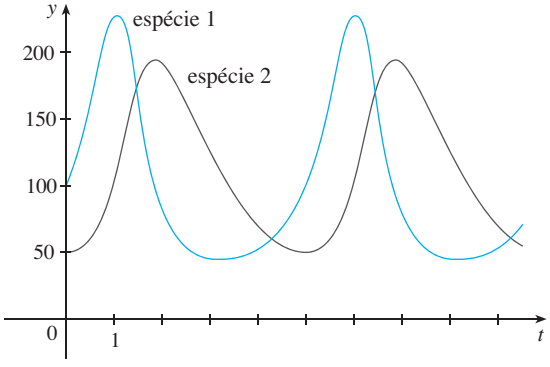


4.

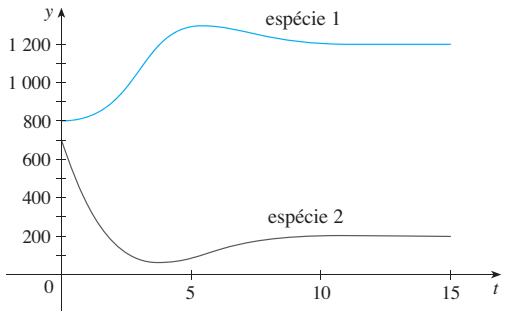


5-6 Os gráficos de populações de duas espécies são ilustrados. Use-os para esboçar a trajetória de fase correspondente.

5.



6.



7. No Exemplo 1(b) mostramos que as populações de coelhos e lobos satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dL}{dC} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, mostre que

$$\frac{C^{0{,}02}L^{0{,}08}}{e^{0{,}00002C}e^{0{,}001L}} = E$$

onde E é uma constante.

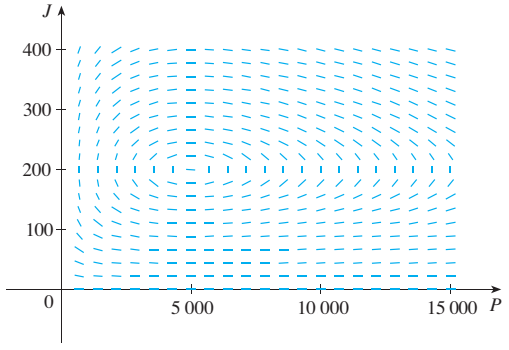
É impossível resolver essa equação para L como uma função explícita de C (ou vice-versa). Se você tiver um sistema de computação algébrica que trace curvas definidas implicitamente, use essa equação e seu SCA para desenhar a curva solução que passa pelo ponto (1 000, 40) e compare com a Figura 3.

8. As populações de pulgões e joaninhas são modeladas pelas equações

$$\frac{dP}{dt} = 2P - 0{,}01PJ$$

$$\frac{dJ}{dt} = -0{,}5J + 0{,}0001PJ$$

(a) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seu significado.
(b) Encontre uma expressão para dJ/dP.
(c) O campo de direções para a equação diferencial na parte (b) é mostrado. Use-o para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?



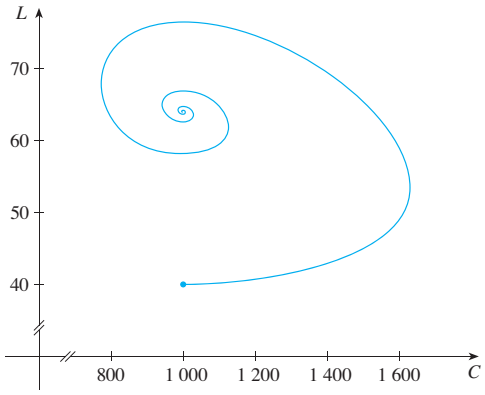
(d) Suponha que no instante t = 0 existam 1 000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como as populações variam.
(e) Use a parte (d) para fazer esboços das populações de pulgões e joaninhas como funções de t. Como os gráficos estão relacionados?

9. No Exemplo 1 usamos as equações de Lotka-Volterra para modelar as populações de coelhos e lobos. Vamos modificar aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08C(1 - 0{,}0002C) - 0{,}001CL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0{,}02L + 0{,}00002CL$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de coelhos na ausência dos lobos?
(b) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seus significados.
(c) A figura mostra a trajetória de fase que começa no ponto (1 000, 40). Descreva o que acabará ocorrendo com as populações de coelhos e lobos.



(d) Esboce os gráficos das populações de coelhos e lobos como funções do tempo.

10. No Exercício 8, modelamos populações de pulgões e joaninhas com um sistema Lotka-Volterra. Suponha que modifiquemos aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = 2P(1 - 0{,}0001P) - 0{,}01PJ$$

$$\frac{dJ}{dt} = -0{,}5J + 0{,}0001PJ$$

(a) Na ausência de joaninhas, o que o modelo prevê sobre os pulgões?
(b) Encontre as soluções de equilíbrio.
(c) Encontre uma expressão para dJ/dP.
(d) Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial na parte (c). Então, use o campo de direções para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?
(e) Suponha que no instante $t = 0$ existam 1 000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como ambas as populações variam.
(f) Use a parte (e) para fazer esboços das populações de pulgões e de joaninhas como funções de t. Como os gráficos estão relacionados?

9 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma equação diferencial?
   (b) O que é a ordem de uma equação diferencial?
   (c) O que é uma condição inicial?
2. O que você pode dizer sobre as soluções da equação $y' = x^2 + y^2$ apenas olhando para a equação diferencial?
3. O que é um campo de direções para a equação diferencial $y' = F(x, y)$?
4. Explique como o método de Euler funciona.
5. O que é uma equação diferencial separável? Como você a resolve?
6. O que é uma equação diferencial linear de primeira ordem? Como você a resolve?
7. (a) Escreva uma equação diferencial que expresse a lei de crescimento natural. O que ela diz em termos da taxa de crescimento relativo?
   (b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
   (c) Quais são as soluções dessa equação?
8. (a) Escreva a equação logística.
   (b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
9. (a) Escreva equações de Lotka-Volterra para modelar populações de peixes (P) e tubarões (T).
   (b) O que essas equações dizem sobre cada população na ausência da outra?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

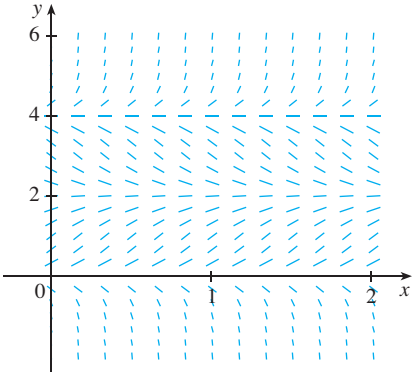
1. Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.
2. A função $f(x) = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.
3. A equação $y' = x + y$ é separável.
4. A equação $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ é separável.
5. A equação $e^x y' = y$ é linear.
6. A equação $y' + xy = e^y$ é linear.
7. Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to \infty} y = 5$.

EXERCÍCIOS

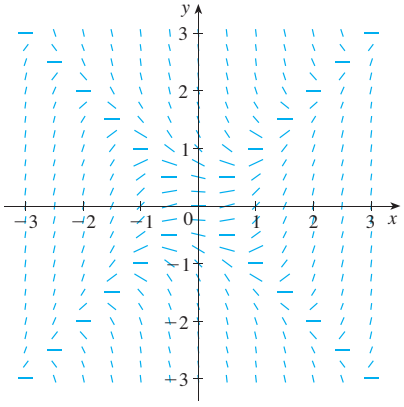
1. (a) Um campo de direções para a equação diferencial $y' = y(y - 2)(y - 4)$ é mostrado. Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
   (i) $y(0) = -0{,}3$ (ii) $y(0) = 1$
   (iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4{,}3$
   (b) Se a condição inicial for $y(0) = c$, para quais valores de c o $\lim_{t \to \infty} y(t)$ é finito? Quais são as soluções de equilíbrio?



2. (a) Esboce um campo de direções para a equação diferencial $y' = x/y$. Então, use-o para esboçar as quatro soluções que satisfazem as condições iniciais $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ e $y(-2) = -1$.
   (b) Verifique seu trabalho na parte (a) resolvendo a equação diferencial explicitamente. Que tipo de curva é cada curva solução?
3. (a) Um campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 - y^2$ é mostrado. Esboce a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Use seu gráfico para estimar o valor de $y(0{,}3)$.



(b) Use o método de Euler com passo 0,1 para estimar $y(0,3)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial na parte (a). Compare com sua estimativa da parte (a).

(c) Em que retas estão localizados os centros dos segmentos de reta horizontais do campo de direções da parte (a)? O que acontece quando uma curva solução intercepta essas retas?

4. (a) Use o método de Euler com passo 0,2 para estimar $y(0,4)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

(b) Repita a parte (a) com passo 0,1.

(c) Encontre a solução exata da equação diferencial e compare com o valor em 0,4 com as aproximações nas partes (a) e (b).

5–8 Resolva a equação diferencial.

5. $y' = xe^{-\operatorname{sen} x} - y\cos x$ **6.** $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

7. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$ **8.** $x^2y' - y = 2x^3\,e^{-1/x}$

9–11 Resolva o problema de valor inicial.

9. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r \qquad r(0) = 5$

10. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x \qquad y(0) = 0$

11. $xy' - y = x \ln x, \qquad y(1) = 2$

12. Resolva o problema de valor inicial $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$ e trace a solução.

13–14 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas.

13. $y = ke^x$ **14.** $y = e^{kx}$

15. (a) Escreva a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}1P\left(1 - \frac{P}{2\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população quando $t = 20$.

(b) Quando a população atinge 1 200?

16. (a) A população mundial era de 5,28 bilhões em 1990 e 6,07 bilhões em 2000. Encontre um modelo exponencial para esses dados e use-o para prever a população mundial no ano 2020.

(b) De acordo com o modelo na parte (a), quando a população mundial excederá 10 bilhões?

(c) Use os dados na parte (a) para encontrar um modelo logístico para a população. Considere uma capacidade de suporte de 100 bilhões. A seguir, use o modelo logístico para prever a população em 2020. Compare sua previsão com o modelo exponencial.

(d) De acordo com o modelo logístico, quando a população mundial excederá 10 bilhões? Compare com suas previsões na parte (b).

17. O modelo de crescimento de Von Bertalanffy é usado para prever o comprimento $L(t)$ de um peixe em um período de tempo. Se L_∞ for o maior comprimento para uma espécie, então a hipótese é que a taxa de crescimento do comprimento seja proporcional a $L_\infty - L$, o comprimento que o peixe ainda pode crescer.

(a) Formule e resolva uma equação diferencial para encontrar uma expressão para $L(t)$.

(b) Para o hadoque do Mar do Norte foi determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm e a constante de proporcionalidade é 0,2. Como é a expressão para $L(t)$ com esses dados?

18. Um tanque contém 100 L de água pura. Água salgada contendo 0,1 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é agitada e retirada do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque depois de seis minutos?

19. Um modelo para a propagação de uma epidemia é que a taxa de propagação é proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas não infectadas. Em uma cidade isolada de 5 000 habitantes, 160 pessoas têm uma doença no começo da semana e 1 200, no fim da semana. Quanto tempo levará para 80% da população se contaminar?

20. A Lei de Brentano-Stevens em psicologia modela a maneira como um objeto de estudo reage a um estímulo. Ela estabelece que, se R representar a reação à quantidade de estímulo S, então as taxas relativas de aumento são proporcionais:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

onde k é uma constante positiva. Encontre R como uma função de S.

21. O transporte de uma substância através de uma parede capilar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k + h}\right)$$

onde h é a concentração de hormônio na corrente sanguínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume do capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma relação entre h e t.

22. As populações de pássaros e insetos são modeladas pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x - 0{,}002xy$$

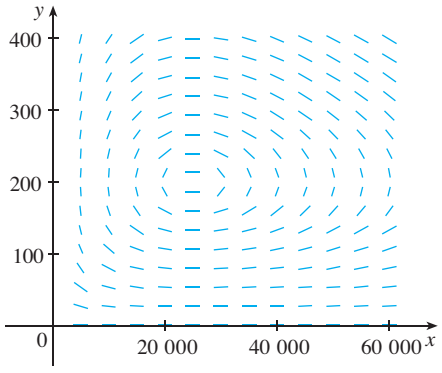
$$\frac{dx}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

(a) Quais das variáveis (x ou y) representa a população de pássaros e qual representa a população de insetos? Explique.

(b) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(c) Encontre uma expressão para dy/dx.

(d) O campo de direções para a equação diferencial na parte (c) é mostrado. Use-o para esboçar a trajetória de fase correspondente às populações iniciais de 100 pássaros e 40 000 insetos. A seguir, use a trajetória de fase para descrever como ambas as populações variam.



(e) Use a parte (d) para fazer esboços das populações de pássaros e insetos como funções do tempo. De que modo esses gráficos estão relacionados?

23. Suponha que o modelo do Exercício 22 seja trocado pelas equações

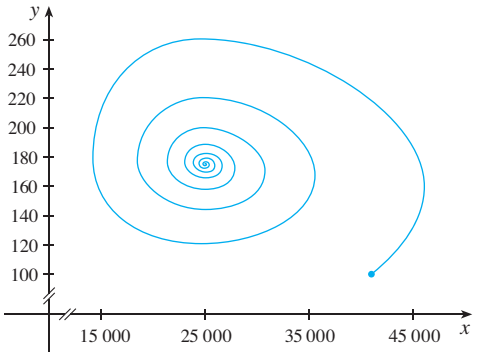
$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x(1 - 0{,}000005x) - 0{,}002xy$$

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de insetos na ausência dos pássaros?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(c) A figura mostra a trajetória de fase que começa com 100 pássaros e 40 000 insetos. Descreva o que ocorre eventualmente com as populações de pássaros e insetos.



(d) Esboce os gráficos das populações de pássaros e insetos como funções do tempo.

24. Bárbara pesa 60 kg e está em uma dieta de 1 600 calorias por dia, das quais 850 são usadas diretamente pelo metabolismo basal. Ela gasta cerca de 15 cal/kg/dia vezes seu peso fazendo exercícios. Se 1 kg de gordura tiver 10 000 cal e assumirmos que a reserva de calorias na forma de gordura seja 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a para encontrar o peso dela em função do tempo. O peso de Bárbara eventualmente se aproxima de um peso de equilíbrio?

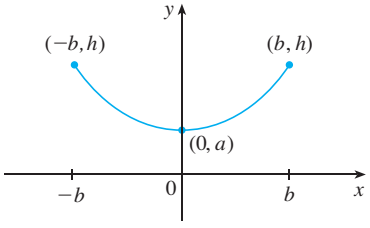
25. Quando um cabo flexível de densidade uniforme é suspenso entre dois pontos fixos e fica pendurado à mercê de seu próprio peso, a forma $y = f(x)$ do cabo satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde k é uma constante positiva. Considere o cabo mostrado na figura.

(a) Seja $z = dy/dx$ na equação diferencial. Resolva a equação diferencial de primeira ordem (em z) e depois integre para encontrar y.

(b) Determine o comprimento do cabo.



1. Encontre todas as funções f tais que f' é contínua e

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}dt \qquad \text{para todo } x \text{ real.}$$

2. Um estudante esqueceu a Regra do Produto para a derivada e cometeu o erro de pensar que $(fg)' = f'g'$. Contudo, ele teve sorte e obteve a resposta certa. A função f que ele usou era $f(x) = e^{x^2}$ e o domínio de seu problema era o intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Qual era a função g?

3. Seja f uma função com a propriedade que $f(0) = 1, f'(0) = 1$ e $f(a + b) = f(a)f(b)$ para todos os números reais a e b. Mostre que $f'(x) = f(x)$ para todo x e deduza que $f(x) = e^x$.

4. Encontre todas as funções f que satisfazem a equação

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = -1$$

5. Encontre a curva $y = f(x)$ tal que $f(x) \geqslant 0, f(0) = 0, f(1) = 1,$ e tal que a área sob o gráfico de 0 a x seja proporcional à $(n + 1)$-ésima potência de $f(x)$.

6. Uma *subtangente* é uma parte do eixo x que fica diretamente abaixo do segmento de uma reta tangente do ponto de contato ao eixo x. Encontre curvas que passem pelo ponto $(c, 1)$ e cujas subtangentes tenham todas comprimento c.

7. Uma torta de pêssego é tirada do forno às 17 horas. Quando saiu do forno tinha uma temperatura de 100 °C. Às 17h10, sua temperatura era de 80 °C; às 17h20, a temperatura era de 65 °C. Qual é a temperatura da sala?

8. Começa a cair neve durante a manhã do dia 2 de fevereiro e continua constantemente durante a tarde. Ao meio-dia, um veículo removedor de neve começa a retirá-la de uma estrada a uma taxa constante. O veículo percorreu 6 km do meio-dia até às 13 horas, mas apenas 3 km das 13 às 14 horas. Quando a neve começou a cair? [*Sugestões*: Para começar, seja t o instante medido em horas depois do meio-dia; seja $x(t)$ a distância percorrida pelo veículo removedor de neve em um instante t; então a velocidade do veículo é dx/dt. Seja b o número de horas antes do meio-dia quando começou a nevar. Encontre uma expressão para a altura da neve no instante t. Então use a informação dada de que a taxa de remoção R (em m^3/h) é constante.]

9. Um cachorro vê um coelho correndo em linha reta por um campo aberto e começa a caçá-lo. Em um sistema de coordenadas cartesianas (como mostrado na figura), suponha que:

(i) O coelho está na origem e o cachorro, no ponto $(L, 0)$, no primeiro instante em que o cachorro vê o coelho.
(ii) O coelho corre no eixo y e o cachorro corre sempre direto para o coelho.
(iii) O cachorro corre na mesma velocidade do coelho.

(a) Mostre que o caminho do cachorro é o gráfico da função $y = f(x)$, onde y satisfaz a equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(b) Determine a solução da equação na parte (a) que satisfaz as condições iniciais $y = y' = 0$ quando $x = L$. [*Sugestão*: Faça $z = dy/dx$ na equação diferencial e resolva a equação de primeira ordem resultante para encontrar z; então integre z para encontrar y.]

(c) O cachorro alcança o coelho?

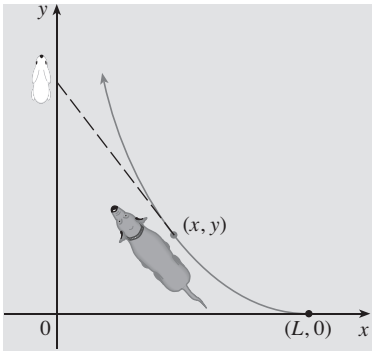


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

10. (a) Suponha que o cachorro no Problema 9 corra duas vezes mais rápido que o coelho. Encontre uma equação diferencial para a trajetória do cachorro. Então resolva-a para encontrar o ponto onde o cachorro pega o coelho.

(b) Suponha que o cachorro corra com a metade da velocidade do coelho. Quão próximo o cachorro chega do coelho? Quais são suas posições quando eles estão o mais próximo possível?

11. Um engenheiro deve apresentar algumas estimativas à sua companhia sobre uma nova planta de alume, considerando a capacidade de um silo desenhado para conter minério de bauxita até este ser processado em alume. O minério parece pó de talco cor-de-rosa e é despejado a partir de uma esteira transportadora no topo do silo. O silo é um cilindro de 30 m de altura com raio de 60 m. A esteira transportadora carrega $1\,500\pi$ m^3/h e o minério mantém um formato cônico cujo raio é 1,5 vez a sua altura.

(a) Se, em um instante t determinado, a pilha tiver 20 m de altura, quanto tempo levará para ela alcançar o topo do silo?

(b) A administração quer saber quanto espaço restará no chão do silo quando a pilha tiver 20 m de altura. Quão rápido está crescendo a área preenchida no chão quando a pilha estiver a essa altura?

(c) Suponha que um carregador comece a remover o minério a uma taxa de 500π m^3/h quando a altura da pilha alcança 27 m. Suponha também que a pilha continue a manter seu formato. Quanto tempo levará para a pilha atingir o topo do silo nessas condições?

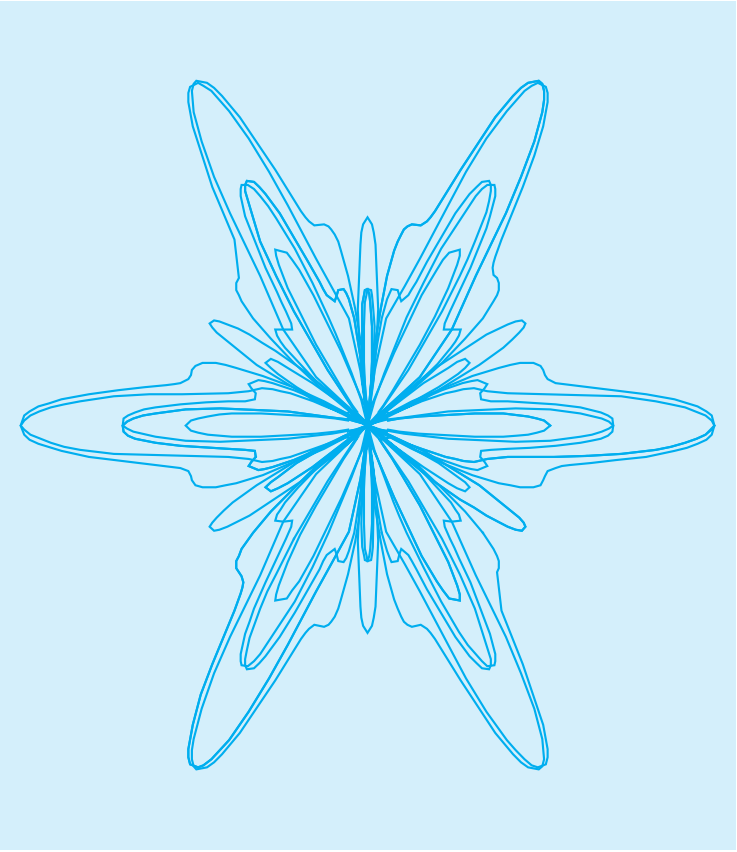
12. Ache a curva que passa pelo ponto $(3, 2)$ e que tem a propriedade de que, se a reta tangente for desenhada em qualquer ponto P na curva, a parte da reta tangente que está no primeiro quadrante será dividida ao meio por P.

13. Lembre-se de que a reta normal a uma curva em um ponto P na curva é a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente em P. Ache a curva que passa pelo ponto $(3, 2)$ e tem a propriedade de que, se a reta normal for desenhada em qualquer ponto na curva, cortará o eixo y sempre no ponto 6.

14. Encontre todas as curvas com a propriedade de que, se a reta normal for desenhada em qualquer ponto P na curva, a parte da reta normal entre P e o eixo x será dividida em duas partes iguais pelo eixo y.

10

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS E COORDENADAS POLARES



As equações paramétricas e as coordenadas polares nos permitem descrever uma grande variedade de novas curvas – algumas práticas, algumas belas, algumas extravagantes, outras estranhas.

Até agora descrevemos as curvas planas dando y como uma função de x [$y = f(x)$] ou x como uma função de y [$x = g(y)$] ou fornecendo uma relação entre x e y que define y implicitamente como uma função de x [$f(x, y) = 0$]. Neste capítulo discutiremos dois novos métodos para descrever as curvas.

Algumas curvas, como a cicloide, são mais bem manipuladas quando x e y forem dados em termos de uma terceira variável t, chamada parâmetro [$x = f(t), y = g(t)$]. Outras curvas, como a cardioide, têm sua descrição mais conveniente se usarmos um novo sistema de coordenadas, denominado sistema de coordenadas polares.

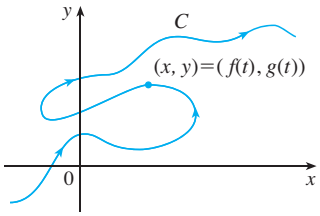


FIGURA 1

Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva C, como mostrado na Figura 1. É impossível descrever C com uma equação do tipo $y = f(x)$ porque C não passa no Teste da Reta Vertical. Mas as coordenadas x e y da partícula são funções do tempo e, assim, podemos escrever $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira conveniente de descrever uma curva e faz surgir a definição a seguir.

Suponha que x e y sejam ambas dadas como funções de uma terceira variável t (denominada **parâmetro**) pelas equações

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(chamadas **equações paramétricas**). Cada valor de t determina um ponto (x, y), que podemos marcar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varia e traça a curva C, que chamamos **curva parametrizada**. O parâmetro t não representa o tempo necessariamente e, de fato, poderíamos usar outra letra em vez de t para o parâmetro. Porém, em muitas aplicações das curvas paramétrizadas, t denota tempo e, portanto, podemos interpretar $(x, y) = (f(t), g(t))$ como a posição de uma partícula no instante t.

EXEMPLO 1 Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUÇÃO Cada valor de t fornece um ponto na curva, como mostrado na tabela. Por exemplo, se $t = 0$, então $x = 0$, $y = 1$ e assim o ponto correspondente é $(0, 1)$. Na Figura 2 marcamos os pontos (x, y) determinados por diversos valores do parâmetro e os unimos para produzir uma curva.

t	x	y
−2	8	−1
−1	3	0
0	0	1
1	−1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

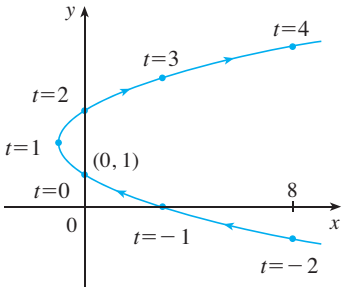


FIGURA 2

Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas se move ao longo da curva na direção das setas quando t aumenta. Observe que os pontos consecutivos marcados na curva aparecem em intervalos de tempo iguais, mas não a distâncias iguais. Isso ocorre porque a partícula desacelera e então acelera à medida que t aumenta.

Parece, a partir da Figura 2, que a curva traçada pela partícula poderia ser uma parábola. Isso pode ser confirmado pela eliminação do parâmetro t, como a seguir. Obtemos $t = y - 1$ a partir da segunda equação e substituímos na primeira equação. Isso fornece

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

e assim a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola $x = y^2 - 4y + 3$. □

■ Esta equação em x e y nos descreve *onde* a partícula esteve, mas não nos diz *quando* ela estava em um ponto específico. As equações paramétricas têm uma vantagem – elas nos dizem quando a partícula estava em determinado ponto. Elas também indicam a *direção* do movimento.

Nenhuma restrição foi colocada no parâmetro t no Exemplo 1, de modo que assumimos que t poderia ser qualquer número real. No entanto, algumas vezes restringimos t a um intervalo finito. Por exemplo, a curva parametrizada

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

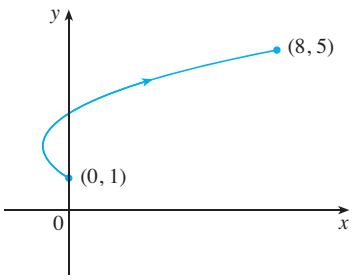


FIGURA 3

mostrada na Figura 3 é a parte da parábola do Exemplo 1 que começa no ponto $(0, 1)$ e termina no ponto $(8, 5)$. A seta indica a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta de 0 até 4.

De forma geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tem **ponto inicial** $(f(a), g(a))$ e **ponto final** $(f(b), g(b))$.

EXEMPLO 2 Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Se marcarmos os pontos, parece que a curva é um círculo. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação de t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Então, o ponto (x, y) se move no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Observe que, neste exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura 4. Quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se move uma vez em torno do círculo, no sentido anti-horário, partindo do ponto $(1, 0)$.

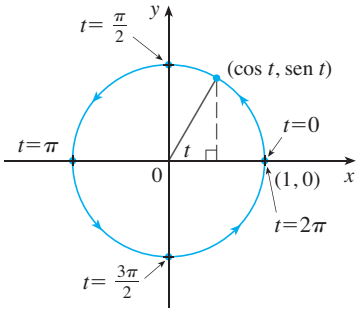


FIGURA 4 □

EXEMPLO 3 Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Novamente temos

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

de modo que as equações paramétricas representam o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Mas quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ começa em $(0, 1)$ e se move duas vezes em torno do círculo no sentido horário, como indicado na Figura 5. □

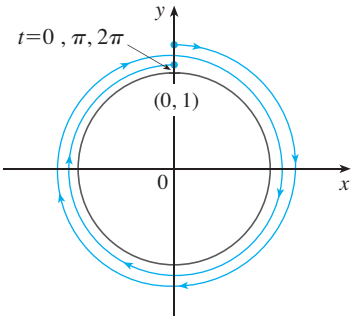


FIGURA 5

Os Exemplos 2 e 3 mostram que diferentes conjuntos de equações paramétricas podem representar a mesma curva. Então distinguimos uma *curva*, que é um conjunto de pontos, e uma *curva parametrizada*, na qual os pontos são percorridos em um modo particular.

EXEMPLO 4 Encontre equações paramétricas para o círculo unitário com centro (h, k) e raio r.

SOLUÇÃO Se tomarmos as equações do círculo unitário no Exemplo 2 e multiplicarmos as expressões para x e y por r, obtemos $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Você pode verificar que estas equações representam um círculo de raio r e centro na origem, percorrido no sentido anti-horário. Fazemos agora uma translação de h unidades na direção do eixo x e de k unidades na direção do eixo y e obtemos equações paramétricas do círculo (Figura 6) com centro (h, k) e raio r:

$$x = h + r \cos t \qquad y = k + r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

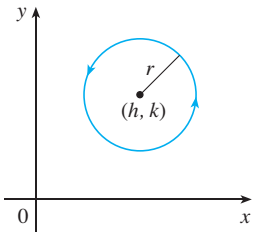


FIGURA 6

$x = h + r \cos t, y = k + r \operatorname{sen} t$

□

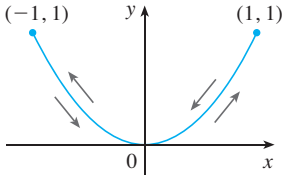


FIGURA 7

EXEMPLO 5 Esboce a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUÇÃO Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ e dessa forma o ponto (x, y) se move na parábola $y = x^2$. Mas observe também que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant x \leqslant 1$, assim as equações paramétricas representam apenas a parte da parábola onde $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Como sen t é periódica, o ponto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se move para a frente e para trás infinitamente ao longo da parábola de $(-1, 1)$ até $(1, 1)$. (Veja a Figura 7.) □

■ A Figura 8 mostra os gráficos de $x = \cos t$, de $y = \operatorname{sen} 2t$ e da curva parametrizada definida por estas equações, bem como a relação entre eles. Esta curva parametrizada é uma das figuras de Lissajous.

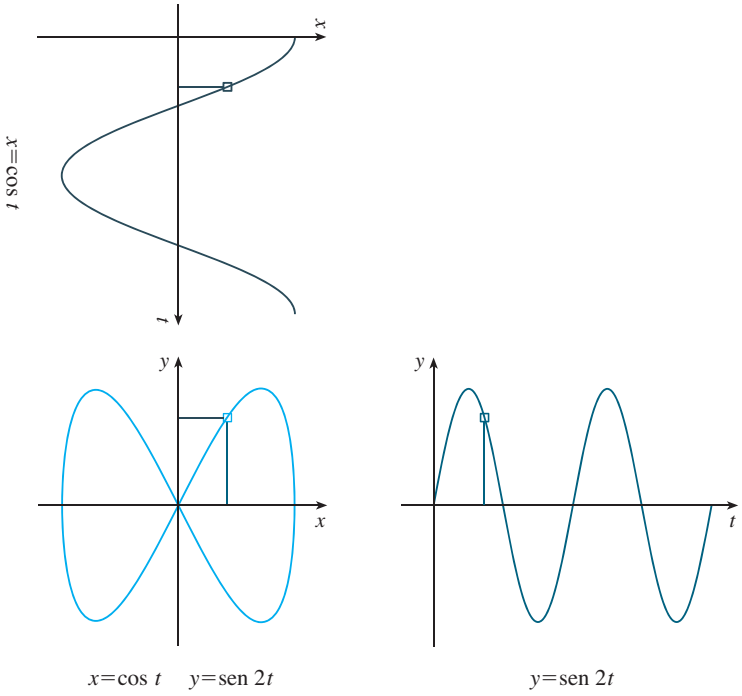


FIGURA 8

FERRAMENTAS GRÁFICAS

A maioria das calculadoras gráficas e dos programas gráficos computacionais pode ser usada para traçar curvas definidas por equações paramétricas. De fato, é instrutivo olhar uma curva parametrizada sendo desenhada por uma calculadora gráfica, porque os pontos são marcados em ordem, à medida que os valores correspondentes do parâmetro aumentam.

EXEMPLO 6 Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUÇÃO Se fizermos o parâmetro ser $t = y$, então teremos as equações

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

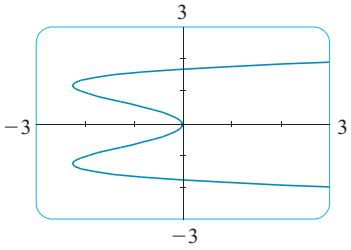


FIGURA 9

Usando essas equações paramétricas para traçar a curva, obtemos a Figura 9. Seria possível resolver a equação dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como quatro funções de x e traçá-las individualmente, mas as equações paramétricas oferecem um método muito mais fácil. □

Em geral, se precisarmos traçar uma equação do tipo $x = g(y)$, poderemos usar as equações paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe também que curvas com equações $y = f(x)$ (aquelas com as quais estamos mais familiarizados – os gráficos de funções) também podem ser consideradas curvas com equações paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Ferramentas gráficas são particularmente úteis quando esboçamos curvas complicadas. Por exemplo, seria virtualmente impossível produzir manualmente as curvas mostradas nas Figuras 10, 11 e 12.

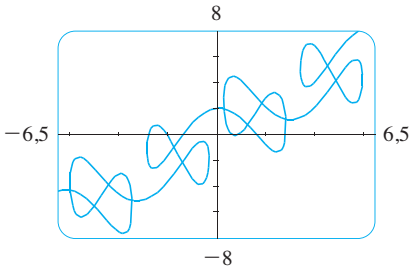


FIGURA 10
$x=t+2\ \text{sen}\ 2t$
$y=t+2\ \cos 5t$

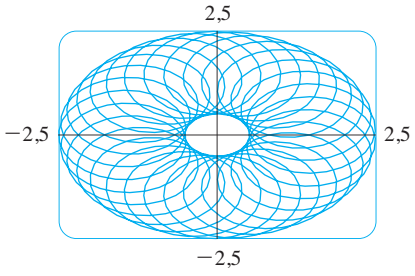


FIGURA 11
$x=1{,}5\ \cos t-\cos 30t$
$y=1{,}5\ \text{sen}\ t-\text{sen}\ 30t$

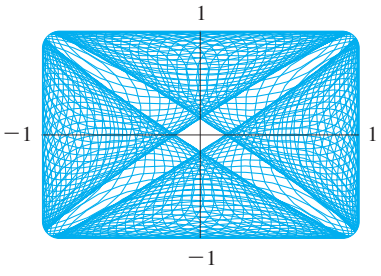


FIGURA 12
$x=\text{sen}(t+\cos 100t)$
$y=\cos(t+\text{sen}\ 100t)$

Um dos usos mais importantes das curvas parametrizadas é no Computer-Aided Design (CAD). No Projeto de Laboratório depois da Seção 10.2, investigaremos curvas parametrizadas especiais, chamadas **curvas de Bézier**, que são usadas amplamente em fabricação, especialmente na indústria automobilística. Essas curvas também são empregadas na especificação de formatos de letras e outros símbolos em impressoras a laser.

A CICLOIDE

EXEMPLO 7 A curva traçada pelo ponto P na borda de um círculo quando ele rola ao longo de uma reta é chamada **cicloide** (veja a Figura 13). Se o círculo tiver raio r e rolar ao longo do eixo x e se uma posição de P for a origem, encontre as equações paramétricas para a cicloide.

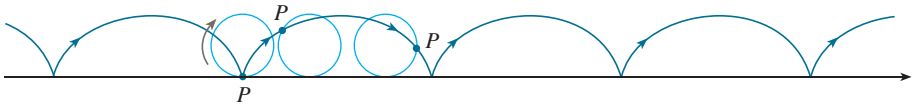


FIGURA 13

SOLUÇÃO Escolhemos como parâmetro o ângulo de rotação θ do círculo ($\theta = 0$ quando P está na origem). Suponha que o círculo girou θ radianos. Como o círculo está em contato com a reta, vemos na Figura 14 que a distância que ele girou a partir da origem é

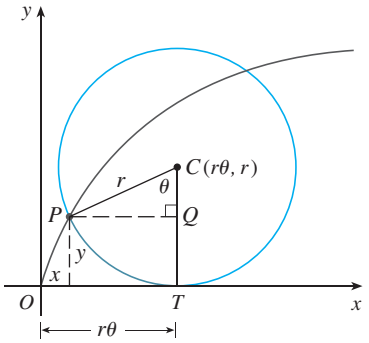


FIGURA 14

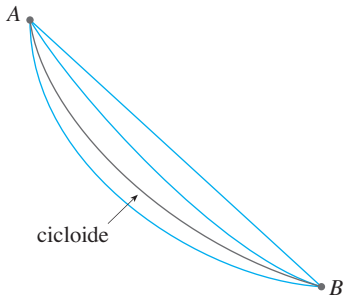


FIGURA 15

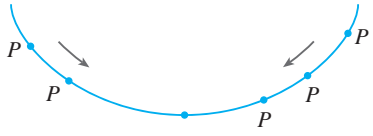


FIGURA 16

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Dessa forma, o centro do círculo será $C(r\theta, r)$. Sejam (x, y) as coordenadas de P. Então, a partir da Figura 14, vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

Portanto, as equações paramétricas da cicloide são

1 $$x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = r(1 - \cos \theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Um arco da cicloide surge de uma rotação do círculo e, assim, é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 14, que ilustra o caso em que $0 < \theta < \pi/2$, podemos ver que essas equações ainda são válidas para outros valores de θ (veja o Exercício 39).

Ainda que seja possível eliminar o parâmetro θ das Equações 1, a equação cartesiana resultante em x e y é muito complicada e não tão é conveniente para trabalhar quanto as equações paramétricas. □

Uma das primeiras pessoas a estudar a cicloide foi Galileu, que propôs que pontes poderiam ser construídas no formato de cicloides e que tentou encontrar a área sob um arco de uma cicloide. Mais tarde essa curva apareceu em conexão com o *problema da braquistócrona*: encontre a curva ao longo da qual uma partícula deslizará no tempo mais curto (sob a influência da gravidade) a partir do ponto A até um ponto mais baixo B não diretamente abaixo de A. O matemático suíço John Bernoulli, que apresentou esse problema em 1696, mostrou que entre todas as curvas possíveis que ligam A e B, como na Figura 15, a partícula levará o menor tempo deslizando de A até B se a curva for um arco invertido de uma cicloide.

O físico holandês Huygens já tinha mostrado que a cicloide é também a solução para o *problema da tautócrona*; isto é, não importa onde a partícula P seja colocada em uma cicloide invertida, ela leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo (veja a Figura 16). Huygens propôs que o pêndulo de relógio (que ele inventou) deveria oscilar em um arco cicloidal, porque então ele levaria o mesmo tempo para fazer uma oscilação completa por um arco maior ou menor.

FAMÍLIAS DE CURVAS PARAMETRIZADAS

EXEMPLO 8 Investigue a família de curvas com equações paramétricas

$$x = a + \cos t \qquad y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$$

O que essas curvas têm em comum? Como muda o formato quando a aumenta?

SOLUÇÃO Usamos uma ferramenta gráfica para produzir os gráficos para os casos $a = -2, -1, -0{,}5, -0{,}2, 0, 0{,}5, 1$ e 2 mostrados na Figura 17. Observe que todas essas curvas (exceto no caso $a = 0$) têm dois ramos e ambos se aproximam da assíntota vertical $x = a$ quando x se aproxima de a a partir da esquerda ou da direita.

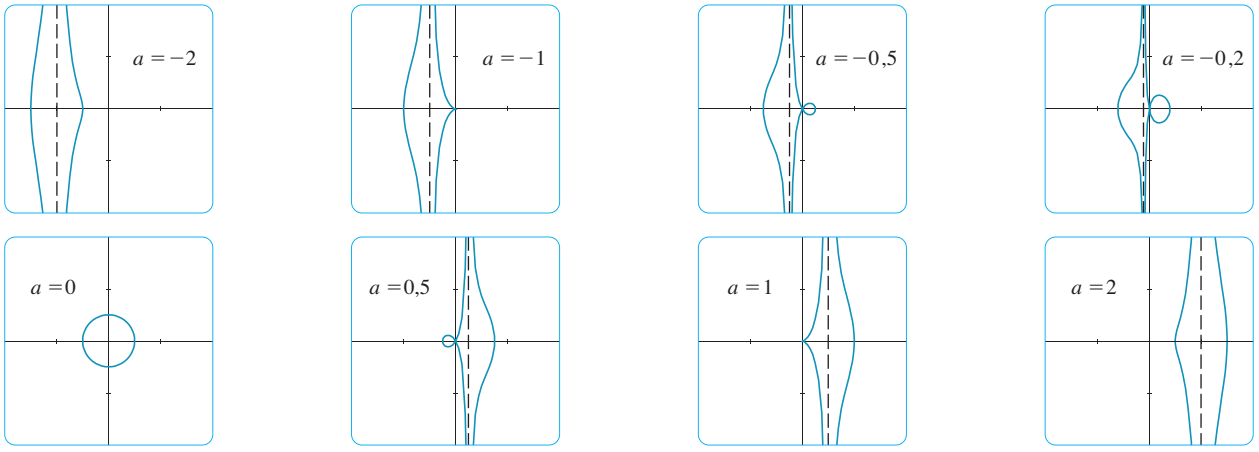


FIGURA 17
Membros da família $x = a + \cos t$, $y = a\,\text{tg}\,t + \text{sen}\,t$, todos traçados na janela retangular $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Quando $a < -1$, ambos os ramos são lisos; mas quando a se aproxima de -1, o ramo direito adquire um formato pontudo, chamado *cúspide*. Para a entre -1 e 0 a cúspide se torna um laço, que se torna maior quando a se aproxima de 0. Quando $a = 0$, ambos os ramos se juntam e formam um círculo (veja o Exemplo 2). Para a entre 0 e 1, o ramo esquerdo tem um laço, que se encolhe para se tornar uma cúspide quando $a = 1$. Para $a > 1$, os ramos se tornam lisos novamente e, quando a aumenta mais ainda, eles se tornam menos curvados. Observe que as curvas com a positivo são reflexões em torno do eixo y das curvas correspondentes com a negativo.

Essas curvas são denominadas **conchoides de Nicomedes**, em homenagem ao antigo estudioso grego Nicomedes. Ele as chamou de conchoides porque o formato de seus ramos lembra uma concha. □

10.1 EXERCÍCIOS

1-4 Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

1. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 4t, \quad 0 \leq t \leq 5$

2. $x = 2\cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3. $x = 5\,\text{sen}\,t, \quad y = t^2, \quad -\pi \leq t \leq \pi$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^{t} - t, \quad -2 \leq t \leq 2$

5-10

(a) Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

(b) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

5. $x = 3t - 5, \quad y = 2t + 1$

6. $x = 1 + t, \quad y = 5 - 2t, \quad -2 \leq t \leq 3$

7. $x = t^2 - 2, \quad y = 5 - 2t, \quad -3 \leq t \leq 4$

8. $x = 1 + 3t, \quad y = 2 - t^2$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

10. $x = t^2, \quad y = t^3$

11-18

(a) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

(b) Esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

11. $x = \text{sen}\,\theta, \quad y = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

12. $x = 4\cos\theta, \quad y = 5\,\text{sen}\,\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

13. $x = \text{sen}\,t, \quad y = \text{cossec}\,t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = \sec\theta, \quad y = \text{tg}\,\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

15. $x = e^{t}, \quad y = e^{-t}$

16. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 1$

17. $x = \text{senh}\,t, \quad y = \cosh t$

18. $x = 2\cosh t, \quad y = 5\,\text{senh}\,t$

19-22 Descreva o movimento de uma partícula com posição (x, y) quando t varia no intervalo dado.

19. $x = \cos \pi t, \quad y = \operatorname{sen} \pi t, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

20. $x = 2 + \cos t, \quad y = 3 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

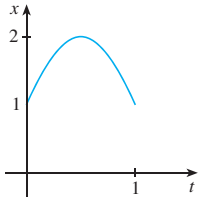
21. $x = 5 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

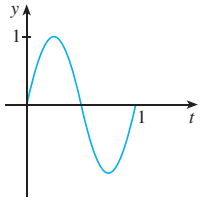
22. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

23. Suponha que uma curva seja dada pela equação paramétrica $x = f(t), y = g(t)$ onde a imagem de f é $(1, 4)$ e a imagem de g é $(2, 3)$. O que você pode dizer sobre a curva?

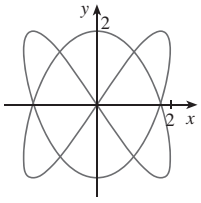
24. Associe os gráficos das equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ em (a)–(d) com as curvas paramétricas rotuladas de I-IV. Justifique suas escolhas.

(a)

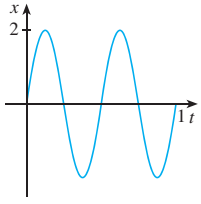


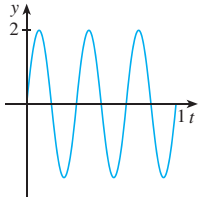


I

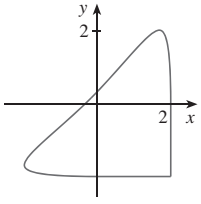


(b)

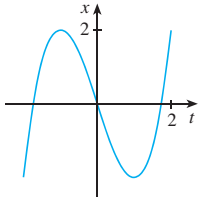


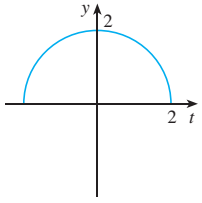


II

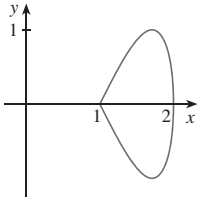


(c)

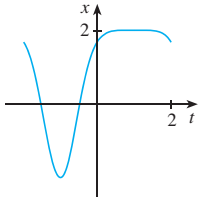


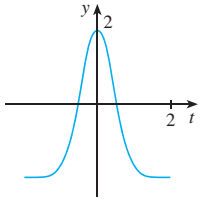


III

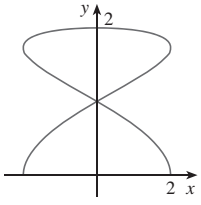


(d)



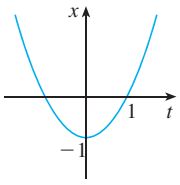


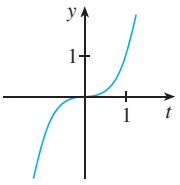
IV



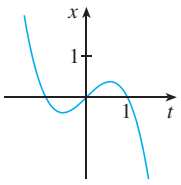
25-27 Use os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para esboçar a curva paramétrica $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Indique com setas a direção na qual a curva é traçada à medida que t aumenta.

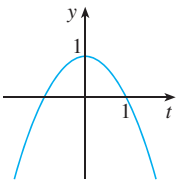
25.



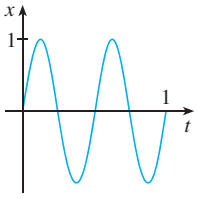


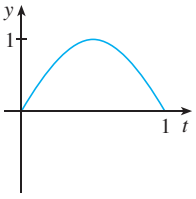
26.





27.





28. Associe as equações paramétricas aos gráficos de I–VI. Justifique sua escolha. (Não use uma ferramenta gráfica.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

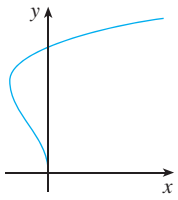
(c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

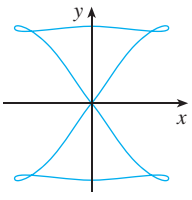
(e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$,

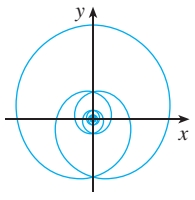
I



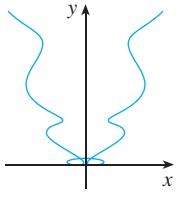
II



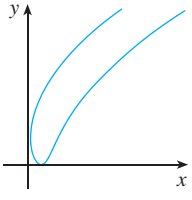
III



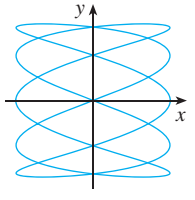
IV



V



VI



29. Trace a curva $x = y - 3y^3 + y^5$.

30. Trace as curvas $y = x^5$ e $x = y(y - 1)^2$ e encontre seus pontos de intersecção, com precisão de uma casa decimal.

31. (a) Mostre que as equações paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

onde $0 \leqslant t \leqslant 1$ descrevem o segmento de reta que une os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encontre as equações paramétricas para representar o segmento de reta de $(-2, 7)$ até $(3, -1)$.

32. Usando uma ferramenta gráfica e o resultado do Exercício 31(a), desenhe o triângulo com vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 5)$.

33. Encontre equações paramétricas para a trajetória de uma partícula que se move ao longo do círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ da seguinte maneira:

(a) Uma vez no sentido horário, a partir de $(2, 1)$.

(b) Três vezes no sentido anti-horário, a partir de $(2, 1)$.

(c) Meia-volta no sentido anti-horário, a partir de $(0, 3)$.

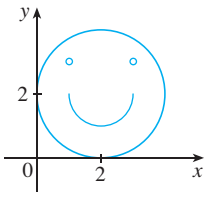
34. (a) Encontre equações paramétricas para a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugestão*: Modifique as equações do círculo no Exemplo 2.]

(b) Use as equações paramétricas para traçar a elipse quando $a = 3$ e $b = 1, 2, 4$ e 8.

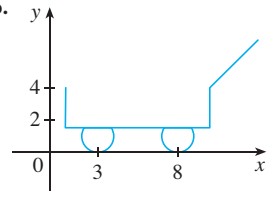
(c) Como muda o formato da elipse quando b varia?

35–36 Use uma calculadora gráfica ou um computador para reproduzir a figura.

35.



36.



37–38 Compare as curvas representadas pelas equações paramétricas. Em que elas diferem?

37. (a) $x = t^3$, $y = t^2$ (b) $x = t^6$, $y = t^4$

(c) $x = e^{-3t}$, $y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t$, $y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t$, $y = \sec^2 t$

(c) $x = e^t$, $y = e^{-2t}$

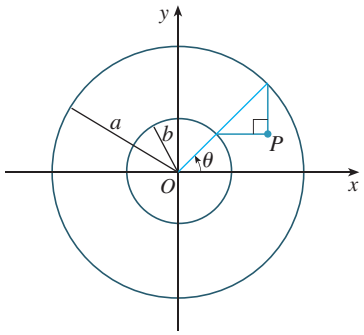
39. Deduza as Equações 1 para o caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Seja P um ponto a uma distância d do centro de um círculo de raio r. A curva traçada por P quando o círculo gira sobre uma reta é chamada **trocoide**. (Pense no movimento de um ponto sobre um raio de uma roda de bicicleta.) A cicloide é um caso especial de trocoide com $d = r$. Usando o mesmo parâmetro θ que para a cicloide e supondo que a reta seja o eixo x e $\theta = 0$ quando P está em um de seus pontos mais baixos, mostre que as equações paramétricas para a trocoide são

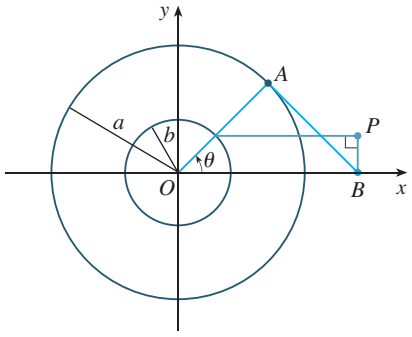
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Esboce a trocoide para os casos $d < r$ e $d > r$.

41. Se a e b forem números fixos, encontre equações paramétricas para a curva que consiste de todas as posições possíveis do ponto P na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. Então elimine o parâmetro e identifique a curva.



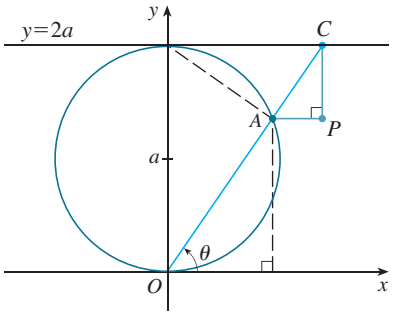
42. Se a e b forem números fixos, encontre as equações paramétricas para a curva que consiste de todas as posições possíveis do ponto P na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. Então elimine o parâmetro e identifique a curva. O segmento de reta AB é tangente ao círculo maior.



43. Uma curva, denominada **bruxa de Maria Agnesi**, consiste em todas as possíveis posições do ponto P na figura. Mostre que equações paramétricas para essa curva podem ser escritas como

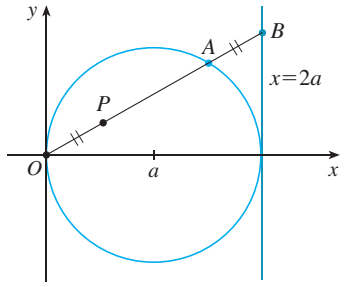
$$x = 2a \operatorname{cotg} \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Esboce a curva.



44. (a) Encontre as equações paramétricas para o conjunto de todos os pontos P, como mostrado na figura, tais que $|OP| = |AB|$. Esboce a curva. (Essa curva é chamada **cissoide de Diocles**, em homenagem ao estudioso grego Diocles, que introduziu a cissoide como um método gráfico para a construção da aresta de um cubo cujo volume é o dobro daquele de um cubo dado.)

(b) Use a descrição geométrica da curva para desenhar um esboço das curvas à mão. Verifique seu trabalho usando as equações paramétricas para traçar a curva.



45. Suponha que a posição de uma partícula no instante t seja dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

e que a posição de uma segunda partícula seja dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Trace as trajetórias de ambas as partículas. Quantos pontos de intersecção existem?

(b) Alguns desses pontos de intersecção são *pontos de colisão*? Em outras palavras, essas partículas alguma vez estão no mesmo lugar ao mesmo tempo? Se isso ocorrer, encontre os pontos de colisão.

(c) Descreva o que acontecerá se a trajetória da segunda partícula for dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Se um projétil for atirado com uma velocidade inicial v_0 metros por segundo com um ângulo α acima da horizontal e a resistência do ar for considerada desprezível, então sua posição depois de t segundos é dada pelas equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

onde g é a aceleração da gravidade (9,8 m/s^2).

(a) Se uma arma for disparada com $\alpha = 30°$ e $v_0 = 500$ m/s, quando a bala atingirá o solo? A que distância da arma a bala atingirá o solo? Qual a altura máxima alcançada pela bala?

(b) Use uma ferramenta gráfica para verificar suas respostas na parte (a). Então trace a trajetória do projétil para vários outros valores do ângulo α para ver onde a bala atinge o solo. Resuma o que você encontrou.

(c) Mostre que a trajetória é parabólica, eliminando o parâmetro.

47. Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. Como muda o formato quando c aumenta? Ilustre, traçando vários membros da família.

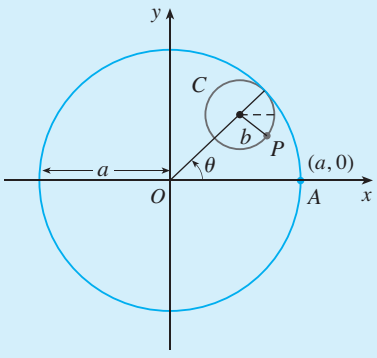
48. As **curvas de catástrofe em forma de cauda de andorinha** são definidas pelas equações paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Trace várias dessas curvas. Quais as características que essas curvas têm em comum? Como variam quando c aumenta?

49. As curvas com equações $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ são chamadas **figuras de Lissajous**. Investigue como essas curvas mudam quando a, b e n variam. (Tome n como um inteiro positivo.)

50. Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} ct$, onde $c > 0$. Comece tomando c como um inteiro positivo e veja o que acontece com a forma à medida que c cresce. A seguir, explore algumas das possibilidades que ocorrem quando c é uma fração.

PROJETO DE LABORATÓRIO

ROLANDO CÍRCULOS AO REDOR DE CÍRCULOS



Neste projeto investigaremos as famílias de curvas, chamadas *hipocicloides* e *epicicloides*, que são geradas pelo movimento de um ponto em um círculo que rola dentro ou fora de outro círculo.

1. Uma **hipocicloide** é uma curva traçada por um ponto fixo P em um círculo C de raio b quando C rola dentro de um círculo com centro O e raio a. Mostre que, se a posição inicial de P for $(a, 0)$ e o parâmetro θ for escolhido como na figura, então as equações paramétricas da hipocicloide são

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \qquad y = (a - b)\operatorname{sen}\theta + b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

2. Use uma ferramenta gráfica para desenhar os gráficos de hipocicloides com a um inteiro positivo e $b = 1$. Como o valor de a afeta o gráfico? Mostre que, se tomarmos $a = 4$, então as equações paramétricas da hipocicloide se reduzirão a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\operatorname{sen}^3\theta$$

Essa curva é denominada **hipocicloide de quatro cúspides**, ou **astroide**.

3. Agora tente $b = 1$ e a $= n/d$, uma fração onde n e d não têm fator comum. Primeiro faça $n = 1$ e tente determinar graficamente o efeito do denominador d no formato do gráfico. Então faça n variar mantendo d constante. O que acontece quando $n = d + 1$?

4. O que acontece se $b = 1$ e a for irracional? Experimente com um número irracional do tipo $\sqrt{2}$ ou $e - 2$. Tome valores cada vez maiores para θ e especule sobre o que deveria acontecer se traçássemos a hipocicloide para todos os valores reais de θ.
5. Se o círculo C rolar do lado de fora de um círculo fixo, a curva traçada por P será chamada **epicicloide**. Encontre equações paramétricas para a epicicloide.
6. Investigue os possíveis formatos para a epicicloide. Use métodos similares aos Problemas 2-4.

10.2 CÁLCULO COM CURVAS PARAMETRIZADAS

Tendo visto como representar as curvas por equações paramétricas, vamos agora aplicar os métodos de cálculo a essas curvas parametrizadas. Em particular, resolveremos problemas envolvendo tangentes, área, comprimento de arco e área de superfície.

TANGENTES

Na seção anterior, vimos que algumas curvas definidas por equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ podem também ser expressas, pela eliminação do parâmetro, na forma $y = F(x)$. (Veja o Exercício 67 para as condições gerais sob as quais isso é possível.) Se substituirmos $x = f(t)$ e $y = g(t)$ na equação $y = F(x)$, obteremos

$$g(t) = F(f(t))$$

assim, se g, F e f forem deriváveis, a Regra da Cadeia fornece

$$g'(t) = F'(f(t))\,f'(t) = F'(x)\,f'(t)$$

Se $f'(t) \neq 0$, podemos isolar $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{1}$$

Como a inclinação da tangente à curva $y = F(x)$ em $(x, F(x))$ é $F'(x)$, a Equação 1 nos permite encontrar tangentes a curvas paramétricas sem ter de eliminar o parâmetro. Usando a notação de Leibniz, podemos reescrever a Equação 1 de uma maneira fácil de lembrar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{se } \frac{dx}{dt} \neq 0 \tag{2}$$

■ Se pensarmos em uma curva parametrizada sendo traçada pelo movimento de uma partícula, então dy/dt e dx/dt são as velocidades vertical e horizontal da partícula e a Fórmula 2 diz que a inclinação da tangente é a razão dessas velocidades.

Podemos ver da Equação 2 que a curva tem uma tangente horizontal quando $dy/dt = 0$ (desde que $dx/dt \neq 0$) e tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 0$ (desde que $dy/dt \neq 0$). Essa informação é útil para esboçar as curvas parametrizadas.

Como sabemos do Capítulo 4, é também útil considerar d^2y/dx^2. Isso pode ser encontrado mudando y por dy/dx na Equação 2:

⊘ Observe que $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

EXEMPLO 1 Uma curva C é definida pelas equações paramétricas $x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$.
(a) Mostre que C tem duas tangentes no ponto $(3, 0)$ e encontre suas equações.
(b) Encontre os pontos em C onde a tangente é horizontal ou vertical.
(c) Determine onde a curva sobe e desce e onde sua concavidade é para cima ou para baixo.
(d) Esboce a curva.

SOLUÇÃO
(a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ quando $t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$. Portanto, o ponto $(3, 0)$ em C surge de dois valores do parâmetro, $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. Isso indica que C intercepta a si própria em $(3, 0)$. Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

a inclinação da tangente quando $t = \pm\sqrt{3}$ é $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$; assim, as equações das tangentes em $(3, 0)$ são

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

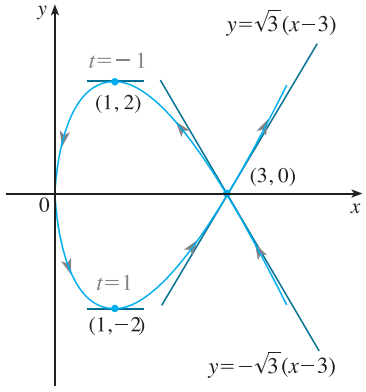


FIGURA 1

(b) C tem uma tangente horizontal quando $dy/dx = 0$, isto é, quando $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Uma vez que $dy/dt = 3t^2 - 3$, isso ocorre quando $t^2 = 1$, isto é, $t = \pm 1$. Os pontos correspondentes em C são $(1, -2)$ e $(1, 2)$. C tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 2t = 0$, isto é, $t = 0$. (Aqui, observe que $dy/dt \neq 0$.) O ponto correspondente em C é $(0, 0)$.
(c) Para determinar a concavidade, calculamos a segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Então a concavidade da curva é para cima quando $t > 0$ e para baixo quando $t < 0$.
(d) Usando as informações das partes (b) e (c), esboçamos C na Figura 1. □

EXEMPLO 2
(a) Encontre a tangente à cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$, no ponto onde $\theta = \pi/3$. (Veja o Exemplo 7, na Seção 10.1.)
(b) Em que pontos a tangente é horizontal? Quando é vertical?

SOLUÇÃO
(a) A inclinação da reta tangente é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Quando $\theta = \pi/3$, temos

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

e
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Portanto, a inclinação da tangente é $\sqrt{3}$ e sua equação é

$$y = \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{3}x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

A tangente está esboçada na Figura 2.

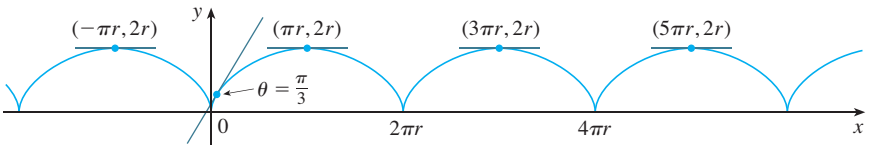


FIGURA 2

(b) A tangente é horizontal quando $dy/dx = 0$, o que ocorre quando $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $1 - \cos\theta \neq 0$, isto é, $\theta = (2n - 1)\pi$, n um inteiro. O ponto correspondente na cicloide é $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Quando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ quanto $dy/d\theta$ são 0. A partir do gráfico parece que existem tangentes verticais naqueles pontos. Podemos verificar isso usando a Regra de L'Hôspital, como a seguir:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Um cálculo similar mostra que $dy/dx \to -\infty$ quando $\theta \to 2n\pi^-$; assim, realmente existem tangentes verticais quando $\theta = 2n\pi$, isto é, quando $x = 2n\pi r$. □

ÁREAS

Sabemos que a área sob uma curva $y = F(x)$ de a até b é $A = \int_a^b F(x)\,dx$, em que $F(x) \geqslant 0$.

Se a curva for dada por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, então podemos deduzir uma fórmula de área pelo uso da Regra da Substituição para Integrais Definidas como a seguir:

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt \qquad \left[\text{ou} \quad \int_\beta^\alpha g(t)\,f'(t)\,dt\right]$$

■ Os limites de integração para t são encontrados da maneira usual com a Regra da Substituição. Quando $x = a$, t é α ou β. Quando $x = b$, t é o outro valor.

EXEMPLO 3 Encontre a área sob um arco da cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

(Veja a Figura 3.)

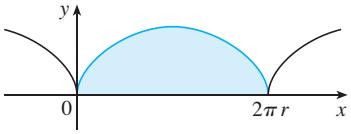


FIGURA 3

SOLUÇÃO Um arco da cicloide é dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Usando a Regra da Substituição com $y = r(1 - \cos\theta)$ e $dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$, temos

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)r(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 - 2\cos\theta)\right]d\theta$$

$$= r^2\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi} = r^2\left(\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2$$ □

■ O resultado do Exemplo 3 diz que a área sob um arco da cicloide é três vezes a área do círculo que rola e gera a cicloide (veja o Exemplo 7 na Seção 10.1). Galileu conjecturou esse resultado, mas este foi demonstrado inicialmente pelos matemáticos francês, Roberval, e italiano, Torricelli.

COMPRIMENTO DE ARCO

Já sabemos como encontrar o comprimento L de uma curva C dada na forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. A Fórmula 8.1.3, no Volume I, diz que, se F' for contínua, então

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \boxed{3}$$

Suponha que C também possa ser descrita pelas equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, em que $dx/dt = f'(t) > 0$. Isso significa que C é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando t aumenta de α até β e $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$. Colocando a Fórmula 2 na Fórmula 3 e usando a Regra da Substituição, obtemos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

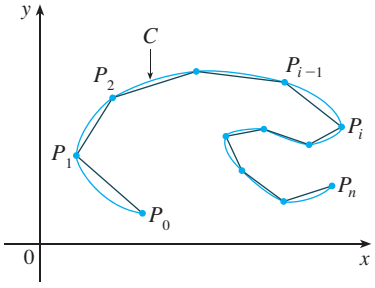


FIGURA 4

Como $dx/dt > 0$, temos

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \boxed{4}$$

Mesmo que C não possa ser expressa na forma $y = F(x)$, a Fórmula 4 ainda é válida, mas a obtemos por aproximações poligonais. Dividimos o intervalo do parâmetro $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos de comprimentos iguais Δt. Se $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ forem as extremidades desses subintervalos, então $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ são as coordenadas dos pontos $P_i(x_i, y_i)$ que estão em C e a poligonal com vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ aproxima C (veja a Figura 4).

Como na Seção 8.1, no Volume I, definimos o comprimento L de C como o limite dos comprimentos dessas poligonais aproximadoras quando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

O Teorema do Valor Médio, quando aplicado a f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, fornece um número t_i^* em (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Se fizermos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, essa equação se torna

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\, \Delta t$$

Analogamente, quando aplicado a g, o Teorema do Valor Médio fornece um número t_i^{**} em (t_{i-1}, t_i), de forma que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\, \Delta t$$

Portanto,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2}$$

$$= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t$$

e assim,

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t \qquad \boxed{5}$$

A soma em (5) se parece com a soma de Riemann da função $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$, contudo, não é exatamente uma soma de Riemann, porque em geral $t_i^* \neq t_i^{**}$. Mesmo assim, se f'

e g' forem contínuas, pode ser mostrado que o limite em (5) é o mesmo que se t_i^* e t_i^{**} fossem iguais; ou seja,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Então, usando a notação de Leibniz, temos o seguinte resultado, que possui a mesma forma de (4).

6 TEOREMA Se uma curva C for descrita pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C for percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de α até β, então o comprimento de C é

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que a fórmula no Teorema 6 é consistente com as fórmulas gerais $L = \int ds$ e $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ da Seção 8.1, no Volume I.

EXEMPLO 4 Se usarmos a representação do círculo unitário dada no Exemplo 2, na Seção 10.1,

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

então $dx/dt = -\operatorname{sen} t$ e $dy/dt = \cos t$; assim, o Teorema 6 fornece

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como esperado. Se, por outro lado, utilizarmos a representação dada no Exemplo 3 na Seção 10.1,

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

então $dx/dt = 2\cos 2t$, $dy/dt = -2\operatorname{sen} 2t$ e a integral do Teorema 6 fornece

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 2t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$$

Observe que a integral fornece o dobro do comprimento do arco do círculo, porque quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto $(\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ percorre o círculo duas vezes. Em geral, ao encontrarmos o comprimento da curva C a partir de uma representação paramétrica, temos de tomar cuidado para ter a certeza de que C é percorrida apenas uma vez quando t aumenta de α até β. □

EXEMPLO 5 Encontre o comprimento de um arco da cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$.

SOLUÇÃO Do Exemplo 3 vemos que um arco é descrito pelo intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\operatorname{sen}\theta$$

temos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

■ O resultado do Exemplo 5 diz que o comprimento de um arco de uma cicloide é oito vezes o raio do círculo gerador (veja a Figura 5). Isso foi demonstrado pela primeira vez em 1658 por *sir* Christopher Wren, que depois se tornou o arquiteto da Catedral de São Paulo, em Londres.

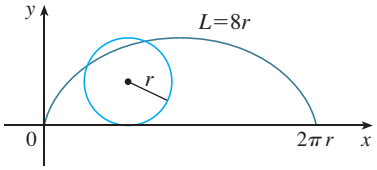


FIGURA 5

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

Para calcular essa integral, usamos a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ com $\theta = 2x$, que fornece $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, temos $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$, e assim $\operatorname{sen}(\theta/2) \geqslant 0$. Portanto,

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\,|\operatorname{sen}(\theta/2)| = 2\operatorname{sen}(\theta/2)$$

e, dessa forma,

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\left[-2\cos(\theta/2)\right]_0^{2\pi}$$
$$= 2r[2 + 2] = 8r \qquad \square$$

ÁREA DA SUPERFÍCIE

Da mesma maneira como para o comprimento do arco, podemos adaptar a Fórmula 8.2.5, no Volume I, para obter uma fórmula para a área da superfície. Se a curva dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, girar em torno do eixo x, onde f', g' são contínuas e $g(t) \geqslant 0$, então a área da superfície resultante é dada por

7

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

As fórmulas simbólicas gerais $S = \int 2\pi y\, ds$ e $S = \int 2\pi x\, ds$ (Fórmulas 8.2.7 e 8.2.8, no Volume I, ainda são válidas, mas para as curvas parametrizadas usamos

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EXEMPLO 6 Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

SOLUÇÃO A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

em torno do eixo x. Portanto, a partir da Fórmula 7, temos

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$
$$= 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$
$$= 2\pi r^2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2 \qquad \square$$

10.2 EXERCÍCIOS

1-2 Encontre dy/dx.

1. $x = t - t^3$, $y = 2 - 5t$ **2.** $x = te^t$, $y = t + e^t$

3-6 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto correspondente ao valor do parâmetro dado.

3. $x = t^2 + t$, $y = t^2 - t$; $t = 0$

4. $x = t - t^{-1}$, $y = 1 + t^2$; $t = 1$

5. $x = e^{\sqrt{t}}$, $y = t - \ln t^2$; $t = 1$

6. $x = t\operatorname{sen} t$, $y = t\cos t$; $t = \pi$

7-8 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado por dois métodos: (a) sem eliminar o parâmetro e (b) primeiro eliminando o parâmetro.

7. $x = 1 + \ln t$, $y = t^2 + 2$; $(1, 3)$

8. $x = \operatorname{tg}\theta$, $y = \sec\theta$; $(1, \sqrt{2})$

9-10 Encontre uma equação da(s) tangente(s) à curva no ponto dado. A seguir, trace a curva e a(s) tangente(s)

9. $x = 6\operatorname{sen} t$, $y = t^2 + t$; $(0, 0)$

10. $x = \cos t + \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t; \quad (-1, 1)$

11–16 Encontre dy/dx e d^2y/dx^2. Para quais valores de t a curva é côncava para cima?

11. $x = 4 + t^2, \quad y = t^2 + t^3$

12 $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

13. $x = t - e^t, \quad y = t + e^{-t}$

14. $x = t + \ln t, \quad y = t - \ln t$

15. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

17–20 Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical. Se você tiver uma ferramenta gráfica, trace a curva.

17. $x = 10 - t^2, \quad y = t^3 - 12t$

18. $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad y = 2t^3 + 3t^2 + 1$

19. $x = 2 \cos \theta, \quad y = \operatorname{sen} 2\theta$

20. $x = \cos 3\theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta$

21. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais à esquerda na curva $x = t - t^6, y = e^t$. A seguir, use o cálculo para encontrar as coordenadas exatas.

22. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo e do ponto mais à esquerda na curva $x = t^4 - 2t, y = t + t^4$. A seguir, encontre as coordenadas exatas.

23–24 Trace a curva em uma janela retangular que mostre todos os aspectos importantes da curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Mostre que a curva $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t \cos t$ tem duas tangentes em $(0, 0)$ e encontre suas equações. Esboce a curva.

26. Trace a curva $x = \cos t + 2 \cos 2t, y = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$ para descobrir onde ela intercepta a si mesma. A seguir, encontre equações para ambas as tangentes nesse ponto.

27. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à trocoide $x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta, y = r - d \cos \theta$ em termos de θ. (Veja o Exercício 40, na Seção 10.1.)
(b) Mostre que, se $d < r$, então a trocoide não tem uma tangente vertical.

28. (a) Encontre a inclinação da tangente à astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$ em termos de θ. (As astroides foram exploradas no Projeto de Laboratório na página 597.)
(b) Em que pontos a tangente é horizontal ou vertical?
(c) Em que pontos a tangente tem inclinação 1 ou -1?

29. Em quais pontos na curva $x = 2t^3, y = 1 + 4t - t^2$, a reta tangente tem inclinação 1?

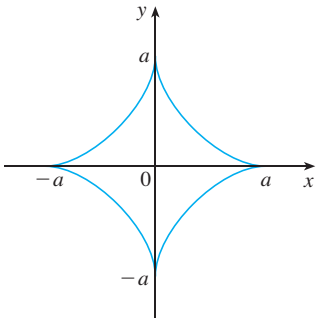
30. Encontre as equações das tangentes à curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto $(4, 3)$.

31. Use as equações paramétricas de uma elipse, $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, para calcular a área limitada por essas curvas.

32. Calcule a área limitada pela curva $x = t^2 - 2t, y = \sqrt{t}$ e pelo eixo y.

33. Encontre a área limitada pelo eixo x e pela curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

34. Calcule a área da região limitada pela astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$. (As astroides foram exploradas no Projeto de Laboratório na página 597.)



35. Encontre a área sob um arco da trocoide do Exercício 40, na Seção 10.1, para o caso $d < r$.

36. Seja $\mathcal{R}$ a região dentro do laço da curva no Exemplo 1.
(a) Calcule a área de $\mathcal{R}$.
(b) Se $\mathcal{R}$ girar em torno do eixo x, encontre o volume do sólido resultante.
(c) Encontre o centroide de $\mathcal{R}$.

37–40 Escreva uma integral que represente o comprimento da curva. A seguir, use sua calculadora para encontrar o comprimento com precisão de quatro casas decimais.

37. $x = t - t^2, \quad y = \frac{4}{3} t^{3/2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 1 + e^t, \quad y = t^2, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

39. $x = t + \cos t, \quad y = t - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

40. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t + 1}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 5$

41–44 Calcule o comprimento da curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

42. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

43. $x = \dfrac{t}{1 + t}, \quad y = \ln(1 + t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

44. $x = 3 \cos t - \cos 3t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

45–47 Trace a curva e calcule seu comprimento.

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

46. $x = \cos t + \ln(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t), \quad y = \operatorname{sen} t, \quad \pi/4 \leqslant t \leqslant 3\pi/4$

47. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad -8 \leqslant t \leqslant 3$

48. Ache o comprimento do laço da curva $x = 3t - t^3, y = 3t^2$.

49. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento da curva $x = t - e^t, y = t + e^t, -6 \leqslant t \leqslant 6$.

50. No Exercício 43, na Seção 10.1, foi pedido que você deduzisse as equações paramétricas $x = 2a \operatorname{cotg} \theta$, $y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$ para a curva chamada bruxa de Maria Agnesi. Use a Regra de Simpson com $n = 4$ para estimar o comprimento do arco dessa curva dada por $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

51-52 Encontre a distância percorrida por uma partícula com posição (x, y) quando t varia em um dado intervalo de tempo. Compare com o comprimento da curva.

51. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq 1 \leq 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

53. Mostre que o comprimento total da elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, $a > b > 0$, é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

onde e é a excentricidade da elipse $\left(e = c/a, \text{ com } c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

54. Calcule o comprimento total da astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$ com $a > 0$.

SCA **55.** (a) Trace a **epitrocoide** com equações

$$x = 11 \cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}(11t/2)$$

Qual intervalo do parâmetro fornece a curva completa?

(b) Use seu SCA para calcular o comprimento aproximado dessa curva.

SCA **56.** Uma curva chamada **espiral de Cornu** é definida pelas equações paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$
$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

onde C e S são as funções de Fresnel que foram introduzidas no Capítulo 5.

(a) Trace essa curva. O que acontece quando $t \to \infty$ e $t \to -\infty$?

(b) Calcule o comprimento da espiral de Cornu a partir da origem até o ponto com o valor do parâmetro t.

57-58 Escreva, mas não calcule, uma integral que represente a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

57. $x = 1 + te^t, \quad y = (t^2 + 1), \quad 0 \leq t \leq 1$

58. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq \pi/3$

59-61 Encontre a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

59. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

60. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

61. $x = a \cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

62. Trace a curva

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta \qquad y = 2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta$$

Se essa curva girar em torno do eixo x, calcule a área da superfície resultante. (Use o gráfico para ajudar a encontrar o intervalo correto do parâmetro.)

63. Se a curva

$$x = t + t^3 \qquad y = t - \frac{1}{t^2} \qquad 1 \leq t \leq 2$$

girar em torno do eixo x, estime a área da superfície resultante com precisão de três casas decimais.

64. Se o arco da curva no Exercício 50 girar em torno do eixo x, estime a área da superfície resultante usando a Regra de Simpson com $n = 4$.

65-66 Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leq t \leq 1$

67. Se f' for contínua e $f'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$, mostre que a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, pode ser colocada na forma $y = F(x)$. [*Sugestão*: Mostre que f^{-1}existe.]

68. Use a Fórmula 2 para deduzir a Fórmula 7 a partir da Fórmula 8.2.5, no Volume I, para o caso no qual a curva pode ser representada na forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$.

69. A **curvatura** no ponto P da curva é definida como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

onde ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente em P, como mostrado na figura. Então, a curvatura é o valor absoluto da taxa de variação de ϕ em relação ao comprimento de arco. Esta pode ser considerada uma medida da taxa de variação de direção da curva em P e vai ser estudada em mais detalhes no Capítulo 13.

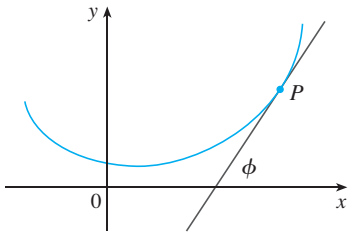
(a) Para a curva parametrizada $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduza a fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t, assim $\dot{x} = dx/dt$. [*Sugestão*: Use $\phi = \operatorname{tg}^{-1}(dy/dx)$ e a Equação 2 para encontrar $d\phi/dt$. Então, use a Regra da Cadeia para achar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando uma curva $y = f(x)$ como a curva parametrizada $x = x$, $y = f(x)$, com o parâmetro x, mostre que a fórmula na parte (a) se torna

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



70. (a) Use a fórmula no Exercício 69(b) para encontrar a curvatura da parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

(b) Em que ponto essa parábola tem curvatura máxima?

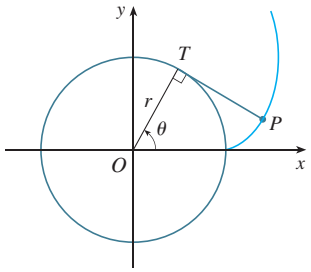
71. Use a fórmula no Exercício 69(a) para calcular a curvatura da cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ no topo de um dos arcos.

72. (a) Mostre que a curvatura em cada ponto de uma reta é $\kappa = 0$.

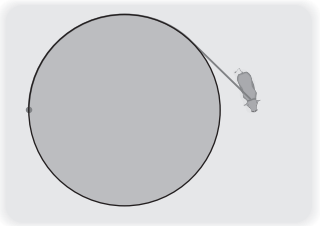
(b) Mostre que a curvatura em cada ponto do círculo de raio r é $\kappa = 1/r$.

73. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, se a posição inicial de P for $(r, 0)$ e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Uma vaca é amarrada a um silo com raio r por uma corda comprida o suficiente para alcançar apenas o outro lado do silo. Calcule a área disponível para a vaca pastar.



PROJETO DE LABORATÓRIO

CURVAS DE BÉZIER

As **curvas de Bézier** são usadas em Computer-Aided Design (CAD) e têm esse nome em homenagem a Pierre Bézier (1910-1999), matemático francês que trabalhava na indústria automobilística. Uma curva cúbica de Bézier é determinada por quatro *pontos de controle*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, e é definida pelas equações paramétricas

$$x = x_0(1-t)^3 - 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1-t)^3 - 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + x_3t^3$$

para as quais $0 \leq t \leq 1$. Observe que, quando $t = 0$, temos $(x, y) = (x_0, y_0)$, e quando $t = 1$, obtemos $(x, y) = (x_3, y_3)$; assim, a curva começa em P_0 e termina em P_3.

1. Trace a curva de Bézier com os pontos de controle $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ e $P_3(40, 5)$. Então, no mesmo gráfico, trace os segmentos de reta P_0P_1, P_1P_2 e P_2P_3. (O Exercício 31, na Seção 10.1, mostra como fazer isso.) Observe que os pontos de controle intermediários P_1 e P_2 não estão sobre a curva; a curva começa em P_0, vai em direção a P_1 e P_2 sem alcançá-los e termina em P_3.

2. A partir do gráfico no Problema 1, parece que a tangente em P_0 passa por P_1 e a tangente em P_3 passa por P_2. Demonstre isso.

3. Tente produzir uma curva de Bézier com um laço mudando o segundo ponto de controle no Problema 1.

4. Algumas impressoras a laser usam as curvas de Bézier para representar letras e outros símbolos. Experimente com pontos de controle até você encontrar uma curva de Bézier que dê uma representação razoável da letra C.

5. Formatos mais complexos podem ser representados juntando-se duas ou mais curvas de Bézier. Suponha que a primeira curva de Bézier tenha pontos de controle P_0, P_1, P_2, P_3 e a segunda tenha pontos de controle P_3, P_4, P_5, P_6. Se quisermos que essas duas partes se juntem de modo liso, então as tangentes em P_3 devem coincidir, e os pontos P_2, P_3 e P_4 devem estar nessa reta tangente comum. Usando esse princípio, encontre os pontos de controle para um par de curvas de Bézier que represente a letra S.

10.3 COORDENADAS POLARES

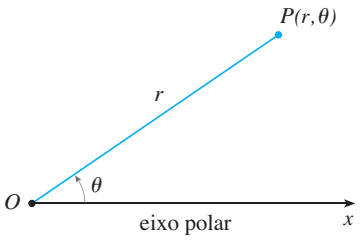


FIGURA 1

Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas. Até agora usamos as coordenadas cartesianas, que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares. Nesta seção descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

Escolhemos um ponto no plano conhecido como **polo** (ou origem) e o denominamos O. Então, desenhamos um raio (semirreta) começando em O, chamado **eixo polar**. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta OP, como na Figura 1. Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) e r, θ são chamados **coordenadas polares** de P. Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.

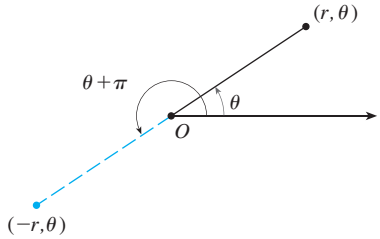


FIGURA 2

Estendemos o significado de coordenadas polares (r, θ) para o caso no qual r é negativo convencionando que, como na Figura 2, os pontos $(-r, \theta)$ e (r, θ) estão na mesma reta passando por O e estão à mesma distância $|r|$ a partir de O, mas em lados opostos de O. Se $r > 0$, o ponto (r, θ) está no mesmo quadrante que θ; se $r < 0$, ele está no quadrante do lado oposto ao polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

EXEMPLO 1 Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas.

(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUÇÃO Os pontos estão marcados na Figura 3. Na parte (d) o ponto $(-3, 3\pi/4)$ está localizado três unidades a partir do polo no quarto quadrante, porque o ângulo $3\pi/4$ está no segundo quadrante e $r = -3$ é negativo.

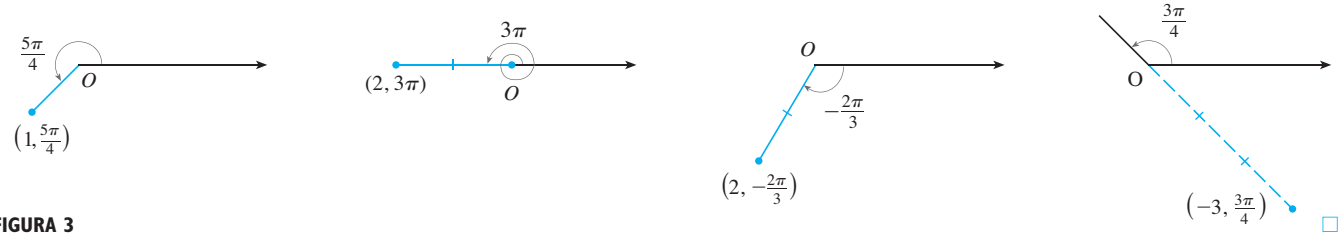


FIGURA 3

No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. Por exemplo, o ponto $(1, 5\pi/4)$ no Exemplo 1(a) poderia ser escrito como $(1, -3\pi/4)$ ou $(1, 13\pi/4)$ ou $(-1, \pi/4)$. (Veja a Figura 4.)

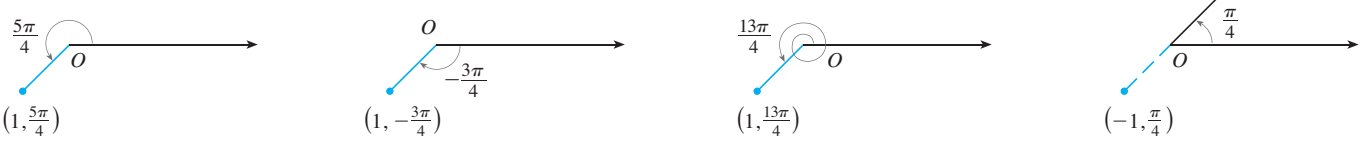


FIGURA 4

De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π, o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) é também representado por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{e} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

onde n é qualquer inteiro.

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 5, na qual o polo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir da figura, temos

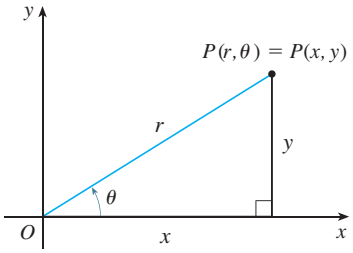


FIGURA 5

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$$

e, assim,

1

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 5, que ilustra o caso onde $r > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$, essas equações são válidas para todos os valores de r e θ. (Veja a definição geral de sen θ e cos θ no Apêndice D, no Volume I.)

As Equações 1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontrar r e θ quando x e y são conhecidos, usamos as equações

2

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

que podem ser deduzidas a partir das Equações 1 ou simplesmente lidas a partir da Figura 5.

EXEMPLO 2 Converta o ponto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares para cartesianas.

SOLUÇÃO Como $r = 2$ e $\theta = \pi/3$, as Equações 1 fornecem

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Portanto, o ponto é $(1, \sqrt{3})$ nas coordenadas cartesianas. □

EXEMPLO 3 Represente o ponto com coordenadas cartesianas $(1, -1)$ em termos de coordenadas polares.

SOLUÇÃO Se escolhermos r positivo, então a Equação 2 fornece

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1^2)} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como o ponto $(1, -1)$ está no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$. Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; e outra é $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$. □

Obs.: As Equações 2 não determinam univocamente θ quando x e y são dados, porque, à medida que θ aumenta no intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cada valor de tg θ ocorre duas vezes. Portanto, para converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares, não é apenas suficiente encontrar r e θ que satisfaçam as Equações 2. Como no Exemplo 3, devemos escolher θ de modo que o ponto (r, θ) esteja no quadrante correto.

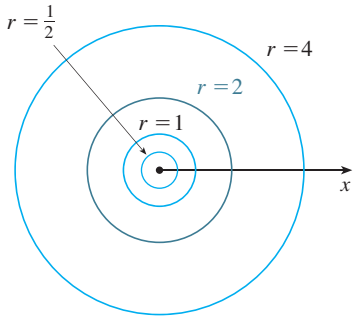


FIGURA 6

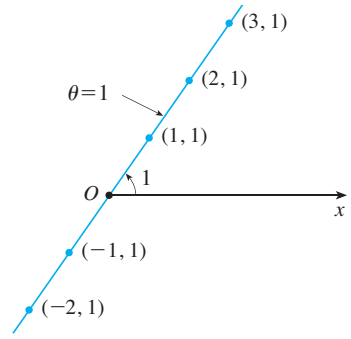


FIGURA 7

CURVAS POLARES

O **gráfico de uma equação polar** $r = f(\theta)$, ou mais genericamente, $F(r, \theta) = 0$, consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação.

EXEMPLO 4 Que curva é representada pela equação polar $r = 2$?

SOLUÇÃO A curva consiste em todos os pontos (r, θ) com $r = 2$. Como r representa a distância do ponto ao polo, a curva $r = 2$ representa o círculo com centro O e raio 2. Em geral, a equação $r = a$ representa um círculo com centro O e raio $|a|$. (Veja a Figura 6.) □

EXEMPLO 5 Esboce a curva polar $\theta = 1$.

SOLUÇÃO Essa curva consiste em todos os pontos (r, θ) tal que o ângulo polar θ é 1 radiano. É uma reta que passa por O e forma um ângulo de 1 radiano com o eixo polar (veja a Figura 7). Observe que os pontos $(r, 1)$ na reta com $r > 0$ estão no primeiro quadrante, enquanto aqueles com $r < 0$ estão no terceiro quadrante. □

EXEMPLO 6
(a) Esboce a curva com equação polar $r = 2 \cos \theta$.
(b) Encontre a equação cartesiana para essa curva.

SOLUÇÃO
(a) Na Figura 8 encontramos os valores de r para alguns valores convenientes de θ e marcamos os pontos correspondentes (r, θ). Então, juntamos esses pontos para esboçar a curva, que parece ser um círculo. Usamos os valores de θ apenas entre 0 e π, já que, se deixarmos θ aumentar além de π, obtemos os mesmos pontos novamente.

θ	$r = 2 \cos \theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

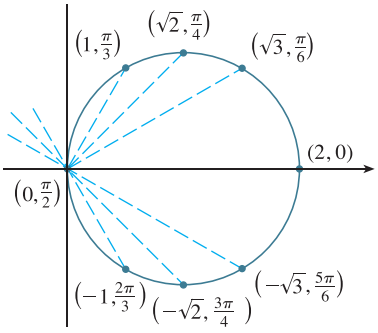


FIGURA 8
Tabela de valores e gráfico de $r = 2 \cos \theta$

(b) Para converter a equação dada em uma equação cartesiana, usamos as Equações 1 e 2. A partir de $x = r \cos \theta$, temos $\cos \theta = x/r$; assim, a equação $r = 2 \cos \theta$ torna-se $r = 2x/r$, que fornece

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando o quadrado, obtemos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que é uma equação do círculo com centro $(1, 0)$ e raio 1. □

■ A Figura 9 mostra em uma ilustração geométrica que o círculo no Exemplo 6 tem a equação $r = 2 \cos \theta$. O ângulo OPQ é um ângulo reto (por quê?) e assim $r/2 = \cos \theta$.

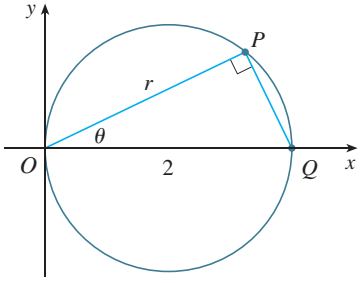


FIGURA 9

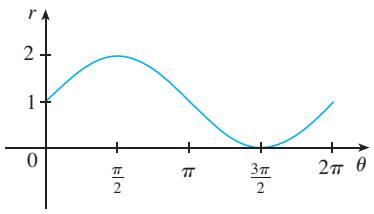


FIGURA 10
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

EXEMPLO 7 Esboce a curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUÇÃO Em vez de marcarmos os pontos como no Exemplo 6, primeiro esboçamos o gráfico de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas *cartesianas* na Figura 10 pelo deslocamento da curva seno uma unidade para cima. Isso nos permite ler facilmente os valores de r que correspondem a valores crescentes de θ. Por exemplo, vemos que, quando θ aumenta de 0 até $\pi/2$, r (a distância a partir de O) aumenta de 1 até 2, assim esboçamos a parte correspondente da curva polar na Figura 11(a). Quando θ aumenta de $\pi/2$ até π, a Figura 10 mostra que r diminui de 2 até 1, e dessa forma esboçamos a próxima parte da curva como na Figura 11(b). Quando θ aumenta de π até $3\pi/2$, r diminui de 1 para 0, como apresentado na parte (c). Finalmente, quando θ aumenta de $3\pi/2$ até 2π, r aumenta de 0 para 1, como mostrado na parte (d). Se deixássemos θ aumentar além de 2π ou diminuir além de 0, simplesmente retraçaríamos nossa trajetória. Juntando as partes da curva nas Figuras 11(a)-(d), esboçamos a curva completa na parte (e). Ela é chamada de **cardioide**, porque tem o formato parecido com o de um coração.

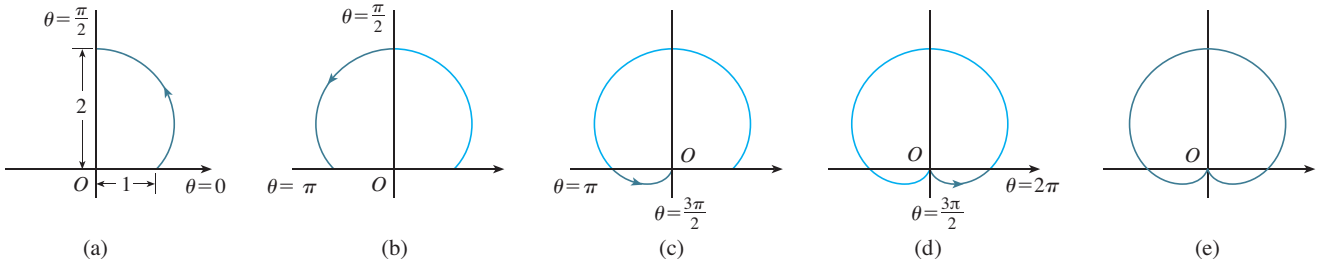


FIGURA 11
Estágios do esboço da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ □

EXEMPLO 8 Esboce a curva $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 7, primeiro esboçamos $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, em coordenadas cartesianas na Figura 12. Quando θ aumenta de 0 até $\pi/4$, a Figura 12 mostra que r diminui de 1 até 0, e assim desenhamos a parte correspondente da curva polar na Figura 13 (indicada por ①). Quando θ aumenta de $\pi/4$ até $\pi/2$, r varia de 0 até -1. Isso significa que a distância de O aumenta de 0 até 1, mas, em vez de ser no primeiro quadrante, essa parte da curva polar (indicada por ②) está no lado oposto ao polo no terceiro quadrante. O restante da curva é desenhado de uma maneira semelhante, com números e setas indicando a ordem na qual as partes são traçadas. A curva resultante tem quatro laços e é denominada **rosácea de quatro pétalas**.

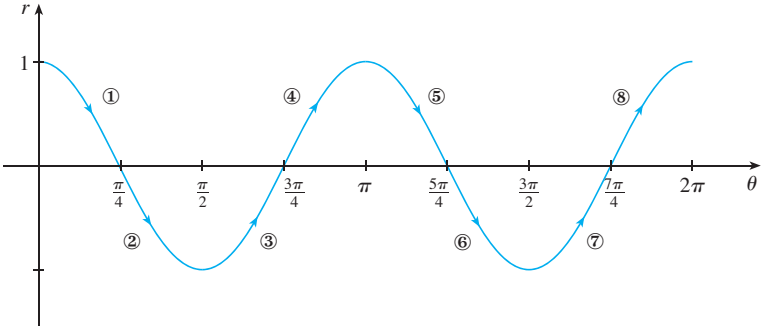


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ em coordenadas cartesianas

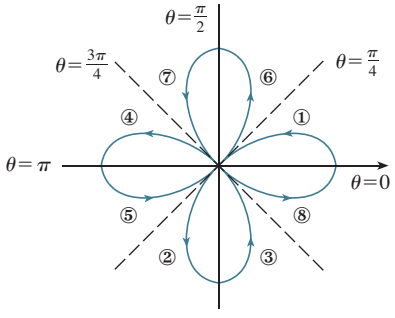


FIGURA 13
Rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$ □

SIMETRIA

Ao esboçar curvas polares, lembre-se de que é útil algumas vezes levar em conta a simetria. As três regras seguintes são explicadas pela Figura 14.

(a) Se uma equação polar não mudar quando θ for trocado por $-\theta$, a curva será simétrica em relação ao eixo polar.

(b) Se a equação não mudar quando r for trocado por $-r$, ou quando θ for trocado por $\theta + \pi$, a curva será simétrica em relação ao polo. (Isso significa que a curva permanecerá inalterada se a girarmos 180° em torno da origem.)

(c) Se a equação não mudar quando θ for trocado por $\pi - \theta$, a curva será simétrica em relação à reta vertical $\theta = \pi/2$.

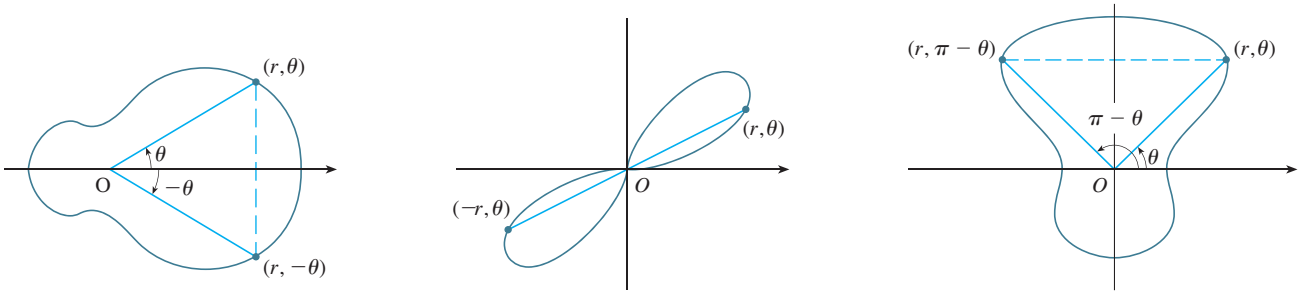


FIGURA 14

As curvas nos Exemplos 6 e 8 são simétricas em relação ao eixo polar, pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$. As curvas nos Exemplos 7 e 8 são simétricas em relação à $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ e $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. A rosácea de quatro pétalas é também simétrica em relação ao polo. Essas propriedades de simetria poderiam ser usadas para esboçar as curvas. Por exemplo, no Exemplo 6 só precisaríamos ter marcado pontos para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e então refleti-los em torno do eixo polar para obter o círculo completo.

TANGENTES A CURVAS POLARES

Para encontrar a reta tangente a uma curva polar $r = f(\theta)$, vamos considerar θ como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas parametrizadas (Equação 10.2.2), e a Regra do Produto temos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde $dy/d\theta = 0$ (desde que $dx/d\theta \neq 0$). Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde $dx/d\theta = 0$ (desde que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que, se estivermos olhando para as retas tangentes no polo, então $r = 0$ e a Equação 3 é simplificada para

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\theta \qquad \text{se} \qquad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

Por exemplo, no Exemplo 8 achamos que $r = \cos 2\theta = 0$, quando $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$. Isso significa que as retas $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ (ou $y = x$ e $y = -x$) são retas tangentes a $r = \cos 2\theta$ na origem.

EXEMPLO 9

(a) Para a cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ do Exemplo 7, calcule a inclinação da reta tangente quando $\theta = \pi/3$.

(b) Encontre os pontos na cardioide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

SOLUÇÃO Usando a Equação 3 com $r = 1 + \text{sen}\,\theta$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\text{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + (1 + \text{sen}\,\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1 + \text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{1 - 2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{(1 + \text{sen}\,\theta)(1 - 2\,\text{sen}\,\theta)}$$

(a) A inclinação da tangente no ponto no qual $\theta = \pi/3$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\,\text{sen}(\pi/3))}{(1 + \text{sen}(\pi/3))(1 - 2\,\text{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta(1 + 2\,\text{sen}\,\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \text{sen}\,\theta)(1 - 2\,\text{sen}\,\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Portanto existem tangentes horizontais nos pontos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ e tangentes verticais em $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. Quando $\theta = 3\pi/2$, $dy/d\theta$ e $dx/d\theta$ são 0 e, dessa forma, devemos ser cuidadosos. Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \text{sen}\,\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \text{sen}\,\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \infty$$

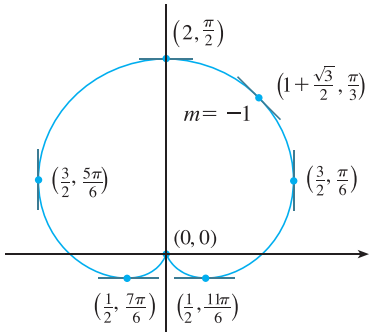


FIGURA 15
Retas tangentes para $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

Por simetria,

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$$

Então existe uma reta tangente vertical no polo (veja a Figura 15). □

Obs.: Em vez de lembrarmos a Equação 3, poderíamos empregar o método usado para deduzi-la. Por exemplo, no Exemplo 9, poderíamos ter escrito

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Então, teríamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que é equivalente à nossa expressão prévia.

TRAÇANDO CURVAS POLARES COM FERRAMENTAS GRÁFICAS

Embora seja útil saber esboçar as curvas polares simples manualmente, precisamos usar uma calculadora gráfica ou um computador quando nos deparamos com curvas complicadas, como as mostradas na Figura 16 e 17.

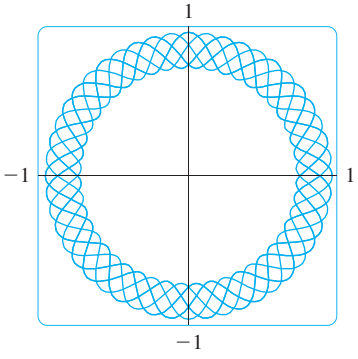


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^2(2{,}4\theta) + \cos^4(2{,}4\theta)$

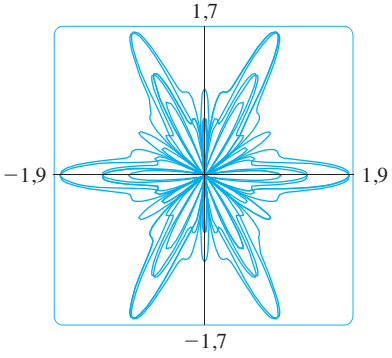


FIGURA 17
$r = \operatorname{sen}^2(1{,}2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Algumas ferramentas gráficas têm comandos que nos permitem traçar curvas polares diretamente. Com outras máquinas precisamos fazer a conversão para curvas parametrizadas primeiro. Neste caso, tomamos a equação polar $r = f(\theta)$ e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algumas máquinas requerem que o parâmetro seja denominado t em vez de θ.

EXEMPLO 10 Trace a curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUÇÃO Vamos assumir que nossa ferramenta gráfica não tenha um comando para traçar as curvas polares. Nesse caso, precisamos trabalhar com as equações paramétricas correspondentes, que são

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

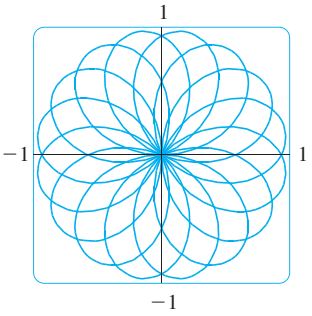


FIGURA 18
$r = \text{sen}(8\theta/5)$

Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para θ. Então nos perguntamos: quantas rotações completas são necessárias até que a curva comece a se repetir? Se a resposta for n, então

$$\text{sen}\,\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \text{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \text{sen}\,\frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que $16n\pi/5$ seja um múltiplo par de π. Isso ocorrerá primeiro quando $n = 5$. Portanto, traçamos a curva inteira se especificarmos que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Trocando de θ para t, temos as equações

$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \text{sen}(8t/5)\,\text{sen}\,t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

e a Figura 18 nos mostra a curva resultante. Observe que essa rosácea tem 16 laços. □

EXEMPLO 11 Investigue a família de curvas polares dada por $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$. Como o formato muda conforme c varia? (Essas curvas são chamadas **limaçons**, que em francês significa caracol, por causa do formato dessas curvas para certos valores de c.)

■ No Exercício 55 pediremos que você demonstre analiticamente o que descobriu a partir dos gráficos na Figura 19.

SOLUÇÃO A Figura 19 mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de c. Para $c > 1$ existe um laço que reduz de tamanho quando c diminui. Quando $c = 1$, o laço desaparece e a curva torna-se a cardioide que esboçamos no Exemplo 7. Para c entre 1 e $\frac{1}{2}$, a cúspide da cardioide é suavizada e torna-se uma "covinha". Quando c diminui de $\frac{1}{2}$ para 0, a limaçon parece oval. Essa oval se torna mais circular quando $c \to 0$ e quando $c = 0$, a curva é apenas o círculo $r = 1$.

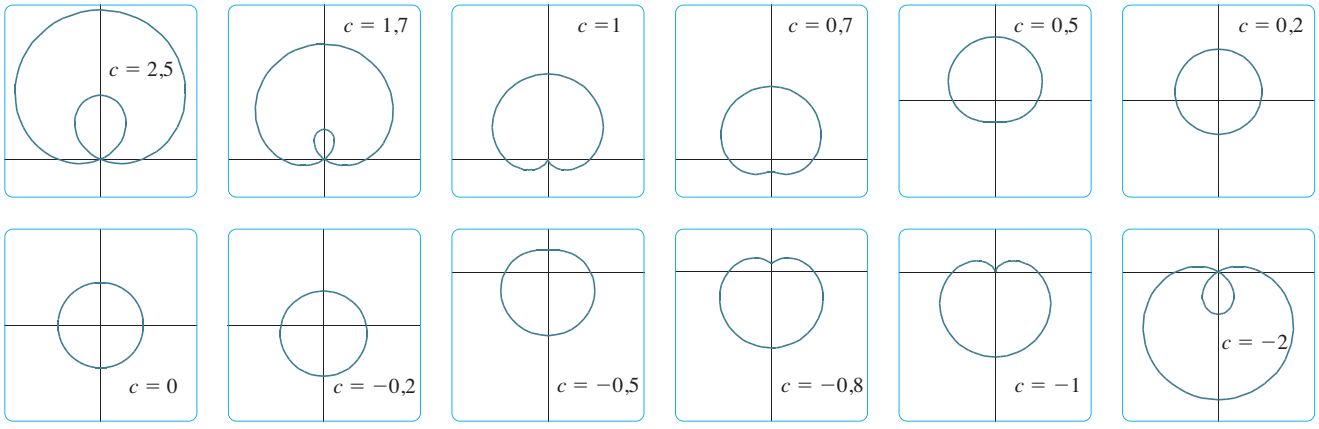


FIGURA 19
Membros da família de limaçons
$r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$

As partes restantes da Figura 18 mostram que, quando c se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa. De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com c positivo. □

10.3 EXERCÍCIOS

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com $r > 0$ e o outro com $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3-4 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $\left(-\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5-6 As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas.

(i) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r > 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(ii) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r < 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

5. (a) $(2, -2)$ (b) $(-1, \sqrt{3})$

6. (a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(1, -2)$

7-12 Esboce a região no plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $r \geqslant 0, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

9. $0 < r < 4, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/6$

10. $2 < r \leqslant 5, \quad 3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares $(2, \pi/3)$ e $(4, 2\pi/3)$.

14. Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

15-20 Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada.

15. $r = 2$ **16.** $r \cos\theta = 1$

17. $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ **18.** $r = 2 \operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$

19. $r = \operatorname{cossec}\theta$ **20.** $r = \operatorname{tg}\theta \sec\theta$

21-26 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

21. $y = 5$ **22.** $x^2 + y^2 = 9$

23. $x = -y^2$ **24.** $y = 2x - 1$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$ **26.** $xy = 4$

27-28 Para cada uma das curvas descritas, decida se a curva seria mais facilmente dada por uma equação polar ou por uma equação cartesiana. Então, escreva uma equação para a curva.

27. (a) Uma reta que passa pela origem e forma um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x positivo.

(b) Uma reta vertical pelo ponto $(3, 3)$.

28. (a) Um círculo com raio 5 e centro $(2, 3)$.

(b) Um círculo com centro na origem e raio 4.

29-48 Esboce a curva com a equação dada.

29. $\theta = -\pi/6$ **30.** $r^2 - 3r + 2 = 0$

31. $r = \operatorname{sen}\theta$ **32.** $r = -3\cos\theta$

33. $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta), \theta \geqslant 0$ **34.** $r = 1 - 3\cos\theta$

35. $r = \theta, \theta \geqslant 0$ **36.** $r = \ln\theta, \theta \geqslant 1$

37. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **38.** $r = 2\cos 3\theta$

39. $r = 2\cos 4\theta$ **40.** $r = 3\cos 6\theta$

41. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$ **42.** $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

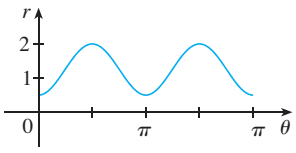
43. $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$ **44.** $r^2 = \cos 4\theta$

45. $r = 2\cos(3\theta/2)$ **46.** $r^2\theta = 1$

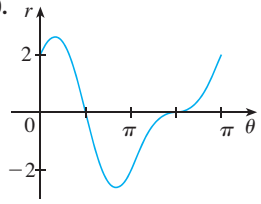
47. $r = 1 + 2\cos 2\theta$ **48.** $r = 1 + 2\cos(\theta/2)$

49-50 A figura mostra o gráfico de r como uma função de θ em coordenadas cartesianas. Use-o para esboçar a curva polar correspondente.

49.



50.



51. Mostre que a curva polar $r = 4 + 2\sec\theta$ (chamada **conchoide**) tem a reta $x = 2$ como uma assíntota vertical mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

52. Mostre que a curva $r = 2 - \operatorname{cossec}\theta$ (também uma conchoide) tem a reta $y = -1$ como uma assíntota horizontal mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} y = -1$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

53. Mostre que a curva $r = \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\theta$ (denominada **cissoide de Diocles**) tem a reta $x = 1$ como uma assíntota vertical. Mostre também que a curva está inteiramente dentro da faixa vertical $0 \leqslant x < 1$. Use esses fatos para ajudar a esboçar a cissoide.

54. Esboce a curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

55. (a) No Exemplo 11 os gráficos sugerem que a limaçon $r = 1 + c\operatorname{sen}\theta$ tem um laço interno quando $|c| > 1$. Demonstre que isso é verdadeiro e encontre os valores de θ que correspondam ao laço interno.

(b) A partir da Figura 19 parece que a limaçon perde sua covinha quando $c = \frac{1}{2}$. Demonstre isto.

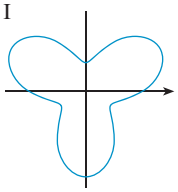
56. Associe as curvas polares com seus respectivos gráficos I–VI. Dê razões para suas escolhas. (Não use uma ferramenta gráfica.)

(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$ (b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

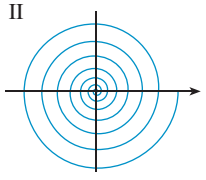
(c) $r = \cos(\theta/3)$ (d) $r = 1 + 2\cos\theta$

(e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$ (f) $r = 1 + 2\operatorname{sen} 3\theta$

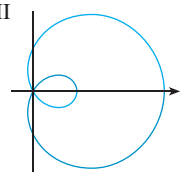
I

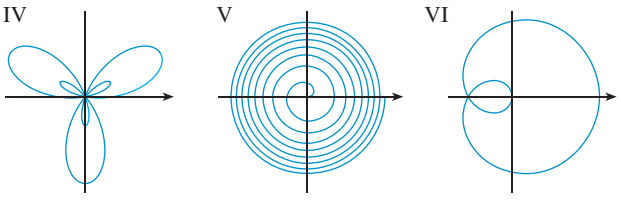


II



III





57-62 Calcule a inclinação da reta tangente para a curva polar dada no ponto especificado pelo valor de θ.

57. $r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/6$

58. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

59. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

60. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

61. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

62. $r = 1 - 2 \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$

63-68 Encontre os pontos na curva dada onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

63. $r = 3 \cos \theta$

64. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

65. $r = 1 + \cos \theta$

66. $r = e^{\theta}$

67. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

68. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

69. Mostre que a equação polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, para a qual $ab \neq 0$, representa um círculo e calcule seu centro e o raio.

70. Mostre que as curvas $r = a \operatorname{sen} \theta$ e $r = a \cos \theta$ se interceptam com ângulos retos.

71-76 Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva polar. Escolha o intervalo do parâmetro para ter certeza de que você fez a curva inteira.

71. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

72. $r = \sqrt{1 - 0{,}8 \operatorname{sen}^2\theta}$ (hipopédia)

73. $r = e^{\operatorname{sen}\theta} - 2\cos(4\theta)$ (curva borboleta)

74. $r = \operatorname{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

75. $r = 2 - 5 \operatorname{sen}(\theta/6)$

76. $r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$

77. Como os gráficos $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ e $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ estão relacionados ao gráfico $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$? Em geral, como o gráfico de $r = f(\theta - \alpha)$ está relacionado ao gráfico de $r = f(\theta)$?

78. Use um gráfico para estimar a coordenada y dos pontos mais altos na curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Então, use o cálculo para encontrar o valor exato.

79. (a) Investigue a família de curvas definidas pelas equações polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, onde n é um inteiro positivo. Como o número de laços está relacionado a n?

(b) O que aconteceria se a equação na parte (a) fosse trocada por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

80. Uma família de curvas é dada pelas equações $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, onde c é um número real e n é um inteiro positivo. Como o gráfico muda quando n aumenta? Como ele muda quando c varia? Ilustre traçando membros suficientes da família para justificar suas conclusões.

81. Uma família de curvas tem equações polares

$$r = \frac{1 - a \cos \theta}{1 + a \cos \theta}$$

Investigue como o gráfico muda quando o número a varia. Em particular, você deveria identificar os valores de transição de a para os quais o formato básico da curva muda.

82. O astrônomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudou a família de curvas com equações polares

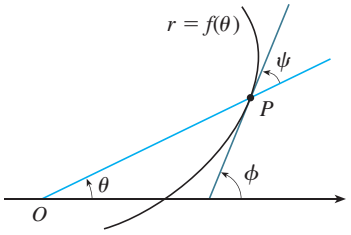
$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

para as quais a e c são números reais positivos. Essas curvas são chamadas **ovais de Cassini**, embora tenham formato oval apenas para certos valores de a e c. (Cassini pensou que essas curvas pudessem representar as órbitas planetárias melhor que as elipses de Kepler.) Investigue a variedade de formatos que essas curvas podem ter. Em particular, como estão relacionados a e c quando a curva se divide em duas partes?

83. Seja P um ponto qualquer (exceto a origem) na curva $r = f(\theta)$. Se ψ for o ângulo entre a reta tangente em P e a reta radial OP, mostre que

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugestão*: Observe que $\psi = \phi - \theta$ na figura.]



84. (a) Use o Exercício 83 para mostrar que o ângulo entre a reta tangente e a reta radial é $\psi = \pi/4$ em cada ponto na curva $r = e^{\theta}$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente aos pontos onde $\theta = 0$ e $\pi/2$.

(c) Demonstre que qualquer curva polar $r = f(\theta)$, com a propriedade de que o ângulo ψ entre a reta radial e a reta tangente é uma constante, deve ser do tipo $r = Ce^{k\theta}$, onde C e k são constantes.

10.4 ÁREAS E COMPRIMENTOS EM COORDENADAS POLARES

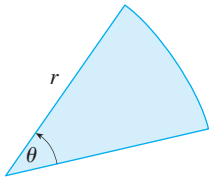


FIGURA 1

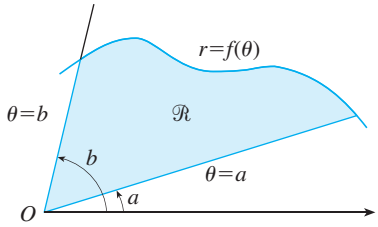


FIGURA 2

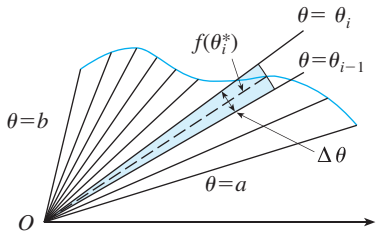


FIGURA 3

Nesta seção deduziremos a fórmula para a área de uma região cuja fronteira é dada por uma equação polar. Precisamos usar a fórmula para a área de um setor de um círculo

1 $$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta$$

onde, como na Figura 1, r é o raio e θ, a medida em radianos do ângulo central. A Fórmula 1 segue do fato de que a área de um setor é proporcional a seu ângulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2} r^2\theta$. (Veja também o Exercício 35, na Seção 7.3, no Volume I.)

Seja $\mathcal{R}$ a região ilustrada na Figura 2, limitada pela curva polar $r = f(\theta)$ e pelos raios $\theta = a$ e $\theta = b$, onde f é uma função contínua positiva e onde $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos com extremidades $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e larguras iguais $\Delta\theta$. Os raios $\theta = \theta_i$ dividem então $\mathcal{R}$ em n regiões menores com ângulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Se escolhermos θ_i^* no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, então a área ΔA_i da i-ésima região será aproximada pela área do setor de um círculo com ângulo central $\Delta\theta$ e raio $f(\theta_i^*)$. (Veja a Figura 3.)

Então, a partir da Fórmula 1 temos

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$$

e, assim, uma aproximação para a área total A de $\mathcal{R}$ é

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$$

A partir da Figura 3 parece que a aproximação em (2) melhora quando $n \to \infty$. Mas as somas em (2) são as somas de Riemann para a função $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, logo,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta$$

Portanto, parece plausível (e de fato pode ser demonstrado) que a fórmula para a área A da região polar $\mathcal{R}$ é

3 $$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta}$$

A Fórmula 3 é frequentemente escrita como

4 $$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta}$$

subentendendo que $r = f(\theta)$. Observe a similaridade entre as Fórmulas 1 e 4.

Quando aplicamos a Fórmula 3 ou 4, é interessante pensar na área como sendo varrida por um raio em rotação que passa por O e que começa com ângulo a e termina com ângulo b.

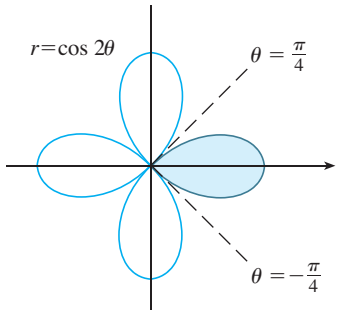


FIGURA 4

EXEMPLO 1 Calcule a área limitada por um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO A curva $r = \cos 2\theta$ foi esboçada no Exemplo 8, da Seção 10.3. Observe a partir da Figura 4 que a região limitada pelo laço direito é varrida pelo raio que gira de $\theta = -\pi/4$ até $\theta = \pi/4$. Dessa forma, a Fórmula 4 fornece

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

□

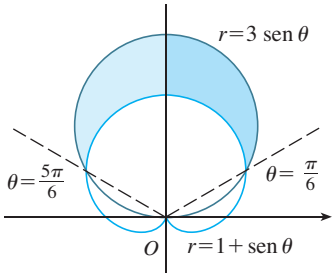


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Calcule a área da região que está dentro do círculo $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ e fora da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUÇÃO A cardioide (veja o Exemplo 7 da Seção 10.3) e o círculo estão esboçados na Figura 5, e a região desejada está sombreada. Os valores de a e b na Fórmula 4 são determinados achando-se os pontos de intersecção das duas curvas. Elas se interceptam quando $3 \operatorname{sen}\theta = 1 + \operatorname{sen}\theta$, o que fornece $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, ou seja, $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. A área desejada pode ser encontrada pela subtração da área dentro da cardioide entre $\theta = \pi/6$ e $\theta = 5\pi/6$ da área dentro do círculo de $\pi/6$ até $5\pi/6$. Então,

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$$

Como a região é simétrica em relação ao eixo $\theta = \pi/2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2 \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta\right] \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2 \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2 \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \quad [\text{porque } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)] \\ &= 3\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi \end{aligned}$$

□

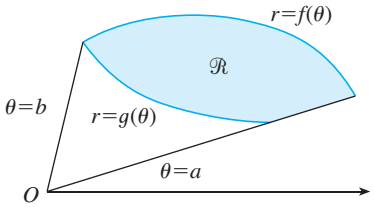


FIGURA 6

O Exemplo 2 ilustra o procedimento para encontrar a área da região limitada por duas curvas polares. Em geral, seja $\mathcal{R}$ uma região, como ilustrado na Figura 6, que é limitada pelas curvas com as equações polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $a = \theta$ e $b = \theta$, onde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ e $0 < b - a \leqslant 2\pi$. A área A de $\mathcal{R}$ é calculada pela subtração da área dentro de $r = g(\theta)$ da área dentro de $r = f(\theta)$; assim, usando a Fórmula 3 temos

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_a^b ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\, d\theta$$

ATENÇÃO O fato de que um único ponto tem muitas representações em coordenadas polares algumas vezes torna difícil encontrar todos os pontos de intersecção de duas curvas polares. Por exemplo, é óbvio a partir da Figura 5 que o círculo e a cardioide têm três pontos de intersecção; contudo, no Exemplo 2, resolvemos as equações $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ e $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e encontramos apenas dois pontos $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. A origem também é um ponto de intersecção, mas não pudemos encontrá-lo resolvendo as equações para as curvas, pois a origem não tem uma única representação em coordenadas polares que satisfaça ambas as equações. Observe que, quando representada como $(0, 0)$ ou $(0, \pi)$, a origem satisfaz $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ e, assim, está no círculo; quando representada como $(0, 3\pi/2)$, satisfaz $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e, dessa forma, está na cardioide. Pense em dois pontos se movendo ao longo das curvas quando o valor do parâmetro θ aumenta de 0 até 2π. Em uma curva a origem é alcançada em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$; na outra, é alcançada em $\theta = 3\pi/2$. Os pontos não colidem na origem, porque eles a alcançam em tempos diferentes, mas de qualquer modo as curvas se interceptam.

Então, para encontrar *todos* os pontos de intersecção de duas curvas polares, é recomendável que você desenhe os gráficos de ambas as curvas. É especialmente conveniente usar uma calculadora gráfica ou um computador para ajudar nessa tarefa.

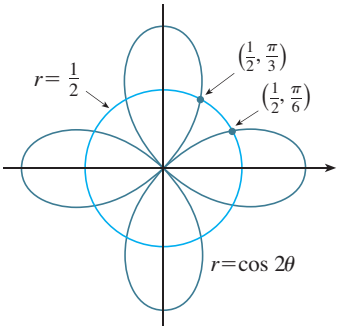


FIGURA 7

EXEMPLO 3 Encontre todos os pontos de intersecção das curvas $r = \cos 2\theta$ e $r = \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Se resolvermos as equações $r = \cos 2\theta$ e $r = \frac{1}{2}$, obteremos $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ e, portanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Então, os valores de θ entre 0 e 2π que satisfazem ambas as equações são $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Encontramos quatro pontos de intersecção: $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Contudo, você pode ver a partir da Figura 7 que as curvas têm outros quatro pontos de intersecção, a saber: $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right), \left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Esses podem ser encontrados usando-se simetria ou observando que outra equação do círculo é $r = -\frac{1}{2}$ e então resolvendo as equações $r = \cos 2\theta$ e $r = -\frac{1}{2}$. □

COMPRIMENTO DE ARCO

Para calcular o comprimento de uma curva polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, referimo-nos a θ como um parâmetro e escrevemos as equações paramétricas da curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Usando a Regra do Produto e derivando em relação a θ, obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta$$

assim, usando $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, temos

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta$$

$$+ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\text{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Assumindo que f' é contínua, podemos usar o Teorema 10.2.6 para escrever o comprimento de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Portanto, o comprimento da curva com equação polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ é

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \qquad (5)$$

EXEMPLO 4 Calcule o comprimento da cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

SOLUÇÃO A cardioide é mostrada na Figura 8 (nós a esboçamos no Exemplo 7 da Seção 10.3). Seu comprimento total é dado pelo intervalo do parâmetro $0 \leq \theta \leq 2\pi$; assim, a Fórmula 5 fornece

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \text{sen}\,\theta)^2 + \cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta$$

Poderíamos calcular essa integral pela multiplicação e divisão do integrando por $\sqrt{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$, ou poderíamos usar um sistema de computação algébrica. De qualquer maneira, calculamos que o comprimento da cardioide é $L = 8$. □

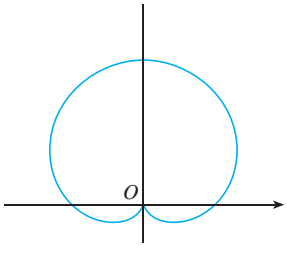


FIGURA 8
$r = 1 + \text{sen}\,\theta$

10.4 EXERCÍCIOS

1-4 Encontre a área da região que é limitada pelas curvas dadas e está no setor especificado.

1. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$

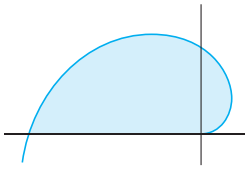
2. $r = e^{\theta/2}, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

3. $r = \operatorname{sen}\theta, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

4. $r = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

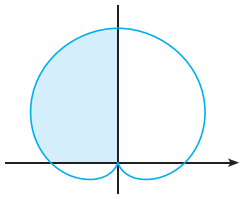
5-8 Encontre a área da região sombreada.

5.



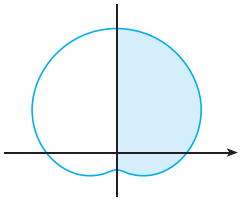
$r = \theta$

6.



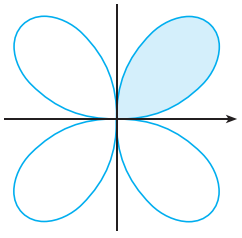
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

7.



$r = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$

8.



$r = \operatorname{sen} 2\theta$

9-14 Esboce a curva e calcule a área limitada por ela.

9. $r = 3\cos\theta$

10. $r = 3(1 + \cos\theta)$

11. $r^2 = 4\cos 2\theta$

12. $r = 2 - \operatorname{sen} 2\theta$

13. $r = 2\cos 3\theta$

14. $r = 2 + \cos 2\theta$

15-16 Trace a curva e calcule a área limitada por ela.

15. $r = 1 + 2\operatorname{sen} 6\theta$

16. $r = 2\operatorname{sen} + 3\operatorname{sen} 9\theta$

17-21 Encontre a área da região dentro de um laço da curva.

17. $r = \operatorname{sen} 2\theta$

18. $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$

19. $r = 3\cos 5\theta$

20. $r = 2\cos 6\theta$

21. $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ (laço interno)

22. Calcule a área limitada pelo laço do **estrofoide** $r = 2\cos\theta - \sec\theta$.

23-28 Encontre a área da região que está dentro da primeira curva e fora da segunda curva.

23. $r = 2\cos\theta, \quad r = 1$

24. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta, \quad r = 1$

25. $r = 4\operatorname{sen}\theta, \quad r = 2$

26. $r = 3\cos\theta, \quad r = 2 - \cos\theta$

27. $r = 3\cos\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$

28. $r = 3\operatorname{sen}\theta, \quad r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

29-34 Encontre a área da região que está dentro de ambas as curvas.

29. $r = \sqrt{3}\cos\theta, \quad r = \operatorname{sen}\theta$

30. $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

31. $r = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2\cos\theta, \quad r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$

33. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

34. $r = a\operatorname{sen}\theta, \quad r = b\cos\theta, \quad a > 0, b > 0$

35. Encontre a área dentro do laço maior e fora do laço menor da limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

36. Ache a área entre o laço maior e o laço menor da curva $r = 1 + 2\cos 3\theta$.

37-42 Encontre todos os pontos de intersecção das curvas dadas.

37. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta, \quad r = 3\operatorname{sen}\theta$

38. $r = 1 - \cos\theta, \quad r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

39. $r = 2\operatorname{sen} 2\theta, \quad r = 1$

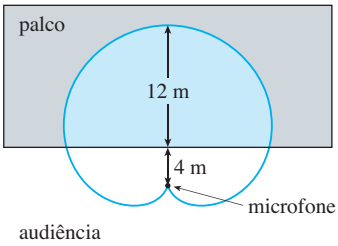
40. $r = \cos 3\theta, \quad r = \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r = \operatorname{sen}\theta, \quad r = \operatorname{sen} 2\theta$

42. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

43. Os pontos de intersecção da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e do laço espiral $r = 2\theta, -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, não podem ser encontrados exatamente. Use uma ferramenta gráfica para encontrar os valores aproximados de θ nos quais eles se interceptam. Então, use esses valores para estimar a área que está dentro de ambas as curvas.

44. Ao gravar apresentações ao vivo, os engenheiros de som usam um padrão de captação em forma de cardioide, pois ele suprime o barulho da audiência. Suponha que o microfone esteja colocado a 4 m da frente do palco (como na figura) e que o limite da região de captação ótima seja dado pela cardioide $r = 8 + 8\operatorname{sen}\theta$, onde r é medido em metros e o microfone está no polo. Os músicos querem saber a área que eles terão no palco dentro da área de captação ótima do microfone. Responda a esta pergunta.



45-48 Calcule o comprimento exato da curva polar.

45. $r = 3\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

46. $r = e^{2\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

47. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $r = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

49-52 Use uma calculadora ou um computador para encontrar o comprimento do laço, com precisão de quatro casas decimais.

49. $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$

50. $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$

51. $r = \text{sen}\,(\theta/2)$ **52.** $r = 1 + \cos(\theta/3)$

53-54 Trace a curva e calcule seu comprimento.

53. $r = \cos^4(\theta/4)$ **54.** $r = \cos^2(\theta/2)$

55. (a) Use a Fórmula 10.2.7 para mostrar que a área da superfície gerada pela rotação da curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

(onde f' é contínua e $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$) em torno do eixo polar é

$$S = \int_a^b 2\pi r \,\text{sen}\,\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(b) Use a fórmula na parte (a) para calcular a área da superfície gerada pela rotação da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ em torno do eixo polar.

56. (a) Encontre a fórmula para a área da superfície gerada pela rotação da curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ (onde f' é contínua e $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$), em torno da reta $\theta = \pi/2$.

(b) Calcule a área da superfície gerada pela rotação da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ em torno da reta $\theta = \pi/2$.

10.5 SEÇÕES CÔNICAS

Nesta seção daremos as definições geométricas de parábolas, elipses e hipérboles e deduziremos suas equações-padrão. Elas são chamadas **seções cônicas**, ou **cônicas**, porque resultam da intersecção de um cone com um plano, como mostrado na Figura 1.

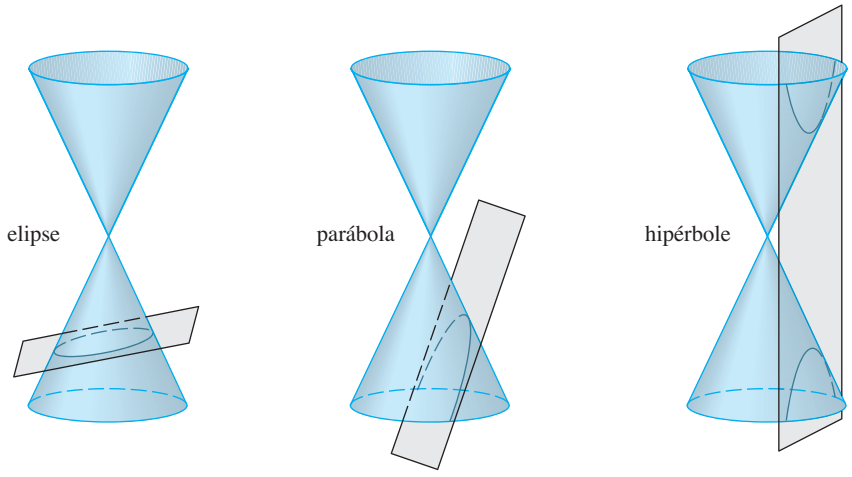


FIGURA 1
Cônicas

PARÁBOLAS

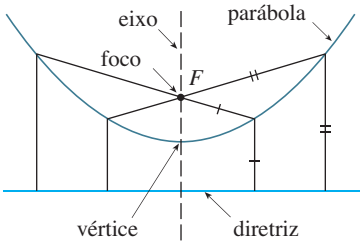


FIGURA 2

Uma **parábola** é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo F (denominado **foco**) e a uma reta fixa (chamada **diretriz**) são iguais. Essa definição é ilustrada pela Figura 2. Observe que o ponto na metade do caminho entre o foco e a diretriz está na parábola; ele é conhecido como **vértice**. A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é intitulada **eixo** da parábola.

No século XVI, Galileu mostrou que a trajetória de um projétil atirado no ar com um certo ângulo em relação ao solo é uma parábola. Desde essa época, os formatos parabólicos têm sido usados para desenhar faróis de carro, telescópios refletores e pontes suspensas. (Veja o Problema 18 na página 250, no Volume I, para se lembrar da propriedade de reflexão das parábolas que as torna tão úteis.)

Obteremos uma equação particularmente simples para uma parábola se colocarmos o vértice na origem O e sua diretriz paralela ao eixo x, como na Figura 3. Se o foco for o ponto $(0, p)$, então a diretriz tem a equação $y = -p$. Se $P(x, y)$ for um ponto qualquer na parábola, então a distância de P até o foco é

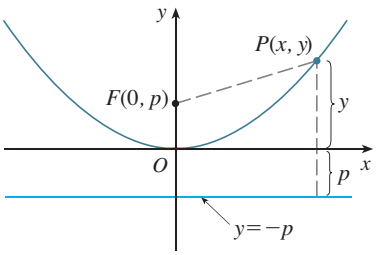


FIGURA 3

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

e a distância de P até a diretriz é $|y + p|$. (A Figura 3 ilustra o caso onde $p > 0$.) A propriedade de definição de uma parábola é que essas distâncias são iguais:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Obtemos uma equação equivalente elevando ao quadrado e simplificando:

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$

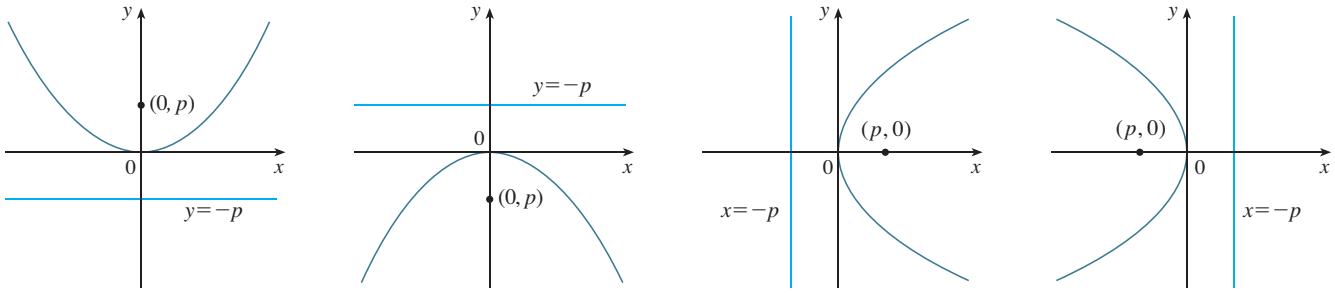
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

1 Uma equação da parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$ é

$$x^2 = 4py$$

Se escrevermos $a = 1/(4p)$, então a equação-padrão de uma parábola (1) torna-se $y = ax^2$. A concavidade é para cima se $p > 0$ e para baixo se $p < 0$ [veja a Figura 4, partes (a) e (b)]. O gráfico é simétrico em relação ao eixo y porque (1) não muda quando x é trocado por $-x$.



(a) $x^2=4py$, $p>0$ (b) $x^2=4py$, $p<0$ (c) $y^2=4px$, $p>0$ (d) $y^2=4px$, $p<0$

FIGURA 4

Se trocarmos x e y em (1), obteremos

2 $$y^2 = 4px$$

que é uma equação da parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$. (Trocar x e y significa refletir em relação à reta diagonal $y = x$.) A concavidade da parábola é para a direita se $p > 0$ e para a esquerda se $p < 0$ [veja a Figura 4, partes (c) e (d)]. Em ambos os casos, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, que é o eixo da parábola.

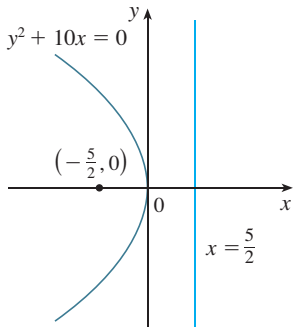


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Encontre o foco e a diretriz da parábola $y^2 + 10x = 0$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Se escrevermos a equação como $y^2 = -10x$ e a compararmos com a Equação 2 veremos que $4p = -10$, assim $p = -\frac{5}{2}$. Então, o foco é $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e a diretriz é $x = \frac{5}{2}$. O esboço é mostrado na Figura 5. □

ELIPSES

Uma **elipse** é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante (veja a Figura 6). Esses dois pontos são chamados **focos**. Uma das Leis de Kepler é que as órbitas dos planetas no sistema solar são elipses com o Sol em um dos focos.

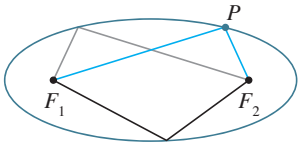


FIGURA 6

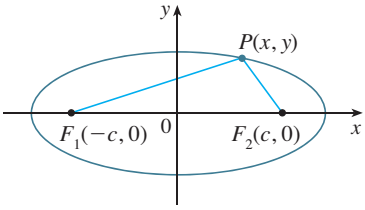


FIGURA 7

Para obter a equação mais simples para uma elipse, colocamos os focos no eixo x nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ como na Figura 7, de modo que a origem esteja na metade do caminho entre os focos. Seja $2a > 0$ a soma das distâncias de um ponto na elipse até os focos. Então $P(x, y)$ é um ponto na elipse quando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

isto é, $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que é simplificada para $$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevamos ao quadrado novamente:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

que se torna $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

A partir do triângulo F_1F_2P na Figura 7, vemos que $2c < 2a$, assim $c < a$ e, portanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniência, seja $b^2 = a^2 - c^2$. Então, a equação da elipse torna-se $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ou, se ambos os lados forem divididos por a^2b^2,

3 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

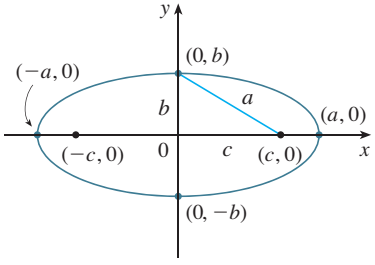


FIGURA 8

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b$

Como $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, segue que $b < a$. As intersecções com o eixo x são encontradas fazendo-se $y = 0$. Então $x^2/a^2 = 1$, ou $x^2 = a^2$, assim $x = \pm a$. Os pontos correspondentes $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são chamados **vértices** da elipse, e o segmento de reta que une os vértices é dito **eixo maior**. Para encontrar as intersecções com o eixo y fazemos $x = 0$ e obtemos $y^2 = b^2$, ou seja, $y = \pm b$. A Equação 3 não muda se x for trocado por $-x$ ou y for trocado por $-y$, logo, é simétrica em relação a ambos os eixos. Observe que, se os focos coincidirem, então $c = 0$, portanto, $a = b$ e a elipse torna-se um círculo com raio $r = a = b$. Resumimos essa discussão a seguir (veja também a Figura 8).

4 A elipse $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$$

tem focos $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$, e vértices $(\pm a, 0)$

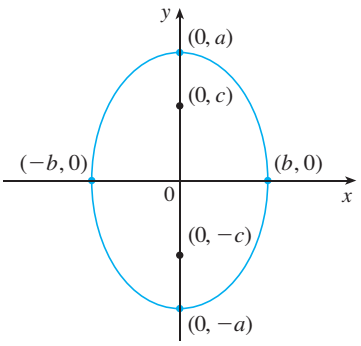


FIGURA 9

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a \geqslant b$

Se os focos de uma elipse estiverem localizados no eixo y em $(0, \pm c)$, então podemos encontrar sua equação trocando x e y em (4) (veja a Figura 9).

5 A elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tem focos $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$, e vértices $(0, \pm a)$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$ e localize os focos.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma padrão para uma elipse, e assim temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. As intersecções com o eixo x são ± 4 e as intersecções com o eixo y são ± 3. Além disso, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, portanto $c = \sqrt{7}$, e os focos são $(\pm\sqrt{7}, 0)$. O gráfico é esboçado na Figura 10. □

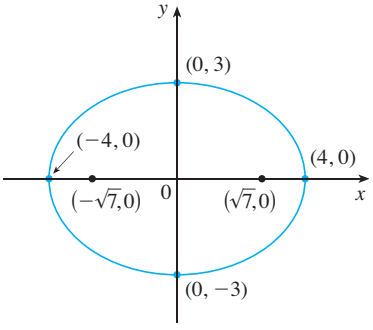


FIGURA 10
$9x^2 + 16y^2 = 144$

EXEMPLO 3 Encontre uma equação para a elipse com focos $(0, \pm 2)$ e vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUÇÃO Usando a notação de (5), temos $c = 2$ e $a = 3$. Então, obtemos $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$; logo, uma equação para a elipse é

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Outra maneira de escrever a equação é $9x^2 + 5y^2 = 45$. □

Como as parábolas, as elipses têm uma propriedade de reflexão interessante, com consequências práticas. Se uma fonte de luz — ou som — for colocada em um foco de uma superfície com secções transversais elípticas, então toda luz — ou som — é refletida da superfície para o outro foco (veja o Exercício 63). Esse princípio é usado em *litotripsia*, um tratamento para pedras nos rins. Um refletor com secção transversal elíptica é colocado de maneira que a pedra no rim está em um foco. Ondas sonoras de alta intensidade geradas no outro foco são refletidas para a pedra e a destroem sem causar dano ao tecido vizinho. O paciente não sofre o trauma de uma cirurgia e se recupera em poucos dias.

HIPÉRBOLES

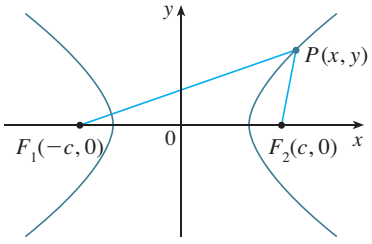


FIGURA 11
P está na hipérbole quando
$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$

Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença entre as distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (os focos) é uma constante. Essa definição é ilustrada na Figura 11.

As hipérboles ocorrem frequentemente como gráficos de equações em química, física, biologia e economia (Lei de Boyle, Lei de Ohm, curvas de demanda e de oferta). Uma aplicação particularmente importante de hipérboles é encontrada nos sistemas de navegação desenvolvidos nas I e II Guerras Mundiais (veja o Exercício 51).

Observe que a definição de uma hipérbole é similar àquela de uma elipse; a única mudança é que a soma das distâncias torna-se uma diferença das distâncias. De fato, a dedução da equação de uma hipérbole é também similar àquela dada anteriormente para uma elipse. Pediremos para você mostrar no Exercício 52 que, quando os focos estão no eixo x em $(\pm c, 0)$ e a diferença das distâncias for $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, então a equação da hipérbole é

6

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que as intersecções com o eixo x são novamente $\pm a$, e os pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são os **vértices** da hipérbole. Mas, se colocarmos $x = 0$ na Equação 6, teremos $y^2 = -b^2$, que é impossível; dessa forma, não existe intersecção com o eixo y. A hipérbole é simétrica em relação a ambos os eixos.

Para analisar a hipérbole um pouco mais, olhamos a Equação 6 e obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

Isso mostra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Portanto, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas *ramos*.

Ao desenhar uma hipérbole, tenha em mente que é útil desenhar primeiro suas **assíntotas**, que são as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 12. Ambos os ramos da hipérbole se aproximam das assíntotas, isto é, eles chegam arbitrariamente próximos delas. [Veja o Exercício 69 da Seção 4.5, no Volume I, onde é mostrado que estas retas são assíntotas oblíquas.]

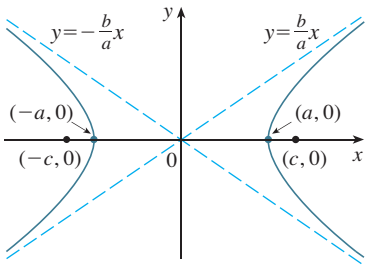


FIGURA 12

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

7 A hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tem focos $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$, e assíntotas $y = \pm(b/a)x$.

Se os focos de uma hipérbole estiverem no eixo y, então, trocando os papéis de x e y, obtemos a seguinte informação, que é ilustrada na Figura 13.

8 A hipérbole

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tem focos $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$, e assíntotas $y = \pm(a/b)x$.

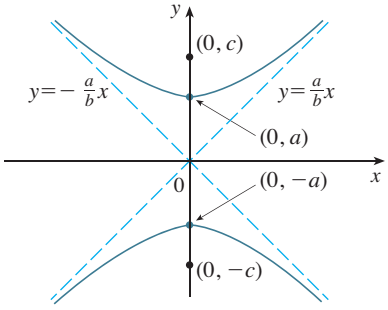


FIGURA 13

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

EXEMPLO 4 Encontre os focos e as assíntotas da hipérbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ e esboce seu gráfico.

SOLUÇÃO Se dividirmos ambos os lados da equação por 144, teremos

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é da forma dada em (7) com $a = 4$ e $b = 3$. Como $c^2 = 16 + 9 = 25$, os focos são $(\pm 5, 0)$. As assíntotas são as retas $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{3}{4}x$. O gráfico é visto na Figura 14. □

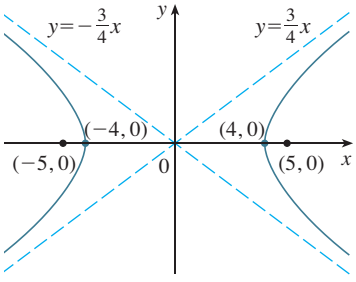


FIGURA 14
$9x^2 - 16y^2 = 144$

EXEMPLO 5 Encontre os focos e a equação da hipérbole com vértices $(0, \pm 1)$ e assíntota $y = 2x$.

SOLUÇÃO A partir de (8) e da informação dada, vemos que $a = 1$ e $a/b = 2$. Então, $b = a/2 = \frac{1}{2}$ e $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Os focos são $(0, \pm\sqrt{5}/2)$ e a equação da hipérbole é

$$y^2 - 4x^2 = 1$$ □

CÔNICAS TRANSLADADAS

Como discutido no Apêndice C, no Volume I, transladamos as cônicas tomando as equações-padrão (1), (2), (4), (5), (7) e (8) e trocando x e y por $x - h$ e $y - k$.

EXEMPLO 6 Encontre uma equação para a elipse com focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ e vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUÇÃO O eixo maior é o segmento de reta que une os vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ e tem comprimento 4; assim $a = 2$. A distância entre os focos é 2, e assim, $c = 1$. Então, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Como o centro da elipse é $(3, -2)$, trocamos x e y em (4) por $x - 3$ e $y + 2$ para obter

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

como a equação da elipse. □

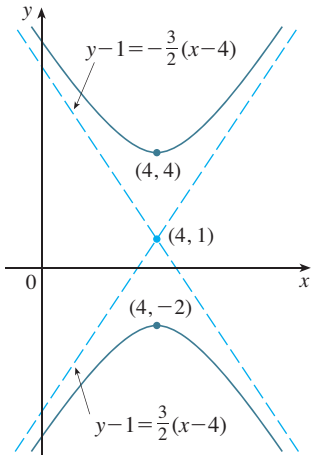


FIGURA 15
$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

EXEMPLO 7 Esboce a cônica

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

e encontre seus focos.

SOLUÇÃO Completamos os quadrados como a seguir:

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 = 144$$

$$4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

Isso está na forma de (8), exceto que x e y estão trocados por $x - 4$ e $y - 1$. Então, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ e $c^2 = 13$. A hipérbole está deslocada quatro unidades para a direita e uma unidade para cima. Os focos são $\left(4, 1 + \sqrt{13}\right)$ e $\left(4, 1 - \sqrt{13}\right)$ e os vértices são $(4, 4)$ e $(4, -2)$. As assíntotas são $y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x - 4)$. A hipérbole é esboçada na Figura 15. □

10.5 EXERCÍCIOS

1-8 Encontre o vértice, o foco e a diretriz da parábola e esboce seu gráfico.

1. $x = 2y^2$

2. $4y + x^2 = 0$

3. $4x^2 = -y$

4. $y^2 = 12x$

5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$

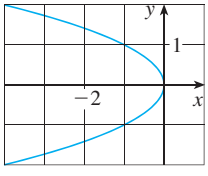
6. $x - 1 = (y + 5)^2$

7. $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$

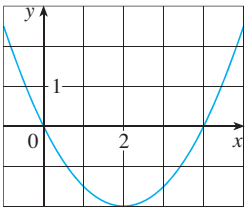
8. $y + 12x - 2x^2 = 16$

9-10 Encontre uma equação da parábola. A seguir, ache o foco e a diretriz.

9.



10.



11-16 Encontre os vértices e os focos da elipse e esboce seu gráfico.

11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

12. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

13. $25x^2 + 9y^2 = 225$

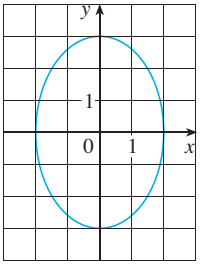
14. $4x^2 + 25y^2 = 25$

15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

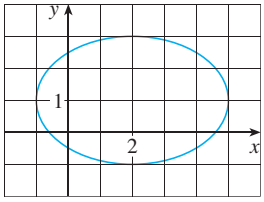
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17-18 Encontre uma equação da elipse. A seguir, localize seus focos.

17.



18.



19-24 Encontre os vértices, os focos e as assíntotas da hipérbole e esboce seu gráfico.

19. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

20. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$

21. $y^2 - x^2 = 4$

22. $9x^2 - 4y^2 = 36$

23. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$

24. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

25-30 Identifique o tipo de seção cônica cuja equação é dada e encontre os vértices e os focos.

25. $x^2 = y + 1$

26. $x^2 = y^2 + 1$

27. $x^2 = 4y - 2y^2$

28. $y^2 - 8y = 6x - 16$

29. $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$

30. $4x^2 + 4x + y^2 = 0$

31-48 Encontre uma equação para a cônica que satisfaz as condições dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(0, -2)$

32. Parábola, vértice $(1, 0)$, diretriz $x = -5$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, diretriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(3, 6)$, vértice $(3, 2)$

35. Parábola, vértice $(0, 0)$, eixo no eixo x, passando por $(1, -4)$

36. Parábola, eixo vertical, passando por $(-2, 3)$, $(0, 3)$ e $(1, 9)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértices $(0, \pm 13)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0,6)$, vértices $(0, 0)$, $(0,8)$

40. Elipse, focos $(0, -1)$, $(8, -1)$, vértices $(9, -1)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, foco $(-1, 6)$

42. Elipse, focos $(\pm 4, 0)$, passando por $(-4, 1{,}8)$

43. Hipérbole, vértices $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbole, vértices $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbole, vértices $(-3, -4)$ e $(-3, 6)$, focos $(-3, -7)$ e $(-3, 9)$

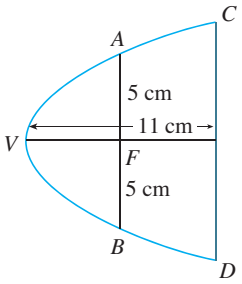
46. Hipérbole, vértices $(-1, 2)$ e $(7, 2)$, focos $(-2, 2)$ e $(8, 2)$

47. Hipérbole, vértices $(\pm 3, 0)$, assíntotas $y = \pm 2x$

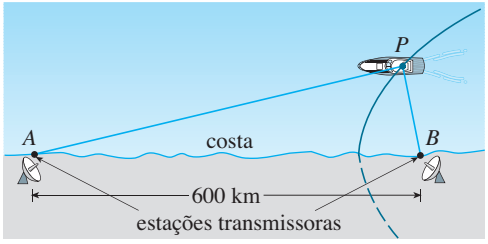
48. Hipérbole, focos $(2, 0)$ e $(2, 8)$, assíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ e $y = 5 - \frac{1}{2}x$

49. Em uma órbita lunar o ponto mais próximo da superfície da Lua é chamado *perilúnio* e o ponto mais distante da superfície da Lua é denominado *apolúnio*. A nave espacial *Apollo 11* foi colocada em uma órbita lunar elíptica com altitude de perilúnio de 110 km e altitude de apolúnio de 314 km (acima da Lua). Encontre uma equação dessa elipse se o raio da Lua for 1 728 km e o centro da Lua estiver em um dos focos.

50. Uma secção transversal de um refletor parabólico é mostrada na figura. A lâmpada é colocada no foco, e a abertura no foco é 10 cm.
(a) Ache uma equação da parábola.
(b) Encontre o diâmetro da abertura $|CD|$, 11 cm a partir do vértice.



51. No sistema de navegação LORAN (LOng RAnge Navigation), duas estações de rádio localizadas em A e B transmitem simultaneamente sinais para um barco ou um avião localizado em P. O computador de bordo converte a diferença de tempo na recepção desses sinais em diferença de distância $|PA| - |PB|$ e isso, de acordo com a definição de uma hipérbole, localiza o navio ou o avião em um ramo da hipérbole (veja a figura). Suponha que a estação B esteja localizada 600 km a leste da estação A na costa. Um navio recebe o sinal de B 1200 microssegundos (μs) antes de receber o sinal de A.
(a) Assumindo que o sinal de rádio viaja a uma velocidade de 300 m/μs, encontre uma equação da hipérbole na qual o navio está.
(b) Se o navio deveria estar ao norte de B, a que distância da costa ele estará?



52. Use a definição de uma hipérbole para deduzir a Equação 6 para uma hipérbole com focos $(\pm c, 0)$ e vértices $(\pm a, 0)$.

53. Mostre que a função definida pelo ramo superior da hipérbole $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ tem concavidade para cima.

54. Encontre uma equação para a elipse com focos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ e eixo maior com comprimento igual a 4.

55. Determine o tipo de curva representado pela equação

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 16$$

em cada um dos seguintes casos: (a) $k > 16$, (b) $0 < k < 16$ e (c) $k < 0$.
(d) Mostre que todas as curvas nas partes (a) e (b) têm os mesmos focos, não importando o valor de k.

56. (a) Mostre que a equação da reta tangente à parábola $y^2 = 4px$ no ponto (x_0, y_0) pode ser escrita como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

(b) Onde essa reta tangente intercepta o eixo x? Use esse fato para desenhar a reta tangente.

57. Mostre que as retas tangentes à parábola $x^2 = 4py$ desenhadas a partir de um ponto qualquer na diretriz são perpendiculares.

58. Mostre que se uma elipse e uma hipérbole tiverem os mesmos focos, então suas retas tangentes em cada ponto de intersecção são perpendiculares.

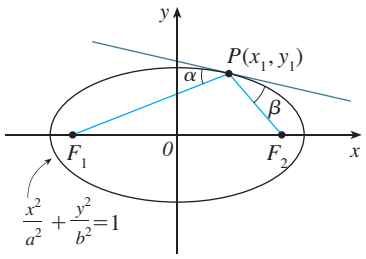
59. Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

60. O planeta Plutão percorre uma órbita elíptica ao redor do Sol (em um foco). O comprimento do eixo maior é $1{,}18 \times 10^{10}$ km, e o comprimento do eixo menor é $1{,}14 \times 10^{10}$ km. Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar a distância percorrida pelo planeta durante uma órbita completa em torno do Sol.

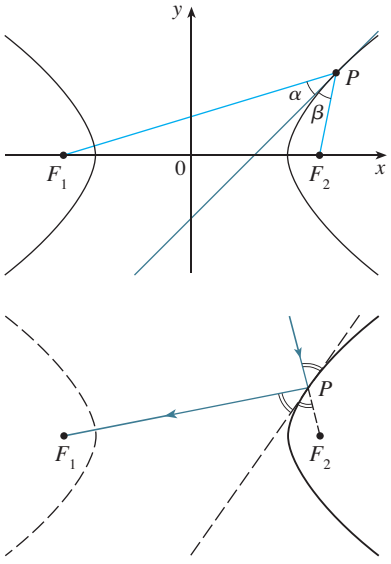
61. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e pela reta vertical passando por um foco.

62. (a) Se uma elipse é girada em torno de seu eixo maior, encontre o volume do sólido resultante.
(b) Se ela for girada em torno de seu eixo menor, encontre o volume resultante.

63. Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ com focos F_1 e F_2 e seja α e β os ângulos entre as retas PF_1, PF_2 e a elipse, como na figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. Isto explica como galerias de sussurros e litotripsia funcionam. O som vindo de um dos focos é refletido e passa pelo outro foco. [*Sugestão*: Use a fórmula no Problema 17 na página 250, no Volume I para mostrar que $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$.]



64. Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto na hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ com focos F_1 e F_2 e sejam α e β os ângulos entre as retas PF_1, PF_2 e a hipérbole, como mostrado na figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. (Essa é a propriedade de reflexão da hipérbole. Isso mostra que a luz dirigida ao foco F_2 de um espelho hiperbólico é refletida em direção ao outro foco F_1.)



10.6 SEÇÕES CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES

Na seção anterior definimos a parábola em termos de um foco e da diretriz, mas definimos a elipse e a hipérbole em termos de dois focos. Nesta seção daremos um tratamento mais uniforme para os três tipos de seções cônicas em termos de um foco e da diretriz. Além disso, colocaremos o foco na origem; assim, uma seção cônica terá uma equação polar simples, o que fornece uma descrição conveniente do movimento dos planetas, satélites e cometas.

1 TEOREMA Seja F um ponto fixado (chamado **foco**) e l uma reta fixada (denominada **diretriz**) em um plano. Seja e um número positivo fixado (conhecido como **excentricidade**). O conjunto de todos os pontos P no plano tal que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(ou seja, a razão da distância a F e da distância a l é a constante e) é uma seção cônica. A cônica é

(a) uma elipse se $e < 1$
(b) uma parábola se $e = 1$
(c) uma hipérbole se $e > 1$

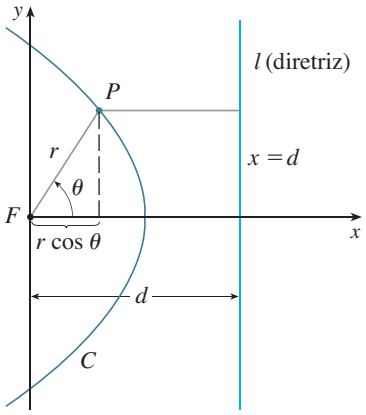


FIGURA 1

DEMONSTRAÇÃO Observe que, se a excentricidade for $e = 1$, então $|PF| = |Pl|$, e assim a condição dada simplesmente se torna a definição de uma parábola, como mostrado na Seção 10.5.

Vamos colocar o foco F na origem e a diretriz paralela ao eixo y e d unidades para a direita. Então a diretriz tem a equação $x = d$ e é perpendicular ao eixo polar. Se o ponto P tiver coordenadas polares (r, θ), vemos a partir da Figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

Então, a condição $|PF|/|Pl| = e$ ou $|PF| = e|Pl|$ torna-se

$$\textbf{2} \qquad r = e(d - r\cos\theta)$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os lados dessa equação polar e convertermos para coordenadas retangulares, teremos

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

ou

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Depois de completar os quadrados, temos

$$\textbf{3} \qquad \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Se $e < 1$, reconhecemos a Equação 3 como a equação de uma elipse. De fato, ela é da forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde

$$\textbf{4} \qquad h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Na Seção 10.5 descobrimos que os focos de uma elipse estão a uma distância c do centro, onde

$$\textbf{5} \qquad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Isso mostra que

$$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

e confirma que o foco como definido no Teorema 1 significa a mesma coisa que o foco definido na Seção 10.5. Também segue das Equações 4 e 5 que a excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Se $e > 1$, então $1 - e^2 < 0$ e vemos que a Equação 3 representa uma hipérbole. Da mesma maneira que fizemos anteriormente, poderíamos reescrever a Equação 3 na forma

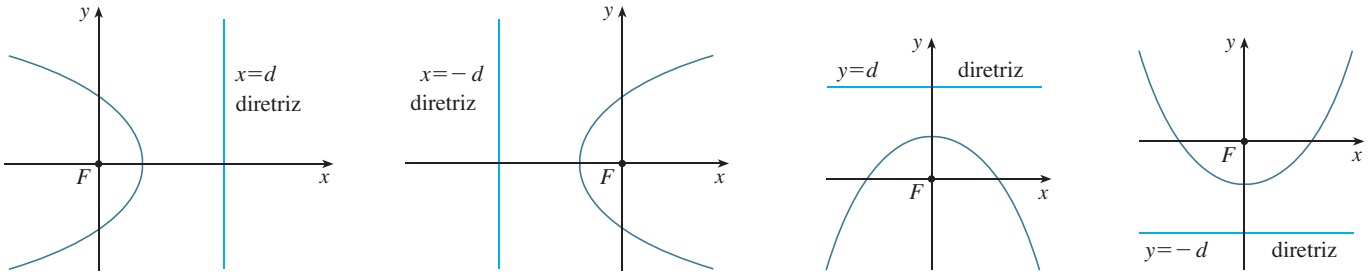
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e ver que $e = \dfrac{c}{a}$ onde $c^2 = a^2 + b^2$ □

Isolando r na Equação 2, vemos que a equação polar da cônica mostrada na Figura 1 pode ser escrita como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Se a diretriz for escolhida como estando à esquerda do foco em $x = -d$, ou se a diretriz for escolhida como estando paralela ao eixo polar em $y = \pm d$, então a equação polar da cônica é dada pelo seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 2. (veja os Exercícios 21-23.)



(a) $r = \dfrac{ed}{1+e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1-e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1+e\,\text{sen}\,\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1-e\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 2
Equações polares de cônicas

6 TEOREMA A equação polar da forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \quad \text{ou} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

representa uma seção cônica com excentricidade e. A cônica é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ ou uma hipérbole se $e > 1$.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação polar para uma parábola que tem seu foco na origem e cuja diretriz é a reta $y = -6$.

SOLUÇÃO Usando o Teorema 6 com $e = 1$ e $d = 6$, e usando a parte (d) da Figura 2, vemos que a equação da parábola é

$$r = \frac{6}{1 - \text{sen}\,\theta}$$ □

EXEMPLO 2 Uma cônica é dada pela equação polar

$$r = \frac{10}{3 - 2 \operatorname{sen} \theta}$$

Encontre a excentricidade, identifique a cônica, localize a diretriz e esboce a cônica.

SOLUÇÃO Dividindo numerador e denominador por 3, escrevemos a equação como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Do Teorema 6, vemos que isso representa uma elipse com $e = \frac{2}{3}$. Como $ed = \frac{10}{3}$, temos

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

logo, a diretriz tem a equação cartesiana $x = -5$. Quando $\theta = 0$, $r = 10$; quando $\theta = \pi$, $r = 2$. Assim os vértices têm coordenadas polares (10,0) e $(2, \pi)$. A elipse é esboçada na Figura 3. □

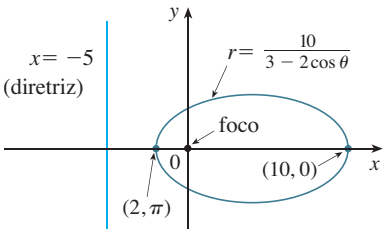


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Esboce a cônica $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUÇÃO Escrevendo a equação na forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

vemos que a excentricidade é $e = 2$ e, portanto, representa uma hipérbole. Como $ed = 6$, $d = 3$ e a diretriz tem a equação $y = 3$. Os vértices ocorrem quando $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$, assim eles são $(2, \pi/2)$ e $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. É também útil marcar os pontos de intersecção com o eixo x. Estes ocorrem quando $\theta = 0, \pi$ e em ambos os casos $r = 6$. Para maior precisão poderíamos desenhar as assíntotas. Observe que $r \to \pm\infty$ quando $1 + 2 \operatorname{sen} \theta \to 0^+$ ou 0^- e $1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ quando $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$. Então, as assíntotas são paralelas aos raios $\theta = 7\pi/6$ e $\theta = 11\pi/6$. A hipérbole é esboçada na Figura 4. □

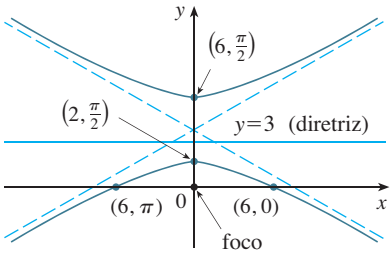


FIGURA 4

$$r = \frac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$$

Na rotação de seções cônicas descobriremos que é muito mais conveniente usar as equações polares do que as equações cartesianas. Apenas usamos o fato de que (veja o Exercício 77, na Seção 10.3) o gráfico de $r = f(\theta - \alpha)$ é o gráfico de $r = f(\theta)$ que gira no sentido anti-horário ao redor da origem por um ângulo α.

EXEMPLO 4 Se a elipse do Exemplo 2 girar por um ângulo $\pi/4$ ao redor da origem, encontre uma equação polar e trace a elipse resultante.

SOLUÇÃO Obtemos a equação da elipse que gira trocando θ por $\theta - \pi/4$ na equação dada no Exemplo 2. Assim a nova equação é

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

Usamos essa equação para traçar a elipse girada na Figura 5. Observe que a elipse gira ao redor de seu foco esquerdo. □

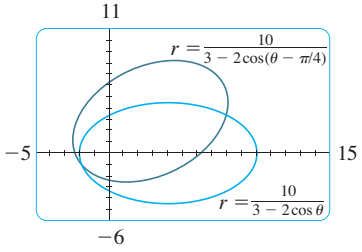


FIGURA 5

Na Figura 6 usamos um computador para esboçar diversas cônicas para ilustrar o efeito da variação da excentricidade e. Observe que quando e está próxima de 0 a elipse é praticamente circular, enquanto ela se torna mais alongada quando $e \to 1^-$. Quando $e = 1$, claro, a cônica é uma parábola.

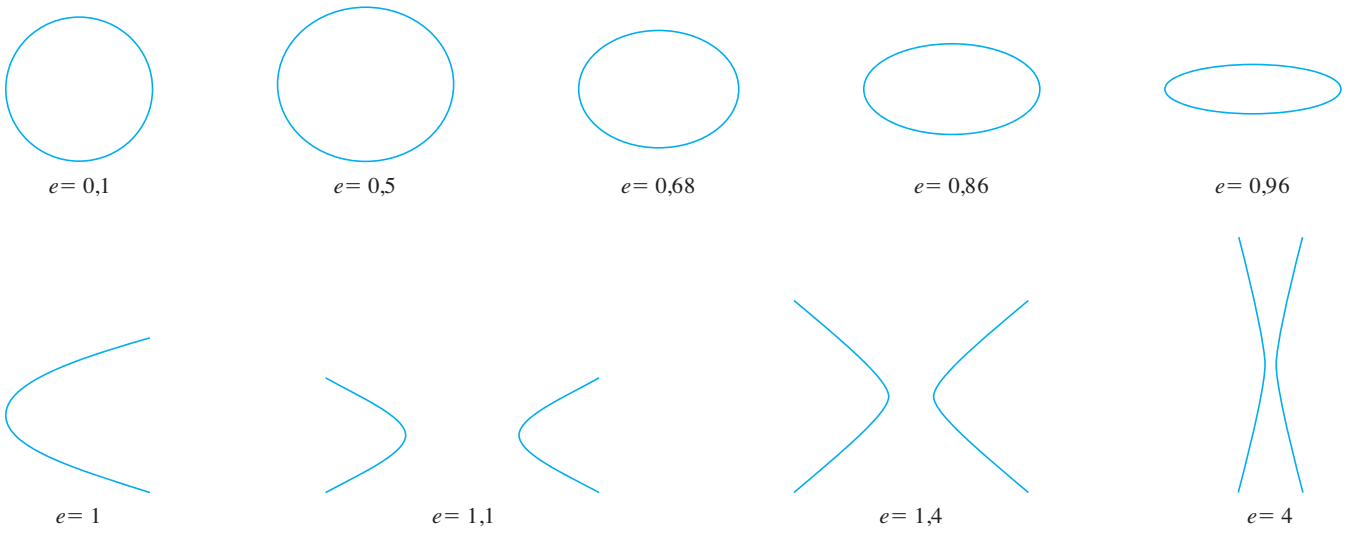


FIGURA 6

LEIS DE KEPLER

Em 1609, o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler, com base em uma enorme quantidade de dados astronômicos, publicou as seguintes três leis do movimento planetário.

LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta ligando o Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Embora Kepler tenha formulado suas leis em termos dos movimentos dos planetas em torno do Sol, elas se aplicam igualmente bem ao movimento de luas, cometas, satélites e outros corpos sujeitos a uma única força gravitacional. Na seção 13.4 mostraremos como deduzir as leis de Kepler a partir das leis de Newton. Aqui, usamos a Primeira Lei de Kepler, com a equação polar de uma elipse, para calcular quantidades de interesse em astronomia.

Para o propósito de cálculos astronômicos, é útil expressar a equação de uma elipse em termos de sua excentricidade e e de seu semieixo maior a. Podemos escrever a distância do foco à diretriz em termos de a se usarmos (4):

$$a^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1-e^2)}{e}$$

Assim, $ed = a(1 - e^2)$. Se a diretriz for $x = d$, então a equação polar é

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

7 A equação polar de uma elipse com foco na origem, semieixo maior a, excentricidade e, e diretriz $x = d$ pode ser escrita na forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

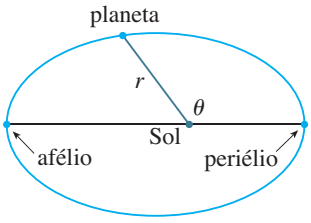


FIGURA 7

As posições de um planeta que estão mais próximas e mais distantes do Sol são chamadas **periélio** e **afélio**, respectivamente, e correspondem aos vértices da elipse. (Veja a Figura 7.) As distâncias do Sol ao periélio e afélio são chamadas **distância do periélio** e **distância do afélio**, respectivamente. Na Figura 1, o Sol está no foco F, de modo que no periélio temos $\theta = 0$ e, da Equação 7,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

Analogamente, no afélio $\theta = \pi$ e $r = a(1 - e)$.

8 A distância do periélio de um planeta ao Sol é $a(1 - e)$ e a distância do afélio é $a(1 + e)$.

EXEMPLO 5

(a) Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra em torno do Sol (em um foco), dado que a excentricidade é cerca de 0,017 e o comprimento do eixo maior é cerca de $2{,}99 \times 10^8$ km.

(b) Encontre a distância da Terra ao Sol no periélio e no afélio.

SOLUÇÃO

(a) O comprimento do eixo maior é $2a = 2{,}99 \times 10^8$, de modo que $a = 1{,}495 \times 10^8$. Nos foi dado que $e = 0{,}017$ e assim, da Equação 7, uma equação da órbita da Terra em torno do Sol é

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = \frac{(1{,}495 \times 10^8)[1 - (0{,}017)^2]}{1 + 0{,}017\cos\theta}$$

ou, aproximadamente,

$$r = \frac{1{,}49 \times 10^8}{1 + 0{,}017\cos\theta}$$

(b)De (8), a distância do periélio da Terra ao Sol é

$$a(1 - e) \approx (1{,}495 \times 10^8)(1 - 0{,}017) \approx 1{,}47 \times 10^8 \text{ km}$$

e a distância do afélio

$$a(1 + e) \approx (1{,}495 \times 10^8)(1 + 0{,}017) \approx 1{,}52 \times 10^8 \text{ km}$$

□

10.6 EXERCÍCIOS

1-8 Escreva uma equação polar de uma cônica com o foco na origem e com os dados fornecidos.

1. Hipérbole, excentricidade $\frac{7}{4}$, diretriz $y = 6$

2. Parábola, diretriz $x = 4$

3. Elipse, excentricidade $\frac{3}{4}$, diretriz $x = -5$

4. Hipérbole, excentricidade 2, diretriz $y = -2$

5. Parábola, vértice em $(4, 3\pi/2)$

6. Elipse, excentricidade 0,8, vértice $(1, \pi/2)$

7. Elipse, excentricidade $\frac{1}{2}$, diretriz $r = 4 \sec \theta$

8. Hipérbole, excentricidade 3, diretriz $r = -6 \operatorname{cossec} \theta$

9-16 (a) Encontre a excentricidade, (b) identifique a cônica, (c) dê uma equação da diretriz e (d) esboce a cônica.

9. $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

10. $r = \dfrac{12}{3 - 10 \cos \theta}$

11. $r = \dfrac{12}{4 - \operatorname{sen} \theta}$

12. $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$

13. $r = \dfrac{9}{6 + 2 \cos \theta}$

14. $r = \dfrac{8}{4 + 5 \operatorname{sen} \theta}$

15. $r = \dfrac{3}{4 - 8 \cos \theta}$

16. $r = \dfrac{10}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta}$

17. (a) Encontre a excentricidade e a diretriz da cônica $r = 1/(1 - 2 \operatorname{sen} \theta)$ e trace a cônica e sua diretriz.
(b) Se a cônica girar no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo $3\pi/4$, escreva a equação resultante e trace sua curva.

18. Trace a parábola $r = 4/(5 + 6 \cos \theta)$ e sua diretriz. Também trace a curva obtida pela rotação dessa parábola ao redor de seu foco por um ângulo $\pi/3$.

19. Trace as cônicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ com $e = 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8$ e $1{,}0$ na mesma tela. Como o valor de e afeta o formato da curva?

20. (a) Trace as cônicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ e vários valores de d. Como o valor de d afeta o formato da cônica?
(b) Trace essas cônicas para $d = 1$ e vários valores de e. Como o valor de e afeta o formato da cônica?

21. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz $x = -d$ tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

22. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz $y = d$ tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

23. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz $y = -d$ tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

24. Mostre que as parábolas $r = c/(1 + \cos \theta)$ e $r = d/(1 - \cos \theta)$ se interceptam em ângulos retos.

25. A órbita de Marte em torno do Sol é uma elipse com excentricidade 0,093 e semieixo maior $2{,}28 \times 10^8$ km. Encontre uma equação polar da órbita.

26. A órbita de Júpiter tem excentricidade 0,048 e o comprimento do seu eixo maior é $1{,}56 \times 10^9$ km. Encontre uma equação polar para a órbita.

27. A órbita do cometa Halley, visto pela última vez em 1986 e com retorno esperado para 2062, é uma elipse com excentricidade 0,97 e com um foco no Sol. O comprimento do eixo maior é 36,18 AU. [Uma unidade astronômica (AU) é a distância média entre a Terra e o Sol, cerca de $1{,}5 \times 10^8$ km.] Encontre uma equação polar para a órbita do cometa de Halley. Qual é a distância máxima do cometa até o Sol?

28. O cometa Hale-Bopp, descoberto em 1995, tem uma órbita elíptica com excentricidade 0,9951 e o comprimento do eixo maior é 356,5 AU. Encontre uma equação polar para a órbita desse cometa. Quão perto do Sol chega esse cometa?

29. O planeta Mercúrio percorre uma órbita elíptica com excentricidade 0,206. Sua distância mínima ao Sol é $4{,}6 \times 10^7$ km. Encontre sua distância máxima do Sol.

30. A distância do planeta Plutão até o Sol é $4{,}43 \times 10^9$ km no periélio e $7{,}37 \times 10^9$ km no afélio. Encontre a excentricidade da órbita de Plutão.

31. Usando os dados do Exercício 29, calcule a distância percorrida pelo planeta Mercúrio durante uma órbita completa ao redor do Sol. (Se sua calculadora ou sistema de computação algébrica calcular integrais definidas, use-o. Caso contrário, use a Regra de Simpson.)

10 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma curva parametrizada?
(b) Como você esboça uma curva parametrizada?

2. (a) Como você calcula a inclinação de uma tangente a uma curva parametrizada?
(b) Como você calcula a área sob uma curva parametrizada?

3. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes itens:
(a) O comprimento de uma curva parametrizada.
(b) A área da superfície obtida pela rotação de uma curva parametrizada em torno do eixo x.

4. (a) Use um diagrama para explicar o significado das coordenadas polares (r, θ) de um ponto.
(b) Escreva as equações para expressar as coordenadas cartesianas (x, y) de um ponto em termos de coordenadas polares.
(c) Quais equações você usaria para encontrar as coordenadas polares de um ponto se soubesse as coordenadas cartesianas?

5. (a) Como você calcula a inclinação de uma reta tangente a uma curva polar?
(b) Como você calcula a área de uma região limitada por uma curva polar?
(c) Como você calcula o comprimento de uma curva polar?

6. (a) Dê uma definição geométrica de uma parábola.
(b) Escreva uma equação de uma parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$. O que acontece se o foco for $(p, 0)$ e a diretriz for $x = -p$?

7. (a) Dê uma definição de uma elipse em termos dos focos.
(b) Escreva uma equação para a elipse com focos $(\pm c, 0)$ e vértices $(\pm a, 0)$.

8. (a) Dê uma definição de uma hipérbole em termos dos focos.
(b) Escreva uma equação para a hipérbole com os focos $(\pm c, 0)$ e os vértices $(\pm a, 0)$.
(c) Escreva equações para as assíntotas da hipérbole na parte (b).

9. (a) O que é a excentricidade de uma seção cônica?
(b) O que você pode dizer sobre a excentricidade se a seção cônica for uma elipse? Uma hipérbole? Uma parábola?
(c) Escreva uma equação polar para uma seção cônica com excentricidade e e diretriz $x = d$. O que acontece se a diretriz for $x = -d$? $y = d$? $y = -d$?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se a curva parametrizada $x = f(t), y = g(t)$ satisfaz $g'(1) = 0$, então ela tem uma tangente horizontal quando $t = 1$.

2. Se $x = f(t)$ e $y = g(t)$ têm segundas derivadas, então

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$

3. O comprimento da curva $x = f(t)$ e $y = g(t), a \leq t \leq b$ é $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.

4. Se um ponto é representado por (x, y) em coordenadas cartesianas (onde $x \neq 0$) e (r, θ) em coordenadas polares então $\theta = tg^{-1}(y/x)$.

5. As curvas polares $r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta$ e $r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$ têm o mesmo gráfico.

6. As equações $r = 2, x^2 + y^2 = 4$ e $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ têm todas o mesmo gráfico.

7. As equações paramétricas $x = t^2, y = t^4$ possuem o mesmo gráfico de $x = t^3, y = t^6$.

8. O gráfico de $y^2 = 2y + 3x$ é uma parábola.

9. A reta tangente a uma parábola intercepta a parábola apenas uma vez.

10. Uma hipérbole nunca intercepta sua diretriz.

EXERCÍCIOS

1-4 Esboce a curva parametrizada e elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana da curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leqslant t \leqslant 1$

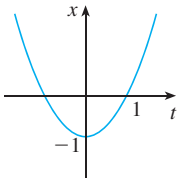
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

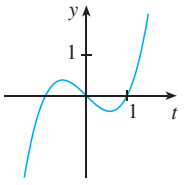
3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, 0 \leqslant \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escreva os diferentes conjuntos de equações paramétricas para a curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para esboçar a curva parametrizada $x = f(t), y = g(t)$. Indique com setas a direção na qual a curva é traçada quanto t aumenta.





7. (a) Marque o ponto com coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A seguir, encontre suas coordendas cartesianas.
(b) As coordenadas cartesianas de um ponto são $(-3, 3)$. Encontre dois conjuntos de coordenadas polares para o ponto.

8. Esboce a região que consiste nos pontos cujas coordenadas polares satisfazem $1 \leqslant r < 2$ e $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$.

9-16 Esboce a curva polar.

9. $r = 1 - \cos\theta$

10. $r = \operatorname{sen}\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17-18 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. A curva com equação polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ é chamada **cocleoide**. Use um gráfico de r como função de θ em coordenadas cartesianas para esboçar a cocleoide manualmente. Então trace-a com uma máquina para verificar seu esboço.

20. Trace a elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ e sua diretriz. Trace também a elipse obtida por sua rotação em torno da origem, de um ângulo de $2\pi/3$.

21-24 Calcule a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto correspondente ao valor especificado do parâmetro.

21. $x = \ln t, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25-26 Calcule dy/dx e d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo na curva $x = t^3 - 3t, y = t^2 + t + 1$. Então, use o cálculo para calcular as coordenadas exatas.

28. Calcule a área da região limitada pelo laço da curva no Exercício 27.

29. Em que pontos a curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tem tangentes verticais ou horizontais? Use essa informação para ajudar a esboçar a curva.

30. Calcule a área limitada pela curva no Exercício 29.

31. Calcule a área limitada pela curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Calcule a área limitada pelo laço interno da curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Calcule os pontos de intersecção das curvas $r = 2$ e $r = 4\cos\theta$.

34. Encontre os pontos de intersecção das curvas $r = \operatorname{cotg}\theta$ e $r = 2\cos\theta$.

35. Encontre a área da região que está dentro de ambos os círculos $r = 2\operatorname{sen}\theta$ e $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Encontre a área da região que está dentro da curva $r = 2 + \cos 2\theta$, mas fora da curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37-40 Calcule o comprimento da curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

41-42 Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

43. As curvas definidas pelas equações paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

são chamadas **estrofides** (do grego, girar, torcer). Investigue como essas curvas mudam quando c varia.

44. Uma família de curvas tem equações polares $r^a = |\operatorname{sen} 2\theta|$, onde a é um número positivo. Investigue como essas curvas mudam quando a varia.

45-48 Encontre os focos e os vértices e esboce o gráfico.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

49. Encontre uma equação da elipse com foco $(\pm 4, 0)$ e diretriz $(\pm 5, 0)$.

50. Encontre uma equação da hipérbole com focos $(2, 1)$ e vértices $x = -4$.

51. Encontre uma equação da hipérbole com focos $(0, \pm 4)$ e assíntotas $y = \pm 3x$.

52. Encontre uma equação da elipse com focos $(3, \pm 2)$ e eixo principal com comprimento 8.

53. Encontre uma equação para a elipse que compartilhe um vértice e um foco com a parábola $x^2 + y = 100$ e que tenha seu outro foco na origem.

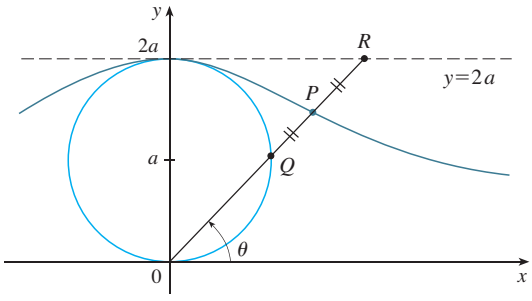
54. Mostre que, se m for qualquer número real, então existem exatamente duas retas de inclinação m tangentes à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e suas equações são

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

55. Encontre uma equação polar para a elipse com foco na origem, excentricidade $\frac{1}{3}$ e diretriz com equação $r = 4 \sec \theta$.

56. Mostre que os ângulos entre o eixo polar e as assíntotas da hipérbole $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$ são dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. Na figura, o círculo de raio a é estacionário, e para cada θ o ponto P é o ponto médio do segmento QR. A curva traçada por P para $0 < \theta < \pi$ é denominada **curva de arco longo**. Encontre as equações paramétricas para essa curva.



1. Uma curva é definida pelas equações paramétricas

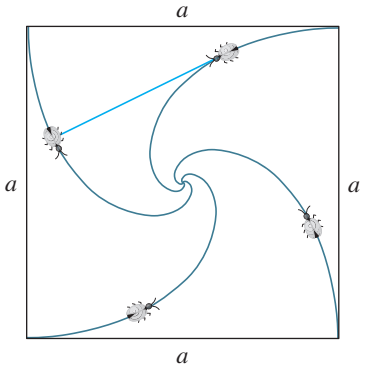
$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\,du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

Calcule o comprimento do arco da curva a partir da origem até o ponto mais próximo onde exista uma reta tangente vertical.

2. (a) Encontre os pontos mais altos e mais baixos sobre a curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
(b) Esboce a curva. (Observe que ela é simétrica em relação a ambos os eixos e a ambas as retas $y = \pm x$; assim, inicialmente é suficiente considerar $y \geqslant x \geqslant 0$.)
(c) Use as coordenadas polares e um sistema de computação algébrica para encontrar a área dentro da curva.

3. Qual é a menor janela que contém cada membro da família de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, onde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre sua resposta traçando vários membros da família nesta janela.

4. Quatro insetos são colocados nos quatro cantos de um quadrado com lado de comprimento a. Os insetos andam no sentido anti-horário na mesma velocidade e cada um deles sempre anda diretamente em direção ao próximo inseto. Eles se aproximam do centro do quadrado ao longo de um caminho em espiral.
(a) Encontre a equação polar do caminho do inseto supondo que o polo esteja no centro do quadrado. (Use o fato de que a reta ligando um inseto até o próximo é tangente ao caminho do inseto.)
(b) Encontre a distância percorrida por um inseto quando ele encontra os outros insetos no centro.



5. Uma curva chamada **fólio de Descartes** é definida pelas equações paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

(a) Mostre que, se (a, b) estiverem na curva, então (b, a) também está; isto é, a curva é simétrica em relação à reta $y = x$. Onde a curva intercepta essa reta?
(b) Encontre os pontos na curva onde as retas tangentes são horizontais ou verticais.
(c) Mostre que a reta $y = -x - 1$ é uma assíntota oblíqua.
(d) Esboce a curva.
(e) Mostre que a equação cartesiana dessa curva é $x^3 + y^3 = 3xy$.
(f) Mostre que a equação polar pode ser escrita na forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^3 \theta}$$

(g) Encontre a área da região dentro do laço dessa curva.
(h) Mostre que a área do laço é a mesma que está entre a assíntota e os ramos infinitos da curva. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a integral.)

6. Um círculo C de raio $2r$ tem seu centro na origem. Um círculo de raio r rola sem escorregar no sentido anti-horário em torno de C. Um ponto P está localizado em um raio fixado do círculo em rotação a uma distância b de seu centro, $0 < b < r$. [Veja as partes (i) e (ii) da figura.] Seja L a reta do centro de C ao centro do círculo em rotação e seja θ o ângulo que L faz com o eixo positivo.

(a) Usando θ como um parâmetro, mostre que as equações paramétricas da trajetória percorrida por P são

$$x = b\cos 3\theta + 3r\cos\theta \qquad y = b\,\text{sen}\,3\theta + 3r\,\text{sen}\,\theta$$

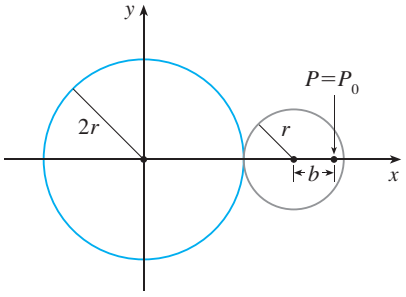
Observação: se $b = 0$, a trajetória é um círculo de raio $3r$; se $b = r$, a trajetória é uma epicicloide. A trajetória percorrida por P para $0 < b < r$ é chamada *epitrocoide*.

(b) Trace a curva para diversos valores de b entre 0 e r.

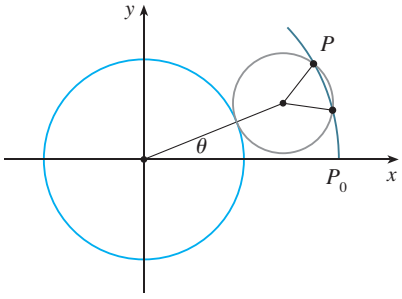
(c) Mostre que pode ser inscrito um triângulo equilátero na epitrocoide e que seu centroide está no círculo de raio b centrado na origem.

Observação: Este é o princípio do motor de rotação de Wankel. Quando o triângulo equilátero gira com seu vértice na epitrocoide, seu centroide percorre um círculo cujo centro está no centro da curva.

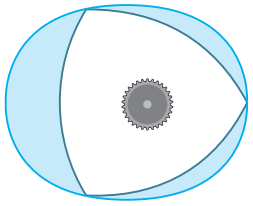
(d) Na maioria dos motores de rotação os lados do triângulo equilátero são substituídos por arcos de círculo centrados no vértice oposto como na parte (iii) da figura (então, o diâmetro do rotor é constante). Mostre que o rotor se ajustará à epitrocoide se $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.



(i)



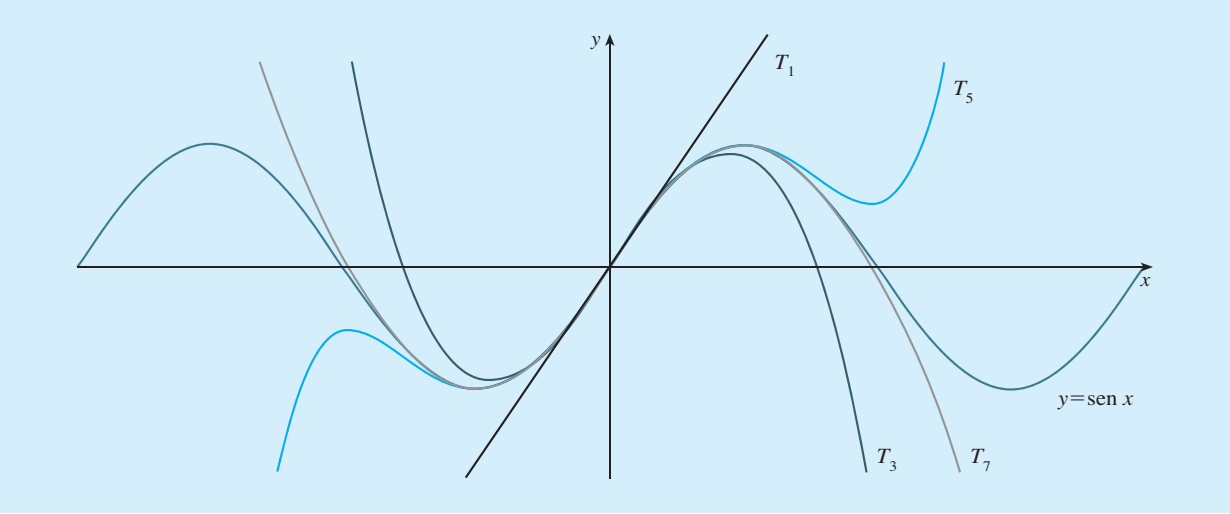
(ii)



(iii)

11

SEQUÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS



As somas parciais T_n de uma série de Taylor fornecem aproximações cada vez melhores de uma função à medida que n aumenta.

Sequências e séries infinitas foram introduzidas rapidamente no Volume I em conexão com os paradoxos de Zenon e a representação decimal de números. Sua importância em cálculo surge da ideia de Newton da representação de funções como somas de séries infinitas. Por exemplo, para encontrar áreas ele frequentemente integrava uma função expressando-a primeiro como uma série e então integrando cada termo da série. Seguiremos sua ideia na Seção 11.10 para integrar funções como e^{-x^2}. (Lembre-se de que, anteriormente, não podíamos fazer isso.) Muitas das funções que surgem em física-matemática e química, tais como as funções de Bessel, são definidas como somas de séries; assim, é importante nos familiarizarmos com os conceitos básicos de convergência de sequências e séries infinitas.

Os físicos também usam séries de outra maneira, como veremos na Seção 11.12. Em áreas de estudo tão diversas quanto óptica, relatividade especial e eletromagnetismo, eles analisam fenômenos trocando uma função pelos primeiros termos da série que a representa.

Uma **sequência** pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2 é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo*. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n, existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

NOTAÇÃO A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também denotada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EXEMPLO 1 Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o n-ésimo termo. Nos exemplos a seguir, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que n não precisa começar em 1.

(a) $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots \right\}$

(b) $\left\{ \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{ -\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots \right\}$

(c) $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3}\,, n \geqslant 3$ $\qquad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}\,, \ldots\}$

(d) $\left\{ \cos\dfrac{n\pi}{6} \right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}, n \geqslant 0$ $\qquad \left\{ 1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots \right\}$ □

EXEMPLO 2 Ache uma fórmula para o termo geral a_n da sequência

$$\left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots \right\}$$

supondo que o padrão dos primeiros termos continue.

SOLUÇÃO Foi-nos dado que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que os numeradores dessas frações começam com 3 e são incrementados por 1 à medida que avançamos para o próximo termo. O segundo termo tem numerador 4; o terceiro, numerador 5; generalizando, o n-ésimo termo terá numerador $n + 2$. Os denominadores são potências de 5, logo a_n tem denominador 5^n. Os sinais dos termos alternam entre positivo e negativo, assim, precisamos multiplicar por uma potência de -1. No

Exemplo 1(b) o fator $(-1)^n$ significa que começamos com um termo negativo. Neste exemplo, queremos começar com um termo positivo e assim usamos $(-1)^{n-1}$ ou $(-1)^{n+1}$. Portanto,

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$ □

EXEMPLO 3 Aqui estão algumas sequências que não têm uma equação de definição simples.
(a) A sequência $\{p_n\}$, onde p_n é a população do mundo no dia 1º de janeiro do ano n.
(b) Se fizermos a_n ser o algarismo na n-ésima casa decimal do número e, então $\{a_n\}$ é uma sequência bem-definida cujos primeiros termos são

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) A **sequência de Fibonacci** $\{f_n\}$ é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano conhecido como Fibonacci resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos (veja o Exercício 71). □

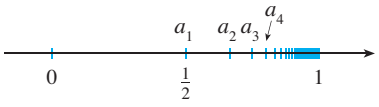


FIGURA 1

Uma sequência como aquela no Exemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, pode ser visualizada marcando seus termos na reta real, como na Figura 1, ou traçando seu gráfico, como na Figura 2. Observe que, como uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos, seu gráfico consiste em pontos isolados com coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

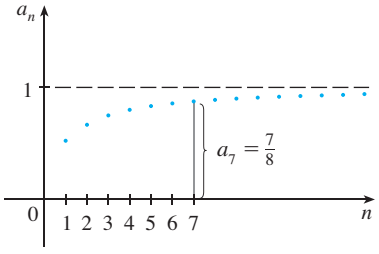


FIGURA 2

A partir da Figura 1 ou 2 parece que os termos da sequência $a_n = n/(n+1)$ estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato, a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

pode ficar tão pequena quanto se desejar tomando-se n suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência $\{a_n\}$ aproximam-se de L quando n torna-se grande. Observe que a seguinte definição do limite de uma sequência é muito parecida com a definição do limite de uma função no infinito, dada na Seção 2.6, no Volume I.

I DEFINIÇÃO Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

A Figura 3 ilustra a Definição 1 mostrando os gráficos de duas sequências que têm limite L.

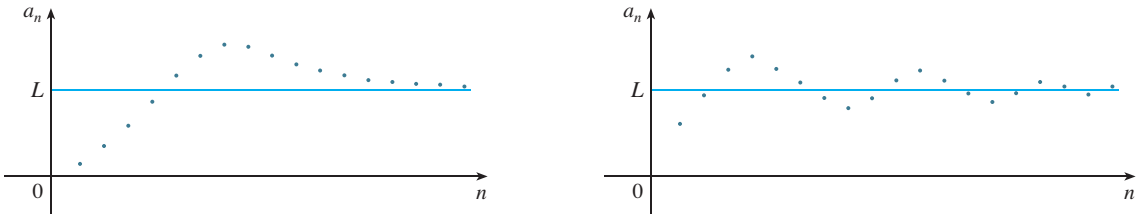


FIGURA 3 Gráficos de duas sequências com $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Uma versão mais precisa da Definição 1 é a seguinte.

■ Compare esta definição com a Definição 2.6.7, no Volume I.

2 DEFINIÇÃO Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se } n > N \text{ então } |a_n - L| < \varepsilon$$

A Definição 2 é ilustrada pela Figura 4, na qual os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um N tal que todos os termos da sequência de a_{N+1} em diante devem estar naquele intervalo.

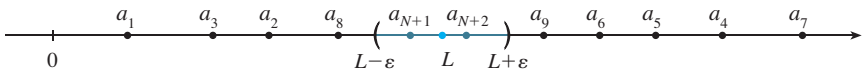


FIGURA 4

Outra ilustração da Definição 2 é dada na Figura 5. Os pontos no gráfico de $\{a_n\}$ devem estar entre as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ se $n > N$. Esse desenho deve ser válido não importa quão pequeno ε seja escolhido, mas geralmente um ε menor exige um N maior.

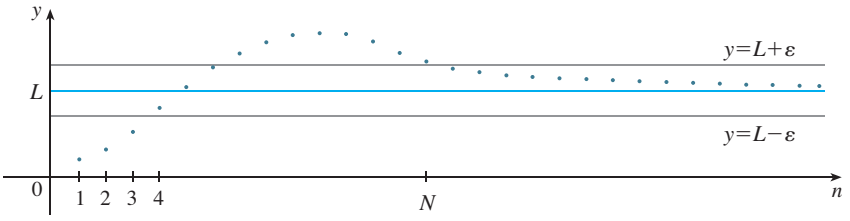


FIGURA 5

A comparação da Definição 2 com a Definição 2.6.7, no Volume I, mostra que a única diferença entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ é que n precisa ser inteiro. Então, temos o seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 6.

3 TEOREMA Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

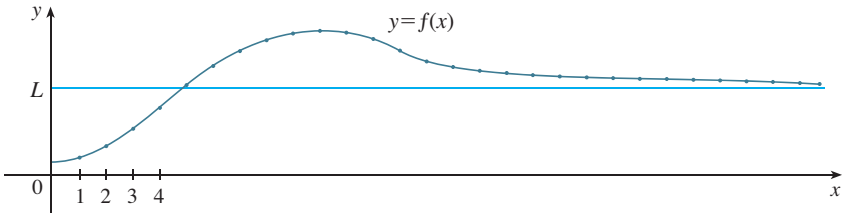


FIGURA 6

Em particular, como sabemos que $\lim_{x \to \infty} (1/x^r) = 0$ quando $r > 0$ (Teorema 2.6.5, no Volume I), temos

4
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{se} \quad r > 0$$

Se a_n se tornar grande quando n se tornar grande, usaremos a notação $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. A seguinte definição precisa é similar à Definição 2.6.9, no Volume I.

5 DEFINIÇÃO $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se } n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

Se $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, mas de maneira especial. Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

As Propriedades do Limite dadas na Seção 2.3, no Volume I, também valem para os limites de sequências, e suas demonstrações são similares.

PROPRIEDADES DO LIMITE PARA SEQUÊNCIAS

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} ca_n = c \lim_{n \to \infty} a_n \qquad \lim_{n \to \infty} c = c$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n} \qquad \text{se } \lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \to \infty} a_n\right]^p \qquad \text{se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

O Teorema do Confronto também pode ser adaptado para sequências como a seguir (veja a Figura 7).

TEOREMA DO CONFRONTO PARA SEQUÊNCIAS

Se $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ e $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = L$, então $\lim_{n \to \infty} b_n = L$.

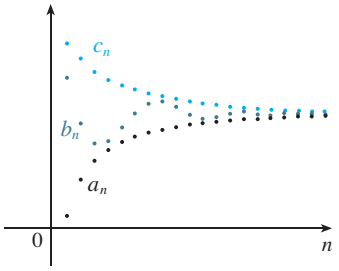


FIGURA 7
A sequência $\{b_n\}$ fica presa entre as sequências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$

Outro fato útil sobre limites de sequências é dado pelo seguinte teorema, cuja demonstração é pedida no Exercício 75.

6 TEOREMA Se $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

EXEMPLO 4 Calcule $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUÇÃO O método é similar àquele usado na Seção 2.6, no Volume I: divida o numerador e o denominador pela maior potência de n e então use as Propriedades do Limite.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\dfrac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{1+0}=1$$

■ Isso mostra que a estimativa que fizemos anteriormente a partir das Figuras 1 e 2 estava correta.

Aqui usamos a Equação 4 com $r = 1$. □

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUÇÃO Observe que numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$. Não podemos empregar a Regra de L'Hôspital diretamente, porque ela não se aplica a sequências, mas, sim, a funções de uma variável real. Contudo, podemos usar a Regra de L'Hôspital para a função relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ e obter

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

Portanto, pelo Teorema 3, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$ □

EXEMPLO 6 Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Se escrevermos os termos da sequência, obteremos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

O gráfico dessa sequência é exibido na Figura 8. Como os termos oscilam entre 1 e -1 infinitamente, a_n não se aproxima de número algum. Então, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ não existe; ou seja, a sequência $\{(-1)^n\}$ é divergente. □

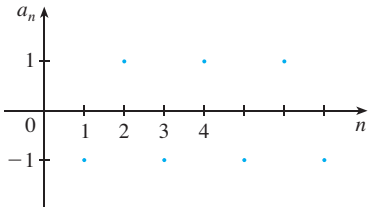


FIGURA 8

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ se ele existir.

■ O gráfico da sequência no Exemplo 7 é mostrado na Figura 9 e confirma a nossa resposta.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Assim, pelo Teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$ □

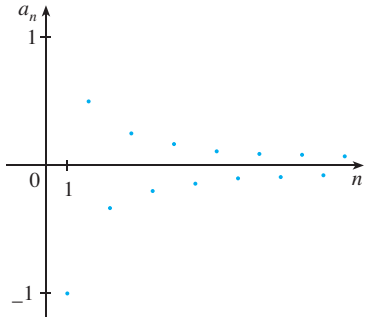


FIGURA 9

O seguinte teorema diz que se aplicarmos uma função contínua aos termos de uma sequência convergente, o resultado também será convergente. A demonstração é pedida no Exercício 76.

7 TEOREMA Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUÇÃO Como a função seno é contínua em 0, o Teorema 7 nos permite escrever

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi/n)=\operatorname{sen}\Big(\lim_{n\to\infty}(\pi/n)\Big)=\operatorname{sen}0=0$$ □

EXEMPLO 9 Discuta a convergência da sequência $a_n = n!/n^n$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUÇÃO Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$, mas aqui não temos uma função correspondente para usar com a Regra de L'Hospital ($x!$ não está definido quando x não é um inteiro). Vamos escrever alguns termos para pensarmos sobre o que acontece com a_n quando n cresce:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \tag{8}$$

Parece, a partir dessas expressões e do gráfico na Figura 10, que os termos estão decrescendo e talvez se aproximem de 0. Para confirmar isso, observe na Equação 8 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que a expressão em parênteses é no máximo 1, porque o numerador é menor (ou igual) ao denominador. Assim,

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabemos que $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$ pelo Teorema do Confronto. □

■ **Criando Gráficos de Sequências**
Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos especiais que nos permitem criar sequências e traçá-las diretamente. Com a maioria das calculadoras gráficas, contudo, as sequências podem ser traçadas usando equações paramétricas. Por exemplo, a sequência no Exemplo 9 pode ser traçada inserindo-se as equações paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

e fazendo o gráfico no modo pontual começando com $t = 1$ e tomando o passo t igual a 1. O resultado é exposto na Figura 10.

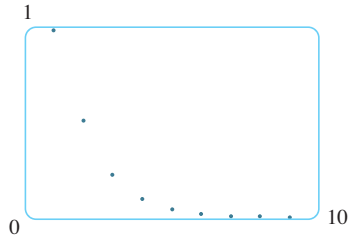


FIGURA 10

EXEMPLO 10 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 2.6 e dos gráficos das funções exponenciais na Seção 1.5, ambos no Volume I, que $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo, colocando $a = r$ e usando o Teorema 3, temos

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

É óbvio que

$$\lim_{n \to \infty} 1^n = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to \infty} 0^n = 0$$

Se $-1 < r < 0$, então $0 < |r| < 1$, de modo que

$$\lim_{n \to \infty} |r^n| = \lim_{n \to \infty} |r|^n = 0$$

e, portanto, $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ pelo Teorema 6. Se $r \leqslant -1$, então $\{r^n\}$ diverge como no Exemplo 6. A Figura 11 mostra os gráficos para vários valores de r. (O caso $r = -1$ é mostrado na Figura 8.)

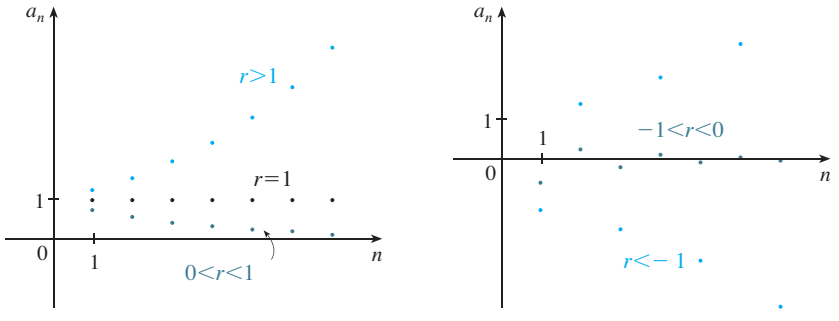


FIGURA 11
A sequência $a_n = r^n$

□

Os resultados do Exemplo 10 estão resumidos a seguir para uso futuro.

9 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

10 DEFINIÇÃO Uma sequência $\{a^n\}$ é denominada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. É dita **monótona** se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 11 A sequência $\left\{ \dfrac{3}{n+5} \right\}$ é decrescente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

■ O lado direito é menor porque tem um denominador maior.

de modo que $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. □

EXEMPLO 12 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 1 Devemos mostrar que $a_{n+1} < a_n$, isto é,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Essa desigualdade é equivalente àquela que obteríamos pela multiplicação cruzada:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \iff (n+1)(n^2+1) < [(n+1)^2+1]$$

$$\iff n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\iff 1 < n^2 + n$$

Como $n \geqslant 1$, sabemos que $n^2 + n > 1$ é verdadeiro. Portanto, $a_{n+1} < a_n$ e assim $\{a_n\}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 2 Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{sempre que } x^2 > 1$$

Então, f é decrescente em $(1, \infty)$, e assim $f(n) > f(n+1)$. Portanto, $\{a_n\}$ é decrescente. □

11 DEFINIÇÃO Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

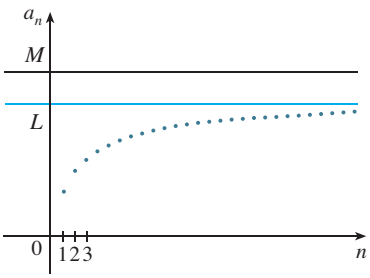


FIGURA 12

Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente ($a_n > 0$), mas não superiormente. A sequência $a_n = n/(n + 1)$ é limitada, porque $0 < a_n < 1$ para todo n.

Sabemos que nem toda sequência limitada é convergente [por exemplo, a sequência $a_n = (-1)^n$ satisfaz $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, mas é divergente, como mostrado no Exemplo 6], e que nem toda sequência monótona é convergente ($a_n = n \to \infty$). Mas se uma sequência for limitada *e* monótona, então ela deve ser convergente. Esse fato é demonstrado no Teorema 12, porém, intuitivamente, você pode entender por que isso é verdadeiro olhando a Figura 12. Se $\{a_n\}$ for crescente e $a_n \leqslant M$ para todo n, então os termos são forçados a se aglomerar e se aproximar de algum número L.

A demonstração do Teorema 12 é baseada no **Axioma da Completude** para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que diz que, se S for um conjunto não vazio de números reais que tem um limitante superior M ($x \leqslant M$ para todo x em S), então S tem um **limitante superior mínimo** b. (Isso significa que b é um limitante superior para S, mas, se M for outro limitante superior, então $b \leqslant M$.) O Axioma da Completude é uma expressão do fato de que não existe salto nem buraco na reta dos números reais.

12 TEOREMA DA SEQUÊNCIA MONÓTONA Toda sequência monótona limitada é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência crescente. Como $\{a_n\}$ é limitada, o conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ tem um limitante superior. Pelo Axioma da Completude, ele tem um menor limitante superior. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *não* é um limitante superior para S (porque L é o *menor* dos limitantes superiores). Portanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para algum inteiro } N$$

Mas a sequência é crescente, assim $a_n \geqslant a_N$ para cada $n > N$. Então, se $n > N$, temos

$$a_n > L - \varepsilon$$

assim,

$$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

porque $a_n \leqslant L$. Então,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{sempre que } n > N$$

de modo que $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

Uma demonstração similar (usando o maior limitante inferior) funciona se $\{a_n\}$ for decrescente. □

Na demonstração do Teorema 12 vemos que uma sequência que é crescente e limitada superiormente é convergente. (Do mesmo modo, uma sequência decrescente que é limitada inferiormente é convergente.) Esse fato é usado muitas vezes para lidar com séries infinitas.

EXEMPLO 13 Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUÇÃO Começamos calculando os primeiros termos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$
$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5 \qquad a_5 = 5{,}75 \qquad a_6 = 5{,}875$$
$$a_7 = 5{,}9375 \qquad a_8 = 5{,}96875 \qquad a_9 = 5{,}984375$$

Esses termos iniciais sugerem que a sequência é crescente e que os termos estão se aproximando de 6. Para confirmar que a sequência é crescente, usamos a indução matemática para

■ A indução matemática é frequentemente usada para trabalhar com sequências recursivas. Veja a página 67, no Volume I, para uma discussão do Princípio da Indução Matemática.

mostrar que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq 1$. Isso é verdadeiro para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Se assumirmos que isso é verdadeiro para $n = k$, então, temos

$$a_{k+1} > a_k$$

assim, $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Logo, $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Deduzimos que $a_{n+1} > a_n$ é verdadeiro para $n = k + 1$. Portanto, por indução matemática, a desigualdade é verdadeira para todo n.

A seguir, verificamos que $\{a_n\}$ é limitada mostrando que $a_n < 6$ para todo n. (Como a sequência é crescente, já sabemos que ela tem um limitante inferior: $a_n \geq a_1 = 2$ para todo n.) Sabemos que $a_1 < 6$, assim a asserção é verdadeira para $n = 1$. Suponha que isso seja verdadeiro para $n = k$. Logo,

$$a_k < 6$$

assim, $$a_k + 6 < 12$$

$$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Logo, $$a_{k+1} < 6$$

Isso mostra, por indução matemática, que $a_n < 6$ para todo n.

Como a sequência $\{a_n\}$ é crescente e limitada, o Teorema 12 garante que ela tem um limite. O teorema não nos conta qual é o valor do limite. Mas agora que sabemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos usar a relação de recorrência para escrever

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\Big) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

■ Uma demonstração desse fato é pedida no Exercício 58.

Como $a_n \to L$, segue também que $a_{n+1} \to L$ (quando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, igualmente). Assim, temos

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Resolvendo essa equação para L temos $L = 6$, como previsto. □

11.1 EXERCÍCIOS

1. (a) O que é uma sequência?
(b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
(b) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

3-8 Liste os cinco primeiros termos da sequência.

3. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

4. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)\}$

7. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1$

8. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$

9-14 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

9. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

10. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

12. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

14. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \ldots\}$

15. Liste os primeiros seis termos da sequência definida por

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Esta sequência parece ter um limite? Em caso afirmativo, encontre-o.

16. Liste os primeiros nove termos da sequência $\{\cos(n\pi/3)\}$. Essa sequência parece ter um limite? Em caso afirmativo, encontre-o. Em caso negativo, explique por quê.

17-46 Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

17. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

18. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

19. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

20. $a_n = \dfrac{n}{1 + \sqrt{n}}$

21. $a_n = e^{1/n}$

22. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

23. $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

24. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

25. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

26. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

27. $a_n = \cos(n/2)$

28. $a_n = \cos(2/n)$

29. $a_n = \left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

30. $\{\operatorname{artg} 2n\}$

31. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

32. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

33. $\{n^2 e^{-n}\}$

34. $\{n \cos n\pi\}$

35. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

36. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

37. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

38. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

39. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

41. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

42. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

43. $\{0, 1, 0, 0\ 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

44. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

45. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

46. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

47-53 Use um gráfico da sequência para decidir se ela é convergente ou divergente. Se a sequência for convergente, conjecture o valor do limite a partir do gráfico e então demonstre sua conjectura. (Veja a margem esquerda da página 646 para sugestões de como traçar gráficos de sequências.)

47. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

48. $a_n = \sqrt{n} \operatorname{sen}(\pi/\sqrt{n})$

49. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

50. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

51. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

52. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

53. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n)^n}$

54. (a) Determine se a sequência definida a seguir é convergente ou divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) O que acontece se o primeiro termo for $a_1 = 2$?

55. Se \$ 1 000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, contabilizados anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1\,000(1{,}06)^n$ dólares.

(a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência $\{a_n\}$.

(b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.

56. Calcule os primeiros 40 termos da sequência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número ímpar} \end{cases}$$

e $a_1 = 11$. Faça o mesmo para $a_1 = 25$. Faça uma conjectura sobre esse tipo de sequência.

57. Para quais valores de r a sequência $\{nr^n\}$ é convergente?

58. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_n$$

(b) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Supondo que a_n é convergente, encontre seu limite.

59. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

60-66 Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

60. $a_n = (-2)^{n+1}$

61. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

62. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

63. $a_n = n(-1)^n$

64. $a_n = ne^{-n}$

65. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

66. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

67. Calcule o limite da sequência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

68. Uma sequência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

69. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e que $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e calcule seu limite.

70. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leqslant 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre seu limite.

71. (a) Fibonacci propôs o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é f_n, onde $\{f_n\}$ é a sequência de Fibonacci definida no Exemplo 3(c).
(b) Seja $a_n = f_{n+1}/f_n$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

72. (a) Seja $a_1 = a, a_2 = f(a), a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots, a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.
(b) Ilustre a parte (a) tomando $f(x) = \cos x, a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

73. (a) Use um gráfico para conjecturar o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use um gráfico da sequência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$ na Definição 2.

74. Use a Definição 2 diretamente para demonstrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ quando $|r| < 1$.

75. Demonstre o Teorema 6. [*Sugestão*: Use a Definição 2 ou o Teorema do Confronto.]

76. Demonstre o Teorema 7.

77. Demonstre que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}$ for limitada, então $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

78. Seja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(a) Mostre que, se $0 \leqslant a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n$$

(b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$.
(c) Use $a = 1 + 1/(n+1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para mostrar que $\{a_n\}$ é crescente.
(d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.
(e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que $a_n < 4$ para todo n.
(f) Use o Teorema 12 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (O limite é e. Veja a Equação 3.6.6, no Volume I.)

79. Sejam a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1 sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Use a indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduza que a_n e b_n são ambas convergentes.
(c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss chamou o valor comum desses limites de **média aritmética-geométrica** dos números a e b.

80. (a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
(b) Se $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

encontre os oito primeiros membros da sequência $\{a_n\}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Isso dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

81. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são constantes positivas que dependem da espécie e de seu habitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$.
(a) Mostre que se $\{p_n\}$ é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$.
(b) Mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
(c) Use o item (b) para mostrar que, se $a > b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; em outras palavras, a população se extingue.
(d) Agora, assuma que $a < b$. Mostre que, se $p_0 < b - a$, então $\{p_n\}$ é crescente e $0 < p_n < b - a$. Mostre também que, se $p_0 > b - a$, então, $\{p_n\}$ é decrescente e $p_n > b - a$. Deduza que, se $a < b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROJETO DE LABORATÓRIO

SCA

SEQUÊNCIAS LOGÍSTICAS

Uma sequência que aparece em ecologia como um modelo para o crescimento populacional é definida pela **equação de diferença logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

onde p_n mede o tamanho da população da n-ésima geração de uma única espécie. Para manter os números manejáveis, p_n é uma fração do tamanho máximo da população, e assim $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que a forma dessa equação é similar à da equação diferencial logística na Seção 9.4. O modelo discreto — com sequências em vez de funções contínuas — é preferível para modelar populações de insetos, nas quais acasalamento e morte ocorrem de maneira periódica.

Um ecologista está interessado em prever o tamanho da população com o passar do tempo e faz as perguntas: ela estabilizará em um valor-limite? Ela mudará de uma maneira cíclica? Ou ela exibirá comportamento aleatório?

Escreva um programa para calcular os n primeiros termos dessa sequência, começando com uma população inicial p_0, onde $0 < p_0 < 1$. Use esse programa para fazer o seguinte:

1. Calcule 20 ou 30 termos da sequência para $p_0 = \frac{1}{2}$ e para dois valores de k tal que $1 < k < 3$. Faça o gráfico das sequências. Elas parecem convergir? Repita para um valor diferente de p_0 entre 0 e 1. O limite depende da escolha de p_0? Depende da escolha de k?
2. Calcule termos da sequência para um valor de k entre 3 e 3,4 e faça seu gráfico. O que você nota sobre o comportamento dos termos?
3. Experimente com valores de k entre 3,4 e 3,5. O que acontece com os termos?
4. Para valores de k entre 3,6 e 4, calcule e faça o gráfico de pelo menos 100 termos e comente o comportamento da sequência. O que acontecerá se você mudar p_0 por 0,001? Esse tipo de comportamento é chamado *caótico* e é exibido por populações de insetos sob certas condições.

11.2 SÉRIES

Se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma

1

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

Mas faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos?

Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque, se começarmos adicionando os termos, obteremos as somas cumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . e depois do n-ésimo termo, $n(n + 1)/2$, que se torna muito grande à medida que n aumenta. Contudo, se começarmos a somar os termos da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

obteremos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. A tabela mostra que, quando adicionamos mais e mais termos, essas somas parciais se tornam cada vez mais próximas de 1. (Veja também a Figura 11 na página 7, no Volume I.) De fato, somando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas quanto quisermos de 1. Assim, parece razoável dizer que a soma dessa série infinita é 1 e escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Usamos uma ideia parecida para determinar se uma série geral (1) tem uma soma ou não. Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

e, em geral,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite. Se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita $\sum a_n$.

■ Compare com a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Para encontrar essa integral, integramos de 1 até t e então fazemos $t \to \infty$. Para uma série, somamos de 1 a n e então fazemos $n \to \infty$.

2 DEFINIÇÃO Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é dita **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado **soma** da série. Caso contrário, a série é dita **divergente**.

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Deste modo, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EXEMPLO 1 Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por uma **razão** r. (Já consideramos acima o caso especial onde $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$.) Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, a série geométrica diverge nesse caso. Se $r \neq 1$, temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Subtraindo essas equações, obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

■ A Figura 1 fornece uma demonstração geométrica do resultado no Exemplo 1. Se os triângulos forem construídos como mostrado e s for a soma da série, então, por semelhança de triângulos,

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{então} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

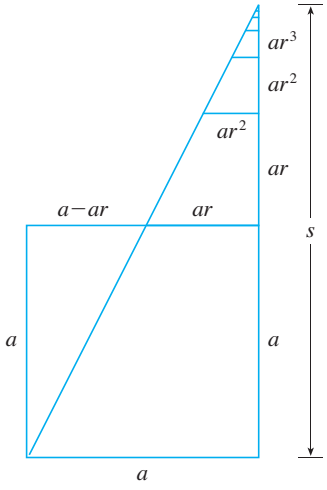


FIGURA 1

■ Em palavras: a soma de uma série geométrica convergente é

$$\frac{\text{primeiro termo}}{1 - \text{razão}}$$

3

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Se $-1 < r < 1$, sabemos, a partir de (11.1.9), que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$; assim,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando $|r| < 1$ a série geométrica é convergente, e sua soma é $a/(1 - r)$.

Se $r \leq -1$ ou $r > 1$, a sequência $\{r^n\}$ é divergente por (11.1.9); assim, pela Equação 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. Portanto, a série geométrica diverge naqueles casos. □

Resumimos os resultados do Exemplo 1 como a seguir.

4 A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

EXEMPLO 2 Encontre a soma da série geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUÇÃO O primeiro termo é $a = 5$ e a razão é $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente por (4) e sua soma é

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$ □

■ O que realmente queremos dizer quando falamos que a soma da série no Exemplo 2 é 3? Claro, não podemos somar literalmente um número infinito de termos, um a um. Mas, de acordo com a Definição 2, a soma total é o limite da sequência de somas parciais. Assim, tomando a soma de um número suficiente de termos, podemos chegar tão próximo quanto quisermos do número 3. A tabela mostra as primeiras dez somas parciais s_n, e o gráfico na Figura 2 mostra como a sequência de somas parciais se aproxima de 3.

n	s_n
1	5,000000
2	1,666667
3	3,888889
4	2,407407
5	3,395062
6	2,736626
7	3,175583
8	2,882945
9	3,078037
10	2,947975

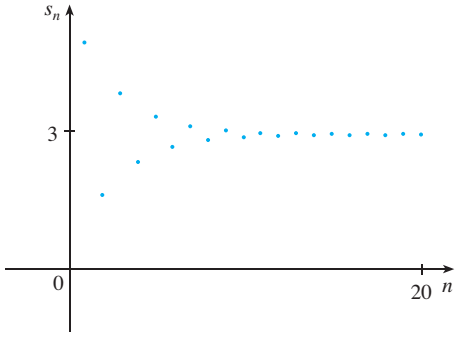


FIGURA 2

EXEMPLO 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Vamos reescrever o n-ésimo termo da série na forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Reconhecemos essa série como uma série geométrica com $a = 4$ e $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, a série diverge por (4). □

■ Outra maneira de identificar a e r é escrever os primeiros termos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

EXEMPLO 4 Escreva o número $2,3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ como uma razão de inteiros.

SOLUÇÃO

$$2,3171717\ldots = 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Depois do primeiro termo, temos uma série geométrica com $a = 17/10^3$ e $r = 1/10^2$. Portanto,

$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2,3 + \frac{\dfrac{17}{1\,000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

□

EXEMPLO 5 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, onde $|x| < 1$.

SOLUÇÃO Observe que essa série começa com $n = 0$ e assim o primeiro termo é $x^0 = 1$. (Nas séries, adotamos a convenção de que $x^0 = 1$ mesmo quando $x = 0$.) Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Essa é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Como $|r| = |x| < 1$, ela converge, e (4) fornece

5

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

□

EXEMPLO 6 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ é convergente e calcule sua soma.

SOLUÇÃO Essa não é uma série geométrica e, assim, voltamos à definição de uma série convergente e calculamos as somas parciais.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar essa expressão se usarmos a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(veja a Seção 7.4, no Volume I). Então, temos

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

■ Observe que os termos se cancelam em pares. Esse é um exemplo de uma **soma telescópica**: por causa de todos os cancelamentos, a soma retrai-se (como um antigo telescópio) em apenas dois termos.

■ A Figura 3 ilustra o Exemplo 6 mostrando os gráficos da sequência de termos $a_n = 1/[n(n+1)]$ e a sequência $\{s_n\}$ das somas parciais. Observe que $a_n \to 0$ e $s_n \to 1$. Veja os Exercícios 62 e 63 para duas interpretações geométricas do Exemplo 6.

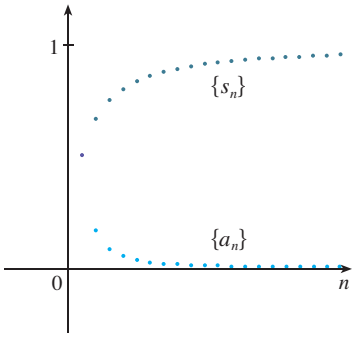


FIGURA 3

e, dessa forma, $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Portanto, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ □

EXEMPLO 7 Mostre que a **série harmônica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

SOLUÇÃO Para esta série particular é conveniente considerar as somas parciais s_2, s_4, s_8, s_{16} s_{32} . . . e mostrar que elas se tornam grandes.

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

Analogamente, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, e, em geral,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

■ O método usado no Exemplo 7 para mostrar que a série harmônica diverge deve-se ao estudioso francês Nicole Oresme (1323-1382).

Isso mostra que $s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{s_n\}$ é divergente. Portanto, a série harmônica diverge. □

6 TEOREMA Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$ □

OBS. 1 Com qualquer *série* $\sum a_n$ associamos duas *sequências*: a sequência $\{s_n\}$ de suas somas parciais e a sequência $\{a_n\}$ de seus termos. Se $\sum a_n$ for convergente, o limite da sequência $\{s_n\}$ é s (a soma da série) e, como o Teorema 6 afirma, o limite da sequência $\{a_n\}$ é 0.

OBS. 2 A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira em geral. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não podemos concluir que $\sum a_n$ seja convergente. Observe que, para a série harmônica $\sum 1/n$, temos $a_n = 1/n \to 0$ quando $n \to \infty$, mas mostramos no Exemplo 7 que $\sum 1/n$ é divergente.

7 TESTE PARA DIVERGÊNCIA Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teste para Divergência vem do Teorema 6, porque, se a série não for divergente, ela é convergente e, assim, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 8 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência. □

OBS. 3 Se descobrirmos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, saberemos que $\sum a_n$ é divergente. Se acharmos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não saberemos *nada* sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$. Lembre-se do aviso na Obs. 2: se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir.

8 TEOREMA Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\sum ca_n$ (onde c é uma constante), $\sum (a_n + b_n)$ e $\sum (a_n - b_n)$, e

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Essas propriedades de séries convergentes vêm das Propriedades do Limite para Sequências Convergentes na Seção 11.1. Por exemplo, aqui está como a parte (ii) do Teorema 8 é demonstrada:

Seja

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

A n-ésima soma parcial para a série $\sum (a_n + b_n)$ é

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

e, usando a Equação 5.2.10, no Volume I, temos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$$

Portanto, $\sum (a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ □

EXEMPLO 9 Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{n(n+1)} + \dfrac{1}{2^n} \right)$.

SOLUÇÃO A série $\sum 1/2^n$ é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$, assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

No Exemplo 6 encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Assim, pelo Teorema 8, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$ □

OBS. 4 Um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série. Por exemplo: suponha que possamos mostrar que a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

é convergente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

segue que a série inteira $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3 + 1)$ é convergente. Analogamente, se soubermos que a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, então a série completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

também é convergente.

11.2 EXERCÍCIOS

1. (a) Qual é a diferença entre uma sequência e uma série?
(b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

2. Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3-8 Calcule pelo menos dez somas parciais da série. Faça o gráfico de ambas as sequências de termos e de somas parciais na mesma tela. Parece que a série é convergente ou divergente? Se ela for convergente, calcule a soma. Se for divergente, explique por quê.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}6)^{n-1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

9. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
(a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.
(b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

10. (a) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11-20 Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

11. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$

12. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

13. $3 - 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \cdots$

14. $1 + 0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}064 + \cdots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} 6(0{,}9)^{n-1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

21-34 Determine se a série é convergente ou divergente. Se ela for convergente, calcule sua soma.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{2^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} [2(0,1)^n + (0,2)^n]$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

35-40 Determine se a série é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica (como no Exemplo 6). Se for convergente, encontre sua soma.

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+3)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

41-46 Expresse o número como uma razão de inteiros.

41. $0,\overline{2} = 0,2222\ldots$

42. $0,\overline{73} = 0,73737373\ldots$

43. $3,\overline{417} = 3,417417417\ldots$

44. $6,2\overline{54} = 6,2545454\ldots$

45. $0,123\overline{456}$

46. $7,\overline{12345}$

47-51 Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

51. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

52. Vimos que a série harmônica é uma série divergente cujos termos tendem a 0. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

também tem essa propriedade.

SCA **53-54** Use o comando de frações parciais em seu SCA para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então utilize essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o SCA para somar a série diretamente.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$

54. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

55. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

56. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for $s_n = 3 - n2^{-n}$, encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

57. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que o recebem também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte, e assim por diante. Os economistas chamam essa reação em cadeia de *efeito multiplicador*. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo gastando $ D. Suponha que cada pessoa que recebe o dinheiro gasto gaste $100c\%$ e economize $100s\%$ do dinheiro que recebeu. Os valores de c e s são denominados *propensão marginal a consumir* e *propensão marginal a economizar* e, é claro, $c + s = 1$.

(a) Seja S_n o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para S_n.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, onde $k = 1/s$. O número k é chamado *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Observação: O governo federal usa esse princípio para justificar o gasto deficitário. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que recebem em depósitos.

58. Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja solta a partir de uma altura inicial de H metros.

(a) Supondo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre. (Use o fato de que a bola cai $\frac{1}{2}gt^2$ metros em t segundos.)

(b) Calcule o tempo total que a bola pula.

(c) Suponha que, cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v, ela rebaterá com velocidade $-kv$, onde $0 < k < 1$. Quanto tempo levará para a bola parar?

59. Qual é o valor de c se

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$$

60. Encontre o valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

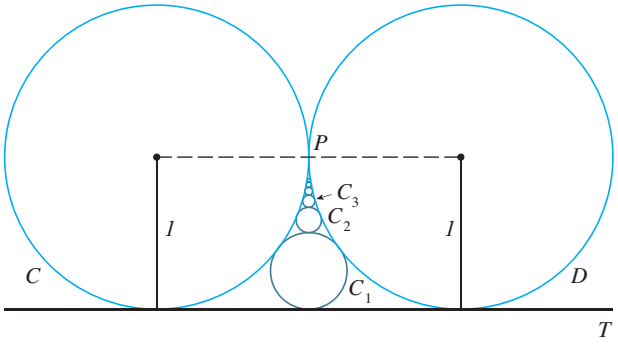
61. No Exemplo 7 mostramos que a série harmônica é divergente. Aqui, esboçamos outro método, que faz uso do fato que $e^x > 1 + x$ para qualquer $x > 0$. (Veja o Exercício 4.3.76, no Volume I.)

Se s_n for a n-ésima soma parcial da série harmônica, mostre que $e^{s_n} > n + 1$. Por que isto implica que a série harmônica é divergente?

62. Trace as curvas $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na mesma tela. Encontrando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 6, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

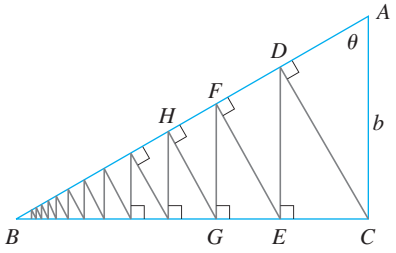
63. A figura exibe dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente comum; C_1 é o círculo que toca C, D e T; C_2 é o círculo que toca C, D e C_1; C_3 é o círculo que toca C, D e C_2. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma sequência infinita de círculos $\{C_n\}$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n e então forneça outra demonstração geométrica do Exemplo 6.



64. É dado um triângulo ABC com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC, $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura. Calcule o comprimento total de todas as perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

em termos de b e θ.



65. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada".)

66. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ seja uma série convergente. Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

67. Demonstre a parte (i) do Teorema 8.

68. Se $\sum a_n$ for divergente e $c \neq 0$, mostre que $\sum ca_n$ é divergente.

69. Se $\sum a_n$ for convergente e $\sum b_n$, divergente, mostre que a série $\sum (a_n + b_n)$ é divergente. [*Sugestão*: Argumente por contradição.]

70. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas divergentes, $\sum (a_n + b_n)$ é necessariamente divergente?

71. Suponha que uma série $\sum a_n$ tenha termos positivos e suas somas parciais s_n satisfaçam a desigualdade $s_n \leq 1\,000$ para todo n. Explique por que $\sum a_n$ deve ser convergente.

72. A sequência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$$

Mostre que cada uma das afirmações a seguir é verdadeira.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

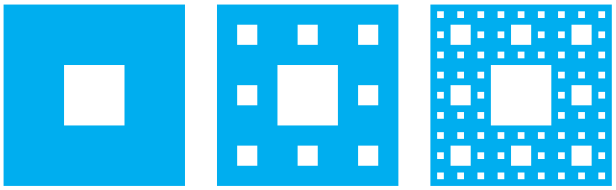
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

73. O **conjunto de Cantor**, cujo nome é uma homenagem ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado [0, 1] e removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Isso nos leva a dois intervalos, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Dividimos novamente cada intervalo em três e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço do meio aberto de cada intervalo que permanece do passo anterior. O conjunto de Cantor consiste nos números em [0, 1] que permanecem depois de todos estes intervalos terem sido removidos.

(a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso, o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.

(b) O **tapete de Sierpinski** é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura apresenta as três primeiras etapas da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o tapete de Sierpinski tem área 0.



74. (a) A sequência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pela equação $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, onde a_1 e a_2 podem ser quaisquer números reais. Experimente com vários valores de a_1 e a_2 e use sua calculadora para descobrir o limite da sequência.

(b) Encontre $\lim_{n \to \infty} a_n$ em termos de a_1 e a_2 expressando $a_{n+1} - a_n$ em termos de $a_2 - a_1$ e somando uma série.

75. Considere a série

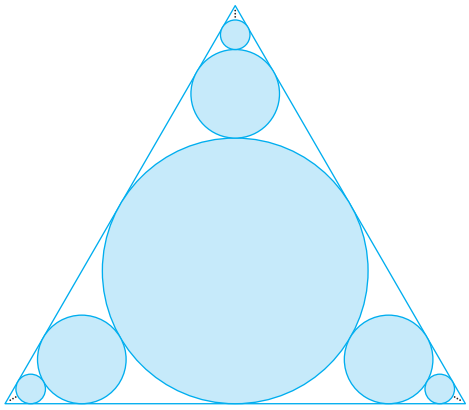
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

(a) Calcule as somas parciais s_1, s_2, s_3 e s_4. Você reconhece os denominadores? Use o padrão para conjecturar uma fórmula para s_n.

(b) Use indução matemática para demonstrar sua conjectura.

(c) Mostre que a série infinita dada é convergente e calcule sua soma.

76. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



11.3 O TESTE DA INTEGRAL E ESTIMATIVAS DE SOMAS

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série. Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série $\sum 1/[n(n+1)]$ porque em cada um desses casos pudemos encontrar uma fórmula simples para a n-ésima soma parcial s_n. Mas, geralmente, não é fácil calcular $\lim_{n \to \infty} s_n$. Portanto, nas próximas seções, desenvolveremos vários testes que nos permitem determinar se uma série é convergente ou divergente sem encontrar sua soma explicitamente. (Em alguns casos, contudo, nossos métodos nos permitirão encontrar boas estimativas da soma.) Nosso primeiro teste envolve as integrais impróprias.

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1 000	1,6439
5 000	1,6447

Não existe uma fórmula simples para a soma s_n dos n primeiros termos, mas a tabela de valores gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando $n \to \infty$ e, assim, parece que a série é convergente.

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva $y = 1/x^2$ e retângulos que estão abaixo da curva. A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função $y = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo. Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

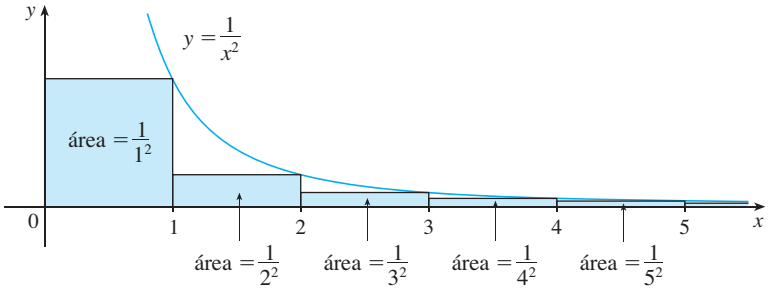


FIGURA 1

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que é o valor da integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Na Seção 7.8, no Volume I, descobrimos que essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim, a figura mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Então, as somas parciais são limitadas. Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto, as somas parciais convergem (pelo Teorema da Sequência Monótona) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[A soma exata dessa série encontrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) é $\pi^2/6$, mas a demonstração desse fato é muito difícil. (Veja o Problema 6 em Problemas Quentes, no Capítulo 15.)]

Agora vamos olhar para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3 2317
10	5 0210
50	12 7524
100	18 5896
500	43 2834
1 000	61 8010
5 000	139 9681

A tabela de valores de s_n sugere que as somas parciais não estão se aproximando de um número; assim, suspeitamos que essa série possa ser divergente. Novamente usamos um desenho para a confirmação. A Figura 2 mostra a curva $y = 1/\sqrt{x}$, porém dessa vez utilizamos retângulos cujos topos estão *acima* da curva.

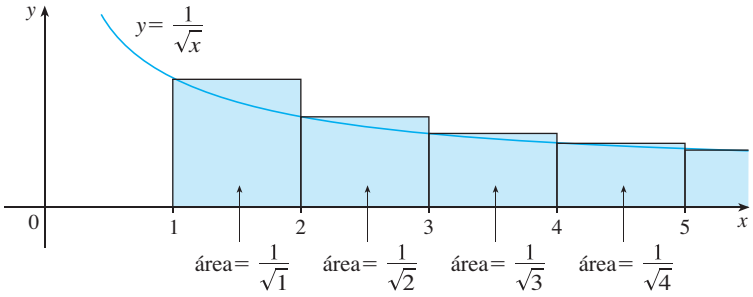


FIGURA 2

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1. A altura é igual ao valor da função $y = 1/\sqrt{x}$ na extremidade *esquerda* do intervalo. Desse modo, a soma das áreas de todos os retângulos é

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área total é maior que a área sob a curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geq 1$, que é igual à integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Mas sabemos, a partir da Seção 7.8, no Volume I, que essa integral imprópria é divergente. Em outras palavras, a área sob a curva é infinita. Assim a soma da série deve ser infinita; isto é, a série é divergente.

O mesmo tipo de argumentação geométrica que usamos para essas duas séries pode ser usado para demonstrar o seguinte teste. (A demonstração é dada no fim desta seção.)

O TESTE DA INTEGRAL Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e somente se a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)\, dx$ for convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\int_1^\infty f(x)\, dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\, dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

OBS. Quando você usar o Teste da Integral lembre-se de que não é necessário começar a série ou a integral em $n = 1$. Por exemplo, testando a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{usamos} \qquad \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\, dx$$

Também não é necessário que f seja sempre decrescente. O que é importante é que f seja decrescente a partir de certo ponto, isto é, decrescente para x maior que algum número N. Então, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ é convergente, e assim $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente pela Obs. 4 da Seção 11.2.

EXEMPLO 1 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A função $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e assim usamos o Teste da Integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} x \Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{tg}^{-1} t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Então, $\int_1^\infty 1/(x^2 + 1)\, dx$ é uma integral convergente e, dessa forma, pelo Teste da Integral, a série $\sum 1/(n^2 + 1)$ é convergente. □

EXEMPLO 2 Para que valores de p a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente?

■ Para usar o Teste da Integral, precisamos ser capazes de calcular $\int_1^\infty f(x)\, dx$ e, portanto, precisamos ser capazes de encontrar uma primitiva de f. Com frequência, isto é difícil ou impossível, de modo que precisamos também de outros testes para a convergência.

SOLUÇÃO Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. Em qualquer dos dois casos, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$ e, assim, a série dada diverge pelo Teste para Divergência (11.2.7).

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é claramente contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Encontramos no Capítulo 7, no Volume I [veja 7.8.2], que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx \text{ é convergente se } p > 1 \text{ e divergente se } p \leq 1$$

Segue do Teste da Integral que a série $\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$. (Para $p = 1$, esta é a série harmônica discutida no Exemplo 7 da Seção 11.2.) □

A série no Exemplo 2, chamada ***p*-série**, é importante para o restante deste capítulo; desse modo, resumimos os resultados do Exemplo 2 para referência futura como a seguir.

I A p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

EXEMPLO 3
(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma p-série com $p = 3 > 1$.
(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

é divergente porque ela é uma p-série com $p = \frac{1}{3} < 1$. □

OBS. *Não* devemos inferir a partir do Teste da Integral que a soma da série é igual ao valor da integral. De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{enquanto que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Portanto, em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

EXEMPLO 4 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\ln x)/x$ é positiva e contínua para $x > 1$ porque a função logaritmo é contínua. Mas não é óbvio se f é decrescente ou não; assim, calculamos sua derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Então, $f'(x) < 0$ quando $\ln x > 1$, isto é, $x > e$. Segue que f é decrescente quando $x > e$ e podemos aplicar o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{2} \Big]_1^t = \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Como essa integral imprópria é divergente, a série $\sum (\ln n)/n$ também é divergente pelo Teste da Integral. □

ESTIMANDO A SOMA DE UMA SÉRIE

Suponha que possamos usar o Teste da Integral para mostrar que uma série $\sum a_n$ é convergente e que queremos encontrar uma aproximação para a soma s da série. Claro, qualquer soma parcial s_n é uma aproximação para s, porque $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Mas quão precisa é tal aproximação? Para descobrir, precisamos estimar o tamanho do **resto**

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

O resto R_n é o erro feito quando s_n, a soma dos n primeiros termos, é utilizada como uma aproximação para a soma total.

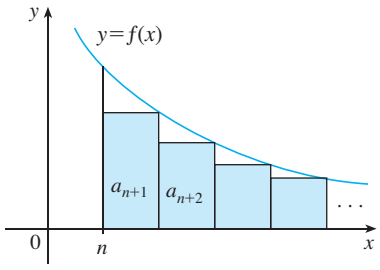


FIGURA 3

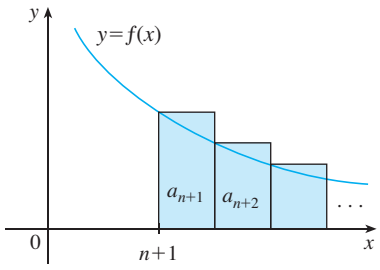


FIGURA 4

Usamos a mesma notação e ideias que no Teste da Integral, supondo que f é decrescente em $[n, \infty)$. Comparando as áreas dos retângulos com a área sob $y = f(x)$ para $x > n$ na Figura 3, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leq \int_n^\infty f(x)\,dx$$

De maneira semelhante, vemos, a partir da Figura 4, que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geq \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

Assim, demonstramos a seguinte estimativa para o erro:

2 ESTIMATIVA DO RESTO PARA O TESTE DA INTEGRAL Suponha que $f(k) = a_k$, onde f é uma função contínua, positiva, decrescente para $x \geq n$ e que $\sum a_n$ é convergente. Se $R_n = s - s_n$, então

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x)\,dx$$

EXEMPLO 5

(a) Aproxime a soma da série $\sum 1/n^3$ usando a soma dos dez primeiros termos. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

(b) Quantos termos são necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

SOLUÇÃO Em ambas as partes (a) e (b) precisamos conhecer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Com $f(x) = 1/x^3$, que satisfaz as condições do Teste da Integral, temos

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

De acordo com a estimativa do resto em (2), temos

$$R_{10} \leq \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por conseguinte, o tamanho do erro é no máximo 0,005.

(b) A precisão de 0,0005 significa que temos de encontrar um valor de n tal que $R_n \leq 0{,}0005$. Como

$$R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

queremos

$$\frac{1}{2n^2} < 0{,}0005$$

Resolvendo essa desigualdade, obtemos

$$n^2 > \frac{1}{0{,}001} = 1\,000 \qquad \text{ou} \qquad n > \sqrt{1\,000} \approx 31{,}6$$

Precisamos de 32 termos para garantir precisão de 0,0005. □

Se somarmos s_n em cada lado das desigualdades em (2), obteremos

3

$$s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leq s \leq s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx$$

porque $s_n + R_n = s$. As desigualdades em (3) dão um limitante inferior e um limitante superior para s. Eles fornecem uma aproximação mais precisa para a soma da série do que a soma parcial s_n.

EXEMPLO 6 Use (3) com $n = 10$ para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUÇÃO As desigualdades em (3) tornam-se

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$$

Do Exemplo 5, sabemos que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

de modo que $$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Usando $s_{10} \approx 1{,}197532$, obtemos

$$1{,}201664 \leqslant s \leqslant 1{,}202532$$

Se aproximarmos s pelo ponto médio desse intervalo, então o erro é no máximo metade do comprimento do intervalo. Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1{,}2021 \qquad \text{com erro} < 0{,}0005$$ □

Se compararmos o Exemplo 6 com o Exemplo 5, veremos que a estimativa melhorada em (3) pode ser muito melhor que a estimativa $s \approx s_n$. Para fazer um erro menor que 0,0005, tivemos de usar 32 termos no Exemplo 5, mas apenas dez termos no Exemplo 6.

DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA INTEGRAL

Já vimos a ideia básica por trás da demonstração do Teste da Integral nas Figuras 1 e 2 para as séries $\sum 1/n^2$ e $\sum 1/\sqrt{n}$. Para a série geral $\sum a_n$, olhe as Figuras 5 e 6. A área do primeiro retângulo sombreado na Figura 5 é o valor de f na extremidade direita de $[1, 2]$, isto é, $f(2) = a_2$. Assim, comparando as áreas dos retângulos sombreados com a área sob $y = f(x)$ de 1 até n, vemos que

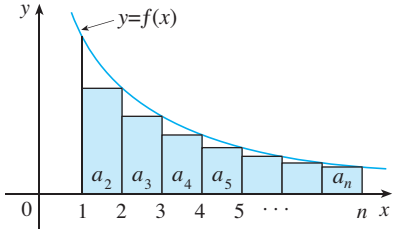


FIGURA 5

$$\boxed{4} \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que essa desigualdade depende do fato de f ser decrescente.) Do mesmo modo, a Figura 6 mostra que

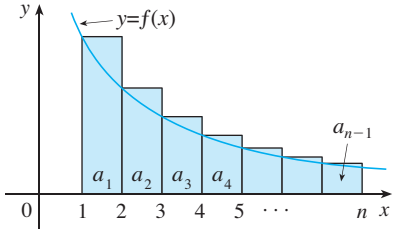


FIGURA 6

$$\boxed{5} \qquad \int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então (4) fornece

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

já que $f(x) \geqslant 0$. Portanto,

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx = M, \text{ digamos.}$$

Como $s_n \leq M$ para todo n, a sequência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Além disso,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

já que $a_{n+1} = f(n+1) \geq 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma sequência crescente limitada, e assim, ela é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona (11.1.12). Isso significa que $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ quando $n \to \infty$ porque $f(x) \geq 0$. Mas (5) nos dá

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e, dessa forma, $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e assim $\sum a_n$ diverge. □

11.3 EXERCÍCIOS

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1,3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades

$$\int_1^6 f(x)dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3-8 Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

9-26 Determine se a série é convergente ou divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1,4} + 3n^{-1,2})$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

27-30 Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

28. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n[\ln(\ln n)]^p}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

31. A função zeta de Riemann ζ é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

32. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime o erro cometido ao usar s_{10} como uma aproximação para a soma da série.
(b) Utilize (3) com $n = 10$ para dar uma estimativa melhorada da soma.
(c) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00001.

33. (a) Use a soma dos dez primeiros termos para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Quão boa é essa estimativa?
(b) Melhore essa estimativa usando (3) com $n = 10$.
(c) Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação $s \approx s_n$ seja menor que 0,001.

34. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ com precisão de três casas decimais.

35. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)^{-6}$ com precisão de cinco casas decimais.

36. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria somar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

37. Mostre que, se queremos aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1,001}$ de maneira que o erro seja menor que 5 na nona casa decimal, então precisamos somar mais que $10^{11\,301}$ termos!

38. (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ é convergente.
SCA
(b) Encontre um limitante superior para o erro na aproximação $s \approx s_n$.
(c) Qual é o menor valor de n tal que esse limitante superior seja menor que 0,05?
(d) Encontre s_n para esse valor de n.

39. (a) Use (4) para mostrar que, se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15 e a soma dos primeiros 10^9 termos é menor que 22.

40. Use as seguintes etapas para mostrar que a sequência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.)
(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como uma área [ou use (5)] para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.
(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto $\{t_n\}$ é uma sequência decrescente.
(c) Use o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

41. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

42. Encontre todos os valores de c para os quais a seguinte série converge:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 OS TESTES DE COMPARAÇÃO

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

I

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} \tag{1}$$

nos remete à série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente. Como a série (1) é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Realmente, ela é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada (1) tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Argumentação semelhante pode ser usada para demonstrar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

O TESTE DE COMPARAÇÃO Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

■ É importante ter em mente a diferença entre uma sequência e uma série. Uma sequência é uma lista de números, enquanto uma série é uma soma. A cada série $\sum a_n$ existem associadas duas sequências: uma sequência $\{a_n\}$ de termos e uma seqüência $\{s_n\}$ de somas parciais.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Sejam $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Como ambas as séries têm termos positivos, as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são crescentes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$). Além disso, $t_n \to t$, de modo que $t_n \leq t$ para todo n. Como $a_i \leq b_i$, temos $s_n \leq t_n$. Então, $s_n \leq t$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo Teorema da Sequência Monótona. Por conseguinte, $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente, então $t_n \to \infty$ (porque $\{t_n\}$ é crescente). Mas $a_i \geq b_i$, assim $s_n \geq t_n$. Logo, $s_n \to \infty$. Portanto, $\sum a_n$ diverge. □

Séries-padrão para usar no Teste de Comparação

Ao usar o Teste de Comparação, devemos, claro, ter algumas séries conhecidas $\sum b_n$ para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma destas séries:

- Uma p-série [$\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$; veja (11.3.1)]
- Uma série geométrica [$\sum ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$; veja (11.2.4)]

EXEMPLO 1 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Para um n grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$; assim, comparamos a série dada com a série $\sum 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação, a_n é o lado esquerdo e b_n é o lado direito.) Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma p-série com $p = 2 > 1$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação. □

OBS. 1 Embora a condição $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ no Teste de Comparação seja dada para todo n, precisamos verificar apenas que ela vale para $n \geq N$, onde N é algum inteiro fixo, porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos. Isso é ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ quanto a convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Essa série foi testada (usando o Teste da Integral) no Exemplo 4 da Seção 11.3, mas também é possível testá-la comparando-a com a série harmônica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geqslant 3$ e assim

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3$$

Sabemos que $\sum 1/n$ é divergente (p-série com $p = 1$). Então, a série dada é divergente pelo Teste de Comparação. □

OBS. 2 Os termos da série sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o Teste de Comparação não se aplica. Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

é inútil para ser usada com o Teste de Comparação, porque $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente e $a_n > b_n$. Mesmo assim, temos a impressão de que $\sum 1/(2^n - 1)$ deve ser convergente, pois ela é muito parecida com a série geométrica convergente $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Em tais casos, o seguinte teste pode ser usado.

■ Os Exercícios 40 e 41 lidam com os casos $c = 0$ e $c = \infty$.

TESTE DE COMPARAÇÃO NO LIMITE Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

DEMONSTRAÇÃO Sejam m e M números positivos tais que $m < c < M$. Uma vez que a_n/b_n está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{quando } n > N$$

e assim $$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{quando } n > N$$

Se $\sum b_n$ convergir, então $\sum Mb_n$ também converge. Dessa forma, $\sum a_n$ converge pela parte (i) do Teste de Comparação. Se $\sum b_n$ divergir, então $\sum mb_n$ também diverge, e a parte (ii) do Teste de Comparação mostra que $\sum a_n$ diverge. □

EXEMPLO 3 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ quanto a convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Usamos o Teste de Comparação no Limite com

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

e obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Como esse limite existe e $\sum 1/2^n$ é uma série geométrica convergente, a série dada converge pelo Teste de Comparação no Limite. □

EXEMPLO 4 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A parte dominante do numerador é $2n^2$ e a parte dominante do denominador é $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Isso sugere tomar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Como $\sum b_n = 2 \sum 1/n^{1/2}$ é divergente (p-série com $p = \frac{1}{2} < 1$), a série dada diverge pelo Teste de Comparação no Limite. □

Observe que ao testar muitas séries, encontramos uma série de comparação apropriada b_n mantendo apenas as potências mais altas no numerador e denominador.

ESTIMANDO SOMAS

Se tivéssemos usado o Teste de Comparação para mostrar que uma série $\sum a_n$ converge pela comparação com uma série $\sum b_n$, poderíamos ser capazes de estimar a soma $\sum a_n$ pela comparação dos restos. Como na Seção 11.3, consideramos o resto

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Para a série de comparação $\sum b_n$ consideramos o resto correspondente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Como $a_n \leq b_n$ para todo n, temos $R_n \leq T_n$. Se b_n for uma p-série, podemos estimar seu resto T_n como na Seção 11.3. Se $\sum b_n$ for uma série geométrica, então T_n é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente (veja os Exercícios 35 e 36). Em qualquer dos dois casos, sabemos que R_n é menor que T_n.

EXEMPLO 5 Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto T_n para a série de comparação $\sum 1/n^3$ foi estimado no Exemplo 5 da Seção 11.3 usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral. Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto, o resto R_n para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com $n = 100$, temos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005$$

Usando uma calculadora programável ou um computador, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3+1} = 0{,}6864538$$

com erro menor que 0,00005. □

11.4 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja convergente.
(a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?
(b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

2. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja divergente.
(a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?
(b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

3-32 Determine se a série converge ou diverge.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^4+1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n\sqrt{n}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^{1,2}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33-36 Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0,d_1d_2d_3\ldots$ (onde o algarismo d_i é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 9$) é que

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ converge?

39. Demonstre que, se $a_n \geqslant 0$ e $\sum a_n$ convergir, então $\sum a_n^2$ também converge.

40. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja convergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então, $\sum a_n$ também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja divergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

então, $\sum a_n$ também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Dê um exemplo de um par de séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos positivos para as quais $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ diverge, mas $\sum a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)

43. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente.

44. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ for convergente, então $\sum \ln(1 + a_n)$ é convergente.

45. Se $\sum a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ também será convergente?

46. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\sum a_n b_n$ também será convergente?

11.5 SÉRIES ALTERNADAS

Os testes de convergência que estudamos até aqui se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$.)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

O TESTE DA SÉRIE ALTERNADA Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfizer

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{para todo } n$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

então, a série é convergente.

Antes de demonstrar, vamos olhar a Figura 1, que esboça a ideia por trás da demonstração. Primeiro marcamos $s_1 = b_1$ sobre a reta real. Para encontrar s_2 subtraímos b_2, assim s_2 está à esquerda de s_1. Então, para encontrar s_3, adicionamos b_3 e assim s_3 está à direita de s_2. Mas, como $b_3 < b_2$, s_3 está à esquerda de s_1. Continuando dessa maneira, vemos que as somas parciais oscilam de um lado para outro. Como $b_n \to 0$, as etapas subsequentes vão se tornando cada vez menores. As somas parciais pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ são crescentes, e as somas parciais ímpares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ são decrescentes. Então, parece plausível que ambas estejam convergindo para algum número s, que é a soma da série. Portanto, consideramos as somas parciais pares e ímpares separadamente na demonstração a seguir.

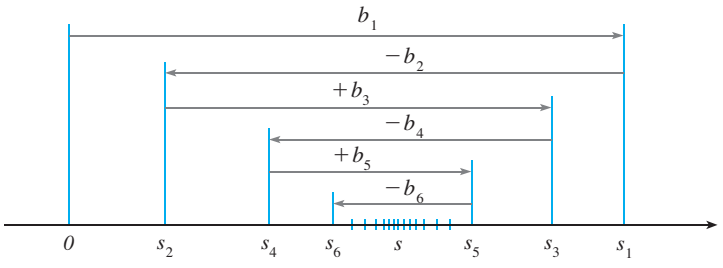


FIGURA 1

DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA SÉRIE ALTERNADA Primeiro consideramos as somas parciais pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{já que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{já que } b_4 \leqslant b_3$$

Em geral, $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$ já que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Então, $$0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$$

Mas podemos escrever também

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} + b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Cada termo entre parênteses é positivo, assim $s_{2n} \leqslant b_1$ para todo n. Dessa forma, a sequência $\{s_{2n}\}$ de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente. É, portanto, convergente pelo Teorema da Sequência Monótona. Vamos chamar esse limite s, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n} = s$$

Agora, calculamos o limite das somas parciais ímpares:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} s_{2n+1} &= \lim_{n \to \infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} s_{2n} + \lim_{n \to \infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[pela condição (ii)]} \\ &= s \end{aligned}$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (veja o Exercício 80(a) na Seção 11.1) e, assim, a série é convergente. □

EXEMPLO 1 A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

$$\text{(i) } b_{n+1} < b_n \text{ porque } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii) } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

logo, a série é convergente pelo Teste da Série Alternada. □

■ A Figura 2 ilustra o Exemplo 1, mostrando os gráficos dos termos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ e as somas parciais s_n. Observe como os valores de s_n ziguezagueiam em torno do valor-limite, que parece ser cerca de 0,7. De fato, a soma exata da série é $\ln 2 \approx 0{,}693$ (veja o Exercício 36).

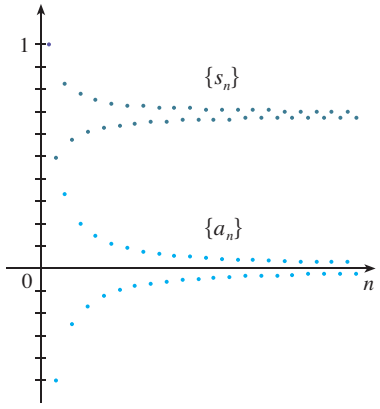


FIGURA 2

EXEMPLO 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ é alternada, mas

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

assim a condição (ii) não é satisfeita. Em vez disto, olhamos para o limite do n-ésimo termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

O limite não existe, de modo que a série diverge pelo Teste para Divergência. □

EXEMPLO 3 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ quanto a convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A série dada é alternada; assim, tentamos verificar as condições (i) e (ii) do Teste da Série Alternada.

Ao contrário da situação no Exemplo 1, não é óbvio que a sequência dada por $b_n = n^2/(n^3 + 1)$ seja decrescente. Contudo, se considerarmos a função associada $f(x) = x^2/(x^3 + 1)$, descobriremos que

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3+1)^2}$$

■ Em vez de verificarmos a condição (i) do Teste da Série Alternada calculando uma derivada, poderíamos verificar $b_{n+1} < b_n$ diretamente usando a técnica da Solução 1 do Exemplo 12 da Seção 11.1.

Como estamos apenas considerando x positivo, vemos que $f'(x) < 0$ se $2 - x^3 < 0$, isto é, $x > \sqrt[3]{2}$. Então, f é decrescente no intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Isso significa que $f(n+1) < f(n)$ e portanto $b_{n+1} < b_n$ quando $n \geq 2$. (A desigualdade $b_2 < b_1$ pode ser verificada diretamente, mas o que realmente importa é que a sequência $\{b_n\}$ é eventualmente decrescente.)

A condição (ii) é prontamente verificada:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 0$$

Então, a série dada é convergente pelo Teste da Série Alternada. □

ESTIMANDO SOMAS

Uma soma parcial s_n de qualquer série convergente pode ser usada como uma aproximação para a soma total s, porém isso não é de muita utilidade, a menos que possamos estimar a precisão da aproximação. O erro envolvido usando $s \approx s_n$ é o resto $R_n = s - s_n$. O próximo teorema diz que, para séries que satisfazem as condições do Teste da Série Alternada, o tamanho do erro é menor que b_{n+1}, que é o valor absoluto do primeiro termo negligenciado.

TEOREMA DA ESTIMATIVA DE SÉRIES ALTERNADAS Se $s = \sum(-1)^{n-1} b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz

$$\text{(i) } 0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{e} \qquad \text{(ii) } \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

então,

$$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

■ Você pode ver geometricamente por que o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas é verdadeiro olhando a Figura 1 (na página 674). Observe que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$ e assim por diante. Observe também que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer.

DEMONSTRAÇÃO Sabemos pela demonstração do Teste da Série Alternada que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer s_n e s_{n+1}. Segue que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$ □

EXEMPLO 4 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ com precisão de três casas decimais. (Por definição, $0! = 1$.)

SOLUÇÃO Primeiro observamos que a série é convergente pelo Teste da Série Alternada, porque

$$\text{(i) } \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii) } 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{de modo que } \frac{1}{n!} \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

Para termos uma ideia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5\,040} + \cdots$$

Observe que

$$b_7 = \tfrac{1}{5\,040} < \tfrac{1}{5\,000} = 0{,}0002$$

e

$$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0{,}368056$$

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada, sabemos que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0{,}0002$$

Esse erro menor que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal. Assim temos $s \approx 0{,}368$ com precisão de três casas decimais. □

■ Na Seção 11.10 demonstraremos que $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ para todo x; assim, o que obtivemos no Exemplo 4 é realmente uma aproximação para o número e^{-1}.

OBS. A regra de que o erro (ao usar s_n para aproximar s) é menor que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.

11.5 EXERCÍCIOS

1. (a) O que é uma série alternada?
(b) Sob que condições uma série alternada converge?
(c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2-20 Teste a série quanto a convergência ou divergência.

2. $-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\cdots$

3. $\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-\frac{4}{10}+\frac{4}{11}-\cdots$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{10^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\ln n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{5}\right)^n$

21-22 Calcule as dez primeiras somas parciais da série e faça o gráfico da sequência de termos e da sequência das somas parciais na mesma tela. Estime o erro ao usar a décima soma parcial para aproximar a soma total.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$

23-26 Mostre que a série é convergente. Quantos termos da série precisamos somar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ ($|\text{erro}|<0{,}00005$)

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n5^n}$ ($|\text{erro}|<0{,}0001$)

25. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n n!}$ ($|\text{erro}|<0{,}000005$)

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{-n}$ ($|\text{erro}|<0{,}01$)

27-30 Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{8^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{10^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$

31. A quinquagésima soma parcial s_{50} da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ é uma superestimativa ou uma subestimativa da soma total? Explique.

32-34 Para quais valores de p cada série é convergente?

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Mostre que a série $\sum(-1)^{n-1}b_n$, onde $b_n=1/n$ se n for ímpar e $b_n=1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$$

Sejam h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e harmônica alternada.
(a) Mostre que $s_{2n}=h_{2n}-h_n$.
(b) Do Exercício 38, da Seção 11.3, temos

$$h_n-\ln n\to\gamma \quad \text{quando } n\to\infty$$

e, portanto,

$$h_{2n}-\ln(2n)\to\gamma \quad \text{quando } n\to\infty$$

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n}\to\ln 2$ quando $n\to\infty$.

11.6 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA E OS TESTES DA RAZÃO E DA RAIZ

■ Temos testes de convergência para séries com termos positivos e para séries alternadas. Mas o que acontece se os sinais dos termos mudarem irregularmente? Veremos no Exemplo 3 que a ideia de convergência absoluta algumas vezes ajuda em tais casos.

Dada qualquer série $\sum a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

1 DEFINIÇÃO Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Observe que, se $\sum a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e assim a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

EXEMPLO 1 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma p-série convergente ($p = 2$). □

EXEMPLO 2 Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente (veja o Exemplo 1 da Seção 11.5), mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica (p-série com $p = 1$) e é, portanto, divergente. □

2 DEFINIÇÃO Uma série $\sum a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

3 TEOREMA Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Observe que a desigualdade

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

é verdadeira porque $|a_n|$ é a_n ou $-a_n$. Se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então $\sum |a_n|$ é convergente, assim $\sum 2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, $\sum (a_n + |a_n|)$ é convergente. Dessa forma,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes e é, portanto, convergente. □

■ A Figura 1 mostra os gráficos dos termos a_n e das somas parciais s_n da série no Exemplo 3. Observe que a série não é alternada, mas tem termos positivos e negativos.

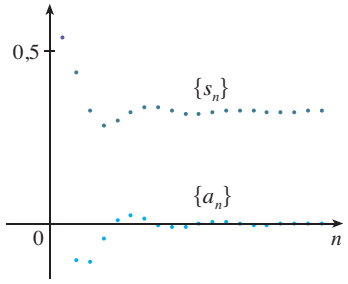


FIGURA 1

EXEMPLO 3 Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.) Podemos aplicar o Teste da Comparação à série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Como $|\cos n| \leqslant 1$ para todo n, temos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\sum 1/n^2$ é convergente (p-série com $p = 2$) e, assim, $\sum |\cos n|/n^2$ é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada $\sum (\cos n)/n^2$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente pelo Teorema 3. □

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O TESTE DA RAZÃO

(i) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente).

(ii) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, o Teste da Razão não é conclusivo; isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) A ideia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \qquad \text{e} \qquad L < r$$

o quociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r \qquad \text{sempre que } n \geqslant N$$

ou, equivalentemente,

$$|a_{n+1}| < |a_n|\, r \qquad \text{sempre que } n \geqslant N \qquad \boxed{4}$$

Colocando n sucessivamente igual a $N, N+1, N+2, \ldots$ em (4), obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N|\, r$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\, r < |a_N|\, r^3$$

e, em geral,

$$|a_{N+k}| < |a_N|\, r^k \qquad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{5}$$

Agora, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

é convergente porque é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim a desigualdade (5), junto com o Teste da Comparação, mostra que a série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_N| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

é convergente também. Segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. (Lembre-se de que um número finito de termos não afeta a convergência.) Portanto, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ ou $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, então o quociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será maior que 1; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \qquad \text{sempre que } n \geqslant N$$

Isso significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geqslant N$, e assim

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

Portanto, $\sum a_n$ diverge pelo Teste da Divergência. □

OBS. A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se $\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\sum 1/n^2$, temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

enquanto para a série divergente $\sum 1/n$, obtemos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto, se $\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, a série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. Nesse caso, o Teste da Razão falha e devemos usar outro teste.

■ ESTIMANDO SOMAS
Nas últimas três seções usamos vários métodos para estimar a soma de uma série – o método dependia de qual teste era usado para demonstrar a convergência. O que acontece com a série para a qual o Teste da Razão funciona? Existem duas possibilidades: se a série for alternada, como no Exemplo 4, então é melhor usar os métodos da Seção 11.5. Se os termos forem todos positivos, utilize os métodos especiais explicados no Exercício 34.

EXEMPLO 4 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ quanto a convergência absoluta.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto, convergente. □

EXEMPLO 5 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO Como os termos $a_n = n^n/n!$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{quando } n \to \infty$$

(Veja a Equação 3.6.6, no Volume I.) Como $e > 1$, a série dada é divergente pelo Teste da Razão. □

OBS. Embora o Teste da Razão funcione no Exemplo 5, um método mais simples é usar o Teste para Divergência. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

segue que a_n não tende a 0 quando $n \to \infty$. Portanto a série dada é divergente pelo Teste para Divergência.

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando ocorrem potências de n. Sua demonstração é similar à do Teste da Razão e será pedida no Exercício 37.

O TESTE DA RAIZ

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então a parte (iii) do Teste da Raiz diz que o teste não dá informação. A série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. (Se $L = 1$ no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1. E se $L = 1$ no Teste da Raiz, não tente o Teste da Razão, pois ele também falhará.)

EXEMPLO 6 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$.

SOLUÇÃO

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{3 + \dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz. □

REARRANJOS

A questão de uma série ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um **rearranjo** de uma série infinita $\sum a_n$ queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de $\sum a_n$ poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Ocorre que

> se $\sum a_n$ for uma série absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de $\sum a_n$ tem a mesma soma s.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrar esse fato, vamos considerar a série harmônica alternada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2 \quad \boxed{6}$$

(Veja o Exercício 36 da Seção 11.5.) Se multiplicarmos essa série por $\frac{1}{2}$, obteremos

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2} \ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série, teremos

$$0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} \ln 2 \quad \boxed{7}$$

■ A soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na sequência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo.

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7 usando o Teorema 11.2.8:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2} \ln 2 \quad \boxed{8}$$

Observe que a série em (8) contém os mesmos termos que em (6), mas rearranjados de modo que um termo negativo ocorre depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann demonstrou que

> se $\sum a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\sum a_n$ que tem uma soma igual a r.

Uma demonstração desse fato é delineada no Exercício 40.

11.6 EXERCÍCIOS

1. O que você pode dizer sobre a série $\sum a_n$ em cada um dos seguintes casos?

(a) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0{,}8$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2-28 Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1{,}1)^n}{n^4}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

25. $1 - \frac{1\cdot 3}{3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{5!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$

26. $\frac{2}{5} + \frac{2\cdot 6}{5\cdot 8} + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{5\cdot 8\cdot 11} + \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} + \cdots$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

29. Os termos de uma série são definidos recursivamente pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n-3} a_n$$

Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

30. Uma série $\sum a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

31. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

32. Para quais inteiros positivos k a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

é convergente?

33. (a) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo x.
(b) Deduza que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para todo x.

34. Seja $\sum a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, assim $\sum a_n$ converge pelo Teste da Razão. Como habitualmente, faça R_n ser o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Se $\{r_n\}$ for uma sequência decrescente e $r_{n+1} < 1$, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Se $\{r_n\}$ for uma sequência crescente, mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

35. (a) Calcule a soma parcial s_5 da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n2^n$. Use o Exercício 34 para estimar o erro ao usar s_5 como uma aproximação da soma da série.
(b) Calcule um valor de n de maneira que s_n aproxime a soma com precisão 0,00005. Use esse valor de n para aproximar a soma da série.

36. Utilize a soma dos primeiros dez termos para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Use o Exercício 34 para estimar o erro.

37. Demonstre o Teste da Raiz. [*Sugestão para a parte (i)*: Tome qualquer número r tal que $L < r < 1$ e use o fato de que existe um inteiro N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ quando $n \geqslant N$.]

38. Por volta de 1910, o matemático indiano Srinivasa Ramanujan descobriu a fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper usou esta série em 1985 para calcular os primeiros 17 milhões de algarismos de π.
(a) Verifique que a série é convergente.
(b) Quantas casas decimais corretas de π você obtém se usar apenas o primeiro termo da série? E se usar dois termos?

39. Dada uma série qualquer $\sum a_n$ definimos uma série $\sum a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\sum a_n$ e uma série $\sum a_n^-$ cujos termos são todos termos negativos de $\sum a_n$. Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que, se $a_n > 0$, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$, ao passo que, se $a_n < 0$, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$.
(a) Se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes.
(b) Se $\sum a_n$ for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes.

40. Demonstre que, se $\sum a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\sum a_n$ cuja soma é r. [*Sugestões*: Use a notação do Exercício 39. Tome o menor número de termos positivos a_n^+ de modo que sua soma seja maior que r. Então adicione o menor número de termos negativos a_n^- de tal modo que a soma cumulativa seja menor que r. Continue dessa maneira e use o Teorema 11.2.6.]

11.7 ESTRATÉGIA PARA TESTAR AS SÉRIES

Agora temos diversas maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série; o problema é decidir qual teste usar em qual série. Nesse aspecto, testar séries é similar a integrar funções. Mais uma vez, não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste aplicar em cada série, mas você pode achar os conselhos a seguir proveitosos.

Não é uma boa estratégia aplicar uma lista de testes em uma ordem específica até que um deles finalmente funcione. Isso seria uma perda de tempo e esforço. Em vez disso, como na integração, a principal estratégia é classificar a série de acordo com sua *forma*.

I. Se a série for da forma $\sum 1/n^p$, ela é uma p-série, que sabemos ser convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

2. Se a série tiver a forma $\sum ar^{n-1}$ ou $\sum ar^n$, ela é uma série geométrica, que converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$. Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série dessa forma.

3. Se a série tiver uma forma similar a uma *p*-série ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se a_n for uma função racional ou uma função algébrica de n (envolvendo raízes de polinômios), a série deve ser comparada com uma *p*-série. Observe que a maioria das séries nos Exercícios 11.4 tem essa forma. (O valor de p deve ser escolhido como na Seção 11.4, mantendo apenas as potências mais altas de n no numerador e denominador.) Os testes de comparação se aplicam apenas a séries com termos positivos, mas, se $\sum a_n$ tiver alguns termos negativos, então poderemos aplicar o Teste da Comparação em $\sum |a_n|$ e testar a convergência absoluta.

4. Se você vir que $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, o Teste para Divergência deve ser usado.

5. Se a série for da forma $\sum(-1)^{n-1} b_n$ ou $\sum(-1)^n b_n$, então o Teste da Série Alternada é uma possibilidade óbvia.

6. Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com frequência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ quando $n \to \infty$ para todas as *p*-séries, e portanto todas as funções racionais ou algébricas de n. Então, o Teste da Razão não deve ser usado para tais séries.

7. Se a_n for da forma $(b_n)^n$, o Teste da Raiz pode ser útil.

8. Se $a_n = f(n)$, onde $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é facilmente calculada, então o Teste da Integral é eficaz (satisfeitas as hipóteses para este teste).

Nos próximos exemplos não faremos todos os cálculos, mas simplesmente indicaremos quais testes devem ser usados.

EXEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Como $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ quando $n \to \infty$, devemos usar o Teste para Divergência. □

EXEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n é uma função algébrica de n, comparamos a série dada com uma *p*-série. A série de comparação é $\sum b_n$, onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$ □

EXEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Como a integral $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ é facilmente calculada, usamos o Teste da Integral. O Teste da Razão também funciona. □

EXEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada. □

EXEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como a série envolve $k!$, usamos o Teste da Razão. □

EXEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica $\sum 1/3^n$, usamos o Teste da Comparação. □

11.7 EXERCÍCIOS

1-38 Teste a convergência ou divergência das séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

11.8 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \quad \boxed{1}$$

onde x é uma variável e c_n's são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixado, a série (1) é uma série de *constantes* que podemos testar *quanto a* convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geqslant 1$ (veja a Equação 11.2.5). Em geral, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots \quad \boxed{2}$$

é denominada **série de potências em $(x - a)$** ou **série de potências centrada em a** ou **série de potências em torno de a**. Observe que, ao escrever o termo correspondente a $n = 0$ nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que $(x-a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geqslant 1$ e assim a série de potências (2) sempre converge quando $x = a$.

EXEMPLO 1 Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ é convergente?

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão. Se fizermos a_n, como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então $a_n = n! x^n$. Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série diverge quando $x \neq 0$. Então, a série dada converge apenas quando $x = 0$. □

■ Observe que

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = (n+1)n!$$

EXEMPLO 2 Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

SOLUÇÃO Seja $a_n = (x-3)^n/n$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\,|x-3| \to |x-3| \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente, e portanto convergente, quando $|x-3|<1$ e é divergente quando $|x-3|>1$. Agora,

$$|x-3|<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x-3<1 \quad \Leftrightarrow \quad 2<x<4$$

de modo que a série converge quando $2<x<4$ e diverge quando $x<2$ ou $x>4$.

O Teste da Razão não fornece informação quando $|x-3|=1$; assim, devemos considerar $x=2$ e $x=4$ separadamente. Se colocarmos $x=4$ na série, ela se tornará $\sum 1/n$, a série harmônica, que é divergente. Se $x=2$, a série é $\sum (-1)^n/n$, que converge pelo Teste da Série Alternada. Então a série dada converge para $2 \leqslant x<4$. □

Veremos que o principal uso de uma série de potências é que ela fornece uma maneira de representar algumas das mais importantes funções que aparecem na matemática, na física e na química. Em particular, a soma da série de potências no próximo exemplo é chamada **função de Bessel**, em homenagem ao astrônomo alemão Friedrich Bessel (1784-1846), e a função dada no Exercício 35 é outro exemplo de uma função de Bessel. De fato, essas funções surgiram primeiramente quando Bessel resolveu a equação de Kepler da descrição do movimento planetário. Desde aquela época, essas funções têm sido aplicadas em muitas situações físicas diferentes, incluindo a distribuição de temperatura em uma placa circular e a forma de uma membrana vibrante.

EXEMPLO 3 Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUÇÃO Seja $a_n=(-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Então

■ Observe quão bem o modelo gerado por computador (que envolve funções de Bessel e funções cosseno) ajusta a fotografia de uma membrana de borracha vibrando.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \left|\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2}\to 0<1 \qquad \text{para todo } x$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada converge para todos os valores de x. Em outras palavras, o domínio da função de Bessel J_0 é $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$. □

Lembre-se de que a soma de uma série é igual ao limite da sequência das somas parciais. Assim, quando definimos a função de Bessel no Exemplo 3 como a soma de uma série, queremos dizer que, para todo número real x,

$$J_0(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{onde} \qquad s_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

As primeiras somas parciais são

$$s_0(x)=1 \qquad s_1(x)=1-\frac{x^2}{4} \qquad s_2(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2\,304} \qquad s_4(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+\frac{x^6}{2\,304}+\frac{x^8}{147\,456}$$

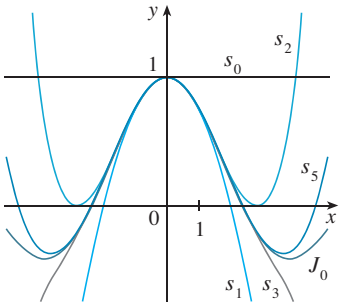


FIGURA 1
Somas parciais da função de Bessel J_0

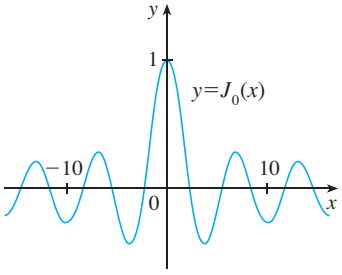


FIGURA 2

A Figura 1 mostra os gráficos dessas somas parciais, que são polinômios. Todas são aproximações para a função J_0, mas observe que as aproximações se tornam melhores quando mais termos são incluídos. A Figura 2 mostra um gráfico mais completo da função de Bessel.

Para as séries de potências que vimos até agora, o conjunto de valores de x para os quais a série é convergente tem sempre sido um intervalo [um intervalo finito para a série geométrica e a série no Exemplo 2, o intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ no Exemplo 3 e um intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ no Exemplo 1]. O teorema a seguir, demonstrado no Apêndice F, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

3 TEOREMA Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii). O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x-a| < R$ pode ser reescrita como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma *extremidade* do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer — a série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R]$$

A situação é ilustrada na Figura 3.

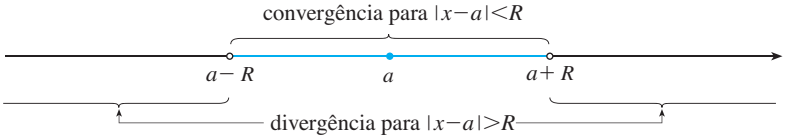


FIGURA 3

Resumimos aqui o raio e o intervalo de convergência para cada um dos exemplos já considerados nesta seção.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

Em geral, o Teste da Razão (ou algumas vezes o Teste da Raiz) deve ser usado para determinar o raio de convergência R. Os Testes da Razão e da Raiz sempre falham quando x é uma extremidade do intervalo de convergência; assim, as extremidades devem ser estudadas com outro teste.

EXEMPLO 4 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUÇÃO Seja $a_n = (-3)^n x^n / \sqrt{n+1}$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n} \right| = \left| -3x \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right|$$

$$= 3 \sqrt{\frac{1 + (1/n)}{1 + (2/n)}} \; |x| \to 3|x| \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série dada converge se $3|x| < 1$ e diverge se $3|x| > 1$. Então, ela converge se $|x| < \frac{1}{3}$ e diverge se $|x| > \frac{1}{3}$. Isso significa que o raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que a série converge no intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, mas devemos agora testar a convergência nas extremidades desse intervalo. Se $x = -\frac{1}{3}$, a série torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que diverge. (Use o Teste da Integral ou simplesmente observe que ela é uma p-série com $p = \frac{1}{2} < 1$.) Se $x = \frac{1}{3}$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série de potências dada converge quando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$; assim, o intervalo de convergência é $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. □

EXEMPLO 5 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUÇÃO Se $a_n = n(x+2)^n / 3^{n+1}$, então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Usando o Teste da Razão vemos que a série converge se $|x+2|/3 < 1$ e diverge se $|x+2|/3 > 1$. Assim ela converge se $|x+2| < 3$ e diverge se $|x+2| > 3$. Então, o raio de convergência é $R = 3$.

A desigualdade $|x+2| < 3$ pode ser escrita como $-5 < x < 1$; assim, testamos a série nas extremidades -5 e 1. Quando $x = -5$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

que diverge pelo Teste para Divergência [$(-1)^n n$ não converge para 0]. Quando $x = 1$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

que também diverge pelo Teste para Divergência. Então, a série converge apenas quando $-5 < x < 1$, de modo que o intervalo de convergência é $(-5, 1)$. □

11.8 EXERCÍCIOS

1. O que é uma série de potências?

2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?
(b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n 4^n x^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x+1)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n\, 3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n, b > 0$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

29. O fato de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ ser convergente implica que as séries a seguir são convergentes?
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-4)^n$

30. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sejam p e q números reais com $p < q$. Encontre uma série de potências cujo intervalo de convergência seja
(a) (p, q) (b) $(p, q]$
(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. É possível encontrar uma série de potências cujo intervalo de convergência seja $[0, \infty)$? Explique.

34. Trace na mesma tela as primeiras somas parciais $s_n(x)$ da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, com a função-soma $f(x) = 1/(1-x)$. Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para $f(x)$?

35. A função J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!\, 2^{2n+1}}$$

é denominada *função de Bessel de ordem 1*.

(a) Encontre seu domínio.

(b) Trace as primeiras somas parciais na mesma tela.

SCA (c) Se seu SCA tiver funções de Bessel programadas, trace J_1 na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam J_1.

36. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada *função de Airy*, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês sir George Airy (1801-1892).

(a) Encontre o domínio da função de Airy.

(b) Trace as primeiras somas parciais na mesma tela.

SCA (c) Se seu SCA tiver funções de Airy programadas, trace A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

37. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são $c_{2n} = 1$ e $c_{2n+1} = 2$ para todo $n \geq 0$. Ache o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para $f(x)$.

38. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $c_{n+4} = c_n$ para todo $n \geq 0$, encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para $f(x)$.

39. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$ onde $c \neq 0$, então o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ é $R = 1/c$.

40. Suponha que a série de potências $\sum c_n (x-a)^n$ satisfaça $c_n \neq 0$ para todo n. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existir, então ele será igual ao raio de convergência da série de potências.

41. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n)x^n$? Explique.

42. Suponha que o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio da série de potências $\sum c_n x^{2n}$?

11.9 REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES COMO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela derivação ou integração de tais séries. Você pode estar se perguntando por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm primitivas elementares, para resolver as equações diferenciais e para aproximar funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

1 $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 5 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1-x)$ como uma soma de uma série de potências.

■ Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

é a n-ésima soma parcial. Observe que à medida que n aumenta, $s_n(x)$ se torna uma aproximação cada vez melhor de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

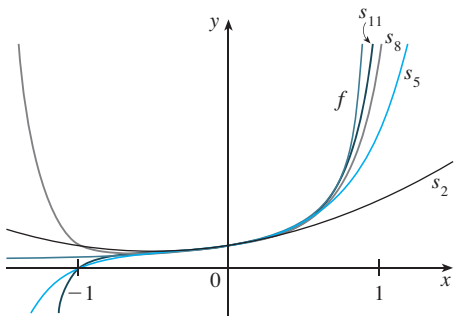


FIGURA 1

■ Quando for pedida uma série de potências nesta seção, é suposto que a série está centrada em 0, a menos que seja especificada outra coisa.

EXEMPLO 1 Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.) □

EXEMPLO 2 Encontre uma representação em série de potências para $1/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Para colocar essa função na forma do lado esquerdo da Equação 1, primeiro fatoramos um 2 do denominador

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1 - \left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

A série converge quando $|-x/2| < 1$, isto é, $|x| < 2$. Assim o intervalo de convergência é $(-2, 2)$. □

EXEMPLO 3 Encontre uma representação em série de potências para $x^3/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Como essa função é apenas x^3 vezes a função no Exemplo 2, tudo o que temos de fazer é multiplicar essa série por x^3:

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Outra maneira de escrever essa série é a seguinte:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como no Exemplo 2, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$. □

■ É válido mover x^3 para dentro do sinal de somatória, porque ele não depende de n. [Use o Teorema 11.2.8(i) com $c = x^3$.]

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder derivar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não demonstraremos) diz que podemos fazer isso por derivação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **derivação e integração termo a termo.**

2 TEOREMA Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

■ Na parte (ii), $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ é escrito como $c_0(x-a) + C$, onde $C = C_1 + ac_0$; assim, todos os termos da série têm a mesma forma.

OBS. 1 As Equações (i) e (ii) no Teorema 2 podem ser reescritas na forma

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

(iv) $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n dx$$

Sabemos que, para somas finitas, a derivada de uma soma é a soma das derivadas, e que a integral de uma soma é a soma das integrais. As Equações (iii) e (iv) afirmam que o mesmo é verdadeiro para somas infinitas, desde que estejamos lidando com *séries de potências*. (Para outros tipos de séries de funções a situação não é tão simples; veja o Exercício 36.)

OBS. 2 Embora o Teorema 2 diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é derivada ou integrada, isso não significa que o intervalo de convergência permanece o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em uma extremidade enquanto a série derivada diverge nesse ponto (veja o Exercício 37).

OBS. 3 A ideia de derivação de uma série de potências termo a termo é a base para um método poderoso para resolver as equações diferenciais. Discutiremos esse método no Capítulo 17.

EXEMPLO 4 No Exemplo 3 da Seção 11.8, vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

é definida para todo x. Então, pelo Teorema 2, J_0 é diferenciável para todo x, e sua derivada é encontrada pela derivação termo a termo, como a seguir:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$ □

EXEMPLO 5 Expresse $1/(1-x)^2$ como uma série de potências pela derivação da Equação 1. Qual é o raio de convergência?

SOLUÇÃO Derivando cada lado da equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Podemos trocar n por $n+1$ e escrever a resposta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acordo com o Teorema 2, o raio de convergência da série derivada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, $R = 1$. □

EXEMPLO 6 Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1-x)$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Observamos que, exceto por um fator de -1, a derivada dessa função é $1/(1-x)$. Assim integramos ambos os lados da Equação 1:

$$-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = \int (1 + x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinar o valor de C, colocamos $x = 0$ nessa equação e obtemos $-\ln(1-0) = C$. Então, $C = 0$ e

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: $R = 1$. □

Observe o que acontece quando colocamos $x = \frac{1}{2}$ no resultado do Exemplo 6. Como $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, vemos que

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$$

EXEMPLO 7 Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$.

SOLUÇÃO Observamos que $f'(x) = 1/(1+x^2)$ e encontramos a série pedida pela integração da série de potências para $1/(1+x^2)$ encontrada no Exemplo 1.

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para encontrar C, colocamos $x = 0$ e obtemos $C = \operatorname{tg}^{-1} 0 = 0$. Portanto,

$$\operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como o raio de convergência da série para $1/(1 + x^2)$ é 1, o raio de convergência dessa série para $\operatorname{tg}^{-1} x$ é também 1. □

■ A série de potências para $\operatorname{tg}^{-1} x$ obtida no Exemplo 7 é chamada série de Gregory, em homenagem ao matemático escocês James Gregory (1638-1675), que antecipou algumas das descobertas de Newton. Mostramos que a série de Gregory é válida quando $-1 < x < 1$, mas acontece (embora não seja fácil provar) que ela também é válida quando $x = \pm 1$. Observe que quando $x = 1$ a série se torna

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

Esse belo resultado é conhecido como a fórmula de Leibniz para π.

EXEMPLO 8

(a) Calcule $\int [1/(1 + x^7)]\, dx$ como uma série de potências.
(b) Use a parte (a) para aproximar $\int_0^{0,5} [1/(1 + x^7)]\, dx$ com precisão de 10^{-7}.

SOLUÇÃO

(a) A primeira etapa é expressar o integrando, $1/(1 + x^7)$, como a soma de uma série de potências. Como no Exemplo 1, começamos com a Equação 1 e trocamos x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

■ Esse exemplo ilustra uma maneira na qual as representações em séries de potência são úteis. Integrar $1/(1 + x^7)$ manualmente é incrivelmente difícil. Sistemas de computação algébrica devolvem formas diferentes da resposta, mas elas são todas extremamente complicadas. (Se você tiver um SCA, experimente.) Na realidade é muito mais fácil lidar com a resposta em série infinita obtida no Exemplo 8(a) do que com a resposta finita dada por um SCA.

Agora integramos termo a termo:

$$\int \frac{1}{1 - x^7}\, dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\, dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Essa série converge para $|-x^7| < 1$, isto é, para $|x| < 1$.

(b) Ao aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo não importa qual primitiva utilizamos; assim vamos usar a primitiva da parte (a) com $C = 0$:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 - x^7}\, dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Essa série infinita é o valor exato da integral definida, mas, como é uma série alternada, podemos aproximar a soma usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. Se pararmos de somar depois do termo com $n = 3$, o erro é menor que o termo com $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6{,}4 \times 10^{-11}$$

Assim, temos,

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 - x^7}\, dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0{,}49951374$$ □

11.9 EXERCÍCIOS

1. Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual é o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$? Por quê?

2. Suponha que você saiba que a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3-10 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11-12 Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

13. (a) Use derivação para encontrar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Use item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Ache uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1+x)$. Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x \ln(1+x)$.

(c) Use o item (a) para achar uma série de potências para $f(x) = \ln(x^2+1)$.

15-18 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

15. $f(x) = \ln(5-x)$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \operatorname{arctg}(x/3)$

19-22 Encontre uma representação em série de potências para f, trace f e várias somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela. O que acontece quando n aumenta?

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

20. $f(x) = \ln(x^2+4)$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

22. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(2x)$

23-26 Calcule a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{tg}^{-1}x}{x^3}\,dx$

26. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2)\,dx$

27-30 Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

27. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{0,4} \ln(1+x^4)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{1/3} x^2 \operatorname{tg}^{-1}(x^4)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{dx}{1+x^6}$

31. Use o resultado do Exemplo 6 para calcular ln 1,1 com precisão de cinco casas decimais.

32. Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Mostre que J_0 (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Calcule $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ com precisão de três casas decimais.

34. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

36. Seja $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Mostre que a série $\sum f_n(x)$ converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas $\sum f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$, n um inteiro. Para quais valores de x a série $\sum f_n''(x)$ converge?

37. Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

38. (a) Começando com a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Use a série de potências para $\operatorname{tg}^{-1}x$ para demonstrar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Completando o quadrado, mostre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Usando a fatoração de $x^3 + 1$ como uma soma de cubos, reescreva a integral no item (a). Depois expresse $1/(x^3 + 1)$ como a soma de uma série de potências e use-a para demonstrar a seguinte fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Na seção anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções. Aqui investigaremos problemas mais gerais: quais funções têm representações em série de potências? Como podemos achar tais representações?

Começaremos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{1}$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer nos termos de f. Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos depois do primeiro são 0 e obtemos

$$f(a) = c_0$$

Pelo Teorema 11.9.2, podemos derivar a série na Equação 1 termo a termo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{2}$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{3}$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3 fornece

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a)\ 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

4 e a substituição de $x = a$ na Equação 4 resulta em

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n nessa equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

5 TEOREMA Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da seguinte forma:

6
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

A série na Equação 6 é chamada **série de Taylor da função f em a** (ou **em torno de a** ou **centrada em a**). Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

7
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

OBS. Mostramos que, se f puder ser representada como uma série de potências em torno de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor. Mas existem funções que não são iguais à soma de suas séries de Taylor. Um exemplo de tal função é dado no Exercício 70.

TAYLOR E MACLAURIN

A série de Taylor recebeu esse nome em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), e a série de Maclaurin tem esse nome em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), apesar do fato de a série de Maclaurin ser apenas um caso especial da série de Taylor. Mas a ideia da representação de funções particulares como somas de séries de potências remonta a Newton, e a série geral de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory em 1668 e pelo matemático suíço John Bernoulli na década de 1690. Taylor aparentemente não sabia do trabalho de Gregory e Bernoulli quando publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro *Methodus incrementorum directa et inversa*. A série de Maclaurin recebeu essa denominação por causa de Colin Maclaurin, que a popularizou em seu livro-texto de cálculo *Treatise of Fluxions*, publicado em 1742.

EXEMPLO 1 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, assim $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para encontrar o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

de modo que, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x, e o raio de convergência é $R = \infty$. □

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que se e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim, como determinar se e^x *tem* uma representação em série de potências?

Vamos investigar uma questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor? Em outras palavras, se f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como com qualquer série convergente, isso significa que $f(x)$ é o limite da sequência das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

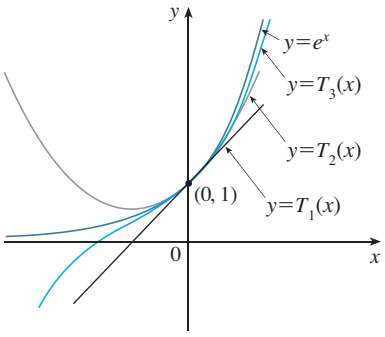


FIGURA 1

■ Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar e^x na Figura 1. Isso sugere que e^x seja igual à soma de sua série de Taylor.

Observe que T_n é um polinômio de grau n chamado **polinômio de Taylor de grau n de f em a**. Por exemplo, para a função exponencial $f(x) = e^x$, o resultado do Exemplo 1 mostra que os polinômios de Taylor em 0 (ou polinômios de Maclaurin) com $n = 1, 2$ e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Os gráficos da função exponencial e desses três polinômios de Taylor estão desenhados na Figura 1. Em geral, $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Se fizermos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de maneira que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

então $R_n(x)$ é denominado **resto** da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, teremos mostrado que

$$\lim_{n \to \infty} T_n(x) = \lim_{n \to \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x)$$

Aqui, portanto, demonstramos o seguinte:

8 TEOREMA Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em a e

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Ao tentar mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para uma função específica f, geralmente usamos o fato a seguir.

9 DESIGUALDADE DE TAYLOR Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} \text{ para } |x - a| \leq d$$

Para ver por que isso é verdadeiro para $n = 1$, assumimos que $|f''(x)| \leq M$. Em particular, temos $f''(x) \leq M$; assim, para $a \leq x \leq a + d$, temos

$$\int_a^x f''(t)\, dt \leq \int_a^x M\, dt$$

Uma primitiva de f'' é f'; dessa forma, pela parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f'(x) - f'(a) \leq M(x - a) \qquad \text{ou} \qquad f'(x) \leq f'(a) + M(x - a)$$

Então,

$$\int_a^x f'(t)\, dt \leq \int_a^x [f'(a) + M(t - a)]\, dt$$

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x - a) + M\frac{(x - a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \leq \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Mas $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Logo,

$$R_1(x) \leq \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Um argumento similar, usando $f''(x) \geq -M$, mostra que

$$R_1(x) \geq -\frac{M}{2}(x - a)^2$$

Assim,

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x - a|^2$$

Embora tenhamos suposto que $x > a$, cálculos similares mostram que essa desigualdade é também verdadeira para $x < a$.

Isso demonstra a Desigualdade de Taylor para o caso onde $n = 1$. O resultado para um n qualquer é demonstrado de uma maneira similar pela integração $n + 1$ vezes. (Veja o Exercício 69 para o caso $n = 2$.)

■ Como alternativas para a desigualdade de Taylor, temos as seguintes fórmulas para o *resto*. Se $f^{(n+1)}$ for contínua sobre um intervalo I e $x \in I$, então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Esse é chamado *forma integral do resto*. Outra fórmula, chamada *forma de Lagrange para o resto*, afirma que existe um número z entre x e a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Essa versão é uma extensão do Teorema do Valor Médio (no caso em que $n = 0$).

OBS. Na Seção 11.11 exploraremos o uso da Desigualdade de Taylor para aproximar funções. Nosso uso imediato é aplicá-la em conjunto com o Teorema 8.

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

10
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série $\sum x^n/n!$ converge para todo x, e seu n-ésimo termo tende a 0.

EXEMPLO 2 Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d for qualquer número positivo e $|x| \leq d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^d$. Assim a Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leq d$$

Observe que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Mas, pela Equação 10, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Segue do Teorema do Confronto que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 8, e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é,

11
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x$$

□

■ Em 1748, Leonhard Euler usou a Equação 12 para achar o valor correto de e até 23 algarismos. Em 2000, Xavier Gourdon e S. Kondo novamente usaram a série em (12), e calcularam e com 12 bilhões de casas decimais.

Em particular, se colocarmos $x = 1$ na Equação 11, obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita:

12
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

EXEMPLO 3 Encontre a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $a = 2$.

SOLUÇÃO Temos $f^{(n)}(2) = e^2$; e assim, colocando $a = 2$ na definição de uma série de Taylor (6), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Novamente pode ser verificado, como no Exemplo 1, que o raio de convergência é $R = \infty$. Como no Exemplo 2, podemos verificar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, assim

13
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para todo } x$$

□

Temos duas expansões em séries de potências para e^x, a série de Maclaurin na Equação 11 e a série de Taylor na Equação 13. A primeira é melhor, se estivermos interessados em valores de x próximos de 0 e, a segunda, se x estiver próximo de 2.

EXEMPLO 4 Encontre a série de Maclaurin de sen x e demonstre que ela representa sen x para todo x.

SOLUÇÃO Arranjamos nossos cálculos em duas colunas como a seguir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Como as derivadas se repetem em um ciclo de quatro, podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm\operatorname{sen} x$ ou $\pm\cos x$, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x. Assim podemos tomar $M = 1$ na Desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \boxed{14}$$

Pela Equação 10, o lado direito dessa desigualdade tende a 0 quando $n \to \infty$, dessa forma, $|R_n(x)| \to 0$ pelo Teorema do Confronto. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, assim sen x é igual à soma de sua série de Maclaurin pelo Teorema 8. □

Destacamos o resultado do Exemplo 4 para referência futura.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para todo } x \qquad \boxed{15}$$

EXEMPLO 5 Encontre a série de Maclaurin de cos x.

SOLUÇÃO Poderíamos proceder diretamente como no Exemplo 4, mas é mais fácil derivar a série de Maclaurin de sen x dada pela Equação 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Como a série de Maclaurin de sen x converge para todo x, o Teorema 2 da Seção 11.9 nos diz que a série derivada para cos x também converge para todo x. Então

■ A Figura 2 mostra o gráfico de sen x com seus polinômios de Taylor (ou Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que, quando n aumenta, $T_n(x)$ torna-se uma aproximação melhor para sen x.

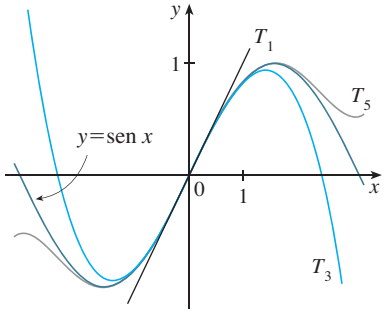


FIGURA 2

■ As séries de Maclaurin para e^x, sen x e cos x que encontramos nos Exemplos 2, 4 e 5 foram primeiro descobertas, usando métodos diferentes, por Newton. (Há evidências de que as séries para sen x e cos x eram conhecidas dos astrônomos indianos mais de um século antes de Newton, mas esse conhecimento não se espalhou pelo mundo.) Essas equações são formidáveis, porque dizem que saberemos tudo sobre cada uma dessas funções se conhecermos todas as suas derivadas no ponto 0.

16

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para todo } x$$

□

EXEMPLO 6 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = x \cos x$.

SOLUÇÃO Em vez de calcular derivadas e substituir na Equação 7, é mais fácil multiplicar a série para cos x (Equação 16) por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

□

EXEMPLO 7 Represente $f(x) = \text{sen } x$ como a soma de sua série de Taylor centrada em $\pi/3$.

■ Obtivemos duas representações em série diferentes para sen x, isto é, a série de Maclaurin no Exemplo 4 e a série de Taylor no Exemplo 7. É melhor usarmos a série de Maclaurin para valores de x próximos de 0 e a série de Taylor para valores de x próximos de $\pi/3$. Observe que o terceiro polinômio de Taylor T_3 na Figura 3, é uma boa aproximação para sen x próximo de $\pi/3$, mas não é boa próximo de 0. Compare-o com o terceiro polinômio de Maclaurin T_3 na Figura 2, na qual o oposto é verdadeiro.

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$f(x) = \text{sen } x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

e esse padrão se repete indefinidamente. Portanto, a série de Taylor em $\pi/3$ é

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

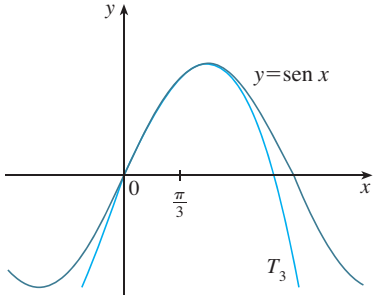


FIGURA 3

A demonstração de que essa série representa sen x para todo x é muito semelhante à feita no Exemplo 4. [Apenas troque x por $x - \pi/3$ em (14).] Podemos escrever a série na notação sigma se separarmos os termos que contêm $\sqrt{3}$:

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

□

A série de potências que obtivemos por métodos indiretos nos Exemplos 5 e 6 e na Seção 11.9 são realmente as séries de Taylor e de Maclaurin das funções dadas, porque o Teorema 5 afirma que, não importa como uma série de potências $f(x) = \sum c_n(x - a)^n$ é obtida, é sempre verdade que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Em outras palavras, os coeficientes são univocamente determinados.

EXEMPLO 8 Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$, onde k é um número real qualquer.

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1\\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k\\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1)\\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2)\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

Portanto, a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$$

Essa série é chamada **série binomial**. Se o n-ésimo termo for a_n, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty$$

Logo, pelo Teste da Razão, a série binomial converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. □

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

e estes números são chamados **coeficientes binomiais**.

O teorema a seguir afirma que $(1 + x)^k$ é igual à soma de sua série de Maclaurin. É possível demonstrar isto mostrando que o resto $R_n(x)$ tende a 0, mas isto acaba sendo muito difícil. A demonstração delineada no Exercício 71 é muito mais simples.

17 O TEOREMA BINOMIAL Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Embora a série binomial sempre convirja quando $|x| < 1$, a questão de ser ou não convergente nas extremidades, ± 1, depende do valor de k. Ocorre que a série converge em 1 se $-1 < k \leqslant 0$ e em ambas as extremidades se $k \geqslant 0$. Observe que se k for um inteiro positivo e se $n > k$, então a expressão $\binom{k}{n}$ contém um fator $(k - k)$, de modo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Isto significa que a série acaba e se reduz ao Teorema Binomial usual quando k for um inteiro positivo. (Veja a Página de Referência 1.)

EXEMPLO 9 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Escrevemos $f(x)$ em uma forma na qual podemos usar a série binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando a série binomial com $k = -\frac{1}{2}$ e com x substituído por $-x/4$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{8}x+\frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n+\cdots\right]$$

Sabemos de (17) que essa série converge quando $|-x/4| < 1$, ou seja, $|x| < 4$, de modo que o raio de convergência é $R = 4$. □

Listamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que deduzimos nesta seção e na precedente.

TABELA 1
Séries de Maclaurin importantes e seus raios de convergência

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad R=1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad R=\infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad R=\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad R=\infty$$

$$\operatorname{tg}^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad R=1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots \qquad R=1$$

Uma razão pela qual as séries de Taylor são importantes é que elas nos permitem integrar funções com as quais não podíamos lidar anteriormente. De fato, na introdução deste

capítulo mencionamos que Newton frequentemente integrava funções expressando-as inicialmente como uma série de potências e então integrando-as termo a termo. A função $f(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada pelas técnicas discutidas até agora porque sua primitiva não é uma função elementar (veja a Seção 7.5). No exemplo a seguir, usamos a ideia de Newton para integrar esta função.

EXEMPLO 10
(a) Calcule $\int e^{-x^2}\,dx$ como uma série infinita.
(b) Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ com precisão de 0,001.

SOLUÇÃO
(a) Primeiro encontramos a série de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Embora seja possível usar o método direto, vamos encontrá-la simplesmente trocando x por $-x^2$ na série para e^x dada na tabela de séries de Maclaurin. Então, para todos os valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Agora, integramos termo a termo:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

■ Podemos tomar $C = 0$ na primitiva na parte (a).

Essa série converge para todo x, porque a série original para e^{-x^2} converge para todo x.
(b) O Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0{,}7475$$

O Teorema da Estimativa da Série Alternada mostra que o erro envolvido nessa aproximação é menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1^5}{1\,320} < 0{,}001$$ □

Outro uso da série de Taylor é ilustrado no próximo exemplo. O limite poderia ser encontrado com a Regra de L'Hôspital, mas, em vez disso, usamos uma série.

EXEMPLO 11 Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Usando a série de Maclaurin de e^x, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

■ Alguns sistemas de computação algébrica calculam limites dessa maneira.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots \right) = \frac{1}{2}$$

porque as séries de potências são funções contínuas. □

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Se as séries de potências forem somadas ou subtraídas, elas se comportarão como polinômios (o Teorema 11.2.8 mostra isso). De fato, como o próximo exemplo ilustra, elas também podem ser multiplicadas e divididas como polinômios. Encontramos apenas os primeiros termos, pois os cálculos para os termos posteriores tornam-se tediosos e os termos iniciais são os mais importantes.

EXEMPLO 12 Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de (a) $e^x \operatorname{sen} x$ e (b) $\operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO

(a) Usando a série de Maclaurin de e^x e sen x na Tabela 1, temos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Multiplicamos essas expressões e juntando os termos semelhantes como nos polinômios:

$$\begin{array}{rl} & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \times & \quad x \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \hline & \quad x + \quad x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\ + & \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\ \hline & \quad x + \quad x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \end{array}$$

Então, $$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Usando as séries de Maclaurin da tabela, obtemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos um procedimento parecido com a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots \,\big)\, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\ \quad x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\ \hline \quad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ \quad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\ \hline \quad \frac{2}{15}x^5 + \cdots \end{array}$$

Então, $$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$ □

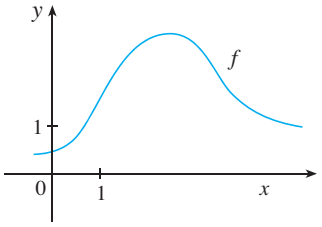
Embora não tenhamos tentado justificar as manipulações formais usadas no Exemplo 12, elas são legítimas. Existe um teorema que afirma que, se $f(x) = \sum c_n x^n$ e $g(x) = \sum b_n x^n$ convergirem para $|x| < R$ e as séries forem multiplicadas como se fossem polinômios, então, a

série resultante também convergirá para $|x| < R$ e representará $f(x)g(x)$. Para a divisão, necessitamos $b_0 \neq 0$; a série resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeno.

11.10 EXERCÍCIOS

1. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para todo x, escreva uma fórmula para b_8.

2. O gráfico de f é mostrado.



(a) Explique por que a série

$$1{,}6 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 1.

(b) Explique por que a série

$$2{,}8 + 0{,}5(x-2) + 1{,}5(x-2)^2 - 0{,}1(x-2)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 2.

3. Se $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência.

4. Encontre a série de Taylor de f centrada em 4 se

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

Qual é o raio de convergência da série de Taylor?

5-12 Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin. [Suponha que f tenha expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$

6. $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \cos x$

8. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

9. $f(x) = e^{5x}$

10. $f(x) = xe^x$

11. $f(x) = \operatorname{senh} x$

12. $f(x) = \cosh x$

13-20 Encontre a série de Taylor de $f(x)$ centrada no valor dado de a. [Suponha que f tenha expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.]

13. $f(x) = 1 + x + x^2, \quad a = 2$

14. $f(x) = x^3, \quad a = -1$

15. $f(x) = e^x, \quad a = 3$

16. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

17. $f(x) = \cos x \quad a = \pi$

18. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$

19. $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 9$

20. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1$

21. Demonstre que a série obtida no Exercício 7 representa sen πx para todo x.

22. Demonstre que a série obtida no Exercício 18 representa sen x para todo x.

23. Demonstre que a série obtida no Exercício 11 representa senh x para todo x.

24. Demonstre que a série obtida no Exercício 12 representa cosh x para todo x.

25-28 Use a série binomial para expandir a função como uma série de potência. Diga o raio de convergência.

25. $\sqrt{1+x}$

26. $\dfrac{1}{(1+x)^4}$

27. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

28. $(1-x)^{2/3}$

29-38 Use uma série de Maclaurin na Tabela 1 para obter a série de Maclaurin da função dada.

29. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

30. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$

32. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

34. $f(x) = x^2 \operatorname{tg}^{-1}(x^3)$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [*Sugestão*: Use $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

39-42 Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Trace f e seus primeiros polinômios de Taylor na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$

40. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$

42. $f(x) = \ln(1+x^2)$

43. Use a série de Maclaurin de e^x para calcular $e^{-0,2}$ com precisão de cinco casas decimais.

44. Use a série de Maclaurin de sen x para calcular sen 3° com precisão de cinco casas decimais.

45. (a) Use a série binomial para expandir $1/\sqrt{1-x^2}$.
(b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin de $\operatorname{sen}^{-1}x$.

46. (a) Expanda $1/\sqrt[4]{1-x}$ como uma série de potências.
(b) Utilize a parte (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1{,}1}$ com precisão de três casas decimais.

47–50 Calcule a integral indefinida como uma série infinita.

47. $\int x\cos(x^3)\,dx$

48. $\int \dfrac{e^x-1}{x}\,dx$

49. $\int \dfrac{\cos x-1}{x}\,dx$

50. $\operatorname{arctg}(x^2)\,dx$

51–54 Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

51. $\int_0^1 \cos(x^3)\,dx$ (três casas decimais)

52. $\int_0^{0,2} [\operatorname{tg}^{-1}(x^3)+\operatorname{sen}(x^3)]dx$ (cinco casas decimais)

53. $\int_0^{0,4} \sqrt{1+x^4}\,dx$ ($|\text{erro}|<5\times10^{-6}$)

54. $\int_0^{0,5} x^2e^{-x^2}\,dx$ ($|\text{erro}|<0{,}001$)

55–57 Use séries para calcular o limite.

55. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{tg}^{-1}x}{x^3}$

56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

57. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$

58. Use a série do Exemplo 12(b) para calcular

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4, no Volume I, usando a Regra de L'Hôspital três vezes. Qual método você prefere?

59–62 Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de cada função.

59. $y=e^{-x^2}\cos x$

60. $y=\sec x$

61. $y=\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}$

62. $y=e^x\ln(1-x)$

63–68 Encontre a soma da série.

63. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n}}{n!}$

64. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

66. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{5^n n!}$

67. $3+\dfrac{9}{2!}+\dfrac{27}{3!}+\dfrac{81}{4!}+\cdots$

68. $1-\ln 2+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}-\dfrac{(\ln 2)^3}{3!}+\cdots$

69. Demonstre a Desigualdade de Taylor para $n=2$, isto é, demonstre que, se $|f'''(x)|\leq M$ para $|x-a|\leq d$, então

$$|R_2(x)|\leq\frac{M}{6}|x-a|^3 \qquad \text{para } |x-a|\leq d$$

70. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

não é igual à sua série de Maclaurin.
(b) Trace a função na parte (a) e comente seu comportamento próximo da origem.

71. Use os seguintes passos para demonstrar (17).
(a) Seja $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$. Derive esta série para mostrar que

$$g'(x)=\frac{kg(x)}{1+x} \qquad -1<x<1$$

(b) Faça $h(x)=(1+x)^{-k}g(x)$ e mostre que $h'(x)=0$.
(c) Deduza que $g(x)=(1+x)^k$.

72. No Exercício 53, na Seção 10.2, foi mostrado que o comprimento da elipse $x=a\operatorname{sen}\theta$, $y=b\cos\theta$, onde $a>b>0$, é

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$$

onde $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$ é a excentricidade da elipse. Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 46, na Seção 7.1, no Volume I, para expressar L como uma série de potências da excentricidade até termos em e^6.

PROJETO DE LABORATÓRIO

SCA UM LIMITE ELUSIVO

Este projeto envolve a função

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\text{tg } x) - \text{tg}(\text{sen } x)}{\text{arcsen}(\text{artg } x) - \text{artg}(\text{arcsen } x)}$$

1. Use seu sistema de computação algébrica para calcular $f(x)$ para $x = 1; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001$ e $0{,}0001$. Parece que f tem um limite quando $x \to 0$?
2. Use o SCA para traçar f próximo de $x = 0$. Parece que f tem um limite quando $x \to 0$?
3. Tente calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ pela Regra de L'Hôspital, usando seu SCA para encontrar as derivadas do numerador e do denominador. O que você descobriu? Quantas aplicações da Regra de L'Hôspital são necessárias?
4. Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ usando seu SCA para encontrar quantos termos foram necessários da série de Taylor do numerador e do denominador. (Use o comando Taylor no Maple ou Series no Mathematica.)
5. Use o comando de limite em seu SCA para encontrar o $\lim_{x \to 0} f(x)$ diretamente. (A maioria dos sistemas de computação algébrica usa o método do Problema 4 para calcular limites.)
6. Tendo em vista as respostas aos Problemas 4 e 5, como você explica os resultados dos Problemas 1 e 2?

PROJETO ESCRITO

COMO NEWTON DESCOBRIU A SÉRIE BINOMIAL

O Teorema Binomial, que dá a expansão de $(a + b)^k$, era conhecido pelos matemáticos chineses muitos séculos antes da época de Newton para o caso em que o expoente k é um inteiro positivo. Em 1665, quando tinha 22 anos, Newton foi o primeiro a descobrir a expansão em série infinita de $(a + b)^k$ quando k é um expoente fracionário (positivo ou negativo). Ele não publicou sua descoberta, mas enunciou-a e deu exemplos de como usá-la em uma carta (chamada hoje *epistola prior*) datada de 13 de junho de 1676, que ele enviou a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society of London, para transmiti-la a Leibniz. Quando Leibniz respondeu, ele perguntou como Newton tinha descoberto a série binomial. Newton escreveu uma segunda carta, a *epistola posterior*, em 24 de outubro de 1676, na qual explicou detalhadamente como chegou à sua descoberta por uma rota muito indireta. Ele estava investigando as áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 até x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Estas são fáceis de calcular se n for par. Observando os padrões e interpolando, Newton pôde conjecturar respostas para valores de n ímpares. Então, ele notou que poderia obter as mesmas respostas expressando $(1 - x^2)^{n/2}$ como uma série infinita.

Escreva um relatório sobre a descoberta de Newton da série binomial. Comece dando um enunciado da série binomial na notação de Newton (veja a *epistola prior* na página 285 de [4] ou na página 402 de [2]). Explique por que a versão de Newton é equivalente ao Teorema 2 na Seção 11.11. Então leia a *epistola posterior* de Newton (veja a página 287 em [4] ou a página 404 em [2]) e explique os padrões que Newton descobriu nas áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Mostre como ele pôde conjecturar as áreas sob as curvas restantes e como verificou suas respostas. Finalmente, explique como essas descobertas levaram à série binomial. Os livros de Edwards [1] e Katz [3] contêm comentários sobre as cartas de Newton.

1. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 178-187.

2. FAUVEL, John; GRAY, Jeremy (orgs.). *The History of Mathematics: A Reader*. Londres: MacMillan Press, 1987.
3. KATZ, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 463-466.
4. STRUIK, D. J. (org.). *A Sourcebook in Mathematics*, 1200-1800. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

11.11 APLICAÇÕES DE POLINÔMIOS DE TAYLOR

Nesta seção exploraremos dois tipos de aplicações de polinômios de Taylor. Primeiro, veremos como eles são usados para aproximar funções — os cientistas de computação gostam deles porque os polinômios são as mais simples das funções. Depois, investigaremos como físicos e engenheiros utilizam esses polinômios na relatividade, óptica, radiações de corpos negros, dipolos elétricos, na velocidade das ondas de água e na construção de rodovias no deserto.

APROXIMANDO FUNÇÕES POR POLINÔMIOS

Suponha que $f(x)$ seja igual à soma de sua série de Taylor em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Na Seção 11.10 introduzimos a notação $T_n(x)$ para a n-ésima soma parcial dessa série, a que chamamos polinômio de Taylor de grau n de f em a. Então,

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como f é a soma de sua série de Taylor, sabemos que $T_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$, e assim T_n pode ser usado como uma aproximação de f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que o polinômio de Taylor de primeiro grau

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

é o mesmo que a linearização de f em a discutida na Seção 3.10, no Volume I. Observe também que T_1 e sua derivada possuem o mesmo valor em a que f e f' têm. Em geral, pode ser mostrado que as derivadas de T_n em a coincidem com aquelas de f até as derivadas de ordem n, inclusive (veja o Exercício 38).

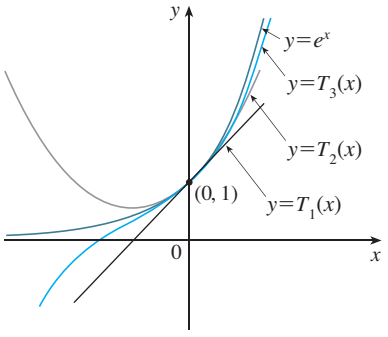


FIGURA 1

Para ilustrar essas ideias, vamos olhar novamente para os gráficos de $y = e^x$ e seus primeiros polinômios de Taylor, como mostrado na Figura 1. O gráfico de T_1 é a reta tangente a $y = e^x$ em $(0, 1)$; essa reta tangente é a melhor aproximação linear para e^x próximo de $(0, 1)$. O gráfico de T_2 é a parábola $y = 1 + x + x^2/2$, e o gráfico de T_3 é a curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que é uma aproximação melhor para a curva exponencial $y = e^x$ do que T_2. O próximo polinômio de Taylor T_4 seria uma aproximação ainda melhor e assim por diante.

	$x = 0{,}2$	$x = 3{,}0$
$T_2(x)$	1,220000	8,500000
$T_4(x)$	1,221400	16,375000
$T_6(x)$	1,221403	19,412500
$T_8(x)$	1,221403	20,009152
$T_{10}(x)$	1,221403	20,079665
e^x	1,221403	20,085537

Os valores na tabela dão uma ilustração numérica da convergência dos polinômios de Taylor $T_n(x)$ para a função $y = e^x$. Vemos que quando $x = 0{,}2$ a convergência é muito rápida, mas, quando $x = 3$, ela é um tanto mais lenta. De fato, quanto mais longe x está de 0, mais lentamente $T_n(x)$ converge para e^x.

Quando usamos um polinômio de Taylor T_n para aproximar uma função f, temos de fazer as seguintes perguntas: quão boa é essa aproximação? Quão grande devemos tomar n para obter a precisão desejada? Para responder a tais questões, precisamos olhar os valores absolutos do resto:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Existem três métodos possíveis para estimar o tamanho do erro:

1. Se uma ferramenta gráfica estiver disponível, podemos usá-la para traçar $|R_n(x)|$ e assim estimar o erro.
2. Se a série for alternada, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.
3. Em todos os casos podemos usar a Desigualdade de Taylor (Teorema 11.10.9), que diz que, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, então,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}$$

EXEMPLO 1

(a) Aproxime a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em $a = 8$.
(b) Qual é a precisão dessa aproximação quando $7 \leq x \leq 9$?

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} & f'(8) &= \tfrac{1}{12} \\ f''(x) &= \tfrac{2}{9}x^{-5/3} & f''(8) &= -\tfrac{1}{144} \\ f'''(x) &= \tfrac{10}{27}x^{-8/3} \end{aligned}$$

Então, o polinômio Taylor de segundo grau é

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2 \end{aligned}$$

A aproximação desejada é

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) A série de Taylor não é alternada quando $x < 8$; assim, não podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas nesse exemplo. Mas podemos usar a Desigualdade de Taylor com $n = 2$ e $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}\,|x-8|^3$$

onde $|f'''(x)| \leq M$. Como $x \geq 7$, temos $x^{8/3} \geq 7^{8/3}$ e dessa forma,

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0{,}0021$$

Portanto, podemos tomar $M = 0{,}0021$. Além disso, $7 \leq x \leq 9$, de modo que $-1 \leq x - 8 \leq 1$ e $|x - 8| \leq 1$.

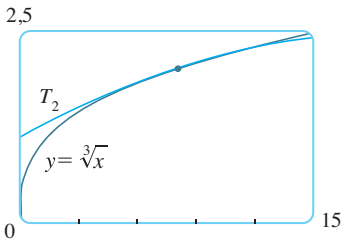


FIGURA 2

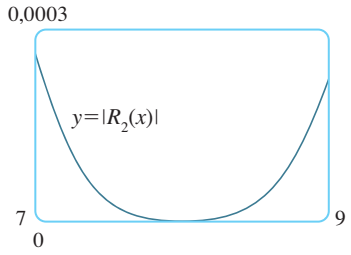


FIGURA 3

Então, a Desigualdade de Taylor dá

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0{,}0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0{,}0021}{6} < 0{,}0004$$

Logo, se $7 \leqslant x \leqslant 9$, a aproximação na parte (a) tem precisão de 0,0004. □

Vamos usar uma ferramenta gráfica para verificar os cálculos no Exemplo 1. A Figura 2 mostra que os gráficos de $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = T_2(x)$ estão muito próximos um do outro quando x está próximo de 8. A Figura 3 mostra o gráfico de $|R_2(x)|$ calculado a partir da expressão

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Vemos a partir do gráfico que

$$|R_2(x)| < 0{,}0003$$

quando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Então, a estimativa do erro a partir de métodos gráficos é ligeiramente melhor que a estimativa do erro a partir da Desigualdade de Taylor, nesse caso.

EXEMPLO 2

(a) Qual é o máximo erro possível ao usar a aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

quando $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$? Use essa aproximação para encontrar sen 12° com precisão de seis casas decimais.

(b) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?

SOLUÇÃO

(a) Observe que a série de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

é alternada para todos os valores de x diferentes de zero e os termos sucessivos são decrescentes, pois $|x| < 1$; dessa maneira, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. O erro na aproximação de sen x pelos três primeiros termos de sua série de Maclaurin é no máximo

$$\left| \frac{x^7}{7!} \right| = \frac{|x|^7}{5\,040}$$

Se $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$, então $|x| \leqslant 0{,}3$; assim, o erro é menor que

$$\frac{(0{,}3)^7}{5\,040} \approx 4{,}3 \times 10^{-8}$$

Para encontrar sen 12° primeiro convertemos para radianos:

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0{,}20791169$$

Então, com precisão de seis casas decimais, sen 12° ≈ 0,207912.

(b) O erro será menor que 0,00005 se

$$\frac{|x|^7}{5\,040} < 0{,}00005$$

Resolvendo essa inequação para x, temos

$$|x|^7 < 0{,}252 \qquad \text{ou} \qquad |x| < (0{,}252)^{1/7} \approx 0{,}821$$

Assim a aproximação dada tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0{,}82$. □

O que acontecerá se usarmos a Desigualdade de Taylor para resolver o Exemplo 2? Como $f^{(7)}(x) = -\cos x$, temos $|f^{(7)}(x)| \leq 1$, logo,

$$|R_6(x)| \leq \frac{1}{7!}|x|^7$$

Assim obtemos as mesmas estimativas que usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.

E com métodos gráficos? A Figura 4 mostra o gráfico de

$$|R_6(x)| = |\operatorname{sen} x - (x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5)|$$

e vemos a partir dele que $|R_6(x)| < 4{,}3 \times 10^{-8}$ quando $|x| \leq 0{,}3$. Esta é a mesma estimativa que obtivemos no Exemplo 2. Para a parte (b) queremos $|R_6(x)| < 0{,}00005$, assim traçamos $y = |R_6(x)|$ e $y = 0{,}00005$ na Figura 5. Colocando o cursor no ponto de intersecção à direita descobrimos que a desigualdade é satisfeita quando $|x| < 0{,}82$. De novo, esta é a mesma estimativa que obtivemos na solução do Exemplo 2.

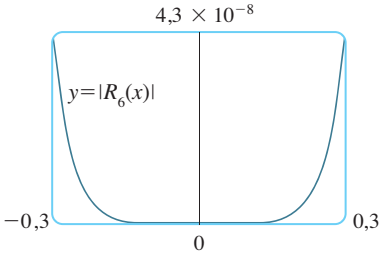


FIGURA 4

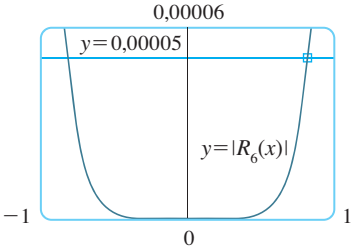


FIGURA 5

Se nos fosse pedido para aproximar sen 72° em vez de sen 12° no Exemplo 2, teria sido mais eficiente usar o polinômio de Taylor em $a = \pi/3$ (em vez de $a = 0$) porque ele é uma aproximação melhor para sen x para valores de x próximos de $\pi/3$. Observe que 72° está mais próximo de 60° (ou $\pi/3$ radianos) e as derivadas de sen x são fáceis de calcular em $\pi/3$.

A Figura 6 mostra os gráficos das aproximações por polinômios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

da curva seno. Você pode ver que, quando n aumenta, $T_n(x)$ é uma boa aproximação para sen x em um intervalo cada vez maior.

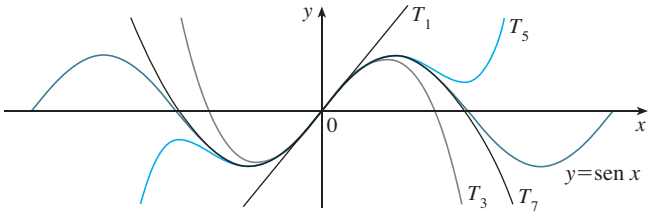


FIGURA 6

Um uso desse tipo de cálculo feito nos Exemplos 1 e 2 ocorre em calculadoras e computadores. Por exemplo, quando você pressiona a tecla sen ou e^x em sua calculadora, ou quando um programador de computador usa uma sub-rotina para uma função trigonométrica ou exponencial ou de Bessel, em muitas máquinas é calculada uma aproximação polinomial. O polinômio é com frequência um polinômio de Taylor que foi modificado de modo que o erro seja espalhado mais uniformemente por um intervalo.

APLICAÇÕES À FÍSICA

Os polinômios de Taylor são usados frequentemente na física. Para obter informações sobre uma equação, um físico muitas vezes simplifica uma função considerando apenas os primeiros dois ou três termos em sua série de Taylor. Em outras palavras, o físico usa um polinômio de Taylor como uma aproximação para a função. A Desigualdade de Taylor pode, então, ser usada para medir a precisão da aproximação. O exemplo a seguir mostra uma maneira na qual essa ideia é usada em relatividade especial.

EXEMPLO 3 Na teoria da relatividade especial de Einstein a massa de um objeto se movendo a uma velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A energia cinética do objeto é a diferença entre sua energia total e sua energia em repouso:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Mostre que, quando v for muito pequeno comparado a c, essa expressão para K coincide com a física clássica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a diferença entre essas expressões para K quando $|v| \leq 100$ m/s.

SOLUÇÃO
(a) Usando as expressões dadas para K e m, obtemos

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$

$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

■ A curva superior na Figura 7 é o gráfico da expressão para a energia cinética K de um objeto com velocidade v na relatividade especial. A curva inferior mostra a função usada para K na física newtoniana clássica. Quando v é muito menor que a velocidade da luz, as curvas são praticamente idênticas.

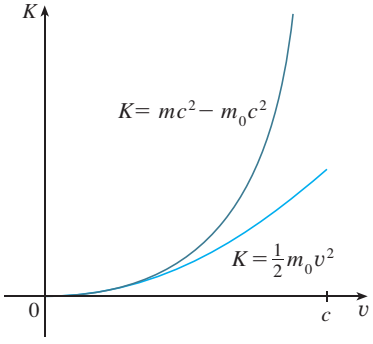


FIGURA 7

Com $x = -v^2/c^2$, a série de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ é calculada mais facilmente como uma série binomial com $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Portanto, temos

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots$$

e

$$K = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$$

Se v for muito menor que c, todos os termos depois do primeiro são muito menores quando comparados ao primeiro termo. Se os omitirmos, obteremos

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Se $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$ e M for um número tal que $|f''(x)| \leq M$, então podemos usar a Desigualdade de Taylor para escrever

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}\,x^2$$

Temos $f''(x) = \frac{3}{4}\,m_0c^2(1+x)^{-5/2}$ e nos foi dado que $|v| \leqslant 100$ m/s, de modo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1-v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1-100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Logo, com $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1-100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4{,}17 \times 10^{-10})m_0$$

Assim, quando $|v| \leqslant 100$ m/s, o módulo do erro ao usar a expressão newtoniana para a energia cinética é no máximo $(4{,}2 \times 10^{-10})m_0$. □

Outra aplicação à física ocorre em óptica. A Figura 8 é adaptada a partir de *Optics*, 4 ed., de Eugene Hecht, São Francisco: Addison-Wesley, 2002, p. 153. Ela mostra uma onda de uma fonte pontual S encontrando uma interface esférica de raio R centrada em C. O raio SA é refratado em direção a P.

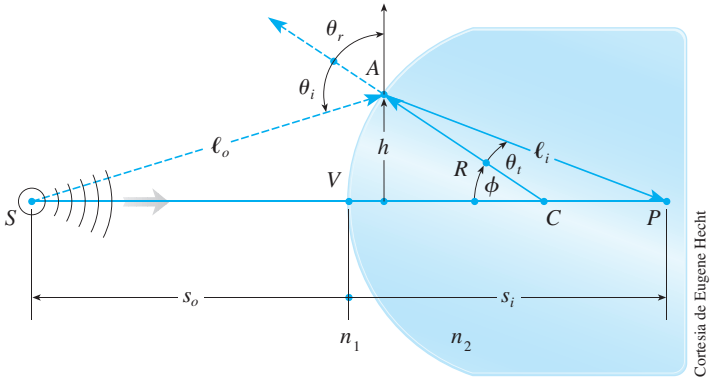


FIGURA 8
Refração em uma interface esférica

Usando o princípio de Fermat de que a luz viaja de modo a minimizar o tempo de percurso, Hecht deduz a equação

1

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

onde n_1 e n_2 são índices de refração e ℓ_o, ℓ_i, s_o e s_i são as distâncias indicadas na Figura 8. Pela Lei dos Cossenos, aplicada aos triângulos ACS e ACP, temos

2

$$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$
$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

■ Aqui usamos a identidade
$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$

Como a Equação 1 é difícil para se trabalhar, Gauss, em 1841, a simplificou usando a aproximação linear $\cos\phi \approx 1$ para valores pequenos de ϕ. (Isto equivale a usar o polinômio de Taylor de grau 1.) Então, a Equação 1 se torna a equação mais simples a seguir [como lhe será solicitado demonstrar no Exercício 34(a)]:

3

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica de Gauss,* ou *óptica de primeira ordem*, e se tornou a ferramenta teórica básica usada para desenhar lentes.

Uma teoria mais precisa é obtida aproximando cos ϕ por seu polinômio de Taylor de grau 3 (que é o mesmo que o polinômio de Taylor de grau 2). Ela leva em consideração raios para os quais ϕ não é tão pequeno, isto é, raios que atingem a superfície a distâncias h maiores acima do eixo. No Exercício 34(b) lhe será pedido para que use essa aproximação para deduzir a equação mais precisa

$$\boxed{4}\quad \frac{n_1}{s_o}+\frac{n_2}{s_i}=\frac{n_2-n_1}{R}+h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o}+\frac{1}{R}\right)^2+\frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica de terceira ordem*.

Outras aplicações dos polinômios de Taylor à física são exploradas nos Exercícios 32, 33, 35, 36 e 37 e no Projeto Aplicado da página 720.

11.11 EXERCÍCIOS

1. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 6 de $f(x)=\cos x$ centrados em $a=0$. Trace f e esses polinômios na mesma tela.
(b) Calcule f e esses polinômios em $x=\pi/4$, $\pi/2$ e π.
(c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

2. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 3 de $f(x)=1/x$ centrados em $a=1$. Trace f e esses polinômios na mesma tela.
(b) Calcule f e esses polinômios em $x=0{,}9$ e $1{,}3$.
(c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

3-10 Encontre o polinômio de Taylor $T_3(x)$ da função f em a. Trace f e T_3 na mesma tela.

3. $f(x)=\ln x, \quad a=1$

4. $f(x)=e^x, \quad a=2$

5. $f(x)=\cos x, \quad a=\pi/2$

6. $f(x)=e^{-x}\operatorname{sen} x, \quad a=0$

7. $f(x)=\operatorname{arcsen} x, \quad a=0$

8. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, \quad a=1$

9. $f(x)=xe^{-2x}, \quad a=0$

10. $f(x)=\operatorname{tg}^{-1}x, \quad a=1$

11-12 Use um sistema de computação algébrica para encontrar os polinômios de Taylor T_n centrados em a para $n=2,3,4,5$. Então, trace esses polinômios e f na mesma tela.

11. $f(x)=\cot x, \quad a=\pi/4$

12. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}, \quad a=0$

13-22
(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com grau n em a.
(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x)\approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.
(c) Verifique seu resultado na parte (b) traçando $|R_n(x)|$.

13. $f(x)=\sqrt{x}, \quad a=4, \quad n=2, \quad 4\le x\le 4{,}2$

14. $f(x)=x^{-2}, \quad a=1, \quad n=2, \quad 0{,}9\le x\le 1{,}1$

15. $f(x)=x^{2/3}, \quad a=1, \quad n=3, \quad 0{,}8\le x\le 1{,}2$

16. $f(x)=\operatorname{sen} x, \quad a=\pi/6, \quad n=4, \quad 0\le x\le \pi/3$

17. $f(x)=\sec x, \quad a=0, \quad n=2, \quad -0{,}2\le x\le 0{,}2$

18. $f(x)=1n(1+2x), \quad a=1, \quad n=3, \quad 0{,}5\le x\le 1{,}5$

19. $f(x)=e^{x^2}, \quad a=0, \quad n=3, \quad 0\le x\le 0{,}1$

20. $f(x)=x\,1n\,x, \quad a=1, \quad n=3, \quad 0{,}5\le x\le 1{,}5$

21. $f(x)=x\operatorname{sen} x, \quad a=0, \quad n=4, \quad -1\le x\le 1$

22. $f(x)=\operatorname{senh} 2x, \quad a=0, \quad n=5, \quad -1\le x\le 1$

23. Use a informação do Exercício 5 para estimar cos 80° com precisão de cinco casas decimais.

24. Use a informação do Exercício 16 para estimar sen 38° com precisão de cinco casas decimais.

25. Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin de e^x que devem ser usados para estimar $e^{0,1}$ com precisão de 0,00001.

26. Quantos termos da série de Maclaurin de $\ln(1+x)$ você precisa usar para estimar ln 1,4 com precisão de 0,001?

27-29 Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de x para os quais a aproximação dada tem precisão dentro do erro estabelecido. Verifique sua resposta graficamente.

27. $\operatorname{sen} x\approx x-\dfrac{x^3}{6}, \quad (|\text{erro}|<0{,}01)$

28. $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}, \quad (|\text{erro}|<0{,}005)$

29. $\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}, \qquad (|\text{erro}| < 0{,}005)$

30. Suponha que você saiba que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

e que a série de Taylor de f centrada em 4 converge para $f(x)$ para todo x no intervalo de convergência. Mostre que o polinômio de Taylor de grau 5 aproxima $f(5)$ com erro menor que 0,0002.

31. Um carro está se movendo com velocidade de 20 m/s e aceleração de 2m/s^2 em um dado instante. Usando um polinômio de Taylor de grau 2, estime a distância que o carro percorre no próximo segundo. Seria razoável utilizar esse polinômio para estimar a distância percorrida durante o próximo minuto?

32. A resistividade ρ de um fio condutor é o recíproco da condutividade e é medida em unidades de ohm-metros (Ω-m). A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

onde t é a temperatura em ºC. Existem tabelas que listam os valores de α (o coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade a 20 ºC) para vários metais. Exceto a temperaturas muito baixas, a resistividade varia quase linearmente com a temperatura, e assim é comum aproximar a expressão para $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de grau 1 ou 2 em $t = 20$.

(a) Encontre expressões para estas aproximações linear e quadrática.

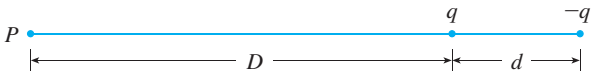
(b) Para o cobre, a tabela fornece $\alpha = 0{,}0039/^{\circ}\text{C}$ e $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega$-m. Trace a resistividade do cobre e as aproximações linear e quadrática para $-250\ ^{\circ}\text{C} \leq t \leq 1\,000\ ^{\circ}\text{C}$.

(c) Para quais valores de t a aproximação linear coincide com a expressão exponencial com precisão de 1%?

33. Um dipolo elétrico consiste em duas cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. Se as cargas forem q e $-q$ e estiverem localizadas a uma distância d, então o campo elétrico E no ponto P na figura é

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

Expandindo essa expressão para E como uma série de potências de d/D, mostre que E é aproximadamente proporcional a $1/D^3$ quando P está muito distante do dipolo.



34. (a) Deduza a Equação 3 para a óptica gaussiana a partir da Equação 1 aproximando cos ϕ na Equação 2 por seu polinômio de Taylor de grau 1.

(b) Mostre que se cos ϕ for trocado por seu polinômio de Taylor de grau 3 na Equação 2, então a Equação 1 se torna a Equação 4 para a óptica de terceira ordem. [*Sugestão*: Use os primeiros dois termos na série binomial para ℓ_o^{-1} e ℓ_i^{-1}. Além disso, use $\phi \approx \operatorname{sen} \phi$.]

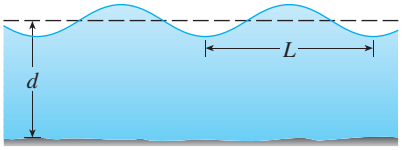
35. Se uma onda de água com comprimento L se mover com velocidade v ao longo de um corpo de água com profundidade d, como na figura, então

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Se a água for profunda, mostre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

(b) Se a água for rasa, use a série de Maclaurin para tgh para mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Então, em água rasa a velocidade de uma onda tende a ser independente do comprimento da onda.)

(c) Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para mostrar que, se $L > 10d$, então a estimativa $v^2 \approx gd$ tem precisão de $0{,}014gL$.



36. O período de um pêndulo com comprimento L que faz um ângulo máximo θ_0 com a vertical é

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

onde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ e g é a aceleração da gravidade. (No Exercício 40 da Seção 7.7, no Volume I, essa integral foi aproximada pela regra de Simpson.)

(a) Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 44 da Seção 7.1, no Volume I, para mostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Se θ_0 não for muito grande, a aproximação $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtida ao se usar o primeiro termo da série, é frequentemente utilizada. Uma aproximação melhor seria obtida pelos dois primeiros termos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos os termos da série, com exceção do primeiro, têm coeficientes que são, no máximo, $\frac{1}{4}$. Use esse fato para comparar esta série com a série geométrica e mostre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leq T \leq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use as desigualdades em (b) para estimar o período de um pêndulo com $L = 1$ metro e $\theta_0 = 10^{\circ}$. Como isso se compara com a estimativa $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? O que aconteceria se $\theta_0 = 42^{\circ}$?

37. Se um topógrafo mede as diferenças nas elevações dos terrenos em um deserto, com a finalidade de construir uma rodovia, ele tem de fazer correções por causa da curvatura da Terra.

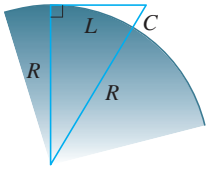
(a) Se R é o raio da Terra e L, o comprimento da rodovia, mostre que a correção a ser feita será

$$C = R \sec(L/R) - R$$

(b) Use um polinômio de Taylor para mostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare as correções dadas pelas fórmulas em (a) e (b) para uma rodovia que tenha 100 km de percurso. (Tome o raio da Terra como 6 370 km.)



38. Mostre que T_n e f têm as mesmas derivadas em a até a ordem n.

39. Na Seção 4.8, no Volume I, consideramos o método de Newton para aproximar uma raiz r da equação $f(x) = 0$, e a partir de uma aproximação inicial x_1 obtivemos aproximações sucessivas $x_2, x_3, \ldots$, onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Use a desigualdade de Taylor com $n = 1$, $a = x_n$ e $x = r$ para mostrar que, se $f''(x)$ existir em um intervalo I contendo r, x_n e x_{n+1} e $|f''(x)| \leq M$, $|f'(x)| \geq K$ para todo $x \in I$, então

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Isso significa que, se x_n tem precisão de d casas decimais, então x_{n+1} terá precisão de cerca de $2d$ casas decimais. Mais precisamente, se o erro no estágio n for no máximo 10^{-m}, então o erro na etapa $n + 1$ será no máximo $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROJETO APLICADO

RADIAÇÃO PROVENIENTE DAS ESTRELAS

Qualquer objeto emite radiação quando aquecido. Um *corpo negro* é um sistema que absorve toda a radiação que incide nele. Por exemplo, uma superfície preta não brilhante ou uma grande cavidade com um pequeno furo em sua parede (como uma fornalha siderúrgica) é um corpo negro e emite radiação de corpo negro. Até a radiação do Sol está próxima de ser a radiação de um corpo negro.

Proposta no fim do século XIX, a Lei de Rayleigh-Jeans expressa a densidade de energia da radiação do corpo negro de comprimento de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em kelvins e k é a constante de Boltzmann. A Lei de Rayleigh-Jeans coincide com as medidas experimentais para comprimentos de onda longos, mas diverge drasticamente para comprimentos de onda curtos. [A lei prediz que $f(\lambda) \to \infty$ quando $\lambda \to 0^+$, mas experiências mostraram que $f(\lambda) \to 0$.] Esse fato é conhecido como a *catástrofe do ultravioleta*.

Em 1900, Max Planck encontrou um modelo melhor (conhecido agora como a Lei de Planck) para a radiação do corpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em kelvins e

h = constante de Planck = $6{,}6262 \times 10^{-34}$ J.s

c = velocidade da luz = $2{,}997925 \times 10^{8}$ m/s

k = constante de Boltzmann = $1{,}3807 \times 10^{-23}$ J/K

1. Use a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para a Lei de Planck. Assim, essa lei pode modelar melhor a radiação do corpo negro que a Lei de Rayleigh-Jeans para comprimentos de onda mais curtos.

2. Use um polinômio de Taylor para mostrar que, para comprimentos de onda longos, a Lei de Planck fornece aproximadamente os mesmos valores que a Lei de Rayleigh-Jeans.

3. Trace f dada por ambas as leis na mesma tela e comente as similaridades e diferenças. Use $T = 5\,700$ K (a temperatura do Sol). (Você pode querer mudar de metros para a unidade mais conveniente de micrômetros: 1 μm $= 10^{-6}$m.)

4. Use seu gráfico no Problema 3 para estimar o valor de λ para o qual $f(\lambda)$ é um máximo na Lei de Planck.

5. Investigue como o gráfico de f muda quando T varia. (Use a Lei de Planck.) Em particular, trace f para as estrelas de Betelgeuse ($T = 3\,400$ K), Procyon ($T = 6\,400$ K) e Sirius ($T = 9\,200$ K), assim como para o Sol. Como a radiação total emitida (a área sob a curva) varia com T? Use o gráfico para comentar por que Sirius é conhecida como uma estrela azul e Betelgeuse como uma estrela vermelha.

11 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma sequência convergente?
   (b) O que é uma série convergente?
   (c) O que significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
   (d) O que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ significa?

2. (a) O que é uma sequência limitada?
   (b) O que é uma sequência monótona?
   (c) O que você pode dizer sobre uma sequência monótona limitada?

3. (a) O que é uma série geométrica? Sob quais circunstâncias ela é convergente? Qual é sua soma?
   (b) O que é uma p-série? Sob quais circunstâncias ela é convergente?

4. Suponha que $\sum a_n = 3$ e s_n seja a n-ésima soma parcial da série. O que é $\lim_{n\to\infty} a_n$? O que é $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Enuncie o seguinte:
   (a) O Teste para Divergência.
   (b) O Teste da Integral.
   (c) O Teste da Comparação.
   (d) O Teste da Comparação no Limite.
   (e) O Teste da Série Alternada.
   (f) O Teste da Razão.
   (g) O Teste da Raiz.

6. (a) O que é uma série absolutamente convergente?
   (b) O que você pode dizer sobre uma destas séries?
   (c) O que é uma série condicionalmente convergente?

7. (a) Se uma série for convergente pelo Teste da Integral, como você estima sua soma?
   (b) Se uma série for convergente pelo Teste da Comparação, como você estima sua soma?
   (c) Se uma série for convergente pelo Teste da Série Alternada, como você estima sua soma?

8. (a) Escreva a forma geral de uma série de potências.
   (b) O que é o raio de convergência de uma série de potências?
   (c) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências?

9. Suponha que $f(x)$ seja a soma de uma série de potências com raio de convergência R.
   (a) Como você deriva f? Qual é o raio de convergência da série para f'?
   (b) Como você integra f? Qual é o raio de convergência da série para $\int f(x)\,dx$?

10. (a) Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.
    (b) Escreva uma expressão para a série de Taylor de f centrada em a.
    (c) Escreva uma expressão para a série de Maclaurin de f.
    (d) Como você mostra que $f(x)$ é igual à soma de sua série de Taylor?
    (e) Enuncie a Desigualdade de Taylor.

11. Escreva a série de Maclaurin e o intervalo de convergência para cada uma das seguintes funções:
    (a) $1/(1 - x)$ (b) e^x (c) sen x
    (d) cos x (e) $\text{tg}^{-1}x$

12. Escreva a expansão em série binomial de $(1 + x)^k$. Qual é o raio de convergência dessa série?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum a_n$ é convergente.
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ é convergente.
3. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.
4. Se $\sum c_n 6^n$ for convergente, então $\sum c_n(-2)^n$ é convergente.
5. Se $\sum c_n 6^n$ for convergente, então $\sum c_n(-6)^n$ é convergente.
6. Se $\sum c_n x^n$ diverge quando $x = 6$, então ela diverge quando $x = 10$.
7. O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\sum 1/n^3$ converge.
8. O Teste da Razão pode ser utilizado para determinar se $\sum 1/n!$ converge.
9. Se $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ e $\sum b_n$ divergir, então $\sum a_n$ diverge.
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
11. Se $-1 < \alpha < 1$, então $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.
12. Se $\sum a_n$ for divergente, então $\sum |a_n|$ será divergente.
13. Se $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ convergir para todo x, então $f'''(0) = 2$.
14. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem divergentes, então $\{a_n + b_n\}$ será divergente.
15. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem divergentes, então $\{a_n b_n\}$ será divergente.
16. Se $\{a_n\}$ for decrescente e $a_n > 0$ para todo n, então $\{a_n\}$ será convergente.
17. Se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ convergir, então $\sum (-1)^n a_n$ converge.
18. Se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) < 1$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
19. $0{,}99999\ldots = 1$
20. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

EXERCÍCIOS

1-8 Determine se a sequência é convergente ou divergente. Se ela for convergente, encontre seu limite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$
2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$
3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$
4. $a_n = \cos(n\pi/2)$
5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$
6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$
7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$
8. $\{(-10)^n/n!\}$
9. Uma sequência é definida recursivamente pelas equações $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Mostre que $\{a_n\}$ é crescente e $a_n < 2$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.
10. Mostre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ e use um gráfico para encontrar o menor valor de N que corresponde a $\varepsilon = 0{,}1$ na definição de limite.

11-22 Determine se a série é convergente ou divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1{,}2)^n}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$

23–26 Determine se a série é condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27–31 Encontre a soma da série.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{tg}^{-1}(n+1) - \operatorname{tg}^{-1} n]$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Expresse a dízima periódica 4,17326326326 . . . como uma fração.

33. Mostre que $\cosh x \geqslant 1 + \frac{1}{2}x^2$ para todo x.

34. Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ converge?

35. Encontre a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ com precisão de quatro casas decimais.

36. (a) Encontre a soma parcial s_5 da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ e estime o erro ao usá-la como uma aproximação para a soma da série.

(b) Encontre a soma da série com precisão de cinco casas decimais.

37. Use a soma dos oito primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

38. (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!}$ é convergente.

(b) Deduza que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n^n}{(2n)!} = 0$.

39. Demonstre que, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for absolutamente convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) a_n$$

é absolutamente convergente também.

40–43 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n 4^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

44. Encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Encontre a série de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \pi/6$.

46. Encontre a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ em $a = \pi/3$.

47–54 Encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência. Você pode usar o método direto (a definição de série de Maclaurin) ou séries conhecidas, como a série geométrica, a série binomial ou a série de Maclaurin de e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg}^{-1} x$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

48. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(1 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

55. Calcule $\int \dfrac{e^x}{x}\, dx$ como uma série infinita.

56. Use séries para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ com precisão de duas casas decimais.

57–58

(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor de grau n em a.

(b) Trace f e T_n na mesma tela.

(c) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.

(d) Verifique seu resultado na parte (c) traçando $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 3$, $0{,}9 \leqslant x \leqslant 1{,}1$

58. $f(x) = \sec x$, $a = 0$, $n = 2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

59. Use séries para calcular o limite a seguir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. A força da gravidade em um objeto de massa m a uma altura h acima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

onde R é o raio da Terra e g é a aceleração da gravidade.

(a) Expresse F como uma série de potências em h/R.

(b) Observe que, se aproximamos F pelo primeiro termo na série, obtemos a expressão $F \approx mg$, que é geralmente usada quando h é muito menor que R. Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para estimar a gama de valores de h para os quais a aproximação $F \approx mg$ tem precisão de 1%. (Use $R = 6\,400$ km.)

61. Suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para todo x.

(a) Se f for uma função ímpar, mostre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Se f for uma função par, mostre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Se $f(x) = e^{x^2}$, mostre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

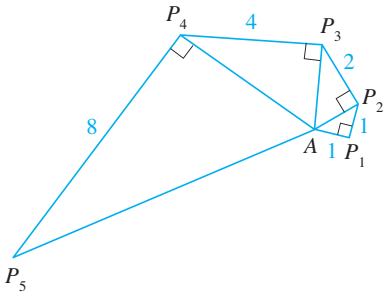


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

1. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encontre $f^{(15)}(0)$.

2. Uma função f é definida por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

Onde f é contínua?

3. (a) Mostre que $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}x - 2 \operatorname{cotg} x$.
(b) Encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

4. Seja $\{P_n\}$uma sequência de pontos determinados como na figura. Então $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$ e o ângulo AP_nP_{n+1} é um ângulo reto. Encontre $\lim_{n \to \infty} \angle P_nAP_{n+1}$.

5. Para construir a **curva floco de neve**, comece com um triângulo equilátero com lados de comprimento 1. A Etapa 1 na construção é dividir cada lado em três partes iguais, construir um triângulo equilátero na parte do meio e então apagar a parte do meio (veja a figura). A Etapa 2 consiste em repetir a Etapa 1 para cada lado do polígono resultante. Esse processo é repetido a cada etapa seguinte. A curva floco de neve é aquela que resulta da repetição desse processo indefinidamente.

(a) Sejam s_n, l_n e p_n as representações do número de lados, do comprimento de um lado e do comprimento total da n-ésima curva de aproximação (a curva obtida depois da Etapa n de construção), respectivamente. Encontre fórmulas para s_n, l_n e p_n.
(b) Mostre que $p_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.
(c) Some uma série infinita para encontrar a área dentro da curva floco de neve.
Obs.: As partes (b) e (c) mostram que a curva floco de neve é infinitamente longa, mas delimita apenas uma área finita.

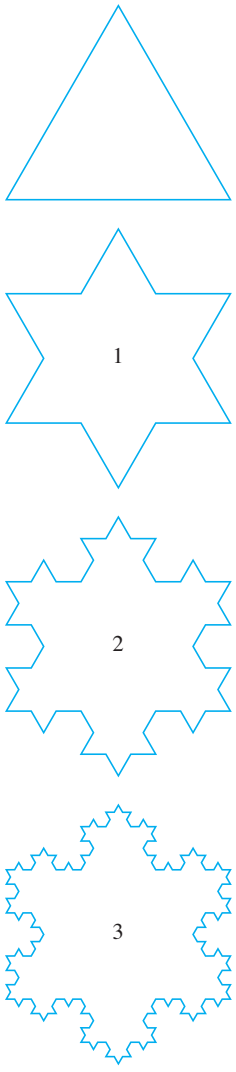


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

6. Encontre a soma da série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

onde os termos são os recíprocos dos inteiros positivos cujos únicos fatores primos são 2 e 3.

7. (a) Mostre que, para $xy \neq -1$,

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$$

se o lado esquerdo estiver entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.
(b) Mostre que

$$\operatorname{arctg} \tfrac{120}{119} - \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(c) Deduza a seguinte fórmula de John Machin (1680-1751):

$$4 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} - \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Use a série de Maclaurin para arctg para mostrar que

$$0{,}197395560 < \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} < 0{,}197395562$$

(e) Mostre que

$$0{,}004184075 < \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} < 0{,}004184077$$

(f) Deduza que, com precisão de sete casas decimais,

$$\pi \approx 3{,}1415927$$

Machin usou esse método em 1706 para encontrar π com precisão de 100 casas decimais. Neste século, com a ajuda de computadores, o valor de π tem sido calculado com uma precisão cada vez maior. Yasumada Kanada da Universidade de Tóquio calculou recentemente o valor de π com um trilhão de casas decimais!

8. (a) Demonstre uma fórmula similar àquela no Problema 7(a), mas envolvendo arccotg em vez de arctg.
(b) Encontre a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccotg}(n^2 + n + 1)$$

9. Encontre o intervalo de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ e sua soma.

10. Se $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, mostre que

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k} \right) = 0$$

Se você não vê como demonstrar isso, tente a estratégia de resolução de problemas com *uso de analogias* (veja a página 66, no Volume I). Tente os casos especiais $k = 1$ e $k = 2$ primeiro. Se você vir como demonstrar a asserção para esses casos, provavelmente verá como demonstrá-la no caso geral.

11. Encontre a soma da série $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

12. Suponha que você tenha um grande suprimento de livros, todos do mesmo tamanho, e os empilhe na borda de uma mesa, com cada livro se estendendo mais longe da borda da mesa do que o livro embaixo dele. Mostre que é possível fazer isso de maneira que o livro no topo da pilha fique inteiramente além da mesa. De fato, mostre que o livro do topo pode se estender a qualquer distância além da borda da mesa se a pilha for alta o suficiente. Use o seguinte método de empilhamento: o livro do topo se estende metade de seu comprimento além do segundo livro. O segundo livro se estende um quarto de seu comprimento além do terceiro. O terceiro se estende um sexto de seu comprimento além do quarto, e assim por diante. (Tente você mesmo com um baralho.) Considere os centros de massa.

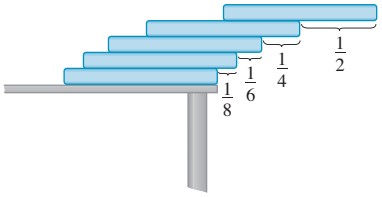


FIGURA PARA O PROBLEMA 12

13. Se a curva $y = e^{-x/10} \operatorname{sen} x$, $x \geqslant 0$ for girada em torno do eixo x, o sólido resultante se parece com uma sequência infinita de bolinhas decrescentes.
(a) Encontre o volume exato da n-ésima bolinha. (Use uma tabela de integrais ou um sistema de computação algébrica.)
(b) Encontre o volume total das bolinhas.

14. Se $p > 1$, calcule a expressão

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

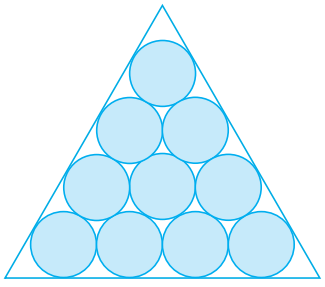


FIGURA PARA O PROBLEMA 15

15. Suponha que círculos de diâmetros iguais são agrupados o mais junto possível em n fileiras dentro de um triângulo equilátero. (A figura ilustra o caso $n = 4$.) Se A for a área do triângulo e A_n for a área total ocupada pelas n fileiras de círculos, mostre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

16. A sequência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pelas equações

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

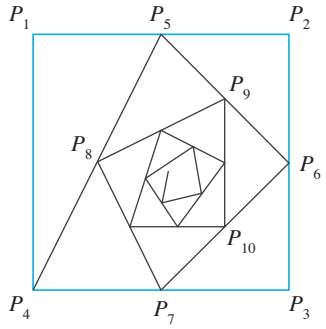


FIGURA PARA O PROBLEMA 18

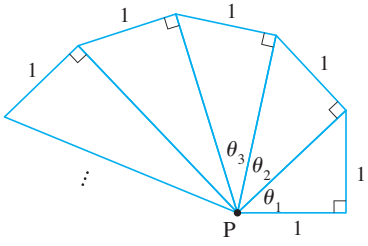


FIGURA PARA O PROBLEMA 20

17. Tomando o valor de x^x em 0 igual a 1 e integrando uma série termo a termo, mostre que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

18. Começando com os vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de um quadrado, construímos outros pontos, como mostrado na figura: P_5 é o ponto médio de P_1P_2; P_6 é o ponto médio de P_2P_3 e assim por diante. O caminho espiral poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ tende a um ponto P dentro do quadrado.

(a) Se as coordenadas de P_n forem (x_n, y_n), mostre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ e encontre uma equação similar para as coordenadas y.

(b) Encontre as coordenadas de P.

19. Se $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ tiver raio de convergência positivo e $e^{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, mostre que

$$nd_n = \sum_{i=1}^{n} ic_i d_{n-i} \qquad n \geqslant 1$$

20. Triângulos retângulos são construídos conforme a figura. Cada triângulo tem altura igual a 1 e sua base é a hipotenusa do triângulo anterior. Mostre que essa sequência faz um número ilimitado de voltas ao redor de P, demonstrando que $\sum \theta_n$ é uma série divergente.

21. Considere a série cujos termos são os recíprocos de inteiros positivos que podem ser escritos na base 10 sem usar o dígito 0. Mostre que essa série é convergente e a soma é menor que 90.

22. (a) Mostre que a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{é} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

onde f_n é o n-ésimo número de Fibonacci, ou seja, $f_1 = 1, f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugestão*: Escreva $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ e multiplique ambos os lados dessa equação por $1 - x - x^2$.]

(b) Ao escrever $f(x)$ como uma soma de frações parciais, portanto, obtendo a série de Maclaurin de uma maneira diferente, encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci.

23. Seja

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

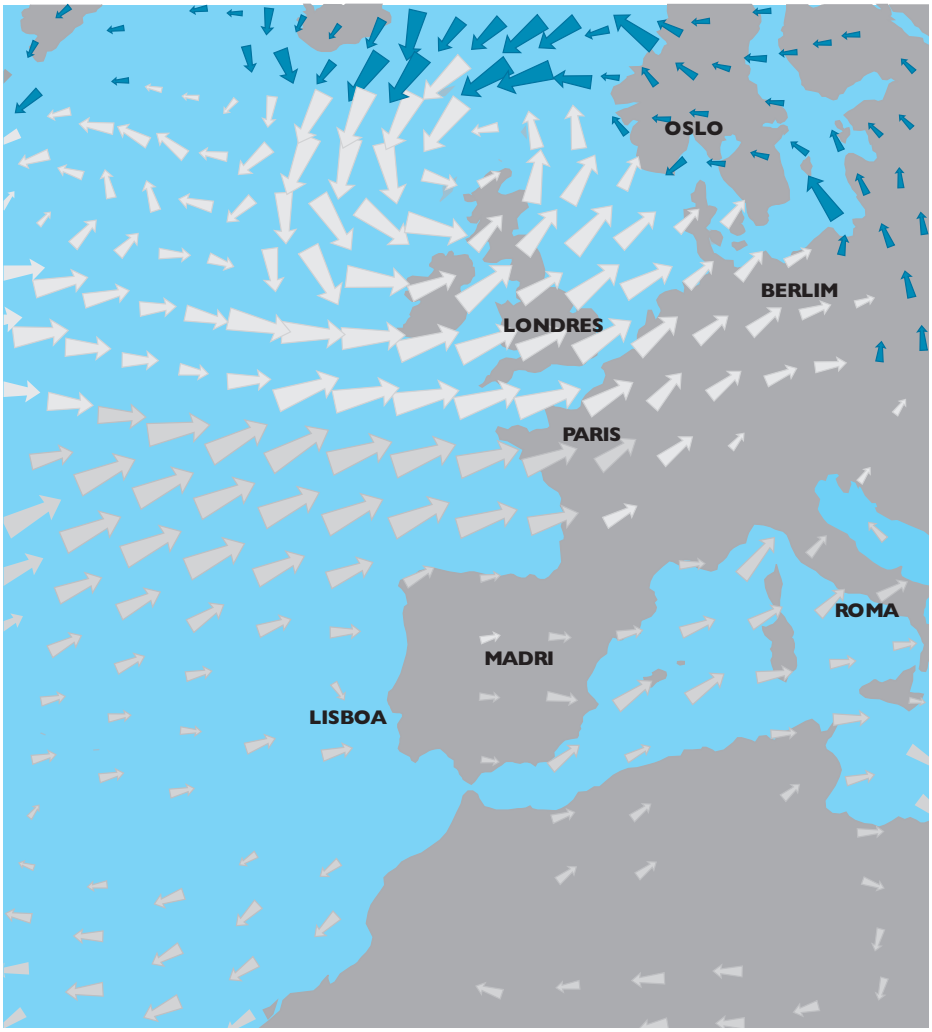
$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Mostre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$

24. Demonstre que se $n > 1$, a n-ésima soma parcial da série harmônica não é um inteiro. *Sugestão*: Seja 2^k a maior potência de 2 que é menor ou igual a n e seja M o produto de todos os inteiros ímpares que são menores ou iguais a n. Suponha que $s_n = m$, seja um inteiro. Então $M2^k s_n = M2^k m$. O lado direito dessa equação é par. Demonstre que o lado esquerdo é ímpar, mostrando que cada um de seus termos é um inteiro par, com exceção do último.

12

VETORES E A GEOMETRIA DO ESPAÇO



A velocidade do vento é um vetor, já que tem módulo, direção e sentido. Na imagem, estão representados os vetores velocidade dos ventos sobre o Atlântico Norte e a Europa Ocidental em 28 de fevereiro de 2007. Setas maiores indicam ventos mais intensos.

Neste capítulo introduziremos vetores e sistemas de coordenadas para o espaço tridimensional, introduzindo assim o cenário para estudarmos no Capítulo 14 o cálculo de funções de duas variáveis, já que o gráfico de tais funções é uma superfície no espaço. Neste capítulo, veremos que vetores fornecem uma descrição particularmente simples de retas e planos no espaço.

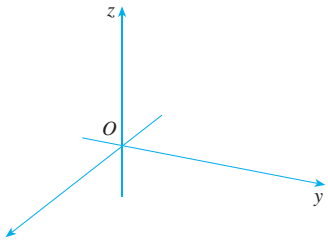


FIGURA 1
Eixos coordenados

Para localizar um ponto no plano são necessários dois números. Sabemos que qualquer ponto no plano pode ser representado como um par ordenado (a, b) de números reais, onde a é a coordenada x e b é a coordenada y. Por essa razão, um plano é dito bidimensional. Para localizar um ponto no espaço, necessitamos de três números. Representaremos qualquer ponto no espaço pela tripla ordenada (a, b, c) de números reais.

Para representar pontos no espaço, precisamos inicialmente fixar um ponto O (origem) e três retas orientadas passando por O que sejam perpendiculares entre si, que chamaremos **eixos coordenados**, denotados por eixo x, eixo y e eixo z. Geralmente, colocamos os eixos x e y como retas horizontais e a reta vertical como o eixo z, e indicamos a orientação dos eixos com setas, como mostrado na Figura 1. O sentido do eixo z é determinado pela **regra da mão direita**, como ilustrado na Figura 2. Se você arredondar os dedos de sua mão direita ao redor do eixo z de forma a rodar 90° no sentido anti-horário do eixo x positivo para o eixo y positivo, o polegar apontará para o sentido positivo do eixo z.

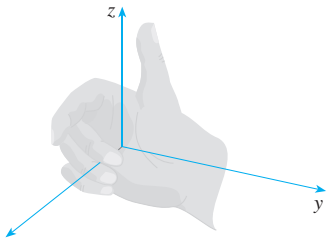


FIGURA 2
Regra da mão direita

Os três eixos coordenados determinam três **planos coordenados** [ilustrados na Figura 3(a)]. O plano xy contém os eixos x e y, o plano yz contém os eixos y e z e o plano xz contém os eixos x e z. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, chamadas **octantes**. O **primeiro octante** é determinado pelos eixos positivos.

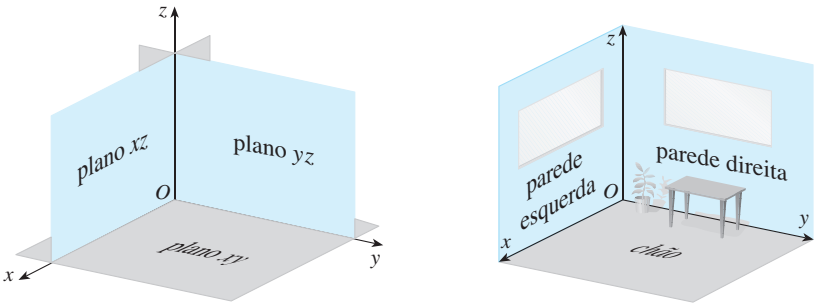


FIGURA 3
(a) Planos coordenados (b)

Como muitas pessoas têm dificuldade em visualizar diagramas de figuras em três dimensões, pode ser útil fazer o que sugerimos a seguir [veja a Figura 3(b)]. Olhe para algum canto inferior de um cômodo e defina-o como origem. A parede que se encontra à sua esquerda é o plano xz, a parede à sua direita é o plano yz e o chão é o plano xy. O eixo x está ao longo da intersecção do chão com a parede esquerda. O eixo y fica ao longo da intersecção do chão com a parede direita. O eixo z fica ao longo da intersecção das duas paredes, orientado no sentido do teto. Se você está no primeiro octante e imagina outras sete salas situadas nos outros sete octantes (três no mesmo andar e quatro no andar abaixo), todas têm o canto O em comum.

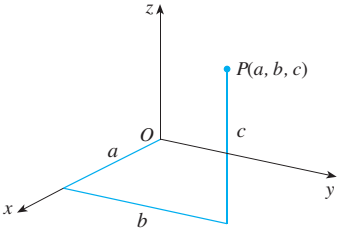


FIGURA 4

Seja P um ponto qualquer do espaço e seja a a distância (orientada) de P até o plano yz, b a distância de P até o plano xz e c a distância de P até o plano xy. Representaremos o ponto P pela tripla ordenada (a, b, c) de números reais e chamaremos a, b e c de **coordenadas** do ponto P; a é a coordenada x, b é a coordenada y e c é a coordenada z. Assim, para localizar o ponto (a, b, c) começamos da origem O e movemos a unidades ao longo do eixo x, em seguida, b unidades paralelamente ao eixo y e, por fim, c unidades paralelamente ao eixo z, como na Figura 4.

O ponto $P(a, b, c)$ determina uma caixa retangular como na Figura 5. Se desenharmos uma perpendicular de P ao plano xy, obteremos o ponto Q, com coordenadas $(a, b, 0)$, denominado **projeção** de P no plano xy. Da mesma forma, $R(0, b, c)$ e $S(a, 0, c)$ são respectivamente as projeções de P nos planos yz e xz.

Como ilustrações numéricas, os pontos $(-4, 3, -5)$ e $(3, -2, -6)$ estão indicados na Figura 6.

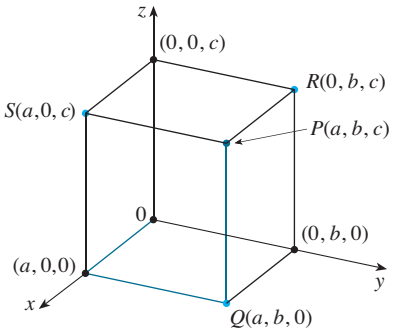
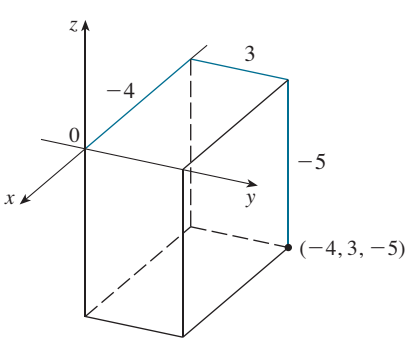


FIGURA 5



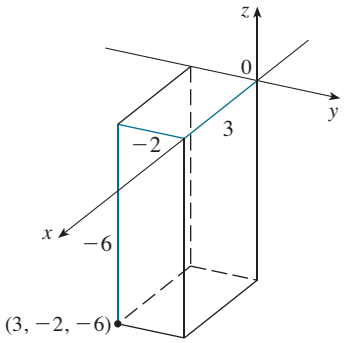


FIGURA 6

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais e é denotado por $\mathbb{R}^3$. Demos uma correspondência biunívoca entre pontos P no espaço e triplas ordenadas (a, b, c) no $\mathbb{R}^3$. Ela é chamada **sistema coordenado retangular (ou cartesiano) tridimensional**. Observe que, em termos de coordenadas, o primeiro octante pode ser descrito como o conjunto de pontos cujas coordenadas são todas positivas.

Em geometria analítica bidimensional, o gráfico de uma equação envolvendo x e y é uma curva em $\mathbb{R}^2$. Em geometria analítica tridimensional, uma equação envolvendo x, y e z representa uma *superfície* em $\mathbb{R}^3$.

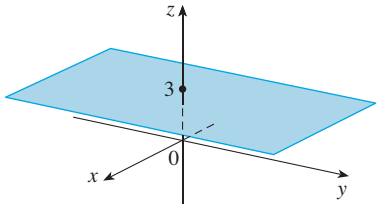
EXEMPLO 1 Que superfícies de $\mathbb{R}^3$ são representadas pelas seguintes equações?

(a) $z = 3$ (b) $y = 5$

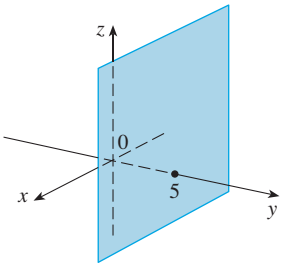
SOLUÇÃO

(a) A equação $z = 3$ representa o conjunto $\{(x, y, z) | z = 3\}$, que é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ com coordenada z igual a 3. Isso representa um plano horizontal paralelo ao plano xy e três unidades acima dele, como na Figura 7(a).

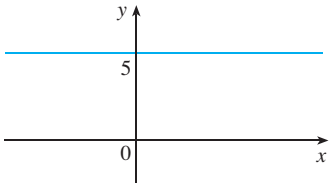
(b) A equação $y = 5$ representa o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ com coordenada y igual a 5. Esses pontos pertencem a um plano vertical, paralelo ao plano xz, e cinco unidades à direita deste, como mostrado na Figura 7(b). □



(a) z=3 , um plano em $\mathbb{R}^3$



(b) y=5,um plano em $\mathbb{R}^3$



(c) y=5 , uma reta $\mathbb{R}^2$

FIGURA 7

OBS. Quando é dada uma equação, precisamos descobrir a partir do contexto se ela representa uma curva em $\mathbb{R}^2$ ou uma superfície em $\mathbb{R}^3$. No Exemplo 1, $y = 5$ representa um plano em $\mathbb{R}^3$, mas é claro que também pode representar uma reta em $\mathbb{R}^2$ se estivermos trabalhando com geometria analítica bidimensional [veja as Figuras 7(b) e (c)].

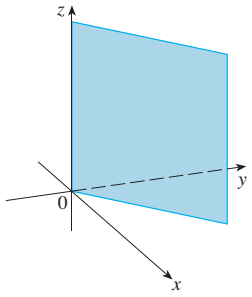


FIGURA 8
O plano $y = x$

Em geral, se k é uma constante, então $x = k$ representa um plano paralelo ao plano yz, $y = k$ corresponde a um plano paralelo ao plano xz e $z = k$ representa um plano paralelo ao plano xy. Na Figura 5, as faces da caixa retangular são formadas pelos três planos coordenados $x = 0$ (o plano yz), $y = 0$ (o plano xz) e $z = 0$ (plano xy), e pelos planos $x = a$, $y = b$ e $z = c$.

EXEMPLO 2 Descreva e esboce a superfície em $\mathbb{R}^3$ representada pela equação $y = x$.

SOLUÇÃO A equação representa o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^3$ com coordenadas x e y iguais, isto é, $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Esses pontos pertencem a um plano vertical que intercepta o plano xy na reta $y = x, z = 0$. A parte desse plano que está no primeiro octante está esboçada na Figura 8. □

A fórmula familiar para a distância entre dois pontos em um plano é estendida facilmente para a seguinte fórmula tridimensional.

FÓRMULA DA DISTÂNCIA EM TRÊS DIMENSÕES A distância $|P_1P_2|$ entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

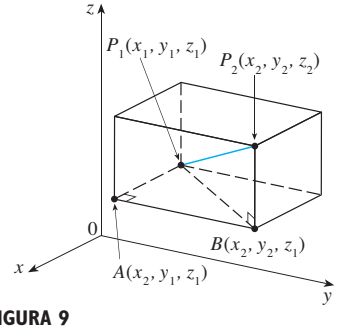


FIGURA 9

Para ver por que essa fórmula é verdadeira, vamos construir uma caixa retangular (como na Figura 9), onde P_1 e P_2 são vértices opostos e as faces dessa caixa são paralelas aos planos coordenados. Se $A(x_2, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_1)$ são os vértices da caixa indicados na figura, então,

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \qquad |AB| = |y_2 - y_1| \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

Como P_1BP_2 e P_1AB são ambos triângulos retângulos, duas aplicações do Teorema de Pitágoras fornecem

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

e

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Combinando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EXEMPLO 3 A distância do ponto $P(2, -1, 7)$ ao ponto $Q(1, -3, 5)$ é

$$|PQ| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$ □

EXEMPLO 4 Encontre a equação da esfera com raio r e centro $C(h, k, l)$.

SOLUÇÃO Por definição, a esfera é o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ com distância ao ponto C igual a r (veja a Figura 10). Então, P pertence à esfera se e somente se $|PC| = r$. Elevando ao quadrado ambos os lados, temos que $|PC|^2 = r^2$ ou

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$ □

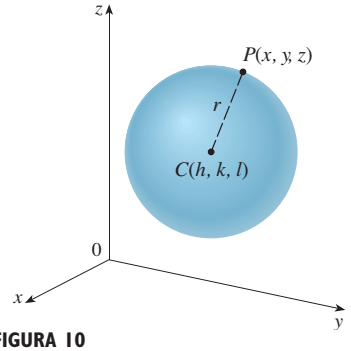


FIGURA 10

Vale a pena memorizar o resultado do Exemplo 4.

EQUAÇÃO DA ESFERA Uma equação da esfera de centro $C(h, k, l)$ e raio r é

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro é a origem O, a equação da esfera é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

EXEMPLO 5 Mostre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ é a equação de uma esfera e encontre seu centro e raio.

SOLUÇÃO Podemos reescrever a equação dada na forma da equação de uma esfera se completarmos os quadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

Comparando essa equação com a forma-padrão, vemos que esta é a equação de uma esfera com centro $(-2, 3, -1)$ e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. □

EXEMPLO 6 Que região de $\mathbb{R}^3$ é representada pelas seguintes inequações?

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \qquad z \leqslant 0$$

SOLUÇÃO As inequações

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

podem ser reescritas como

$$1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2$$

e, portanto, representam os pontos (x, y, z) cuja distância à origem é pelo menos 1 e, no máximo, 2. Mas nos foi dado também que $z \leqslant 0$, estando os pontos, portanto, abaixo do plano xy. Assim, a inequação dada representa a região que está entre as (ou nas) esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e sob (ou sobre) o plano xy. O esboço da região está apresentado na Figura 11. □

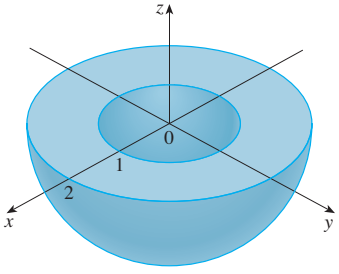


FIGURA 11

12.1 EXERCÍCIOS

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de três unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ e $(1, -1, 2)$ em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xz: $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$ ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano yz?

4. Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos xy, yz e xz? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em $(2, 3, 5)$ e suas faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

5. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

6. (a) O que a equação $x = 4$ representa em $\mathbb{R}^2$? E em $\mathbb{R}^3$? Ilustre com esboços.
(b) O que a equação $y = 3$ representa em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? O que o par de equações $y = 3$ e $z = 5$ representa? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tais que $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

7-8 Encontre os comprimentos dos lados do triângulo PQR. Ele é um triângulo retângulo? É isósceles?

7. $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$

8. $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

9. Determine se os pontos estão em uma mesma reta.
(a) $A(2, 4, 2)$, $B(3, 7, -2)$, $C(1, 3, 3)$
(b) $D(0, -5, 5)$, $E(1, -2, 4)$, $F(3, 4, 2)$

10. Determine a distância entre $(3, 7, -5)$ e cada um dos seguintes.
(a) Plano xy (b) Plano yz

(c) Plano xz (d) Eixo x
(e) Eixo y (f) Eixo z

11. Determine uma equação da esfera com centro em $(0, 1, -1)$ e raio 4. Qual é a intersecção dessa esfera com o plano yz?

12. Determine uma equação da esfera com centro em $(2, -6, 4)$ e raio 5. Descreva sua intersecção com cada um dos planos coordenados.

13. Determine uma equação da esfera que passa pelo ponto $(4, 3, -1)$ e tem centro em $(3, 8, 1)$.

14. Determine uma equação da esfera que passa pela origem e tem centro em $(1, 2, 3)$.

15-18 Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

18. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$

19. (a) Demonstre que o ponto médio do segmento de reta que liga $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

(b) Determine os comprimentos das medianas do triângulo com vértices em $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ e $C(4, 1, 5)$.

20. Encontre uma equação de uma esfera que tenha um diâmetro com extremidades dadas por $(2, 1, 4)$ e $(4, 3, 10)$.

21. Encontre equações das esferas com centro em $(2, -3, 6)$ que toquem (a) o plano xy, (b) o plano yz e (c) o plano xz.

22. Determine uma equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

23-32 Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

23. $y = -4$ **24.** $x = 10$

25. $x > 3$ **26.** $y \geqslant 0$

27. $0 \leqslant z \leqslant 6$ **28.** $z^2 = 1$

29. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$ **30.** $x = z$

31. $x^2 + z^2 \leqslant 9$ **32.** $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

33-36 Escreva inequações para descrever a região dada.

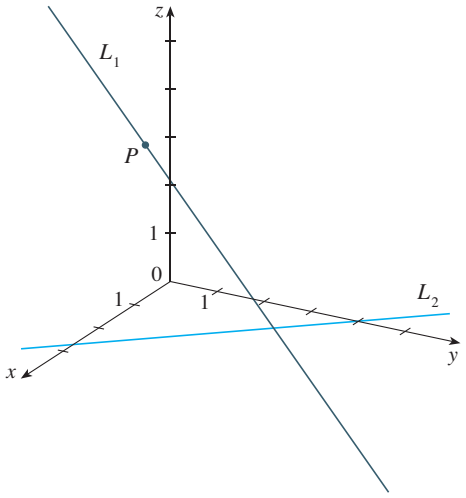
33. A região entre o plano yz e o plano vertical $x = 5$.

34. O cilindro sólido que está sobre ou abaixo do plano $z = 8$ e sobre ou acima do disco no plano xy com centro na origem e raio 2.

35. A região constituída em todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio r e R centradas na origem, onde $r < R$.

36. O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

37. A figura mostra uma reta L_1 no espaço e uma segunda reta L_2, que é a projeção de L_1 no plano xy. (Isto é, os pontos de L_2 estão diretamente abaixo ou acima dos pontos de L_1.)



(a) Determine as coordenadas do ponto P da reta L_1.
(b) Localize no diagrama os pontos A, B e C onde a reta L_1 intercepta os planos xy, yz e xz, respectivamente.

38. Considere os pontos P tais que a distância de P a $A(-1, 5, 3)$ seja o dobro da distância de P a $B(6, 2, -2)$. Mostre que o conjunto desses pontos é uma esfera e determine seu raio e centro.

39. Determine uma equação para o conjunto de pontos equidistantes dos pontos $A(-1, 5, 3)$ e $B(6, 2, -2)$. Descreva o conjunto.

40. Determine o volume do sólido que está contido em ambas as esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

12.2 VETORES

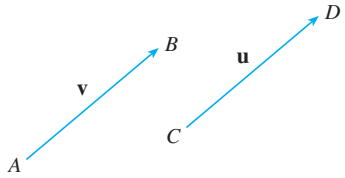


FIGURA 1
Vetores equivalentes

O termo **vetor** é usado por cientistas para indicar quantidades (tais como deslocamento ou velocidade ou força) que têm ao mesmo tempo módulo, direção e sentido. Um vetor é frequentemente representado por uma seta ou segmento de reta orientado. O comprimento da seta representa o módulo do vetor e a seta aponta na direção e sentido do vetor. Denotamos um vetor por uma letra em negrito (**v**) ou colocando uma seta sobre a letra ($\vec{v}$).

Por exemplo, suponha que uma partícula se mova ao longo de um segmento de reta de um ponto A para um ponto B. O **vetor deslocamento** **v**, mostrado na Figura 1, tem um **ponto inicial** A (o início) e um **ponto terminal** B (o fim) e indicamos isso por $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Observe que o vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{CD}$ tem o mesmo tamanho, a mesma direção e sentido que **v**, embora ele esteja em uma posição diferente. Dizemos que **u** e **v** são **equivalentes** (ou **iguais**) e escrevemos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. O **vetor zero**, denotado por **0**, tem comprimento 0. Ele é o único vetor que não tem direção específica.

COMBINANDO VETORES

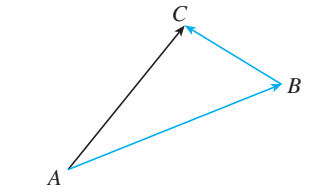


FIGURA 2

Suponha que uma partícula se mova de A para B, assim seu deslocamento é $\overrightarrow{AB}$. Depois, a partícula muda de direção e se move de B para C, com o vetor deslocamento $\overrightarrow{BC}$ como na Figura 2. O efeito combinado desses deslocamentos é que a partícula se moveu de A para C. O vetor deslocamento resultante de $\overrightarrow{AC}$ é chamado soma de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ e escrevemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Em geral, se começamos com os vetores **u** e **v**, primeiro movemos **v** de forma que seu início coincida com o fim de **u** e definimos a soma de **u** e **v** como:

DEFINIÇÃO DA ADIÇÃO DE VETORES Se **u** e **v** são vetores posicionados de maneira que o ponto inicial de **v** é o ponto terminal de **u**, então a **soma** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é o vetor do ponto inicial de **u** ao ponto terminal de **v**.

A definição de adição de vetores é ilustrada na Figura 3. Você pode ver por que essa definição é algumas vezes chamada **Lei do Triângulo**.

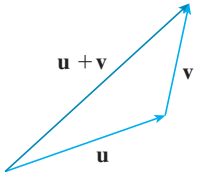


FIGURA 3 Lei do Triângulo

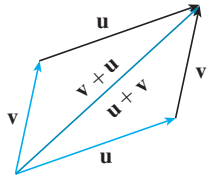


FIGURA 4 Lei do Paralelogramo

Na Figura 4, começamos com os mesmos vetores **u** e **v** que na Figura 3 e desenhamos uma cópia de **v** com o mesmo ponto inicial de **u**. Completando o paralelogramo, vemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Isso nos dá outra maneira de construir a soma: se posicionarmos **u** e **v** de maneira que eles comecem no mesmo ponto, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ estará ao longo da diagonal do paralelogramo com **u** e **v** como lados. (Esta é a chamada **Lei do Paralelogramo**.)

EXEMPLO 1 Desenhe a soma dos vetores **a** e **b** mostrados na Figura 5.



FIGURA 5

SOLUÇÃO Primeiro transladamos **b** e posicionamos seu ponto inicial no ponto final de **a**, tomando cuidado para desenhar uma cópia de **b** que tenha o mesmo comprimento e direção. A seguir, desenhamos o vetor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ [veja Figura 6(a)] começando no ponto inicial de **a** e terminando no ponto final da cópia de **b**.

Alternativamente, podemos posicionar **b** tal que ele comece onde **a** começa e construir $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ pela Lei do Paralelogramo, como na Figura 6(b).

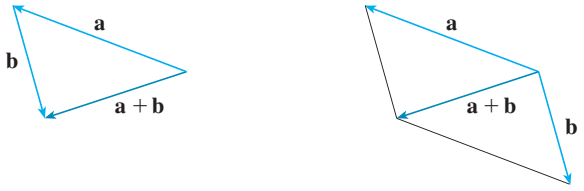


FIGURA 6 (a) (b)

□

É possível multiplicar um vetor por um número real c. (Nesse contexto, chamamos o número real c de **escalar** para distingui-lo de um vetor.) Por exemplo, queremos que $2\mathbf{v}$ seja o mesmo vetor que $\mathbf{v} + \mathbf{v}$, o qual possui a mesma direção e sentido de **v**, mas tem o dobro do comprimento. Em geral, multiplicamos um vetor por um escalar da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR Se c é um escalar e **v**, um vetor, então a **multiplicação por escalar** $c\mathbf{v}$ é o vetor cujo comprimento é $|c|$ vezes o comprimento de **v** e cuja direção e sentido são os mesmos de **v** se $c > 0$ e que tem a mesma direção e sentido oposto a **v** se $c < 0$. Se $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

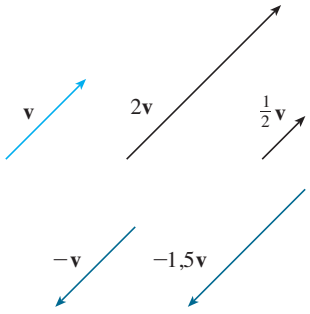


FIGURA 7
Múltiplos por escalares de **v**

Essa definição é ilustrada na Figura 7. Vemos que os números reais funcionam como fatores de escala aqui; por causa disso nós os chamamos por escalares. Observe que dois vetores não nulos são **paralelos** se eles são múltiplos por escalares um do outro. Em particular, o vetor $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ tem o mesmo comprimento que **v**, mas aponta em sentido oposto. Nós o chamamos de **oposto** de **v**. Pela diferença $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de dois vetores, queremos dizer

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

Logo, podemos construir $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ desenhando primeiro o oposto de **v**, $-\mathbf{v}$, e então adicionando a ele o vetor **u**, usando a Lei do Paralelogramo como na Figura 8(a). Alternativamente, como $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$, o vetor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, quando adicionado a **v**, nos dá **u**. Assim, podemos construir $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ como na Figura 8(b), usando a Lei do Triângulo.

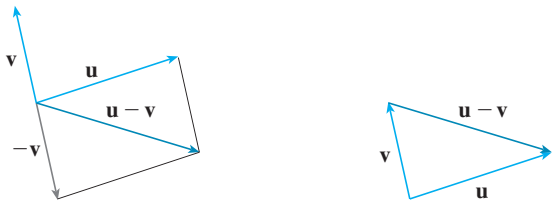


FIGURA 8
Desenhando $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

(a) (b)

EXEMPLO 2 Se **a** e **b** são os vetores mostrados na Figura 9, desenhe $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO Primeiro, desenhamos o vetor $-2\mathbf{b}$ apontando no sentido oposto a **b** e com o dobro de seu tamanho. Nós o posicionamos com seu ponto inicial no ponto terminal de **a** e então usamos a Lei do Triângulo para desenhar $\mathbf{a} + (-2\mathbf{b})$, como na Figura 10.



FIGURA 9

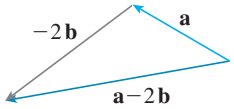
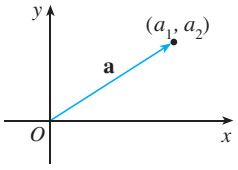
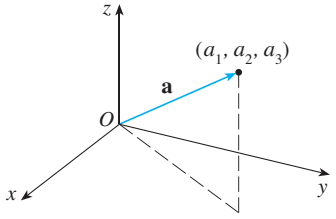


FIGURA 10 □

COMPONENTES



$\mathbf{a}=\langle a_1, a_2\rangle$



$\mathbf{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$

FIGURA 11

Para alguns propósitos é melhor introduzir um sistema de coordenadas e tratar os vetores algebricamente. Se posicionarmos o ponto inicial de um vetor **a** na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o ponto terminal de **a** tem coordenadas da forma (a_1, a_2) ou (a_1, a_2, a_3), dependendo se nosso sistema de coordenadas for em duas ou três dimensões (veja a Figura 11). Essas coordenadas são denominadas **componentes** de **a** e escrevemos

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

Usamos a notação $\langle a_1, a_2\rangle$ para o par ordenado que se refere a um vetor para não confundir com o par ordenado no (a_1, a_2) que corresponde a um ponto no plano.

Por exemplo, os vetores apresentados na Figura 12 são todos equivalentes ao vetor $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2\rangle$, cujo ponto terminal é $P(3, 2)$. O que eles têm em comum é que o ponto terminal é alcançado a partir do ponto inicial por um deslocamento de três unidades para a direita e duas para cima. Podemos pensar em todos esses vetores geométricos como **representações** do vetor algébrico $\mathbf{a} = \langle 3, 2\rangle$. A representação particular $\overrightarrow{OP}$ da origem ao ponto $P(3, 2)$ é chamada **vetor posição** do ponto P.

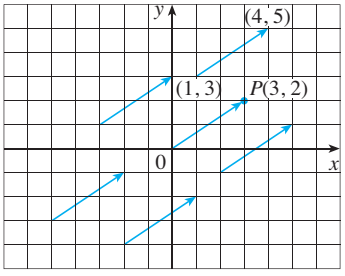


FIGURA 12
Representações do vetor $\mathbf{a} = \langle 3, 2\rangle$

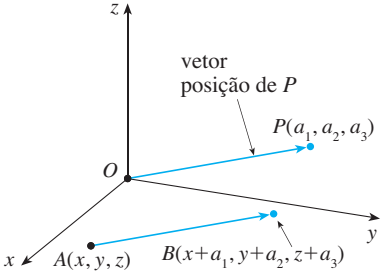


FIGURA 13
Representações de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$

Em três dimensões, o vetor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ é o **vetor posição** do ponto $P(a_1, a_2, a_3)$. (Veja a Figura 13.) Vamos considerar qualquer outra representação $\overrightarrow{AB}$ de **a**, onde o ponto inicial é $A(x_1, y_1, z_1)$ e o ponto final é $B(x_2, y_2, z_2)$. Então, temos que $x_1 + a_1 = x_2$, $y_1 + a_2 = y_2$ e $z_1 + a_3 = z_2$ e assim $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, e $a_3 = z_2 - z_1$. Portanto, temos o seguinte resultado.

1 Dados os pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, o vetor **a** com representação $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

EXEMPLO 3 Encontre o vetor representado pelo segmento de reta orientado com ponto inicial $A(2, -3, 4)$ e ponto final $B(-2, 1, 1)$.

SOLUÇÃO Por (1), o vetor correspondente a $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4\rangle = \langle -4, 4, -3\rangle$$ □

O **módulo** ou **comprimento** ou **norma** do vetor $\mathbf{v}$ é o comprimento de qualquer uma de suas representações e é denotado pelo símbolo $|\mathbf{v}|$ ou $\|\mathbf{v}\|$. Ao usar a fórmula da distância para calcular o comprimento de um segmento OP, obtemos as seguintes fórmulas.

O comprimento de um vetor bidimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

O comprimento de um vetor tridimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

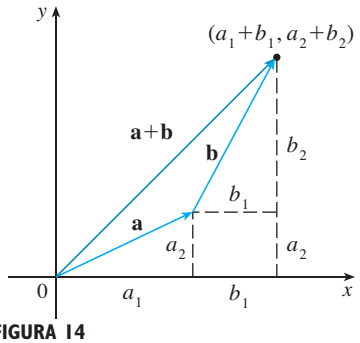


FIGURA 14

Como somamos os vetores algebricamente? A Figura 14 mostra que, se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então a soma é $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, pelo menos para o caso em que as componentes são positivas. Em outras palavras, *para somar vetores algebricamente, somamos suas componentes*. Analogamente, *para subtrair vetores, subtraímos as componentes*. Dos triângulos semelhantes na Figura 15, vemos que as componentes de $c\mathbf{a}$ são ca_1 e ca_2. Assim, *para multiplicar um vetor por um escalar, multiplicamos cada componente pelo escalar*.

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

Analogamente, para os vetores tridimensionais,

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

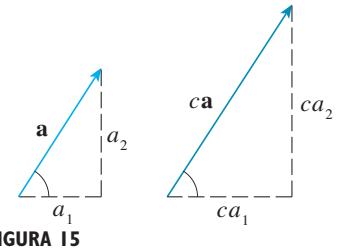


FIGURA 15

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, determine $|\mathbf{a}|$ e os vetores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$ e $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$$
$$= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$$
$$= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle$$

$$2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle$$
$$= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle$$ □

Denotaremos por V_2 o conjunto de todos os vetores bidimensionais e por V_3 o conjunto de todos os vetores tridimensionais. De forma mais geral, precisaremos, adiante, considerar o conjunto V_n dos vetores de dimensão n. Um vetor de dimensão n é uma n-upla ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais chamados componentes de $\mathbf{a}$. Adição e multiplicação por escalar são definidas em termos das componentes, como nos casos $n = 2$ e $n = 3$.

■ Vetores em n dimensões são usados para listar várias quantidades em um modo organizado. Por exemplo, as componentes do vetor de dimensão 6

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$$

podem representar os preços de seis itens diferentes necessários na fabricação de um artigo particular. Vetores de dimensão quatro $\langle x, y, z, t \rangle$ são usados em teoria da relatividade, onde as primeiras três componentes especificam a posição no espaço e a quarta representa o tempo.

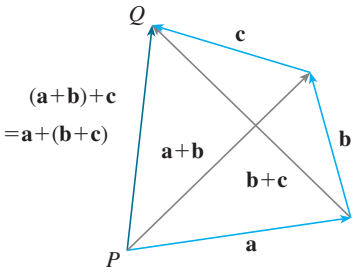


FIGURA 16

PROPRIEDADE DOS VETORES Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores em V_n e c e d são escalares, então

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
6. $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Essas oito propriedades dos vetores podem ser facilmente verificadas tanto geométrica quanto algebricamente. Por exemplo, a Propriedade 1 pode ser vista na Figura 4 (equivale à Lei do Paralelogramo) ou como a seguir no caso $n = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}\end{aligned}$$

Podemos ver que a Propriedade 2 (propriedade associativa) é verdadeira olhando a Figura 16 e aplicando a Lei do Triângulo diversas vezes. O vetor $\overrightarrow{PQ}$ é obtido primeiro construindo-se $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e então somando-se $\mathbf{c}$ ou somando-se $\mathbf{a}$ ao vetor $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Três vetores em V_3 têm papel especial. Sejam

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Estes vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, e $\mathbf{k}$ são chamados **vetores da base canônica**. Eles têm comprimento 1 e direção e sentido dos eixos x, y, e z positivos. Da mesma forma, em duas dimensões, definimos $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. (Veja a Figura 17.)

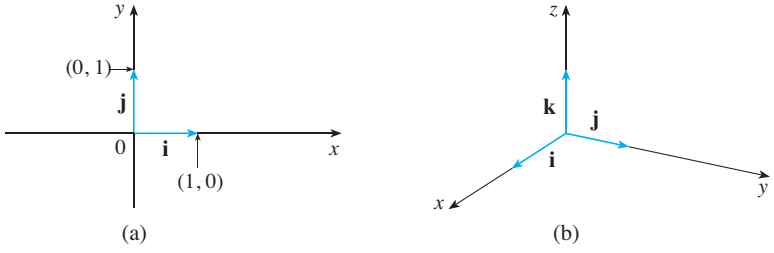


FIGURA 17
Vetores da base canônica em V_2 e V_3

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, então podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle \\ &= a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle\end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

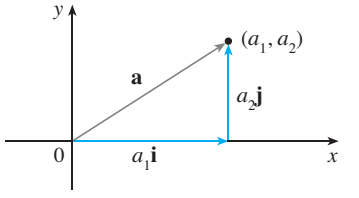
Assim, qualquer vetor em V_3 pode ser expresso em termos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Por exemplo,

$$\langle 1, -2, 6 \rangle = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

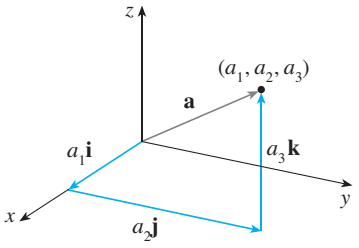
Da mesma forma, em duas dimensões, podemos escrever

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

Veja a Figura 18 para a interpretação geométrica das Equações 3 e 2 e compare com a Figura 17.



(a) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

FIGURA 18

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, escreva o vetor $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ em função de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 1, 2, 5, 6 e 7 dos vetores, temos

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} &= 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}) \\ &= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k} \end{aligned}$$ □

Um **vetor unitário** ou **versor** é um vetor cujo módulo é 1. Os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são exemplos de vetores unitários ou versores. Em geral, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então o vetor unitário que tem mesma direção e mesmo sentido de $\mathbf{a}$, chamado versor de $\mathbf{a}$, é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \qquad (4)$$

Para verificar isso, seja $c = 1/|\mathbf{a}|$. Então $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ e c é um escalar positivo, de modo que $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\mathbf{a}$. Além disso,

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,|\mathbf{a}| = 1$$

EXEMPLO 6 Determine o versor do vetor $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O vetor dado tem módulo

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

portanto, pela Equação 4, seu versor é

$$\tfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$$ □

APLICAÇÕES

Vetores são úteis em muitos aspectos da física e da engenharia. No Capítulo 13 veremos como eles descrevem a velocidade e a aceleração de objetos movendo-se no espaço. Aqui olharemos para as forças. Uma força é representada por um vetor porque tem módulo (medido em libras ou newtons), direção e sentido. Se várias forças estão agindo em um objeto, a **força resultante** experimentada pelo objeto é o vetor soma dessas forças.

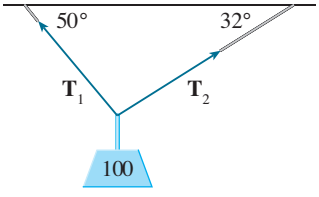


FIGURA 19

EXEMPLO 7 Uma carga com massa 100 kg está pendurada em dois cabos, como mostrado na Figura 19. Determine as tensões (forças) $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em ambos os fios e seus módulos.

SOLUÇÃO Primeiro vamos exprimir $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em função de suas componentes horizontal e vertical. Da Figura 20, vemos que

$$\mathbf{T}_1 = -|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ\,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ\,\mathbf{j} \qquad (5)$$

$$\mathbf{T}_2 = |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ\,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ\,\mathbf{j}. \qquad (6)$$

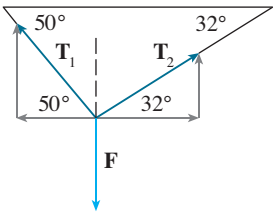


FIGURA 20

A força da gravidade agindo na carga é $\mathbf{F} = -100(9{,}8)\,\mathbf{j} = -980\,\mathbf{j}$. A resultante $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ das tensões contrabalançam $\mathbf{F}$ de modo que devemos ter

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = -\mathbf{F} = 980\mathbf{j}$$

Então,

$$(-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ)\,\mathbf{i} + (|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ)\mathbf{j} = 980\mathbf{j}$$

Igualando as componentes, obtemos

$$-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ = 0$$

$$|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ = 980$$

Isolando $|\mathbf{T}_2|$ na primeira equação e substituindo na segunda, temos

$$|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ}\operatorname{sen} 32^\circ = 980$$

Ou seja, os módulos das tensões são

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{980}{\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{tg} 32^\circ \cos 50^\circ} \approx 839 \text{ N}$$

e

$$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ} \approx 636 \text{ N}$$

Substituindo em (5) e (6), obtemos os vetores tensão

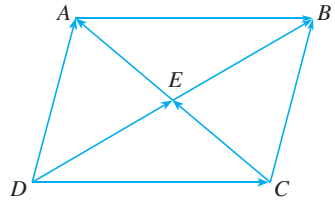
$$\mathbf{T}_1 \approx -539\,\mathbf{i} + 643\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{T}_2 \approx 539\,\mathbf{i} + 337\,\mathbf{j}$$ □

12.2 EXERCÍCIOS

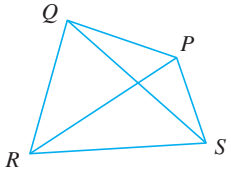
1. Quais das seguintes grandezas são vetoriais ou escalares? Explique.
(a) O custo de um bilhete de cinema
(b) A correnteza em um rio
(c) A trajetória inicial do voo entre Houston e Dallas
(d) A população mundial

2. Qual a relação existente entre o ponto $(4, 7)$ e o vetor $\langle 4, 7\rangle$? Faça um esboço ilustrativo.

3. Indique os vetores iguais no paralelogramo mostrado.



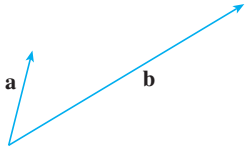
4. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.
(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



5. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$



6. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
(c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$
(e) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$



7-12 Determine o vetor $\mathbf{a}$ com representação dada pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Desenhe $\overrightarrow{AB}$ e o equivalente com início na origem.

7. $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ **8.** $A(-2, -2)$, $B(5, 3)$

9. $A(-1, 3)$, $B(2, 2)$ **10.** $A(2, 1)$, $B(0, 6)$

11. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **12.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

13-16 Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

13. $\langle -1, 4\rangle$, $\langle 6, -2\rangle$ **14.** $\langle -2, -1\rangle$, $\langle 5, 7\rangle$

15. $\langle 0, 1, 2\rangle$, $\langle 0, 0, -3\rangle$ **16.** $\langle -1, 0, 2\rangle$, $\langle 0, 4, 0\rangle$

17-20 Determine $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

17. $\mathbf{a} = \langle 5, -12\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -6\rangle$

18. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

19. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

21-23 Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.

21. $-3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ **22.** $\langle -4, 2, 4\rangle$

23. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

24. Ache um vetor que possui a mesma direção e o mesmo sentido que $\langle -2, 4, 2\rangle$, mas tem comprimento 6.

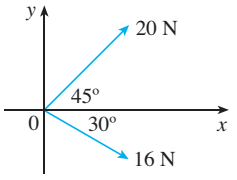
25. Se $\mathbf{v}$ está no primeiro quadrante e faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x positivo e $|\mathbf{v}| = 4$, ache as componentes de $\mathbf{v}$.

26. Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38° com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.

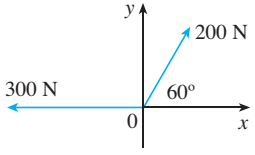
27. Um *quarterback* joga uma bola de futebol americano com ângulo de elevação 40° e velocidade escalar 20 m/s. Encontre as componentes horizontal e vertical do vetor velocidade.

28-29 Encontre o módulo da força resultante e o ângulo que ela faz com o eixo x positivo.

28.



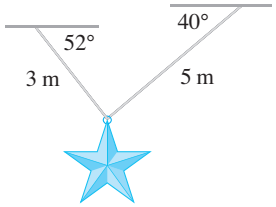
29.



30. Velocidades têm módulo, direção e sentido, sendo portanto vetores. O módulo de uma velocidade é chamado *velocidade escalar*. Suponha que esteja ventando na direção N45°W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção da qual está ventando está 45° a oeste da direção norte.) Um piloto está virando seu avião na direção N60°E a uma velocidade relativa (velocidade em ar parado) de 250 km/h. O *curso verdadeiro* ou *trajetória* do avião é a direção da resultante dos vetores velocidades do avião e do vento. A *velocidade escalar em relação ao solo* do avião é o módulo da resultante. Determine o curso real e a velocidade escalar em relação ao solo do avião.

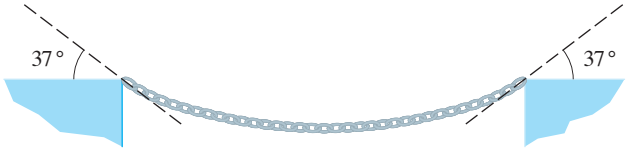
31. Uma mulher anda em direção ao oeste no tombadilho de um navio a 5 km/h. O navio está se movendo em direção ao norte com velocidade escalar de 35 km/h. Determine a velocidade escalar e a direção da mulher em relação à superfície da água.

32. Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas à decoração natalina suspensa sobre uma praça. A decoração tem massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52° e 40° com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e o módulo de cada tensão.



33. Um varal de roupas é estendido entre dois postes, 8 m distantes um do outro. O fio do varal está bastante esticado, de forma a ser considerado horizontal. Quando uma camisa molhada com massa de 0,8 kg é pendurada no meio do varal, esse ponto central é deslocado para baixo em 8 cm. Determine a tensão em cada metade do varal.

34. A tensão $\mathbf{T}$ em cada extremidade da corrente tem um módulo de 25 N. Qual o peso da corrente?



35. Encontre os vetores unitários que são paralelos à reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$.

36. (a) Encontre os vetores unitários que são paralelos à reta tangente à curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/6, 1)$.
(b) Encontre os vetores unitários que são perpendiculares à reta tangente.
(c) Esboce a curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ e os vetores nas partes (a) e (b), todos começando em $(\pi/6, 1)$.

37. Se A, B e C são vértices de um triângulo, determine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

38. Seja C o ponto no segmento de reta AB que está duas vezes mais longe de B do que de A. Se $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, mostre que $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

39. (a) Desenhe os vetores $\mathbf{a} = \langle 3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1\rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 7, 1\rangle$.
(b) Mostre, por um esboço, que existem escalares s e t tais que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.
(c) Use o esboço para estimar os valores de s e t.
(d) Determine os valores exatos de s e t.

40. Suponha que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam vetores não nulos, não paralelos e que $\mathbf{c}$ seja um vetor pertencente ao plano determinado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Dê um argumento geométrico para mostrar quer $\mathbf{c}$ pode ser escrito como $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para uma escolha conveniente de s e t. Depois dê argumentos usando componentes.

41. Se $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tal que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 1$.

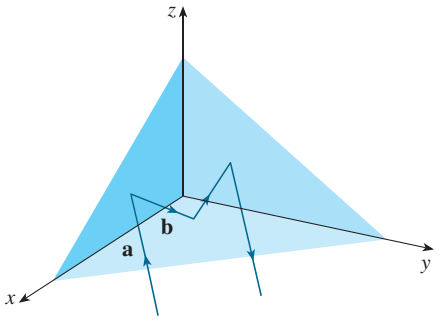
42. Se $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y) tal que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = k$, onde $k > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

43. A Figura 16 fornece uma demonstração geométrica da Propriedade 2 dos vetores. Use as componentes para dar uma demonstração algébrica desse fato no caso $n = 2$.

44. Demonstre a Propriedade 5 dos vetores algebricamente para $n = 3$. Use então a semelhança de triângulos para fazer uma demonstração geométrica.

45. Utilize vetores para demonstrar que uma reta unindo os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

46. Suponha que os três planos coordenados sejam todos espelhados e que um raio de luz dado pelo vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ atinja primeiro o plano xz, como mostrado na figura. Use o fato de os ângulos de incidência e de reflexão serem iguais para mostrar que a direção do raio refletido é dada por $\mathbf{b} = \langle a_1, -a_2, a_3 \rangle$. Deduza que, após ser refletido em todos os três espelhos perpendiculares, o raio resultante é paralelo ao raio inicial. (Cientistas norte-americanos usaram esse princípio, juntamente com um feixe de laser e um conjunto de espelhos em cantoneira na Lua, para calcular de modo preciso a distância da Terra à Lua.)



12.3 O PRODUTO ESCALAR

Até aqui aprendemos a somar os vetores e multiplicá-los por um escalar. A seguinte questão surge: é possível multiplicar dois vetores de modo que o valor resultante seja de alguma utilidade? Um desses produtos é o produto escalar, cuja definição vem a seguir. O outro é o produto vetorial, que será discutido na próxima seção.

1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto escalar** de **a** e **b** é o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Assim, para achar o produto escalar de **a** por **b** multiplicamos as componentes correspondentes e somamos. O resultado não é um vetor. É um número real, isto é, um escalar, por isso o nome **produto escalar**. O **produto escalar** também é conhecido como **produto interno**. Apesar de a definição ter sido dada para os vetores tridimensionais, o produto escalar para os vetores bidimensionais é definido de forma análoga:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

EXEMPLO 1

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \left\langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \right\rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$ □

O produto escalar obedece a muitas das regras que valem para o produto de números reais. Esse fato é apresentado no seguinte teorema.

2 PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR Se **a**, **b** e **c** são vetores em V_3 e c é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Essas propriedades são facilmente demonstradas usando a Definição 1. Por exemplo, vamos fazer a demonstração das Propriedades 1 e 3:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}\end{aligned}$$

As demonstrações restantes ficam como exercício. □

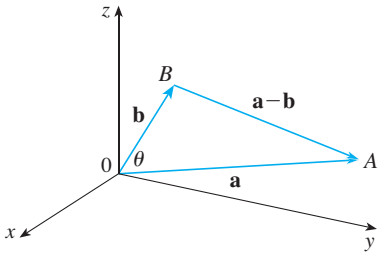


FIGURA 1

O produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ tem uma interpretação geométrica em termos do **ângulo θ entre a e b**, definido como o ângulo entre os representantes de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, ambos com ponto inicial na origem, onde $0 \leq \theta \leq \pi$. Em outras palavras, θ é o ângulo entre os segmentos de reta $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ da Figura 1. Observe que, se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores paralelos, então $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

No teorema a seguir, a fórmula dada é utilizada por físicos como *definição* do produto escalar.

3 TEOREMA Se θ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

DEMONSTRAÇÃO Se aplicarmos a Lei dos Cossenos ao triângulo OAB da Figura 1, obteremos

4
$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\,|OB| \cos\theta$$

(Observe que a Lei dos Cossenos ainda se aplica nos casos-limite quando $\theta = 0$ ou π, ou $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.) Mas $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ e $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, de forma que a Equação 4 se torna

5
$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

Usando as Propriedades 1, 2 e 3 do produto escalar, podemos reescrever o lado esquerdo dessa equação como:

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

Portanto, a Equação 5 fornece

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

Então,
$$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

ou
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$ □

EXEMPLO 2 Se os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm módulos 4 e 6, e o ângulo entre eles é $\pi/3$, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUÇÃO Usando o Teorema 3, temos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\pi/3) = 4 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 12$$ □

A fórmula do Teorema 3 nos permite ainda determinar o ângulo entre dois vetores.

6 COROLÁRIO Se θ é o ângulo entre dois vetores não nulos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

EXEMPLO 3 Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2\rangle$.

SOLUÇÃO Como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

e como

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

temos, do Corolário 6,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Assim, o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1{,}46 \qquad (\text{ou } 84^\circ)$$ □

Dois vetores não nulos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são **perpendiculares** ou **ortogonais** se o ângulo entre eles é $\theta = \pi/2$. O Teorema 3 nos fornece

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\pi/2) = 0$$

e reciprocamente se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, então $\cos\theta = 0$, o que implica que $\theta = \pi/2$. O vetor nulo $\mathbf{0}$ é considerado perpendicular a todos os vetores. Temos, portanto, um método para determinar se dois vetores são ortogonais.

7 $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ortogonais se e somente se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

EXEMPLO 4 Mostre que $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO Como

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

esses vetores são perpendiculares por (7). □

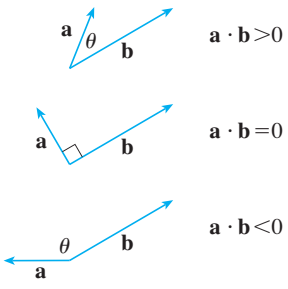


FIGURA 2

Como $\cos\theta > 0$ se $0 \leqslant \theta < \pi/2$ e $\cos\theta < 0$ se $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, vemos que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ é positivo se $\theta < \pi/2$ e negativo se $\theta > \pi/2$. O produto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ nos fornece uma medida de quão próxima é a direção para onde os dois vetores apontam. O produto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ é positivo se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ apontem para direções e sentidos próximos, 0 se são perpendiculares, e negativo se apontam para direções próximas com sentido oposto (veja a Figura 2). No caso extremo em que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm mesma direção e sentido, temos $\theta = 0$, portanto $\cos\theta = 1$ e

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm a mesma direção, mas sentidos opostos, então $\theta = \pi$ e assim $\cos\theta = -1$ e $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.

ÂNGULOS DIRETORES E COSSENOS DIRETORES

Os **ângulos diretores** de um vetor não nulo $\mathbf{a}$ são os ângulos α, β e γ (no intervalo $[0, \pi]$) que $\mathbf{a}$ faz com os eixos coordenados positivos x, y e z (veja a Figura 3).

Os cossenos desses ângulos diretores, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$, são chamados **cossenos diretores** do vetor $\mathbf{a}$. Usando o Corolário 6 e substituindo $\mathbf{b}$ por $\mathbf{i}$, obtemos

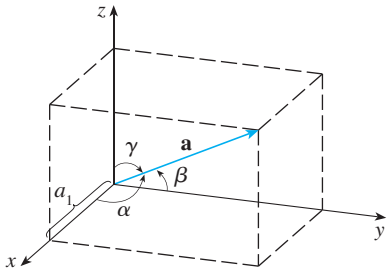


FIGURA 3

8
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

(Isso pode ser visto diretamente na Figura 3.)

Da mesma forma, temos

9
$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Elevando as expressões nas Equações 8 e 9 ao quadrado e somando, obtemos

10
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Podemos ainda usar as Equações 8 e 9 para escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle |\mathbf{a}|\cos\alpha, |\mathbf{a}|\cos\beta, |\mathbf{a}|\cos\gamma\rangle \\ &= |\mathbf{a}|\langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle\end{aligned}$$

Portanto,

11
$$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$$

que diz que os cossenos diretores de **a** são as componentes do versor de **a**.

EXEMPLO 5 Determine os ângulos diretores do vetor $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$.

SOLUÇÃO Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, as Equações 8 e 9 fornecem

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

e então

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74^\circ \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58^\circ \qquad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ \quad \square$$

PROJEÇÕES

A Figura 4 mostra as representações $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ de dois vetores **a** e **b** com mesma origem P. Se S é o pé da perpendicular do ponto R à reta que contém $\overrightarrow{PQ}$, então o vetor com representação $\overrightarrow{PS}$ é chamado **vetor projeção** de **b** sobre **a** e é denotado por $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. (Você pode pensar nele como uma sombra de **b**.)

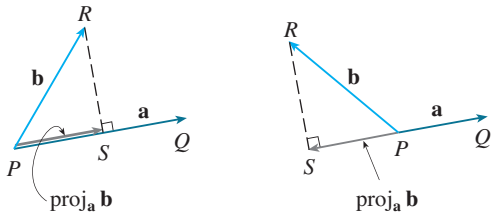


FIGURA 4
Projeção de vetores

A **projeção escalar** de **b** sobre **a** (também chamada **componente de b ao longo de a**) é definida como o módulo com sinal do vetor projeção, cujo valor é dado pelo número $|\mathbf{b}|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre **a** e **b**. (Veja a Figura 5.) Denotaremos isto por $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. Observe que esse número é negativo se $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$.

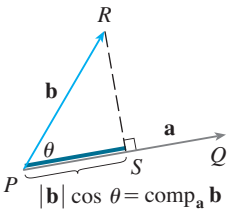


FIGURA 5

A equação

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\cos\theta)$$

mostra que o produto escalar de **a** por **b** pode ser interpretado como o módulo de **a** multiplicado pela projeção escalar de **b** sobre **a**. Como

$$|\mathbf{b}| \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b}$$

a componente de **b** ao longo de **a** pode ser calculada tomando-se o produto escalar de **b** pelo versor de **a**. Resumindo, temos:

Projeção escalar de **b** sobre **a**: $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

Vetor projeção de **b** sobre **a**: $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$

Observe que o vetor projeção é a projeção escalar vezes o versor de **a**.

EXEMPLO 6 Determine a projeção escalar de $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2\rangle$ sobre $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$.

SOLUÇÃO Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, a projeção escalar de **b** sobre **a** é

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

O vetor projeção é esse escalar multiplicado pelo versor de **a**:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right\rangle$$ □

Um uso de projeções ocorre em física, no cálculo do trabalho. Na Seção 6.4, no Volume I, definimos o trabalho exercido por uma força constante F movendo um objeto por uma distância d como $W = Fd$, mas isso só se aplicava quando a força era exercida ao longo da reta de deslocamento do objeto. Suponha agora que a força constante seja um vetor $\mathbf{F} = \overrightarrow{PR}$ com direção diferente da reta de deslocamento do objeto, como indicado na Figura 6. Se a força move o objeto de P a Q, o **vetor deslocamento** é $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$. O **trabalho** realizado é definido como o produto da componente da força ao longo de **D** pela distância percorrida:

$$W = (|\mathbf{F}| \cos\theta)|\mathbf{D}|$$

Do Teorema 3, temos

12 $$W = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

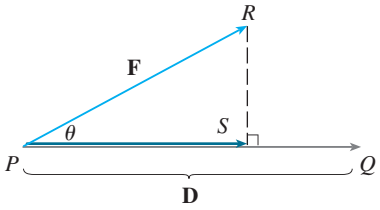


FIGURA 6

Assim, o trabalho realizado por uma força constante **F** é o produto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde **D** é o vetor deslocamento.

EXEMPLO 7 Um carrinho é puxado uma distância de 100 m ao longo de um caminho horizontal por uma força constante de 70 N. A alça do carrinho é mantida a um ângulo de 35° acima da horizontal. Encontre o trabalho feito pela força.

SOLUÇÃO Se **F** e **D** são os vetores força e deslocamento, respectivamente, como mostrado na Figura 7, então o trabalho realizado é

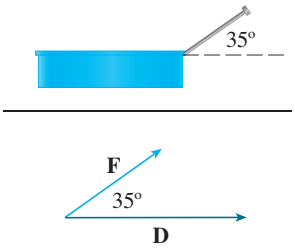


FIGURA 7

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}| \cos 35^\circ$$
$$= (70)(100) \cos 35^\circ \approx 5\,734 \text{ N·m} = 5\,734 \text{ J} \quad \square$$

EXEMPLO 8 Uma força dada pelo vetor $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ move uma partícula do ponto $P(2, 1, 0)$ para o ponto $Q(4, 6, 2)$. Determine o trabalho realizado.

SOLUÇÃO O vetor deslocamento é $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2 \rangle$; portanto, utilizando a Equação 12, o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 3, 4, 5 \rangle \cdot \langle 2, 5, 2 \rangle$$
$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

Se a unidade de comprimento é o metro e a força é medida em newtons, o trabalho realizado é de 36 joules. $\square$

12.3 EXERCÍCIOS

1. Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explique.

(a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas sejam respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e tal que o ângulo entre eles seja $\pi/4$.

3-10 Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

3. $\mathbf{a} = \langle -2, \frac{1}{3} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 12 \rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -8, -3 \rangle$

5. $\mathbf{a} = \langle 5, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 10 \rangle$

6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$

7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

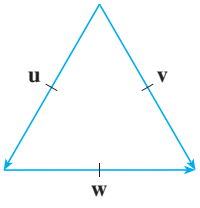
8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 5$, e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $2\pi/3$.

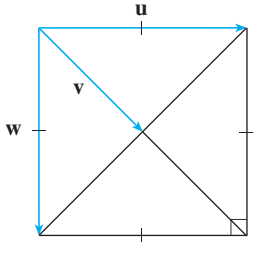
10. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é 45°.

11-12 Se $\mathbf{u}$ é um vetor unitário, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
(b) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

14. Um vendedor vende a hambúrgueres, b cachorros-quentes e c refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 o hambúrguer, \$ 1,50 o cachorro-quente e \$ 1 o refrigerante. Se $\mathbf{A} = \langle a, b, c \rangle$ e $\mathbf{P} = \langle 2, 1{,}5, 1 \rangle$, qual o significado do produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

15-20 Determine o ângulo entre os vetores. (Encontre inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até a precisão de um grau.)

15. $\mathbf{a} = \langle -8, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle \sqrt{7}, 3 \rangle$

16. $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 5 \rangle$

17. $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4, 3 \rangle$

18. $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 0 \rangle$

19. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

21-22 Determine, aproximando o valor até a precisão de um grau, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.

21. $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$

22. $D(0, 1, 1)$, $E(-2, 4, 3)$, $F(1, 2, -1)$

23-24 Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$
(c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$
(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

25. Use vetores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.

26. Para que valores de b os vetores $\langle -6, b, 2 \rangle$ e $\langle b, b^2, b \rangle$ são ortogonais?

27. Determine um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ a e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Ache dois vetores unitários que façam um ângulo de 60° com $\mathbf{v} = \langle 3, 4\rangle$.

29-33 Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor com precisão de um grau.)

29. $\langle 3, 4, 5\rangle$ **30.** $\langle 1, -2, -1\rangle$

31. $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ **32.** $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

33. $\langle c, c, c\rangle$, onde $c > 0$

34. Se um vetor tem ângulos diretores $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/3$, determine o terceiro ângulo diretor γ.

35-40 Determine o vetor projeção e a projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.

35. $\mathbf{a} = \langle 3, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0\rangle$

36. $\mathbf{a} = \langle 1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 1\rangle$

37. $\mathbf{a} = \langle 3, 6, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 3\rangle$

38. $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -1, 4\rangle$

39. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

40. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Mostre que o vetor $\text{perp}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$. (Esse vetor é chamado **projeção ortogonal** de $\mathbf{b}$.)

42. Para os vetores do Exercício 36, determine $\text{perp}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ e ilustre esboçando os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\text{proj}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ e $\text{perp}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$.

43. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1\rangle$, determine um vetor $\mathbf{b}$ tal que $\text{comp}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} = 2$.

44. Suponha que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam vetores não nulos.
(a) Sob quais circunstâncias $\text{comp}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \text{comp}_\mathbf{b}\,\mathbf{a}$?
(b) Sob quais circunstâncias $\text{proj}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \text{proj}_\mathbf{b}\,\mathbf{a}$?

45. Encontre o trabalho feito por uma força $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ que move um objeto do ponto $(0, 10, 8)$ para o ponto $(6, 12, 20)$ ao longo de uma reta. A distância é medida em metros e a força em newtons.

46. Um caminhão-guincho puxa um carro quebrado por uma estrada. A corrente faz um ângulo de 30° com a estrada e a tensão na corrente é 1 500 N. Quanto trabalho é feito pelo caminhão ao puxar o carro 1 km?

47. Uma mulher exerce uma força horizontal de 140 N em um engradado quando ela o empurra para subir uma rampa de 4 m de comprimento e com um ângulo de inclinação de 20° acima da horizontal. Calcule o trabalho realizado sobre a caixa.

48. Encontre o trabalho feito por uma força de 100 N agindo na direção N50°W ao mover um objeto 5 metros para oeste.

49. Use projeção escalar para mostrar que a distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ à reta $ax + by + c = 0$ é

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

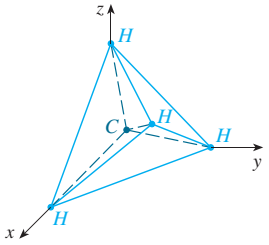
Use essa fórmula para determinar a distância do ponto $(-2, 3)$ à reta $3x - 4y + 5 = 0$.

50. Se $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, mostre que a equação vetorial $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa uma esfera e determina seu centro e raio.

51. Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

52. Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces.

53. Uma molécula de metano, CH_4, é estruturada com os quatro átomos de hidrogênio nos vértices de um tetraedro regular e o carbono no centro. O *ângulo de vínculo* é o ângulo formado pela ligação H–C–H; é o ângulo entre as retas que ligam o carbono a dois átomos de hidrogênio. Mostre que esse ângulo de vínculo é de aproximadamente 109,5°. [*Sugestão*: Tome os vértices do tetraedro em $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$, como exposto na figura. Mostre então que o centro é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.]



54. Se $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores não nulos, mostre que $\mathbf{c}$ é a bissetriz do ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

55. Demonstre as Propriedades 2, 4 e 5 do produto escalar (Teorema 2).

56. Suponha que todos os lados de um quadrilátero tenham o mesmo comprimento e que os lados opostos sejam paralelos. Use vetores para demonstrar que as diagonais são perpendiculares.

57. Utilize o Teorema 3 para demonstrar a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

58. A *Desigualdade Triangular* para vetores é

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(a) Dê uma interpretação geométrica para a Desigualdade Triangular.
(b) Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz do Exercício 57 para demonstrar a Desigualdade Triangular. [*Sugestão*: Use o fato de que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e utilize a Propriedade 3 do produto escalar.]

59. A Lei do Paralelogramo afirma que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\,|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(a) Dê uma interpretação geométrica da Lei do Paralelogramo.
(b) Demonstre a Lei do Paralelogramo. (Veja a sugestão do Exercício 58.)

60. Mostre que se $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ forem ortogonais, então os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devem ter o mesmo comprimento.

12.4 O PRODUTO VETORIAL

O **produto vetorial** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, ao contrário do produto escalar, é um vetor, por isso seu nome. Observe que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ só é definido se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ forem vetores *tridimensionais*.

1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto vetorial** de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

Pode parecer um modo estranho de definir um produto. A razão de tal definição é que o produto vetorial assim definido tem muitas propriedades úteis, como veremos adiante. Em particular, veremos que o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ quanto a $\mathbf{b}$.

Para ajudar a memorização, vamos usar a notação de determinantes. Um **determinante de ordem 2** é definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

Um **determinante de ordem 3** pode ser definido em termos dos determinantes de segunda ordem como:

$$\boxed{2} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que cada termo do lado direito da Equação 2 envolve um número a_i da primeira linha do determinante, e a_i é multiplicado por um determinante de segunda ordem obtido do determinante do lado esquerdo pela remoção da linha e da coluna em que aparece o elemento a_i. Observe também que o sinal de menos aparece no segundo termo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1(0 - 4) - 2(6 + 5) + (-1)(12 - 0) = -38 \end{aligned}$$

Se reescrevermos a Definição 1 utilizando determinantes de segunda ordem e a base canônica de vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, veremos que o produto vetorial do vetor $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ por $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ é

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Em vista da semelhança entre as Equações 2 e 3, escrevemos

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Apesar de a primeira linha do determinante simbólico da Equação 4 ser constituída de vetores, se fizermos a expansão como se fosse um determinante comum usando a regra dada pela Equação 2, obteremos a Equação 3. A fórmula simbólica dada pela Equação 4 é provavelmente o modo mais fácil de lembrarmos e calcularmos o produto vetorial.

EXEMPLO 1 Se $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5\rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-15 - 28)\mathbf{i} - (-5 - 8)\mathbf{j} + (7 - 6)\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

□

EXEMPLO 2 Mostre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para o vetor $\mathbf{a}$ em V_3.

SOLUÇÃO Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2a_3 - a_3a_2)\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

Uma das propriedades mais importantes do produto vetorial é dada pelo seguinte teorema.

5 TEOREMA O vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

DEMONSTRAÇÃO Para mostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$, vamos efetuar seu produto escalar com $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

De forma semelhante, mostramos que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Portanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ quanto a $\mathbf{b}$. □

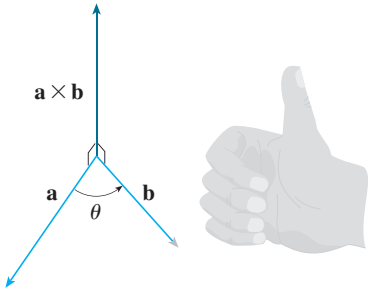


FIGURA 1

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são representados por segmentos de retas orientados com mesma origem (como na Figura 1), então o Teorema 5 diz que o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ resulta em um vetor com direção perpendicular ao plano que passa por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. O sentido desse vetor é determinado pela *regra da mão direita*: com os dedos da mão direita curvados girando no sentido de $\mathbf{a}$ para $\mathbf{b}$ (por um ângulo menor que 180°), seu polegar estará apontando na direção e sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Conhecendo o sentido e a direção do vetor $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, resta a descrição geométrica de seu módulo. Isso é dado pelo teorema seguinte.

6 TEOREMA Se θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (portanto $0 \leq \theta \leq \pi$), então

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

DEMONSTRAÇÃO Das definições de produto vetorial e norma de um vetor, temos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2 b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2 b_3^2 \\
&\quad + a_1^2 b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2 b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta \qquad \text{(pelo Teorema 12.3.3)} \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz e observando que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ porque $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$ quando $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, temos

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$$ □

■ Caracterização geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Como um vetor fica completamente determinado se conhecermos seu módulo, direção e sentido, podemos dizer que o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é perpendicular aos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, o sentido é dado pela regra da mão direita e seu módulo é $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$. De fato, é exatamente assim que os físicos *definem* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

7 COROLÁRIO Dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos se e somente se

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO Dois vetores não nulos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos se e somente se $\theta = 0$ ou π. Em qualquer dos casos $\operatorname{sen}\theta = 0$, assim $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ e, portanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. □

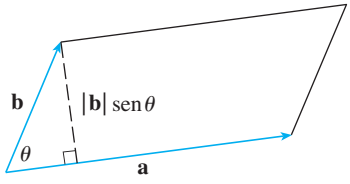


FIGURA 2

A interpretação geométrica do Teorema 6 pode ser vista examinando-se a Figura 2. Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são tomados como segmentos de reta orientados com o mesmo ponto inicial, determinam um paralelogramo cuja base é $|\mathbf{a}|$, a altura é $|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$, e com área dada por

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Então temos a seguinte forma de interpretar o módulo do produto escalar.

O módulo do produto escalar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é igual à área do paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

EXEMPLO 3 Encontre um vetor perpendicular ao plano que passa pelos pontos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ e $R(1, -1, 1)$.

SOLUÇÃO O vetor $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ é perpendicular a ambos $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ e, portanto, perpendicular ao plano que passa por P, Q e R. Sabemos de (12.2.1) que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 4)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Calculando o produto vetorial desses vetores:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\
&= (-5 - 35)\mathbf{i} - (15 - 0)\mathbf{j} + (15 - 0)\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 15\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Logo, o vetor $\langle -40, -15, 15\rangle$ é perpendicular ao plano dado. Qualquer múltiplo por escalar não nulo desse vetor, tal como $\langle -8, -3, 3\rangle$, é também perpendicular ao plano. □

EXEMPLO 4 Determine a área do triângulo com vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ e $R(1, -1, 1)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 3 calculamos que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15\rangle$. A área do paralelogramo com lados adjacentes PQ e PR é o comprimento do produto vetorial:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

A área A do triângulo PQR é metade da área desse paralelogramo, ou seja, $\frac{5}{2}\sqrt{82}$. □

Se aplicarmos os Teoremas 5 e 6 aos vetores da base canônica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ com $\theta = \pi/2$, obteremos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

⊘ Portanto, o produto vetorial não é comutativo. Temos ainda que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

enquanto que

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

⊘ Logo, a propriedade associativa da multiplicação também não vale obrigatoriamente aqui; ou seja, em geral, temos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Entretanto, algumas das propriedades usuais da álgebra ainda valem para o produto vetorial. O teorema a seguir resume as propriedades dos produtos vetoriais.

8 TEOREMA Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores e c é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Podemos demonstrar essas propriedades escrevendo os vetores em termos de suas componentes e usar a definição de produto vetorial. Faremos, a seguir, a demonstração da Propriedade 5 e deixaremos as outras como exercício.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 5 Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ e $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$, então

9
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3\\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\end{aligned}$$

□

PRODUTOS TRIPLOS

O produto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que aparece na Propriedade 5 é chamado **produto misto ou produto triplo escalar de a, b e c**. Observe que, da Equação 9, podemos escrever o produto misto como o determinante:

10
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

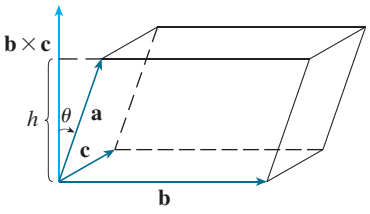


FIGURA 3

O significado geométrico do produto misto pode ser visto considerando-se o paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c** (Veja a Figura 3). A área da base do paralelepípedo é $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Se θ é o ângulo entre **a** e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, então a altura h do paralelepípedo é $h = |\mathbf{a}|\,|\cos\theta|$. (Precisamos usar $|\cos\theta|$ em vez de $\cos\theta$ caso $\theta > \pi/2$.) Portanto, o volume do paralelepípedo é

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}|\,|\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Assim, demonstramos a seguinte fórmula.

11 O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c** é o módulo do produto misto:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Se usarmos a fórmula (11) e descobrirmos que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c** é 0, os três vetores precisam pertencer ao mesmo plano; isso quer dizer que eles são **coplanares**.

EXEMPLO 5 Utilize o produto misto para mostrar que os vetores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$ são coplanares.

SOLUÇÃO Se usarmos a Equação 10 para calcular o produto misto, teremos:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

Portanto, por (11), o volume do paralelepípedo determinado por **a**, **b** e **c** é 0. Isso significa que os vetores **a**, **b** e **c** são coplanares. □

O produto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocorre na Propriedade 6 é chamado **triplo produto vetorial** de **a**, **b** e **c**. A Propriedade 6 será usada para deduzir a Primeira Lei de Kepler do movimento planetário no Capítulo 13. Sua demonstração é pedida no Exercício 46.

TORQUE

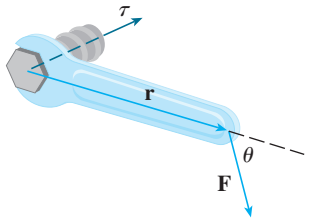


FIGURA 4

A ideia de produto vetorial aparece muito frequentemente em física. Em particular, considere uma força **F** agindo em um corpo rígido em um ponto dado pelo vetor posição **r**. (Por exemplo: se apertarmos um parafuso aplicando uma força em uma chave de boca como na Figura 4, conseguiremos o efeito de girá-lo.) O **torque** $\boldsymbol{\tau}$ (em relação à origem) é definido pelo produto vetorial dos vetores posição e força

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 6, o módulo do torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é o ângulo entre o vetor posição e o vetor força. Observe que a única componente da força $\mathbf{F}$ que pode causar a rotação do objeto é a perpendicular a $\mathbf{r}$, ou seja, $|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$. O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$.

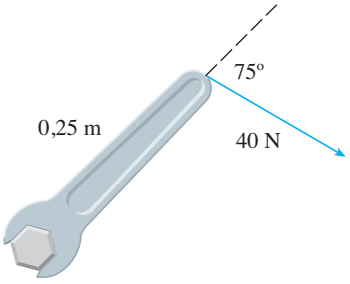


FIGURA 5

EXEMPLO 6 Um parafuso é apertado aplicando-se uma força de 40 N a uma chave de boca de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em relação ao centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| &= |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75^\circ = (0{,}25)(40) \operatorname{sen} 75^\circ \\ &= 10 \operatorname{sen} 75^\circ \approx 9{,}66 \text{ N·m} \end{aligned}$$

Se o parafuso tem a rosca para a direita, o vetor torque é

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\mathbf{n} \approx 9{,}66\mathbf{n}$$

onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido para dentro do papel. □

12.4 EXERCÍCIOS

1-7 Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal a $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$

2. $\mathbf{a} = \langle 5, 1, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$

3. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

4. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

8. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.

9-12 Encontre o vetor, não com determinantes, mas usando propriedades do produto vetorial.

9. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$

10. $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

11. $(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$

12. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j})$

13. Diga se cada expressão a seguir tem sentido. Se não, explique por quê. Se tiver, diga se é um vetor ou um escalar.

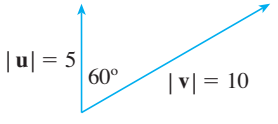
(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

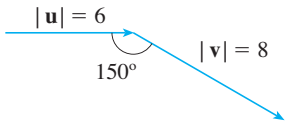
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

14-15 Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e determine se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem o sentido de entrar ou sair da página.

14.



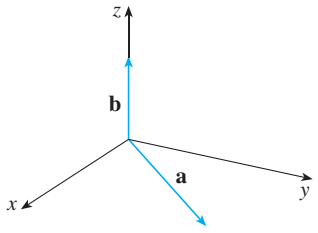
15.



16. A figura mostra um vetor $\mathbf{a}$ pertencente ao plano xy e um vetor $\mathbf{b}$ na direção de $\mathbf{k}$. Seus módulos são $|\mathbf{a}| = 3$ e $|\mathbf{b}| = 2$.

(a) Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

(b) Utilize a regra da mão direita para decidir se as componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são positivas, negativas ou nulas.



17. Se $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

18. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

19. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ quanto a $\langle 0, 4, 4 \rangle$.

20. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ quanto a $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

21. Mostre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para qualquer vetor $\mathbf{a}$ em V_3.

22. Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em V_3.

23. Demonstre a Propriedade 1 do Teorema 8.

24. Demonstre a Propriedade 2 do Teorema 8.

25. Demonstre a Propriedade 3 do Teorema 8.

26. Demonstre a Propriedade 4 do Teorema 8.

27. Determine a área do paralelogramo com vértices em $A(-2,1)$, $B(0,4)$, $C(4,2)$ e $D(2,-1)$.

28. Determine a área do paralelogramo com vértices em $K(1,2,3)$, $L(1,3,6)$, $M(3,8,6)$ e $N(3,7,3)$.

29-32 (a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R e (b) calcule a área do triângulo PQR.

29. $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$

30. $P(2,1,5)$, $Q(-1,3,4)$, $R(3,0,6)$

31. $P(0,-2,0)$, $Q(4,1,-2)$, $R(5,3,1)$

32. $P(-1,3,1)$, $Q(0,5,2)$, $R(4,3,-1)$

33-34 Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

33. $\mathbf{a} = \langle 6,3,-1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0,1,2\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4,-2,5\rangle$

34. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

35-36 Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS.

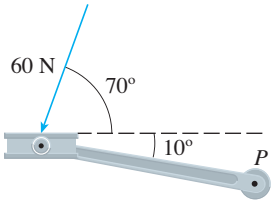
35. $P(2,0,-1)$, $Q(4,1,0)$, $R(3,-1,1)$, $S(2,-2,2)$

36. $P(3,0,1)$, $Q(-1,2,5)$, $R(5,1,-1)$, $S(0,4,2)$

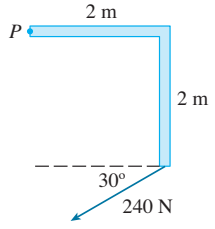
37. Utilize o produto misto para verificar se os vetores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ são coplanares.

38. Use o produto misto para determinar se os pontos $A(1,3,2)$, $B(3,-1,6)$, $C(5,2,0)$ e $D(3,6,-4)$ pertencem ao mesmo plano.

39. O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em relação a P.



40. Determine a intensidade do torque em relação a P se for aplicada uma força de 240 N, como mostrado.



41. Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo y aperta um parafuso colocado na origem. Uma força é aplicada no final do cabo da chave com direção dada por $\langle 0,3,-4\rangle$. Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 N·m.

42. Seja $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ e seja $\mathbf{u}$ um vetor com comprimento 3 com início na origem e que gira no plano xy. Determine o máximo e o mínimo valor possível para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Qual a direção e o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

43. (a) Seja P um ponto não pertencente à reta L que passa pelos pontos Q e R. Mostre que a distância d do ponto P até a reta L é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Utilize a fórmula da parte (a) do exercício para determinar a distância do ponto $P(1,1,1)$ à reta que passa por $Q(0,6,8)$ e $R(-1,4,7)$.

44. (a) Seja P um ponto não pertencente ao plano que passa pelos pontos Q, R e S. Mostre que a distância d de P ao plano é

$$d = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Utilize a fórmula dada na parte (a) para calcular a distância de $P(2,1,4)$ ao plano definido pelos pontos $Q(1,0,0)$, $R(0,2,0)$ e $S(0,0,3)$.

45. Demonstre que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

46. Demonstre a parte 6 do Teorema 8, ou seja,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

47. Utilize o Exercício 46 para demonstrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

48. Demonstre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

49. Suponha que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

(a) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(b) Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(c) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

50. Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores não coplanares, sejam

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

(Esses vetores aparecem no estudo de cristalografia. Vetores da forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$, onde cada n_i é um inteiro, formam um *reticulado* para o cristal. Vetores escritos de modo semelhante em termos de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_3$ formam o *reticulado recíproco*.)

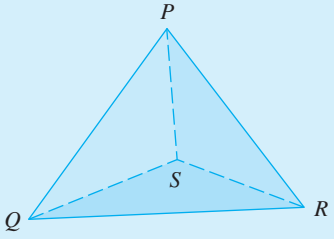
(a) Mostre que $\mathbf{k}_i$ é perpendicular a $\mathbf{v}_j$ se $i \neq j$.

(b) Mostre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

(c) Mostre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \dfrac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$.

PROJETO DE DESCOBERTA

A GEOMETRIA DO TETRAEDRO



Um tetraedro é um sólido com quatro vértices, P, Q, R e S, e quatro faces triangulares:

1. Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ vetores de comprimentos iguais à área das faces opostas aos vértices P, Q, R e S, respectivamente, e direções perpendiculares às respectivas faces e apontando para fora do tetraedro. Mostre que
$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$
2. O volume V de um tetraedro é um terço da distância de um vértice à face oposta vezes a área dessa face.
   (a) Determine uma fórmula para o volume do tetraedro em termos das coordenadas de seus vértices P, Q, R e S.
   (b) Determine o volume do tetraedro cujos vértices são $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(1, 1, 2)$ e $S(3, -1, 2)$.
3. Suponha que o tetraedro da figura tenha um vértice trirretangular S. (Isto é, os três ângulos em S são ângulos retos.) Sejam A, B e C as áreas das três faces que encontram o vértice S e seja D a área da face oposta PQR. Utilizando o resultado do Problema 1 mostre que
$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$
(Essa é uma versão tridimensional do Teorema de Pitágoras.)

12.5 EQUAÇÕES DE RETAS E PLANOS

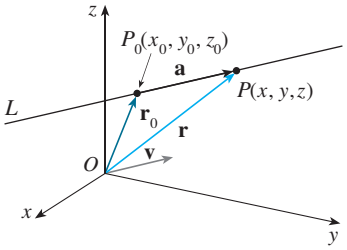


FIGURA 1

Uma reta no plano xy é determinada quando um ponto e uma direção (inclinação ou coeficiente angular da reta) são dados. A equação da reta pode ser então escrita utilizando-se a forma ponto-inclinação.

Da mesma maneira, uma reta L no espaço tridimensional é determinada quando conhecemos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em L e a direção de L. Em três dimensões a direção de uma reta é descrita de forma muito conveniente por um vetor; assim, seja $\mathbf{v}$ um vetor paralelo a L. Seja $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário em L e sejam $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}$ os vetores posição de P_0 e P (ou seja, eles têm representantes $\overrightarrow{OP_0}$ e $\overrightarrow{OP}$). Se $\mathbf{a}$ é o vetor com representante $\overrightarrow{P_0P}$, como na Figura 1, pela Regra do Triângulo para soma de vetores temos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Mas, como $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos, existe um escalar t tal que $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$. Assim

1
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

que é a **equação vetorial** de L. Cada valor do **parâmetro** t fornece um vetor posição $\mathbf{r}$ de um ponto de L. Em outras palavras, à medida que t varia, a reta é traçada pela ponta do vetor $\mathbf{r}$. Como a Figura 2 indica, valores positivos de t correspondem a pontos de L pertencentes a um lado em relação a P_0, ao passo que valores negativos de t referem-se a pontos pertencentes ao outro lado de P_0.

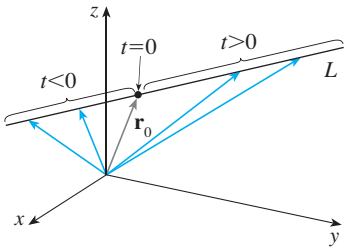


FIGURA 2

Se o vetor $\mathbf{v}$ que fornece a direção da reta L é escrito sob a forma de componentes $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$, temos que $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc\rangle$. Podemos também escrever $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, e assim a equação vetorial (1) se torna

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle$$

Dois vetores iguais têm as componentes correspondentes iguais. Assim, temos três equações escalares:

2

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Essas equações são chamadas **equações paramétricas** da reta L que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. Cada valor do parâmetro t fornece um ponto (x, y, z) em L.

EXEMPLO 1

(a) Determine as equações vetorial e paramétrica de uma reta que passa pelo ponto $(5, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

(b) Determine outros dois pontos na reta.

SOLUÇÃO

(a) Aqui $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3 \rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, de forma que a equação vetorial (1) se torna

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

ou

$$\mathbf{r} = (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\,\mathbf{j} + (3 - 2t)\,\mathbf{k}$$

As equações paramétricas são

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

(b) Escolhendo o valor do parâmetro $t = 1$ temos $x = 6$, $y = 5$ e $z = 1$, assim $(6, 5, 1)$ é um ponto da reta. Da mesma forma, $t = -1$ fornece o ponto $(4, -3, 5)$. □

■ A Figura 3 mostra a reta L do Exemplo 1 e sua relação com o ponto dado e o vetor direção.

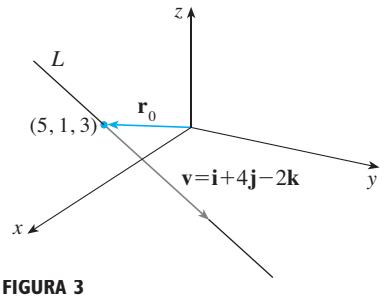


FIGURA 3

A equação vetorial e as equações paramétricas de uma reta não são únicas. Se trocarmos o ponto ou o parâmetro ou escolhermos um vetor paralelo diferente, a equação muda. Por exemplo, se, em vez do ponto $(5, 1, 3)$ escolhermos o ponto $(6, 5, 1)$ no Exemplo 1, as equações paramétricas da reta se tornam

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$

Ou, se mantivermos o ponto $(5, 1, 3)$, mas escolhermos o vetor paralelo $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, chegaremos às equações

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

Em geral, se o vetor $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ é usado para descrever a direção da reta L, então os números a, b e c são as **componentes do vetor diretor** de L. Como qualquer vetor paralelo a $\mathbf{v}$ pode ser usado, quaisquer três números proporcionais a a, b e c podem ser usados como componentes do vetor diretor de L.

Outra maneira de descrever uma reta L é eliminar o parâmetro t das Equações 2. Se nenhum dos números a, b e c for 0, podemos isolar t em cada uma das equações e igualar os resultados, obtendo

3

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas equações são chamadas **equações simétricas** de L. Observe que os números a, b e c que aparecem no denominador da Equação 3 são as componentes do vetor diretor de L, ou seja, as componentes de um vetor paralelo a L. Mesmo que uma das componentes desse vetor seja nula, podemos eliminar o parâmetro t. Por exemplo, se $a = 0$, podemos escrever as equações de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Isso indica que a reta L pertence ao plano vertical $x = x_0$.

■ A Figura 4 mostra a reta L do Exemplo 2 e o ponto P de intersecção com o plano xy.

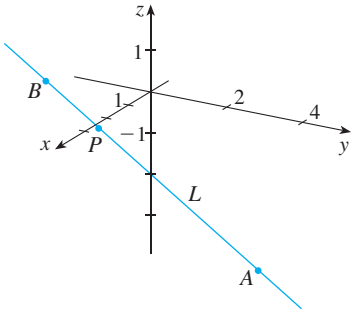


FIGURA 4

EXEMPLO 2

(a) Determine as equações paramétricas e simétricas da reta que passa pelos pontos $A(2, 4, -3)$ e $B(3, -1, 1)$.

(b) Qual a intersecção dessa reta com o plano xy?

SOLUÇÃO

(a) Não nos foi dado de forma explícita o vetor paralelo à reta, mas observe que o vetor $\mathbf{v}$ com representação $\overrightarrow{AB}$ é paralelo à reta e

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

Então, as componentes do vetor diretor são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$. Tomando o ponto $(2, 4, -3)$ como P_0, temos as equações paramétricas (2):

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

e as equações simétricas (3) são

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

(b) A reta intercepta o plano xy quando $z = 0$. Tomando $z = 0$ nas equações simétricas, obtemos:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

o que fornece $x = \frac{11}{4}$ e $y = \frac{1}{4}$, portanto a reta intercepta o plano xy no ponto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$. □

Em geral, o procedimento do Exemplo 2 mostra que as componentes do vetor diretor da reta L que passa pelos pontos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ são $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ e $z_1 - z_0$ e as equações simétricas de L são

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Frequentemente precisamos de uma descrição, não de uma reta inteira, mas apenas de um segmento de reta. Como podemos descrever o segmento de reta AB no Exemplo 2? Se fizermos $t = 0$ nas equações paramétricas no Exemplo 2(a), obteremos o ponto $(2, 4, -3)$ e se fizermos $t = 1$, teremos $(3, -1, 1)$. Assim, o segmento de reta AB é descrito pelas equações paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ou pela equação vetorial correspondente

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t, 4 - 5t, -3 + 4t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Em geral, sabemos da Equação 1 que a equação vetorial de uma reta partindo (do fim) de um vetor $\mathbf{r}_0$ na direção $\mathbf{v}$ é $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Se a reta também passa por $\mathbf{r}_1$, então podemos fazer $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ e assim sua equação vetorial será

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

O segmento de reta de $\mathbf{r}_0$ até $\mathbf{r}_1$ é dado pelo intervalo do parâmetro $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4 O segmento de reta de $\mathbf{r}_0$ até $\mathbf{r}_1$ é dado pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

■ As retas L_1 e L_2 do Exemplo 3 são retas reversas e estão mostradas na Figura 5.

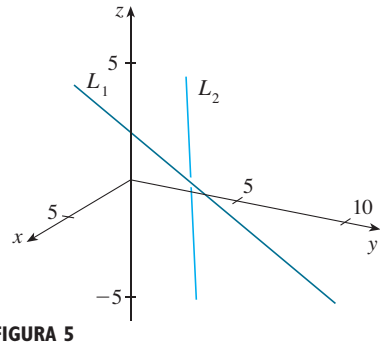


FIGURA 5

EXEMPLO 3 Mostre que as retas L_1 e L_2 com as equações paramétricas dadas por

$$x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

são **retas reversas**, isto é, são retas que não se interceptam e não são paralelas (não pertencendo, portanto, a um mesmo plano).

SOLUÇÃO As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores $\langle 1, 3, -1\rangle$ e $\langle 2, 1, 4\rangle$ não são paralelos. (Suas componentes não são proporcionais.) Se L_1 e L_2 tivessem um ponto em comum, existiriam valores para t e s tais que

$$\begin{aligned} 1 + \ \ t &= 2s \\ -2 + 3t &= 3 + s \\ 4 - \ \ t &= -3 + 4s \end{aligned}$$

Mas, se resolvermos as primeiras duas equações, obteremos $\mathbf{t} = \frac{11}{5}$ e $s = \frac{8}{5}$, que não satisfazem a terceira equação. Não existem valores para t e s que satisfaçam as três equações simultaneamente. Portanto, L_1 e L_2 são retas reversas, não se interceptam. □

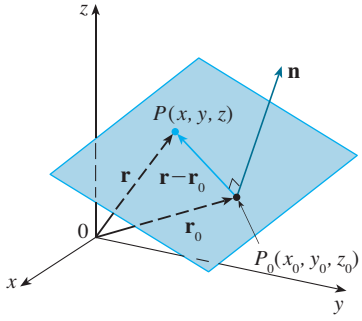


FIGURA 6

PLANOS

Enquanto as retas no espaço são facilmente determinadas por um ponto e um vetor diretor, um plano é um pouco mais complicado de descrever. Um único vetor paralelo ao plano desejado não é suficiente para fixar a "direção" do plano, mas um vetor que seja perpendicular a esse plano define de modo completo sua "direção". Então, um plano no espaço fica determinado se conhecermos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ do plano e um vetor $\mathbf{n}$ que seja ortogonal ao plano. Esse vetor $\mathbf{n}$ ortogonal ao plano é chamado **vetor normal**. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano e sejam $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}$ os vetores posição de P_0 e P. Então o vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ é representado por $\overrightarrow{P_0P}$ (veja a Figura 6). O vetor normal $\mathbf{n}$ é ortogonal a todo vetor do plano. Em particular, $\mathbf{n}$ é ortogonal a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, e assim temos

5 $$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

que pode ser reescrita como

6 $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

Tanto a Equação 5 quanto a Equação 6 são chamadas de **equação vetorial do plano**.

Para obter uma equação escalar para o plano, escrevemos $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. A Equação (5) se transforma em

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

ou

7 $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

A Equação 7 é denominada **equação escalar do plano que passa por** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **com vetor normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$.

EXEMPLO 4 Determine uma equação do plano que passa pelo ponto $(2, 4, -1)$ e tem como vetor normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4\rangle$. Encontre também suas intersecções com os eixos coordenados e faça um esboço do plano.

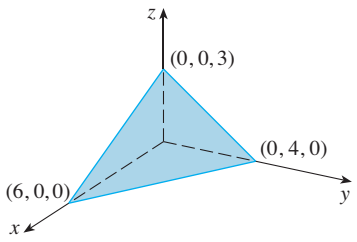


FIGURA 7

SOLUÇÃO Tomando $a = 2, b = 3, c = 4, x_0 = 2, y_0 = 4$ e $z_0 = -1$ na Equação 7, vemos que a equação do plano é

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

ou

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Para achar a intersecção com o eixo x, impomos $y = z = 0$ nessa equação e obtemos $x = 6$. Da mesma forma, a intersecção com o eixo y é 4 e a intersecção com o eixo z é 3. Isso nos permite esboçar a porção do plano pertencente ao primeiro octante (veja a Figura 7). □

Agrupando os termos na Equação 7 como fizemos no Exemplo 4, podemos reescrever a equação do plano como

8

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. A Equação 8 é chamada **equação linear** em x, y e z. Reciprocamente, pode ser mostrado que, se a, b e c não são todos nulos, a equação linear (8) representa um plano cujo vetor normal é o vetor $\langle a, b, c \rangle$. (Veja o Exercício 77.)

EXEMPLO 5 Determine a equação do plano que passa pelos pontos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ e $R(5, 2, 0)$.

SOLUÇÃO Os vetores **a** e **b** correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Como tanto **a** quanto **b** pertencem ao plano, seu produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal ao plano e pode ser tomado como o vetor normal. Assim

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

Com o ponto $P(1, 3, 2)$ e o vetor normal **n**, uma equação do plano é

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

ou

$$6x + 10y + 7z = 50$$

□

■ A Figura 8 mostra a parte do plano do Exemplo 5 delimitada pelo triângulo PQR.

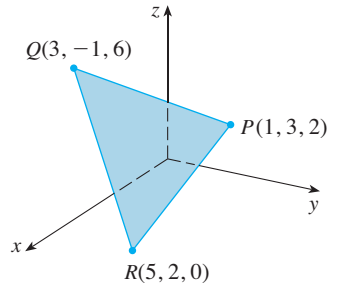


FIGURA 8

EXEMPLO 6 Determine o ponto onde a reta com equação paramétrica $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$ intercepta o plano $4x + 5y - 2z = 18$.

SOLUÇÃO Substituímos as expressões de x, y e z das equações paramétricas na equação do plano:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

Isto pode ser simplificado para $-10t = 20$, ou seja, $t = -2$. Portanto, o ponto de intersecção ocorre quando o parâmetro vale $t = -2$. Ou seja, $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5 - 2 = 3$ e o ponto de intersecção é $(-4, 8, 3)$. □

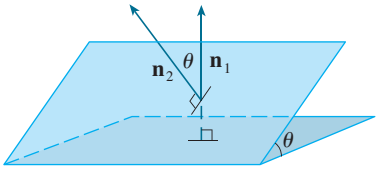


FIGURA 9

Dois planos são **paralelos** se seus vetores normais são paralelos. Por exemplo: os planos $x + 2y - 3z = 4$ e $2x + 4y - 6z = 3$ são paralelos, pois seus vetores normais são $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$ e $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$ e $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Se dois planos não são paralelos, eles se interceptam em uma reta, e o ângulo entre os dois planos é definido como o ângulo entre os vetores normais aos planos (veja o ângulo θ na Figura 9).

EXEMPLO 7

(a) Encontre o ângulo entre os planos $x + y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 1$.

(b) Determine as equações simétricas da reta intersecção L desses dois planos.

■ A Figura 10 mostra os planos do Exemplo 7 e a reta intersecção L.

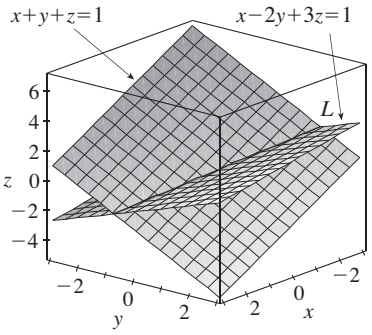


FIGURA 10

■ Outro modo de determinar a reta intersecção é resolver a equação do plano para duas variáveis em função da terceira, que será tomada como parâmetro.

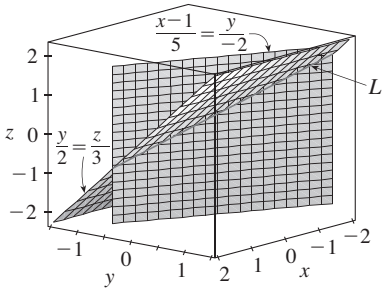


FIGURA 11

■ A Figura 11 mostra como a reta L do Exemplo 7 pode também ser vista como a intersecção dos planos obtidos a partir de suas equações simétricas.

SOLUÇÃO

(a) Os vetores normais a esses planos são

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3\rangle$$

Portanto, se θ é o ângulo entre os dois planos, o Corolário 12.3.6 fornece

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

(b) Vamos achar primeiro um ponto em L. Por exemplo, podemos achar o ponto onde a reta intercepta o plano xy tomando $z = 0$ na equação dos dois planos. Isso nos fornece as equações $x + y = 1$ e $x - 2y = 1$, cuja solução é $x = 1, y = 0$. Portanto, o ponto $(1, 0, 0)$ pertence a L.

Observe que, como L pertence a ambos os planos, é perpendicular ao vetor normal de ambos os planos. Então, um vetor $\mathbf{v}$ paralelo a L é dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

e assim as equações simétricas de L podem ser escritas como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

□

OBS. Como uma equação linear nas variáveis x, y e z representa um plano e dois planos não paralelos se interceptam em uma reta, segue que duas equações lineares podem representar uma reta. O ponto (x, y, z) que satisfaz a ambas as equações $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ pertence a ambos os planos, e assim esse par de equações lineares representa a reta intersecção dos planos (se eles não forem paralelos). Por exemplo, no Exemplo 7 a reta L foi encontrada pela intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 1$. As equações simétricas que encontramos para L podiam ter sido escritas como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} \quad \text{e} \quad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

que é um par de equações lineares. Elas descrevem L como a reta intersecção dos planos $(x - 1)/5 = y/(-2)$ e $y/(-2) = z/(-3)$. (Veja a Figura 11.)

Em geral, quando escrevemos as equações de uma reta na forma simétrica

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

podemos pensar na reta como a intersecção de dois planos

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \quad \text{e} \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

EXEMPLO 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

SOLUÇÃO Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do plano dado e seja $\mathbf{b}$ o vetor correspondente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Então,

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle$$

Da Figura 12 podemos ver que a distância D de P_1 até o plano é igual ao valor absoluto da projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre o vetor normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$. (Veja a Seção 12.3.)

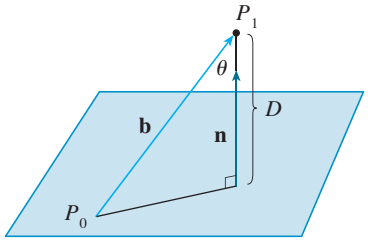


FIGURA 12

Então,

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como P_0 pertence ao plano, suas coordenadas satisfazem a equação do plano, e assim temos que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Então, a fórmula da distância D pode ser escrita como

9

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

□

EXEMPLO 9 Determine a distância entre os dois planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ e $5x + y - z = 1$.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que os dois planos são paralelos, pois seus vetores normais $\langle 10, 2, -2\rangle$ e $\langle 5, 1, -1\rangle$ são vetores paralelos. Para achar a distância D entre os planos, escolhemos um ponto qualquer em um plano e calculamos sua distância ao outro plano. Em particular, se tomarmos $y = z = 0$ na equação do primeiro plano, obteremos $10x = 5$, e portanto $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ é um ponto desse plano. Pela Fórmula 9, a distância entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e o plano $5x + y - z - 1 = 0$ é

$$D = \frac{|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Assim, a distância entre os planos é $\sqrt{3}/6$. □

EXEMPLO 10 No Exemplo 3 mostramos que as retas

$$L_1: \quad x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2: \quad x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

são retas reversas. Determine a distância entre elas.

SOLUÇÃO Como as retas L_1 e L_2 são reversas, elas podem ser vistas como pertencentes aos planos paralelos P_1 e P_2, respectivamente. A distância entre L_1 e L_2 é igual à distância entre P_1 e P_2, que pode ser calculada como no Exemplo 9. O vetor normal a ambos os planos precisa ser ortogonal aos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$ (vetor diretor de L_1) e $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$ (vetor diretor de L_2). Assim, o vetor normal é dado por

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se impusermos $s = 0$ na equação de L_2, obteremos o ponto $(0, 3, -3)$ pertencente a L_2, e a equação de P_2 fica sendo

$$13(x - 0) - 6(y - 3) - 5(z + 3) = 0 \qquad \text{ou} \qquad 13x - 6y - 5z + 3 = 0$$

Tomando agora $t = 0$ na equação de L_1, obtemos o ponto $(1, -2, 4)$ em P_1. A distância entre L_1 e L_2 é igual à distância de $(1, -2, 4)$ até $13x - 6y - 5z + 3 = 0$.

Pela Fórmula 9 essa distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}53$$ □

12.5 EXERCÍCIOS

1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
(a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
(b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
(c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
(d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
(e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
(f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
(g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
(h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
(i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
(j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
(k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

2-5 Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

2. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, -3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $\langle 3, 1, -8 \rangle$

4. A reta que passa pelo ponto $(0, 14, -10)$ e é paralela à reta $x = -1 + 2t, y = 6 - 3t, z = 3 + 9t$

5. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6-12 Determine as equações paramétricas e as equações simétricas para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$

7. Reta que passa pelos pontos $(1, 3, 2)$ e $(-4, 3, 0)$

8. Reta que passa pelos pontos $(6, 1, -3)$ e $(2, 4, 5)$

9. Reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(2, 1, -3)$

10. Reta que passa por $(2, 1, 0)$ e é perpendicular à reta $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Reta que passa por $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12. Reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

13. A reta que passa pelos pontos $(-4, -6, 1)$ e $(-2, 0 -3)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(10, 18, 4)$ e $(5, 3, 14)$?

14. A reta que passa pelos pontos $(4, 1, -1)$ e $(2, 5, 3)$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-3, 2, 0)$ e $(5, 1, 4)$?

15. (a) Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $(1, -5, 6)$ e é paralela ao vetor $\langle -1, 2, -3 \rangle$.
(b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(2, 4, 6)$ e que é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 7$.
(b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação vetorial para o segmento de reta de $(2, -1, 4)$ a $(4, 6, 1)$.

18. Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de $(10, 3, 1)$ a $(5, 6, -3)$.

19-22 Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

19. L_1: $x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$
L_2: $x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$

20. L_1: $x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 2 - t$
L_2: $x = -1 + s, \quad y = 4 + s, \quad z = 1 + 3s$

21. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 2}{3}$

L_2: $\dfrac{x - 3}{-4} = \dfrac{y - 2}{-3} = \dfrac{z - 1}{2}$

22. L_1: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{2} = \dfrac{z - 2}{-1}$

L_2: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 6}{-1} = \dfrac{z + 2}{3}$

23-38 Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. O plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto $(-2, 8, 10)$ e é perpendicular à reta $x = 1 + t, y = 2t, z = 4 - 3t$

27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

28. O plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

29. O plano que passa pelo ponto $(4, -2, 3)$ e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

30. O plano que contém a reta $x = 3 + 2t, y = t, z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

31. O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1), (1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$

32. O plano que passa pela origem e pelos pontos $(2, -4, 6)$ e $(5, 1, 3)$

33. O plano que passa pelos pontos $(3, -1, 2), (8, 2, 4)$ e $(-1, -2, -3)$

34. O plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t, z = 2 - t$

35. O plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t, y = 3 + 5t, z = 7 + 4t$

36. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta com equações simétricas $x = 2y = 3z$

37. O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contém a reta intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

38. O plano que passa pela reta intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

39-42 Use as intersecções com os eixos coordenados como uma ajuda para esboçar o plano.

39. $2x + 5y + z = 10$

40. $3x + y + 2z = 6$

41. $6x - 3y + 4z = 6$

42. $6x + 5y - 3z = 15$

43-45 Determine o ponto no qual a reta intercepta o plano dado.

43. $x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = 3t; \quad x + y + z = 1$

44. $x = 5, \quad y = 4 - t, \quad z = 2t; \quad 2x - y + z = 5$

45. $x = y - 1 = 2z; \quad 4x - y + 3z = 8$

46. Onde a reta que passa pelos pontos $(1, 0, 1)$ e $(4, -2, 2)$ intercepta o plano $x + y + z = 6$?

47. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

48. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

49-54 Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

49. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

50. $2z = 4y - x, \quad 3x - 12y + 6z = 1$

51. $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$

52. $2x - 3y + 4z = 5, \quad x + 6y + 4z = 3$

53. $x = 4y - 2z, \quad 8y = 1 + 2x + 4z$

54. $x + 2y + 2z = 1, \quad 2x - y + 2z = 1$

55-56 (a) Determine as equações simétricas da reta intersecção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

55. $x + y + z = 1, \quad x + 2y + 2z = 1$

56. $3x - 2y + z = 1, \quad 2x + y - 3z = 3$

57-58 Determine as equações paramétricas da reta intersecção dos planos.

57. $5x - 2y - 2z = 1, \quad 4x + y + z = 6$

58. $z = 2x - y - 5, \quad z = 4x + 3y - 5$

59. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(1, 0, -2)$ e $(3, 4, 0)$.

60. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(2, 5, 5)$ e $(-6, 3, 1)$.

61. Determine a equação do plano que intercepta o eixo x em a, o eixo y em b e o eixo z em c.

62. (a) Determine o ponto dado pela intersecção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 2\rangle$$
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2\rangle + s\langle 1, 1, 0\rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

63. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é paralela ao plano $x + y + z = 2$ e perpendicular à reta $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t$.

64. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é perpendicular à reta $x = 1 + t, y = 1 - t$, $z = 2t$, e intercepta essa reta.

65. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

$$P_1: 4x - 2y + 6z = 3 \qquad P_2: 4x - 2y - 2z = 6$$
$$P_3: -6x + 3y - 9z = 5 \qquad P_4: z = 2x - y - 3$$

66. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

$$L_1: x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$$
$$L_2: x + 1 = y - 2 = 1 - z$$
$$L_3: x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$$
$$L_4: \mathbf{r} = \langle 2, 1, -3\rangle + t\langle 2, 2, -10\rangle$$

67-68 Utilize a fórmula que aparece no Exercício 43 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

67. $(4, 1, -2); \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 - 3t$

68. $(0, 1, 3); \quad x = 2t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 3 + t$

69-70 Determine a distância do ponto ao plano dado.

69. $(1, -2, 4), \quad 3x + 2y + 6z = 5$

70. $(-6, 3, 5), \quad x - 2y - 4z = 8$

71-72 Determine a distância entre os planos paralelos dados.

71. $2x - 3y + z = 4, \quad 4x - 6y + 2z = 3$

72. $6z = 4y - 2x, \quad 9z = 1 - 3x + 6y$

73. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

74. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e que distam duas unidades dele.

75. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

76. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

77. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c \rangle$ é o vetor normal ao plano.

Sugestão: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

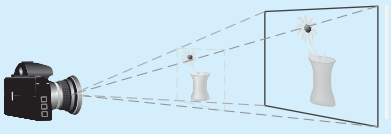
78. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$ (b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta = 1$

PROJETO DE LABORATÓRIO

PONDO 3D EM PERSPECTIVA



Os programadores de computação gráfica encaram o mesmo desafio que os grandes pintores do passado: como representar uma cena tridimensional como uma imagem em um plano (um monitor ou uma tela). Para criar a ilusão de perspectiva, na qual os objetos próximos parecem maiores que aqueles mais distantes, os objetos tridimensionais na memória do computador são projetados em uma tela retangular a partir do ponto de visão onde o olho ou a câmera estão localizados. O volume de visão – a porção do espaço que estará visível – é a região contida nos quatro planos que passam pelo ponto de visão e por uma aresta da tela retangular. Se os objetos na cena se estendem além dos quatro planos, eles são truncados antes que os dados sejam enviados para a tela. Esses planos são, portanto, chamados *planos cortantes*.

1. Suponha que a tela seja representada por um retângulo no plano yz com vértices $(0, \pm 400, 0)$ e $(0, \pm 400, 600)$, e a câmera esteja localizada em $(1000, 0, 0)$. Uma reta L na cena passa pelos pontos $(230, -285, 102)$ e $(860, 105, 264)$. Em quais pontos L será contada pelos planos cortantes?
2. Se o segmento de reta cortado for projetado na tela, identifique o segmento de reta resultante.
3. Use equações paramétricas para traçar as arestas da tela, o segmento de reta cortado e sua projeção na tela. A seguir, adicione retas que conectem o ponto de visão a cada extremidade dos segmentos cortados para verificar que a projeção está correta.
4. Um retângulo com vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ e $(599, 67, 122)$ é adicionado à cena. A reta L intercepta esse retângulo. Para fazer o retângulo parecer opaco, um programador pode usar *linhas escondidas* as quais removem partes do objeto que estão atrás de outros objetos. Identifique a parte de L que deve ser removida.

12.6 CILINDROS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Já olhamos para dois tipos especiais de superfícies — planos (Seção 12.5) e esferas (Seção 12.1). Aqui, estudaremos outros dois tipos de superfícies — cilindros e superfícies quádricas.

Para esboçar o gráfico dessas superfícies é útil determinar a intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Essas curvas são denominadas **cortes** (ou **secções transversais**) da superfície.

CILINDROS

Um **cilindro** é uma superfície constituída de todas as retas (chamadas **geratrizes**) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana.

EXEMPLO 1 Esboce a superfície $z = x^2$.

SOLUÇÃO Observe que a equação do gráfico, $z = x^2$, não envolve y. Isso significa que qualquer plano vertical com equação $y = k$ (paralelo ao plano xz) intercepta o gráfico em uma curva com equação $z = x^2$. Os cortes verticais são, portanto, parábolas. A Figura 1 indica como o gráfico é formado tomando a parábola $z = x^2$ no plano xz e movendo-a na direção do eixo y. O gráfico é uma superfície, chamada de cilindro parabólico, feita de um número infinito de cópias deslocadas da mesma parábola. Aqui, as geratrizes do cilindro são paralelas ao eixo y. □

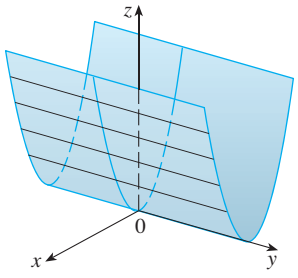


FIGURA 1
A superfície $z = x^2$ é um cilindro parabólico

Observamos que a variável y não aparece na equação do cilindro do Exemplo 1. Esse fato é comum às superfícies cujas geratrizes são paralelas a um dos eixos coordenados. Se uma das variáveis x, y ou z está faltando na equação da superfície, a superfície é um cilindro.

EXEMPLO 2 Identifique e esboce as superfícies.
(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y^2 + z^2 = 1$

SOLUÇÃO
(a) Como z não aparece e as equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$, representam uma circunferência de raio 1 no plano $z = k$, a superfície $x^2 + y^2 = 1$ é um cilindro circular cujo eixo é o eixo z (veja a Figura 2). Aqui, as geratrizes são retas verticais.
(b) Nesse caso a variável x é que está faltando, e a superfície é um cilindro circular cujo eixo é o eixo x (veja a Figura 3). Ela é obtida tomando-se a circunferência $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, no plano yz e deslocando-a paralelamente ao eixo x.

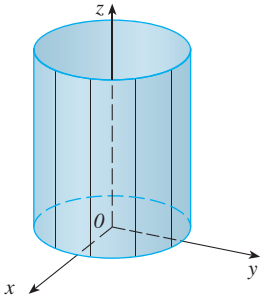


FIGURA 2 $x^2 + y^2 = 1$

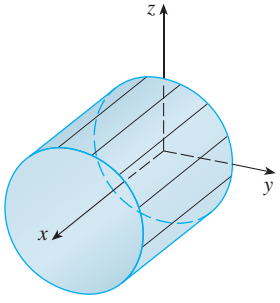


FIGURA 3 $y^2 + z^2 = 1$ □

OBS. Quando estamos tratando de superfícies, é importante reconhecer que uma equação como $x^2 + y^2 = 1$ representa um cilindro e não uma circunferência. O corte desse cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy é a circunferência de equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Uma **superfície quádrica** é o gráfico de uma equação de segundo grau nas três variáveis x, y e z. A forma mais geral dessa equação é dada por

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde $A, B, C, \ldots, J$ são constantes, mas por rotação e translação essa equação pode ser posta em uma de duas formas padrão

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{ou} \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

As superfícies quádricas são as correspondentes tridimensionais das cônicas no plano. (Veja a Seção 10.5 para uma revisão das seções cônicas.)

EXEMPLO 3 Utilize cortes para fazer o esboço da superfície quádrica com equação

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUÇÃO Substituindo $z = 0$, determinamos que o corte no plano xy é $x^2 + y^2/9 = 1$, que reconhecemos ser a equação de uma elipse. Em geral, o corte horizontal no plano $z = k$ é

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

que é uma elipse, desde que $k^2 < 4$, ou seja, $-2 < k < 2$. Da mesma forma, os cortes verticais também são elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \qquad (\text{se } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \qquad (\text{se } -3 < k < 3)$$

A Figura 4 mostra como desenhar alguns cortes para indicar a forma da superfície. Essa superfície é chamada **elipsoide**, visto que todos os seus cortes são elipses. Observe a simetria em relação a cada plano coordenado; isto é reflexo do fato de só aparecerem potências pares de x, y e z. □

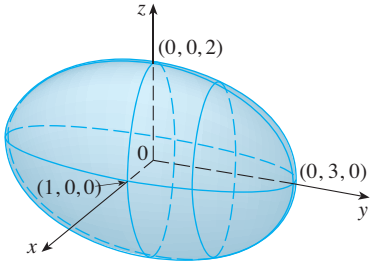


FIGURA 4

Elipsoide $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

EXEMPLO 4 Utilize cortes para esboçar a superfície $z = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Impondo $x = 0$, obtemos $z = y^2$, de forma que o plano yz intercepta a superfície em uma parábola. Se tomarmos $x = k$ (uma constante), obteremos $z = y^2 + 4k^2$. Isso significa que, se cortarmos o gráfico por qualquer plano paralelo ao plano yz, obteremos uma nova parábola com concavidade para cima. Da mesma forma, tomando $y = k$, o corte é $z = 4x^2 + k^2$, que corresponde novamente a uma parábola com concavidade para cima. Tomando $z = k$, obteremos os cortes horizontais $4x^2 + y^2 = k$, que reconhecemos como uma família de elipses. Sabendo a forma dos cortes, podemos esboçar o gráfico da Figura 5. Pelo fato de os cortes serem parábolas e elipses, a superfície quádrica $z = 4x^2 + y^2$ é denominada **paraboloide elíptico**.

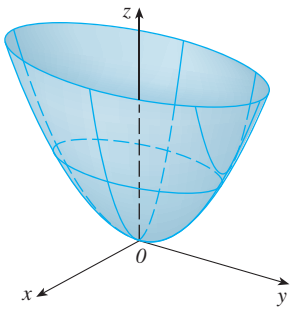


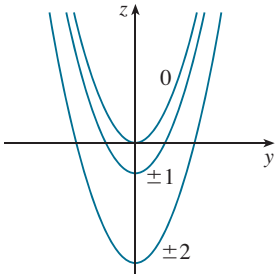
FIGURA 5

A superfície $z = 4x^2 + y^2$ é um paraboloide elíptico. Os cortes horizontais são elipses e os cortes verticais são parábolas

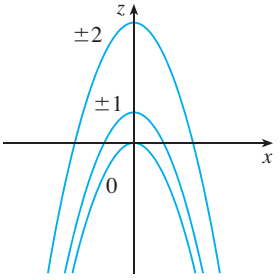
□

EXEMPLO 5 Esboce a superfície $z = y^2 - x^2$.

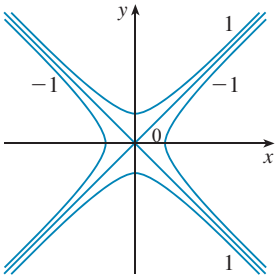
SOLUÇÃO Os cortes nos planos verticais $x = k$ são parábolas $z = y^2 - k^2$, com concavidade para cima. Os cortes em $y = k$ são parábolas $z = -x^2 + k^2$, com concavidade para baixo. Os traços horizontais são $y^2 - x^2 = k$, uma família de hipérboles. Na Figura 6 desenhamos esses cortes e mostramos como eles aparecem quando colocados nos planos corretos na Figura 7.



Cortes em $x=k$ são $z=y^2-k^2$

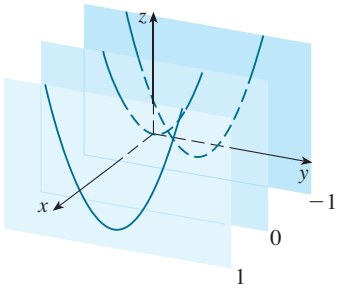


Cortes em $y=k$ são $z=-x^2+k^2$

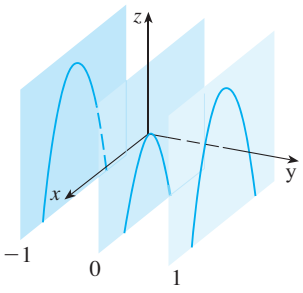


Cortes em $z=k$ são $y^2-x^2=k$

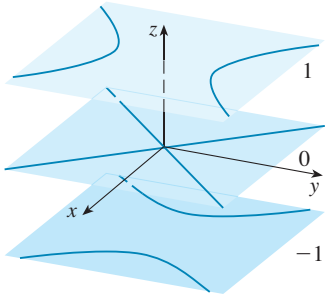
FIGURA 6
Os cortes verticais são parábolas; os cortes horizontais são hipérboles. Todos os cortes são identificados por um valor de k



Cortes em $x=k$



Cortes em $y=k$



Cortes em $z=k$

FIGURA 7
Cortes movidos para seus planos corretos

Na Figura 8 colocamos juntos os cortes da Figura 7 para formar a superfície $z = y^2 - x^2$, um **paraboloide hiperbólico**. Observe que o formato da superfície perto da origem se assemelha a uma sela. Essa superfície será alvo de estudos futuros na Seção 14.7, quando discutirmos os pontos de sela.

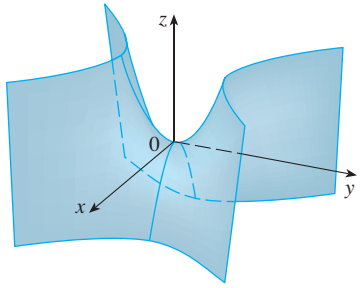


FIGURA 8
A superfície $z = y^2 - x^2$ é um paraboloide hiperbólico

□

EXEMPLO 6 Desenhe a superfície $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

SOLUÇÃO O corte em qualquer plano horizontal $z = k$ é a elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

mas os cortes nos planos xz e yz são as hipérboles

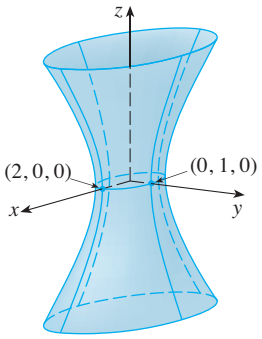


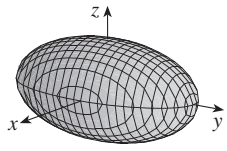
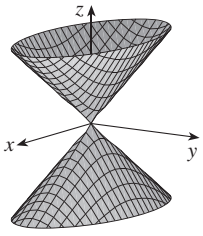
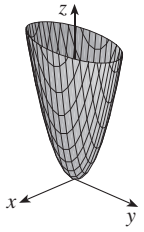
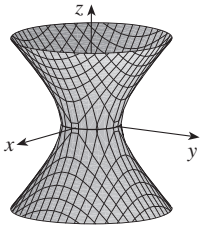
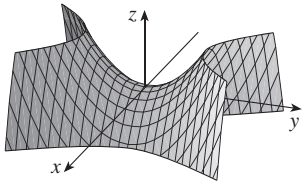
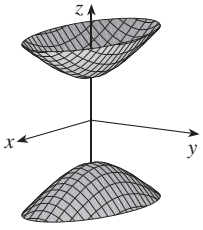
FIGURA 9

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad x = 0$$

Essa superfície é chamada **hiperboloide de uma folha** e está esboçada na Figura 9. □

A ideia de usar os cortes para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais. Na maioria desses programas, os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ são desenhados para valores de k igualmente espaçados, e partes do gráfico são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas. A Tabela 1 mostra gráficos de computador de seis quádricas básicas na forma-padrão. Todas as superfícies são simétricas em relação ao eixo z. Se uma quádrica é simétrica em relação a um eixo diferente, sua equação se modifica de modo apropriado.

TABELA 1 Gráfico de Superfícies Quádricas

Superfície	Equação	Superfície	Equação
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todos os cortes são elipses. Se $a = b = c$, o elipsoide é uma esfera.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles se $k \neq 0$, mas são um par de retas quando $k = 0$.
Paraboloide Elíptico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são parábolas. A variável elevada à primeira potência indica o eixo do paraboloide.	Hiperboloide de Uma Folha 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são hipérboles. O eixo de simetria corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.
Paraboloide Hiperbólico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são hipérboles. Cortes verticais são parábolas. O caso aqui ilustrado corresponde a $c < 0$.	Hiperboloide de Duas Folhas 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Cortes horizontais em $z = k$ são elipses se $k > c$ ou se $k < -c$. Cortes verticais são hipérboles. Os dois sinais de menos indicam duas folhas.

EXEMPLO 7 Identifique e esboce a superfície $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUÇÃO Dividindo por -4, colocamos a equação na forma-padrão:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Comparando essa equação com as da Tabela 1, vemos que ela representa um hiperboloide de duas folhas, exceto que aqui o eixo do hiperboloide é o eixo y. Os cortes nos planos xy e yz são as hipérboles

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad z = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1 \qquad x = 0$$

A superfície não tem corte no plano xz, mas os cortes nos planos verticais $y = k$ para $|k| > 2$ são as elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

que podem ser escritas como

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

Esses cortes foram usados para fazer o esboço na Figura 10. □

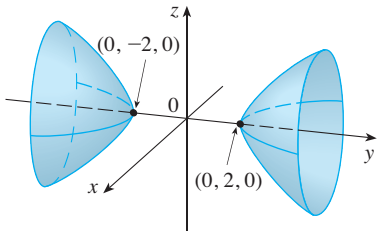


FIGURA 10
$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

EXEMPLO 8 Classifique a superfície quádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUÇÃO Completando os quadrados, reescrevemos a equação como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Comparando essa equação com a Tabela 1, vemos que se trata de um paraboloide elíptico. Aqui, entretanto, o eixo do paraboloide é paralelo ao eixo y, e foi transladado de forma que o vértice é o ponto $(3, 1, 0)$. Os cortes nos planos $y = k$ $(k > 1)$ são as elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

O corte no plano xy é uma parábola com equações $y = 1 + (x - 3)^2, z = 0$. O desenho do paraboloide está esboçado na Figura 11.

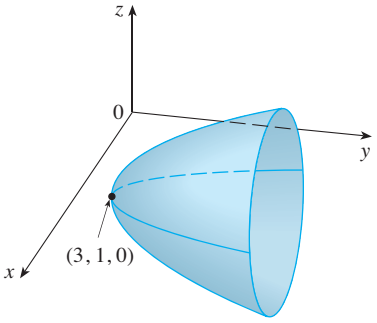


FIGURA 11
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

□

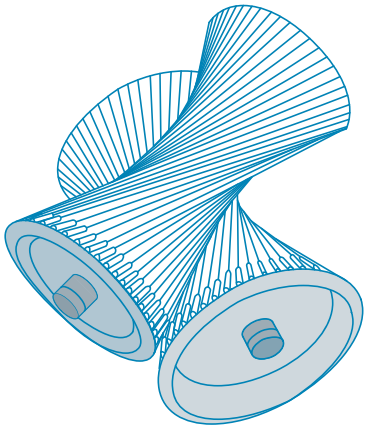
APLICAÇÕES DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Exemplos de superfícies quádricas podem ser encontrados no mundo a nossa volta. De fato, o mundo propriamente dito é um bom exemplo. Embora a Terra seja usualmente modelada como uma esfera, um modelo mais preciso é um elipsoide, pois a rotação da Terra causa um achatamento nos polos. (Veja o Exercício 47.)

Paraboloides circulares, obtidos pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo, são usados para coletar e refletir luz, som e sinais de rádio e televisão. Em um radiotelescópio, por exemplo, sinais das estrelas distantes que atingem a bacia são refletidos para o receptor no foco e assim amplificados. (A ideia é explicada no Problema 18, na página 250, no Volume I.) O mesmo princípio se aplica a microfones e antenas de satélite na forma de paraboloides.

Torres de resfriamento para reatores nucleares são usualmente projetadas na forma de hiperboloides de uma folha, por razões de estabilidade estrutural. Pares de hiperboloides

são usados para transmitir movimento de rotação entre eixos transversais. (Os dentes das engrenagens são as retas geradoras do hiperboloide. Veja o Exercício 49.)



Hiperboloides produzem transmissão por engrenagens.

12.6 EXERCÍCIOS

1. (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
(b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
(c) O que a equação $z = y^2$ representa?

2. (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
(b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
(c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

3-8 Descreva e esboce a superfície.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $x - y^2 = 0$

6. $yz = 4$

7. $z = \cos x$

8. $x^2 - y^2 = 1$

9. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de uma folha da Tabela 1.
(b) Se trocarmos a equação em (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
(c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de duas folhas da Tabela 1.
(b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

11-20 Use cortes para esboçar e identificar as superfícies.

11. $x = y^2 + 4z^2$

12. $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$

13. $x^2 = y^2 + 4z^2$

14. $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$

15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

16. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$

17. $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$

18. $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$

19. $y = z^2 - x^2$

20. $x = y^2 - z^2$

21-28 Faça uma correspondente entre a equação e seu gráfico (identificado por I-VIII). Justifique sua escolha.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

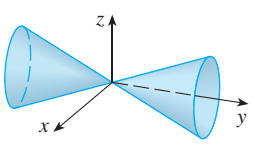
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x + 2z^2$

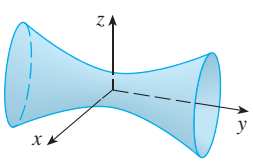
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

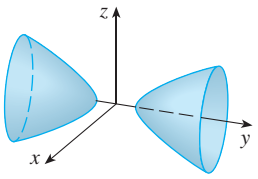
I



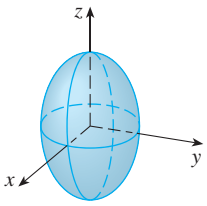
II



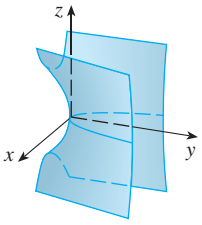
III



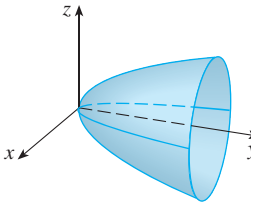
IV



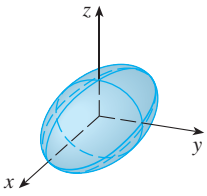
V



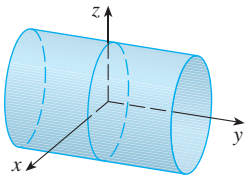
VI



VII



VIII



29-36 Coloque a equação na forma-padrão, classifique a superfície e esboce-a.

29. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

30. $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

31. $x = 2y^2 + 3z^2$

32. $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37-40 Use um computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela retangular até conseguir uma boa visão da superfície.

37. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

38. $x^2 - y^2 - z = 0$

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

41. Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Esboce a região delimitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y.

44. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo x.

45. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos que são equidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique essa superfície.

46. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos P para os quais a distância de P ao eixo x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

47. Tradicionalmente, a superfície da Terra tem sido modelada por uma esfera, mas o World Geodesic System de 1984 (WGS-84) usa um elipsoide como um modelo mais preciso. Ele coloca o centro da Terra na origem e o polo norte no eixo z positivo. A distância do centro ao polo é 6 356,523 km e a distância a um ponto do equador é 6 378,137 km.

(a) Encontre uma equação para superfície da Terra como a usada pelo WGS-84.

(b) Curvas de latitude constante são cortes nos planos $z = k$. Qual a forma destas curvas?

(c) Meridianos (curvas com longitude constante) são cortes nos planos da forma $y = mx$. Qual é a forma destes meridianos?

48. Uma torre de resfriamento de um reator nuclear deve ser construída na forma de um hiperboloide de uma folha. O diâmetro na base é 280 m e o diâmetro mínimo, 500 m acima do solo, é 200 m. Encontre uma equação para a torre.

49. Mostre que se o ponto (a, b, c) está em um paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com equações paramétricas $x = a + t, y = b + t, z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t, y = b - t, z = c - 2(b + a)t$, estão ambas inteiramente neste paraboloide. (Isto mostra que o paraboloide hiperbólico é o que é chamado uma **superfície regrada**; ou seja, ela pode ser gerada pelo movimento de uma reta. De fato, este exercício mostra que por cada ponto do paraboloide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras superfícies quádricas que são superfícies regradas são os cilindros, cones e hiperboloides de uma folha.)

50. Mostre que a curva obtida pela intersecção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ está em um plano.

51. Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando uma janela de tamanho $|x| \leqslant 1{,}2$, $|y| \leqslant 1{,}2$, e observe a curva de intersecção. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

12 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Qual a diferença entre um vetor e um escalar?
2. Como somamos dois vetores geometricamente? Como os somamos algebricamente?
3. Se $\mathbf{a}$ é um vetor e c é um escalar, qual a relação entre $c\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}$ geometricamente? Como determinar $c\mathbf{a}$ algebricamente?
4. Como determinar um vetor de um ponto a outro?
5. Como determinar o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dois vetores se você conhece seus comprimentos e o ângulo entre eles? E se você conhece suas componentes?
6. Para que o produto escalar é útil?
7. Escreva as expressões para a projeção escalar e vetor projeção de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$. Ilustre com um diagrama.
8. Como determinar o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dois vetores se você conhece seus módulos e o ângulo entre eles? E se você conhece suas componentes?
9. Para que o produto vetorial é útil?
10. (a) Como calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$?
    (b) Como calcular o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$?
11. Como determinar um vetor perpendicular a um plano?
12. Como determinar o ângulo entre dois planos que se interceptam?
13. Escreva as equações vetorial, paramétricas e simétricas para uma reta.
14. Escreva as equações vetorial e escalar de um plano.
15. (a) Como você sabe se dois vetores são paralelos?
    (b) Como você sabe se dois vetores são perpendiculares?
    (c) Como você sabe se dois planos são paralelos?
16. (a) Descreva um método para determinar se três pontos P, Q e R estão alinhados.
    (b) Descreva um método para determinar se quatro pontos P, Q, R e S são coplanares.
17. (a) Como você determina a distância de um ponto a uma reta?
    (b) Como você determina a distância de um ponto a um plano?
    (c) Como você determina a distância entre retas?
18. O que são os traços de uma superfície? Como determiná-los?
19. Escreva as equações na forma-padrão dos seis tipos de quádricas.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

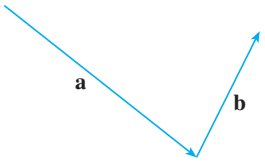
Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
3. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$.
4. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3 e qualquer escalar k, $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.
5. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3 e qualquer escalar k, $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$.
6. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
7. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V_3, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
8. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V_3, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.
9. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
10. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
11. O produto vetorial de dois vetores unitários é um vetor unitário.
12. A equação linear $Ax + By + Cz + D = 0$ representa uma reta no espaço.
13. O conjunto de pontos $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ é uma circunferência.
14. Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$.
15. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.
16. Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.
17. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.
18. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão em V_3, então $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

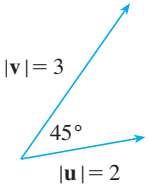
EXERCÍCIOS

1. (a) Encontre uma equação da esfera que passa pelo ponto $(6, -2, 3)$ e tem centro $(-1, 2, 1)$.
(b) Encontre a curva na qual esta esfera intercepta o plano yz.
(c) Encontre o centro e o raio da esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$$

2. Copie os vetores da figura e utilize-os para desenhar os seguintes vetores.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$



3. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são os vetores mostrados na figura, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. O sentido do vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é entrando ou saindo do papel?



4. Calcule a quantidade dada se
$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
(a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ (b) $|\mathbf{b}|$
(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ (f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(g) $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$ (h) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(i) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ (j) $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$
(k) O ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (com precisão de um grau)

5. Determine os valores de x tais que os vetores $\langle 3, 2, x\rangle$ e $\langle 2x, 4, x\rangle$ sejam ortogonais.

6. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

7. Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$. Determine
(a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
(c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

8. Mostre que, se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ estão em V_3, então
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$

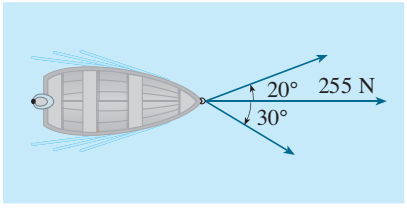
9. Determine o ângulo agudo entre duas diagonais de um cubo.

10. Dados os pontos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 1, 4)$ e $D(0, 3, 2)$, determine o volume do paralelepípedo com lados adjacentes AB, AC e AD.

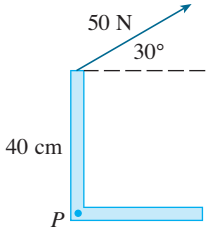
11. (a) Determine um vetor perpendicular ao plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ e $C(1, 4, 3)$.
(b) Determine a área do triângulo ABC.

12. Uma força constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ move um objeto ao longo de um segmento de reta de $(1, 0, 2)$ a $(5, 3, 8)$. Determine o trabalho realizado se a distância é medida em metros e a força em newtons.

13. Um barco é puxado para a praia usando duas cordas, como mostrado no diagrama. Se é necessária uma força de 255 N, determine o módulo da força exercida em cada corda.



14. Determine a módulo do torque em relação ao ponto P se uma força de 50 N é aplicada como mostrado.



15-17 Determine as equações paramétricas da reta.

15. Que passa pelos pontos $(4, -1, 2)$ e $(1, 1, 5)$

16. Que passa pelos pontos $(1, 0, -1)$ e é paralela à reta $\frac{1}{3}(x - 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$

17. Que passa por $(-2, 2, 4)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + 5z = 12$

18-20 Determine a equação do plano que satisfaz as condições.

18. Passa por $(2, 1, 0)$ e é paralelo a $x + 4y - 3z = 1$

19. Passa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ e $(6, 3, 1)$

20. Passa por $(1, 2, -2)$ e contém a reta $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + 3t$

21. Determine o ponto no qual a reta com equações paramétricas $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4t$, intercepta o plano $2x - y + z = 2$.

22. Determine a distância da origem até a reta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

23. Determine se as retas dadas pelas equações simétricas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

e

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+5}{2}$$

são paralelas, reversas ou concorrentes.

24. (a) Mostre que os planos $x+y-z=1$ e $2x-3y+4z=5$ não são nem paralelos nem perpendiculares.
(b) Determine, com precisão de um grau, o ângulo entre os planos.

25. Encontre uma equação do plano que passa pela reta de intersecção dos planos $x-z=1$ e $y+2z=3$ e é perpendicular ao plano $x+y-2z=1$.

26. (a) Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $A(2,1,1)$, $B(-1,-1,10)$ e $C(1,3,-4)$.
(b) Encontre as equações simétricas da reta que passa por B e é perpendicular ao plano da parte (a).
(c) Um segundo plano passa por $(2,0,4)$ e tem vetor normal $\langle 2,-4,-3\rangle$. Mostre que o ângulo agudo entre os planos é aproximadamente 43°.
(d) Encontre as equações paramétricas para a reta intersecção dos dois planos.

27. Determine a distância entre os planos $3x+y-4z=2$ e $3x+y-4z=24$.

28-36 Identifique e esboce o gráfico de cada superfície.

28. $x=3$

29. $x=z$

30. $y=z^2$

31. $x^2=y^2+4z^2$

32. $4x-y+2z=4$

33. $-4x^2+y^2-4z^2=4$

34. $y^2+z^2=1+x^2$

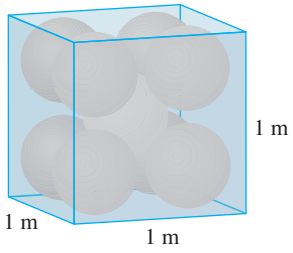
35. $4x^2+4y^2-8y+z^2=0$

36. $x=y^2+z^2-2y-4z=5$

37. Um elipsoide é gerado pela rotação da elipse $4x^2+y^2=16$ em torno do eixo x. Determine uma equação do elipsoide.

38. Uma superfície é constituída de todos os pontos P tais que a distância de P ao plano $y=1$ é o dobro da distância de P ao ponto $(0,-1,0)$. Determine a equação dessa superfície e identifique-a.

1. Cada lado de uma caixa cúbica mede 1 m. A caixa contém nove bolas de mesmo raio r. O centro de uma das bolas está no centro da caixa, e essa bola encosta em todas as outras oito bolas. Cada uma das oito bolas toca 3 lados da caixa. As bolas estão firmemente alojadas na caixa. (Veja a figura.) Determine o raio r. (Se você tiver problemas com este exercício, leia sobre a estratégia de resolver problemas através do *Uso de Analogias* na página 66, no Volume I.)



2. Seja B uma caixa sólida de comprimento C, largura L e altura H. Seja S o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância de no máximo 1 de algum ponto de B. Expresse o volume de S em função de C, L e H.

3. Seja L a reta obtida pela intersecção dos planos $cx + y + z = c$ e $x - cy + cz = -1$, onde c é um número real.

(a) Determine as equações simétricas da reta L.

(b) Quando o número c varia, a reta L descreve uma superfície S. Determine a equação da curva resultante da intersecção de S com o plano horizontal $z = t$ (corte de S no plano $z = t$).

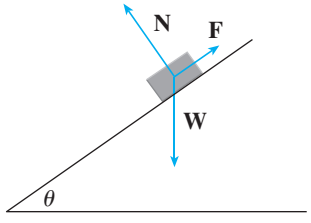
(c) Determine o volume do sólido limitado por S e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

4. Um avião é capaz de viajar a 180 km/h em condições normais. O piloto decola e voa em direção ao norte, guiado pela bússola do avião. Depois de 30 minutos de voo, o piloto constata que, em decorrência do vento, viajou 80 km a um ângulo de 5° a leste do norte.

(a) Qual a velocidade do vento?

(b) Para que direção o piloto deveria ter dirigido o avião para alcançar o destino pretendido?

5. Suponha que um bloco de massa m seja colocado em um plano inclinado, como mostrado na figura. A descida do bloco pelo plano inclinado é freada pela força de atrito; se θ não for grande o suficiente, o atrito impedirá qualquer deslocamento do bloco. As forças que agem sobre o bloco são seu peso $\mathbf{W}$, onde $|\mathbf{W}| = mg$ (g é a aceleração da gravidade); a força normal $\mathbf{N}$ (a componente normal da força de reação no plano do bloco) onde $|\mathbf{N}| = n$; e a força $\mathbf{F}$ devida ao atrito, que age paralelamente ao plano inclinado, no sentido contrário ao movimento. Se o bloco estiver parado e θ for aumentado, $|\mathbf{F}|$ aumentará até atingir um valor máximo, além do qual o bloco começará a deslizar. Nesse ângulo θ_s, pode ser observado que $|\mathbf{F}|$ é proporcional a n. Então, quando $|\mathbf{F}|$ é máximo, podemos dizer que $|\mathbf{F}| = \mu_s n$, onde μ_s é chamado *coeficiente de atrito estático* e depende dos materiais que estão em contato.



(a) Observe que $\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$ e deduza que $\mu_s = \text{tg}\,(\theta_s)$.

(b) Suponha que, para $\theta > \theta_s$, uma força externa $\mathbf{H}$ seja aplicada ao bloco, horizontalmente da esquerda para a direita, e seja $|\mathbf{H}| = h$. Se h for pequeno, o bloco poderá ainda deslizar; se h for suficientemente grande, o bloco subirá o plano inclinado. Seja h_{min} o menor valor de h que permita ao bloco permanecer parado (de modo que, $|\mathbf{F}|$ é máximo).

Escolhendo os eixos coordenados de modo que $\mathbf{F}$ esteja na direção do eixo x, determine para cada força atuante suas componentes paralela e perpendicular ao plano inclinado e mostre que

$$h_{\text{min}}\,\text{sen}\,\theta + mg\cos\theta = n \qquad \text{e} \qquad h_{\text{min}}\cos\theta + \mu_s n = mg\,\text{sen}\,\theta$$

(c) Mostre que

$$h_{\text{min}} = mg\,\text{tg}\,(\theta - \theta_s)$$

Isso parece razoável? Faz sentido para $\theta = \theta_s$? E quando $\theta \longrightarrow 90^\text{o}$? Explique.

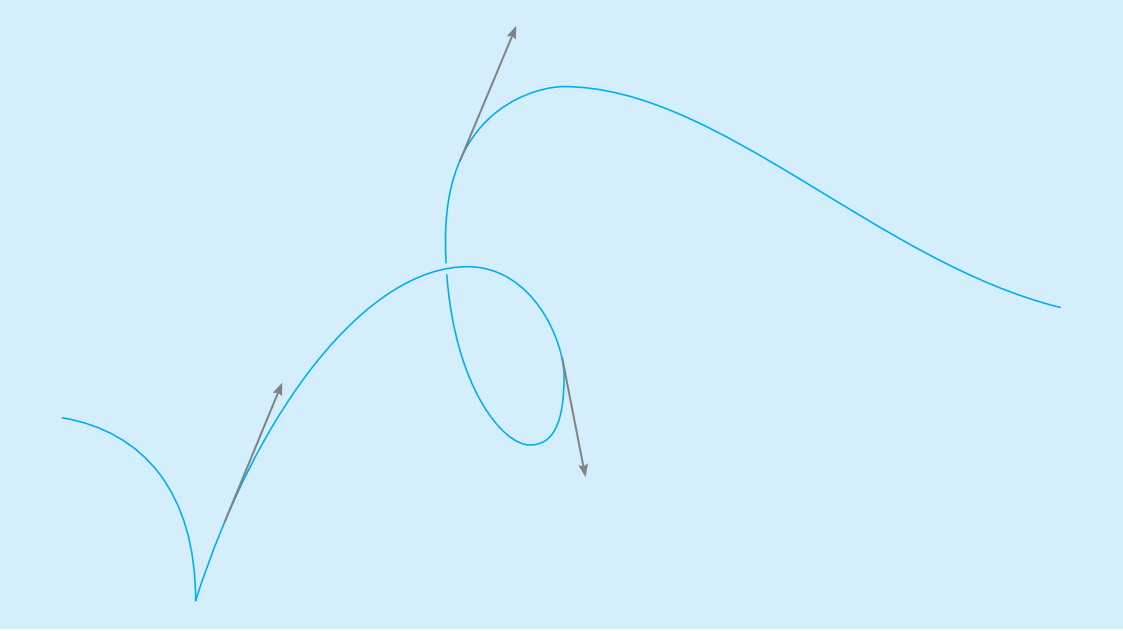
(d) Seja h_{max} o maior valor de h que permita ao bloco permanecer parado. (Nesse caso, qual o sentido de $\mathbf{F}$?) Mostre que

$$h_{\text{max}} = mg\,\text{tg}\,(\theta + \theta_s)$$

Essa equação parece razoável? Explique.

13

FUNÇÕES VETORIAIS



Os vetores tangentes mostram a direção para a qual uma curva espacial se dirige em qualquer ponto.

As funções que usamos até agora foram funções a valores reais. Agora estudaremos funções cujos valores são vetores, pois estas funções são necessárias para descrever curvas e superfícies no espaço. Usaremos funções a valores vetoriais também para descrever o movimento de objetos no espaço. Em particular, nós as usaremos para deduzir as leis de Kepler para o movimento planetário.

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Em particular, estamos interessados nas funções $\mathbf{r}$ cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que, para todo número t no domínio de $\mathbf{r}$, existe um único vetor de V_3, denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são as componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f, g e h são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de $\mathbf{r}$ e escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como na maioria das aplicações a variável independente é o tempo, utilizaremos a letra t para indicá-la.

EXEMPLO 1 Se

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

Pela convenção usual, o domínio de $\mathbf{r}$ é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $\mathbf{r}(t)$ está definida. As expressões t^3, $\ln(3 - t)$ e $\sqrt{t}$ estão todas definidas para $3 - t > 0$ e $t \geq 0$. Portanto, o domínio de $\mathbf{r}$ é o intervalo $[0, 3)$. □

O **limite** de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

■ Se $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$, essa definição equivale a dizer que o comprimento, a direção e o sentido do vetor $\mathbf{r}(t)$ se aproximam do comprimento, da direção e do sentido do vetor $\mathbf{L}$.

1 Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Da mesma forma, poderíamos escrever a definição usando os ε-δ (ver o Exercício 45). Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais (ver o Exercício 43).

EXEMPLO 2 Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$, onde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO De acordo com a Definição 1, o limite de $\mathbf{r}$ é o vetor cujas componentes são os limites das funções componentes de $\mathbf{r}$:

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0} (1 + t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \text{(pela Equação 3.3.2)}$$ □

Uma função vetorial $\mathbf{r}$ é **contínua em a** se

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que $\mathbf{r}$ é contínua em a se e somente se suas funções componentes f, g e h são contínuas em a.

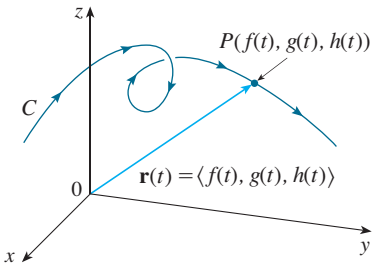


FIGURA 1
C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\mathbf{r}(t)$

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I. Então, o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço para os quais

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t) \tag{2}$$

e t varia no intervalo I é chamado **curva espacial**. As equações em (2) são denominadas **equações paramétricas de *C*** e t é conhecido como **parâmetro**. Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $\big(f(t), g(t), h(t)\big)$. Se consideramos a função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, então $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição do ponto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ sobre C. Assim, qualquer função vetorial $\mathbf{r}$ define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento $\mathbf{r}(t)$, como mostrado na Figura 1.

EXEMPLO 3 Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t\rangle$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

que reconhecemos, a partir da Equação 12.5.2, como as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto $(1, 2, -1)$ e paralela ao vetor $\langle 1, 5, 6\rangle$. Outro modo de perceber isso é observar que a função pode ser escrita como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, onde $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6\rangle$ e esta é a equação vetorial da reta dada pela Equação 12.5.1. □

Curvas planas também podem ser representadas utilizando-se notação vetorial. Por exemplo, a curva dada pelas equações paramétricas $x = t^2 - 2t$ e $y = t + 1$ (veja o Exemplo 1, na Seção 10.1) pode ser descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1\rangle = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$$

onde $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ e $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$.

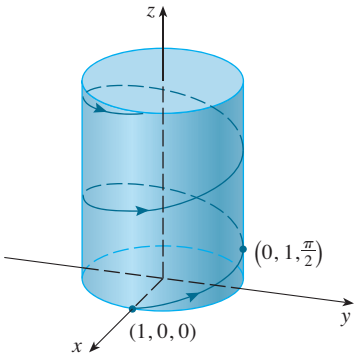


FIGURA 2

EXEMPLO 4 Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$r(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, a curva precisa pertencer ao cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move no sentido anti-horário em torno da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy (veja o Exemplo 2, na Seção 10.1). Como $z = t$, a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**. □



FIGURA 3

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953, James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.

Nos Exemplos 3 e 4 demos as equações vetoriais das curvas e pedimos uma descrição geométrica ou esboço delas. Nos dois exemplos a seguir, daremos uma descrição geométrica da curva e pediremos para encontrar equações paramétricas para ela.

EXEMPLO 5 Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.

■ A Figura 4 mostra o segmento de reta PQ do Exemplo 5.

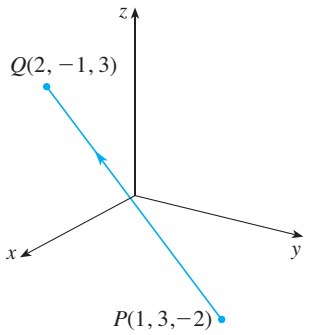


FIGURA 4

SOLUÇÃO Na Seção 12.5 encontramos uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor $\mathbf{r}_0$ à extremidade do vetor $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.) Aqui, tomamos $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2\rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3\rangle$ para obter uma equação para o segmento de reta de P a Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ou

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$ □

EXEMPLO 6 Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

SOLUÇÃO A Figura 5 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 6 mostra a curva de intersecção C, que é uma elipse.

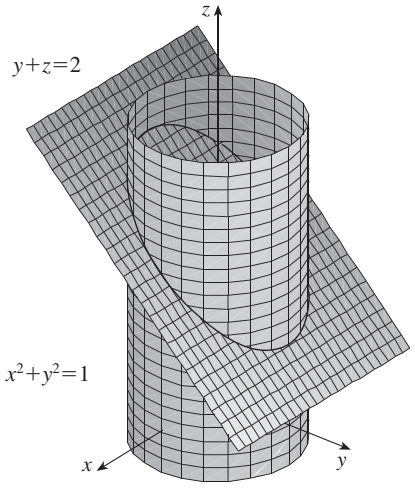


FIGURA 5

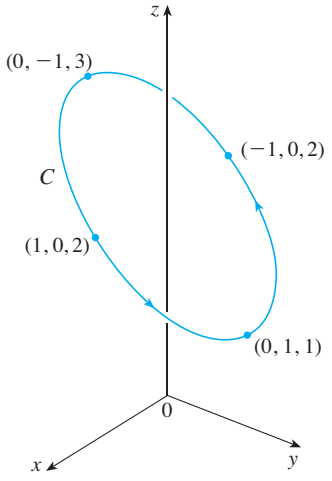


FIGURA 6

A projeção de C sobre o plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Assim, sabemos do Exemplo 2, na Seção 10.1, que podemos escrever

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para C, como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Essa equação é chamada *parametrização* da curva C. As setas na Figura 6 indicam o sentido em que a curva C é percorrida quando o valor do parâmetro t cresce. □

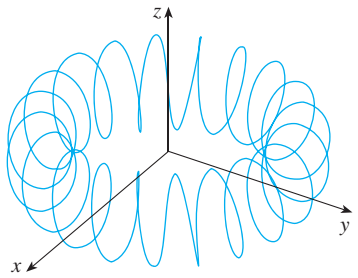


FIGURA 7
Espiral toroidal

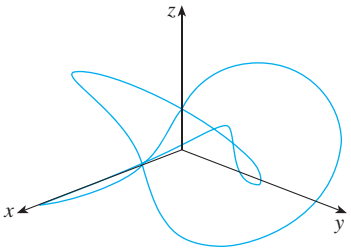


FIGURA 8
Nó de trevo

UTILIZANDO COMPUTADORES PARA TRAÇAR CURVAS ESPACIAIS

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de desenhar que as curvas planas. Para uma representação mais precisa precisamos utilizar a tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas

$$x = (4 + \operatorname{sen} 20t)\cos t \qquad y = (4 + \operatorname{sen} 20t)\operatorname{sen} t \qquad z = \cos 20t$$

Essa curva é denominada **espiral toroidal**, pois está sobre um toro. Outra curva interessante, o **nó de trevo ou trifólio**, com equações

$$x = (2 + \cos 1{,}5t)\cos t \qquad y = (2 + \cos 1{,}5t)\operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer uma dessas curvas à mão.

Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, as ilusões ópticas tornam difícil entender a forma real da curva. (Isso é especialmente verdadeiro para a Figura 8. Veja o Exercício 44.) O próximo exemplo mostra como lidar com este problema.

EXEMPLO 7 Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

SOLUÇÃO Começaremos traçando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas $x = t, y = t^2, z = t^3$ para $-2 \leq t \leq 2$. O resultado é apresentado na Figura 9(a), mas enxergá-la através desse único gráfico é muito difícil, em virtude da natureza da curva. A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma. Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.

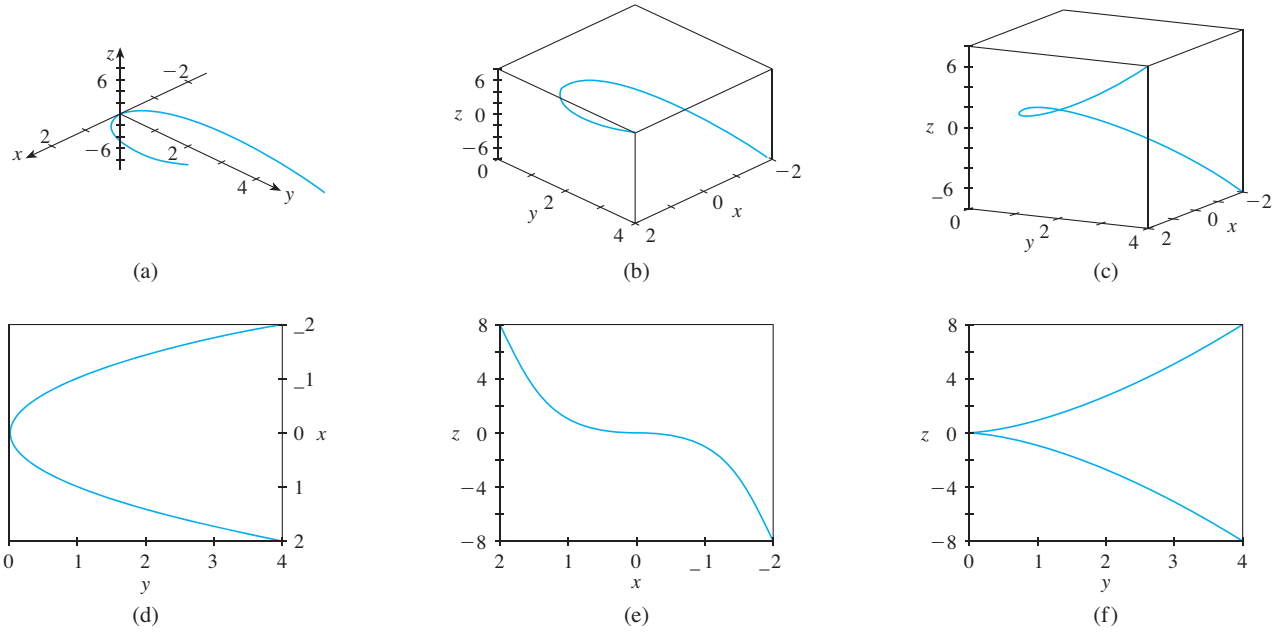


FIGURA 9
Vistas da cúbica retorcida

Temos uma ideia melhor da curva quando a observamos de diversos ângulos. A parte (c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista. As partes (d), (e) e (f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa. Em particular, a parte (d) mostra a vista de cima da caixa. A curva obtida é a projeção da curva no plano xy, a parábola $y = x^2$. A parte (e) exibe a projeção no plano xz, a curva cúbica $z = x^3$. Fica claro por que essa curva é chamada cúbica retorcida. □

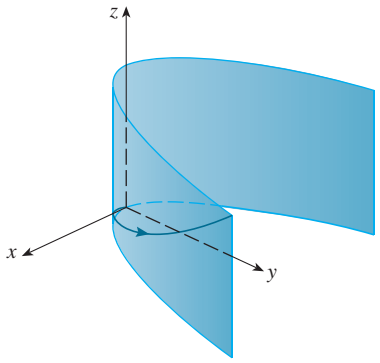


FIGURA 10

Outra maneira de visualizar uma curva espacial é desenhá-la em uma superfície. Por exemplo, a cúbica retorcida do Exemplo 7 está no cilindro parabólico $y = x^2$. (Elimine o parâmetro das duas primeiras equações paramétricas, $x = t$ e $y = t^2$.) A Figura 10 mostra o cilindro e a cúbica retorcida sobrepostos, tornando mais fácil enxergar que a curva caminha da origem para cima, sobre o cilindro. Usamos essa mesma técnica no Exemplo 4 para visualizar a hélice circular (veja a Figura 2).

Um terceiro processo de visualização para a cúbica retorcida é constatar que a curva também está contida na superfície cilíndrica $z = x^3$. Então podemos ver a curva como a intersecção das duas superfícies cilíndricas $y = x^2$ e $z = x^3$. (Veja a Figura 11.)

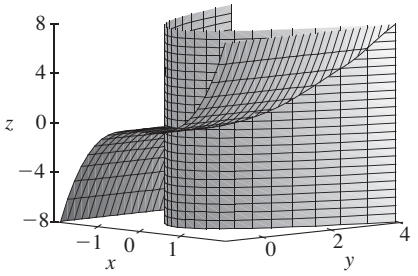
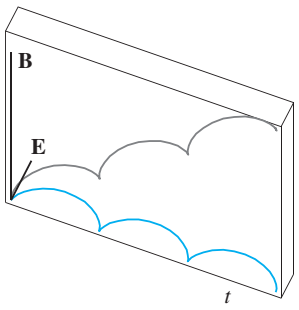


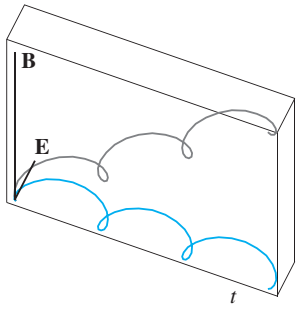
FIGURA 11

■ Alguns sistemas de computação algébrica nos proporcionam uma figura bem mais clara de uma curva espacial envolvendo-a em um tubo. Esse recurso nos permite ver se uma parte de uma curva passa pela frente ou por trás de outra parte dessa curva. Por exemplo, a Figura 13 mostra a curva da Figura 12(b), obtida como resultado do comando tubeplot no Maple.

Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial nas ciências é a trajetória de uma partícula com carga positiva nos campos elétrico e magnético **E** e **B** orientados ortogonalmente. Dependendo da velocidade inicial dada à partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a cicloide estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)] ou é uma curva cuja projeção é a trocoide investigada no Exercício 40 da Seção 10.1 [Figura 12 (b)].



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$



(b) $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2} \operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \right\rangle$

FIGURA 12
Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

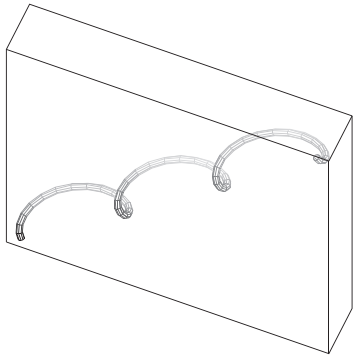


FIGURA 13

Para mais detalhes relativos à física envolvida e animações das trajetórias das partículas, veja os seguintes endereços na web:

- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

13.1 EXERCÍCIOS

1-2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t}\ \rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9-t^2)\,\mathbf{k}$

3-6 Calcule os limites.

3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \ln t \rangle$

4. $\lim\limits_{t \to 0} \left\langle \dfrac{e^t - 1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \dfrac{3}{t+1} \right\rangle$

5. $\lim\limits_{t \to 0} \left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k} \right)$

6. $\lim\limits_{t \to \infty} \left\langle \operatorname{arctg} t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t} \right\rangle$

7-14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t \rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3t, -t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 3, \cos t \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

15-18 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

15. $P(0,0,0)$, $Q(1,2,3)$

16. $P(1,0,1)$, $Q(2,3,1)$

17. $P(1,-1,2)$, $Q(4,1,7)$

18. $P(-2,4,0)$, $Q(6,-1,2)$

19-24 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I-VI). Justifique sua escolha.

19. $x = \cos 4t$, $y = t$, $z = \operatorname{sen} 4t$

20. $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$

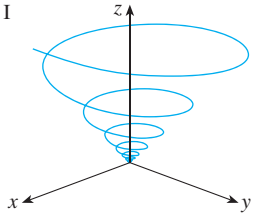
21. $x = t$, $y = 1/(1+t^2)$, $z = t^2$

22. $x = e^{-t}\cos 10t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} 10t$, $z = e^{-t}$

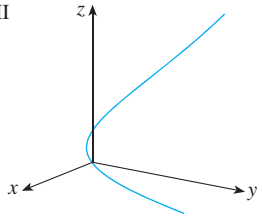
23. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 5t$

24. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \ln t$

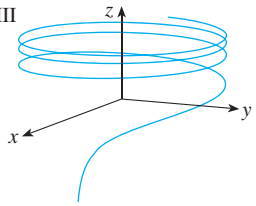
I



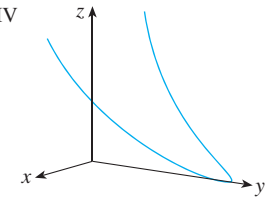
II



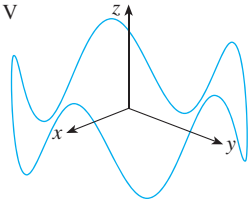
III



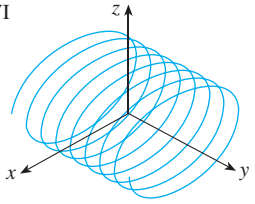
IV



V



VI



25. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

26. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

27. Em quais pontos a curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

28. Em quais pontos a hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

29-32 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t \rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t\operatorname{sen} t, t\cos t \rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t \rangle$

33. Trace a curva com equações paramétricas
$x = (1 + \cos 16t)\cos t$, $y = (1 + \cos 16t)\operatorname{sen} t$,
$z = 1 + \cos 16t$.
Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

34. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

35. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1,4,0)$ e $(9,-8,28)$, mas não passa pelo ponto $(4,7,-6)$.

36-38 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

36. O cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

37. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

38. O paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

39. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

40. Tente esboçar à mão a intersecção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a metade superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize um computador para traçá-la.

41. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

42. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

43. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

44. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t) \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano xy tem coordenadas polares $r = 2 + \cos 1{,}5t$ e $\theta = t$, de forma que r varia entre 1 e 3. Mostre então que z tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre $r = 1$ e $r = 3$.

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando tubeplot no Maple.)

45. Mostre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

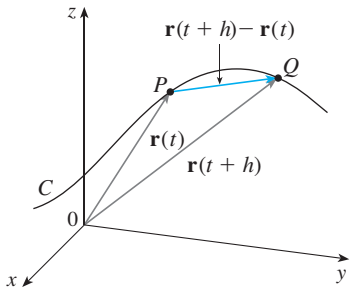
DERIVADAS

A **derivada** $\mathbf{r}'$ de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

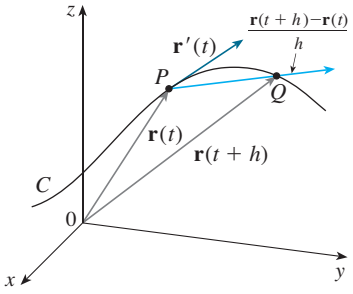
1

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos P e Q têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo por escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Quando



(a) O vetor secante



(b) O vetor tangente

FIGURA 1

$h \to 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão o vetor $\mathbf{r}'(t)$ é chamado **vetor tangente** à curva definida por $\mathbf{r}$ no ponto P, desde que exista $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\mathbf{r}'(t)$. Teremos ocasião de considerar o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial $\mathbf{r}$ por derivação de cada componente de $\mathbf{r}$.

2 TEOREMA Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

□

EXEMPLO 1

(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.

(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

SOLUÇÃO

(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de $\mathbf{r}$, obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Como $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, o vetor tangente unitário no ponto $(1, 0, 0)$ é

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

□

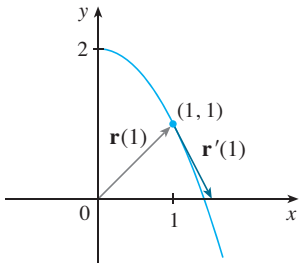


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Para a curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$, determine $\mathbf{r}'(t)$ e desenhe o vetor posição $\mathbf{r}(1)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(1)$.

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

A curva é plana, e a eliminação do parâmetro das equações $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ nos dá $y = 2 - x^2$, $x \geqslant 0$. Na Figura 2, desenhamos o vetor posição $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ começando na origem e o vetor tangente $\mathbf{r}'(1)$, começando no ponto correspondente $(1, 1)$. □

EXEMPLO 3 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice com equações paramétricas

$$x = 2 \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

no ponto $(0, 1, \pi/2)$.

SOLUÇÃO A equação vetorial da hélice é $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, \operatorname{sen} t, t, \rangle$ de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2 \operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle$$

O valor do parâmetro correspondente ao ponto $(0, 1, \pi/2)$ é $t = \pi/2$, e o vetor tangente é $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle$. A reta tangente passa por $(0, 1, \pi/2)$ e é paralela ao vetor $\langle -2, 0, 1 \rangle$, então, pela Equação 12.5.2, suas equações paramétricas são

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$ □

■ A hélice e a reta tangente do Exemplo 3 estão mostradas na Figura 3.

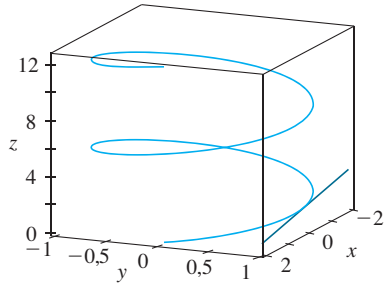


FIGURA 3

■ Na Seção 13.4 veremos como $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ podem ser interpretados como os vetores velocidade e aceleração de uma partícula se movendo pelo espaço com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.

Do mesmo modo que para as funções reais, a **segunda derivada** da função vetorial $\mathbf{r}$ é a derivada de $\mathbf{r}'$, ou seja, $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$. Por exemplo, a segunda derivada da função do Exemplo 3 é

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\operatorname{sen} t, 0 \rangle$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

O próximo teorema mostra que as fórmulas de derivação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

3 TEOREMA Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais diferenciáveis, c, um escalar e f, uma função real. Então,

1. $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}\,[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}\,[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{u}\,(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (Regra da Cadeia)

Este teorema pode ser demonstrado usando-se diretamente a Definição 1 ou empregando-se o Teorema 2 e as fórmulas de derivação correspondentes para as funções a valores reais. A demonstração da Fórmula 4 está a seguir; as demonstrações restantes são deixadas como exercícios.

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA 4 Seja

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle \qquad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t)\rangle$$

Então, $$\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)$$

e as regras usuais de derivação do produto fornecem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}\,[f_i(t)g_i(t)]\\ &= \sum_{i=1}^{3}\,[f_i'(t)g_i(t) + f_i(t)g_i'(t)]\\ &= \sum_{i=1}^{3} f_i'(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i'(t)\\ &= \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)\end{aligned}$$

□

EXEMPLO 4 Mostre que, se $|\mathbf{r}(t)| = c$ (uma constante), então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.

SOLUÇÃO Como

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

e c^2 é uma constante, da Fórmula 4 do Teorema 3 vem

$$0 = \frac{d}{dt}\,[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t)$$

Então, $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) = 0$, o que implica que $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ é sempre perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}(t)$. □

INTEGRAIS

A **integral definida** de uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t)$ pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de $\mathbf{r}$ como a integral de suas funções componentes f, g e h como segue. (Utilizamos a notação do Capítulo 5, no Volume I.)

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}(t_i^*)\Delta t\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{k}\right]\end{aligned}$$

então,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma primitiva de $\mathbf{r}$, ou seja, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, então

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = [2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ □

13.2 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

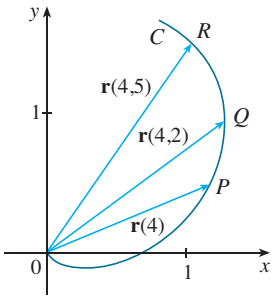
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.

(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.

(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t\rangle$, $0 \leq t \leq 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.

(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3-8

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.

(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1\rangle$, $t = -1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t}\,\rangle$, $t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $t = \pi/4$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$, $t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{3t}\mathbf{j}$, $t = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}$, $t = \pi/6$

9-16 Determine a derivada da função vetorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = at\cos 3t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c\cos^3 t\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17-20 Determine o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t\rangle, \quad t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \text{tg}\,t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23-26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23. $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

24. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

25. $x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\,\text{sen}\,t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26. $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27-29 Encontre as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

27. $x = t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$

28. $x = 2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\,t, \quad z = 4\cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$

29. $x = t\cos t, \quad y = t, \quad z = t\,\text{sen}\,t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

30. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\,\pi t, 2\,\text{sen}\,\pi t, \cos \pi t\rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \text{sen}\,t, \text{sen}\,2t, t\rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

32. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2\rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2\rangle$ se interceptam? Encontre o ângulo entre elas no ponto de intersecção, com precisão de um grau.

33-38 Calcule a integral.

33. $\int_0^1 (16t^3\,\mathbf{i} - 9t^2\,\mathbf{j} + 25t^4\,\mathbf{k})\,dt$

34. $\int_0^1 \left(\dfrac{4}{1+t^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{2t}{1+t^2}\,\mathbf{k}\right) dt$

35. $\int_0^{\pi/2} (3\,\text{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,t\cos t\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^2 (t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t-1}\,\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,\pi t\,\mathbf{k})\,dt$

37. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

39. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

40. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

41. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

43. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

45. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \text{sen}\,t, \cos t, t\rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\,t\rangle$, use a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

46. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções vetoriais no Exercício 45, use a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

47. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

48. Determine uma expressão para $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

49. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\dfrac{d}{dt}\,|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\,\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.
[*Sugestão*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

50. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

51. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

13.3 COMPRIMENTO DE ARCO E CURVATURA

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad \boxed{1}$$

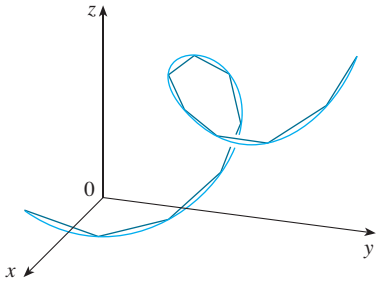


FIGURA 1
O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \leq t \leq b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, é possível mostrar que

$$\boxed{2} \qquad \begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \end{aligned}$$

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas (1) e (2) podem ser escritos de forma mais compacta:

$$\boxed{3} \qquad L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

porque, para as curvas planas $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

enquanto que para as curvas espaciais $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

■ A Figura 2 mostra o arco de hélice cujo comprimento é calculado no Exemplo 1.

EXEMPLO 1 Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

SOLUÇÃO Como $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, temos

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de $(1, 0, 0)$ até $(1, 0, 2\pi)$ é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$; assim, da Fórmula 3, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$ □

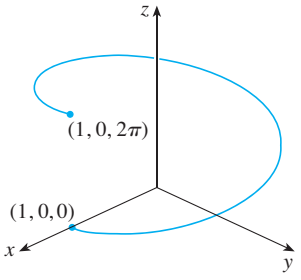


FIGURA 2

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle \qquad 1 \leq t \leq 2$$

poderia ser representada também pela função

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \qquad 0 \leqslant u \leqslant \ln 2 \tag{5}$$

onde a relação entre os parâmetros t e u é dada por $t = e^u$. Dizemos que as Equações 4 e 5 são **parametrizações** da curva C. Se fôssemos usar a Equação 3 para calcular o comprimento de C, obteríamos o mesmo resultado obtido usando-se as Equações 4 ou 5. Em geral, pode ser mostrado que, quando a Equação 3 é utilizada para calcular o comprimento de uma curva lisa por partes, o comprimento do arco é independente da parametrização empregada.

Suponhamos agora que C seja uma curva dada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

em que $\mathbf{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a a b. Definimos sua função comprimento de arco por

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du \tag{6}$$

Então, $s(t)$ é o comprimento da parte de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$. (Veja a Figura 3.) Se derivarmos os dois lados da Equação 6 usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos

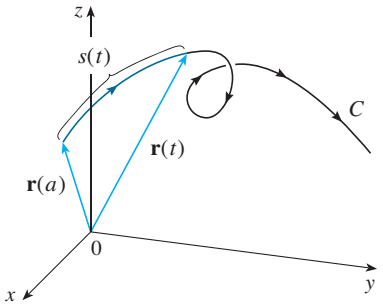


FIGURA 3

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| \tag{7}$$

É frequentemente útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva $\mathbf{r}(t)$ já está dada em termos de um parâmetro t e $s(t)$ é a função comprimento de arco dada pela Equação 6, podemos ser capazes de escrever t como uma função de s: $t = t(s)$. A curva pode ser então reparametrizada em termos de s substituindo-se o parâmetro t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. Assim, se $s = 3$, por exemplo, $\mathbf{r}(t(3))$ é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

EXEMPLO 2 Reparametrize a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, utilizando o comprimento de arco medido a partir de $(1, 0, 0)$ na direção de crescimento de t.

SOLUÇÃO O ponto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde ao valor do parâmetro $t = 0$. Do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

e, assim,

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\,t$$

Portanto, $t = s/\sqrt{2}$, e a reparametrização pedida é obtida substituindo-se o valor de t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos(s/\sqrt{2})\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(s/\sqrt{2})\,\mathbf{j} + (s/\sqrt{2})\,\mathbf{k}$$ □

CURVATURA

Uma parametrização $\mathbf{r}(t)$ é dita **lisa** em um intervalo I se $\mathbf{r}'$ for contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ em I. Uma curva é dita **lisa** se tiver uma parametrização lisa. Uma curva lisa não tem quebras abruptas ou cúspides; quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

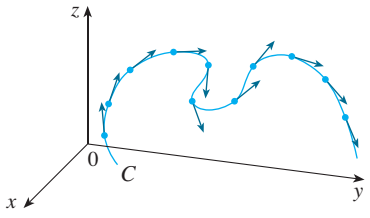


FIGURA 4
Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de C

Se C for uma curva lisa definida por uma função vetorial $\mathbf{r}$, lembre-se de que o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ será dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Da Figura 4, podemos ver que $\mathbf{T}(t)$ muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou retorce mais acentuadamente.

A curvatura de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. Especificamente, definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco. (Utilizamos o comprimento de arco, pois assim a curvatura independe da parametrização.)

8 DEFINIÇÃO A **curvatura** de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

onde $\mathbf{T}$ é o vetor tangente unitário.

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s. Assim, usamos a Regra da Cadeia (Teorema 13.2.3, Fórmula 6) para escrever

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Mas, da Equação 7, $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$, e então

9

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EXEMPLO 3 Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

SOLUÇÃO Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$$

Assim, $\mathbf{r}'(t) = -a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$ e $|\mathbf{r}'(t)| = a$

portanto, $$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

e $$\mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$$

Isso nos dá $|\mathbf{T}'(t)| = 1$; então, usando a Equação 9, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

□

O resultado do Exemplo 3 mostra que pequenos círculos têm uma grande curvatura, enquanto grandes círculos têm uma pequena curvatura, como nossa intuição indica. Podemos ver diretamente da definição que a curvatura de uma reta é sempre 0, pois o vetor tangente é constante.

Embora a Fórmula 9 possa ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura, em geral é mais conveniente aplicar a fórmula dada pelo teorema a seguir:

10 TEOREMA A curvatura de uma curva dada pela função vetorial $\mathbf{r}$ é

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

DEMONSTRAÇÃO Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ e $|\mathbf{r}'| = ds/dt$, temos

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

e, pela Regra do Produto (Teorema 13.2.3, Fórmula 3), temos

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

Usando o fato de que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$ (veja o Exemplo 2 da Seção 12.4), temos

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Agora $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todo t, e então $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ são ortogonais pelo Exemplo 4 da Seção 13.2. Portanto, pelo Teorema 12.4.6,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Então,
$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

e
$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$ □

EXEMPLO 4 Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em $(0, 0, 0)$.

SOLUÇÃO Calculemos inicialmente os ingredientes necessários:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Então, aplicando o Teorema 10 temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, onde $t = 0$, a curvatura é $\kappa(0) = 2$. □

Para o caso especial da curva plana com a equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro e escrevemos $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, temos $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. Temos também $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, e então, pelo Teorema 10:

11

$$\kappa(t) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

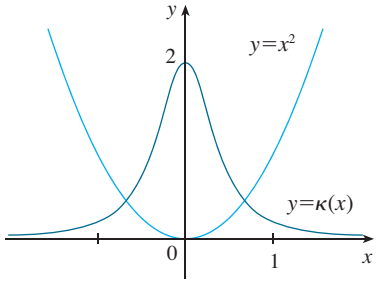


FIGURA 5
A parábola $y = x^2$ e sua função curvatura

EXEMPLO 5 Determine a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$.

SOLUÇÃO Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, a Fórmula 11 nos dá

$$\kappa(t) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em $(0, 0)$ é $\kappa(0) = 2$. Em $(1, 1)$ é $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0{,}18$. Em $(2, 4)$ é $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0{,}03$. Observe, a partir da expressão de $\kappa(x)$ ou do gráfico de κ na Figura 5, que $\kappa(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$. Isso corresponde a dizer que a parábola parece se tornar cada vez mais achatada quando $x \to \pm\infty$. □

VETORES NORMAL E BINORMAL

■ Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

Em um ponto dado de uma curva lisa $\mathbf{r}(t)$ existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$. Escolhemos um observando que, como $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todo t, temos $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$ pelo Exemplo 4 da Seção 13.2, de modo que $\mathbf{T}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Observe, no entanto, que $\mathbf{T}'(t)$ pode não ser um vetor unitário. Mas, se $\mathbf{r}'$ também for lisa, podemos definir o **vetor normal principal unitário** $\mathbf{N}(t)$ (ou simplesmente **normal unitário**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

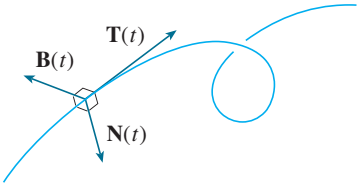


FIGURA 6

O vetor $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$, denominado **vetor binormal**, é perpendicular a $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ e também é unitário (veja a Figura 6).

■ A Figura 7 ilustra o Exemplo 6 mostrando os vetores **T**, **N** e **B** em dois pontos da hélice circular. Em geral, os vetores **T**, **N** e **B**, começando nos vários pontos da curva, formam um conjunto de vetores ortogonais, denominados referencial **TNB**, que se move ao longo da curva quando t varia. Esse referencial **TNB** tem um papel importante em um ramo da matemática chamado geometria diferencial e em suas aplicações em movimento de naves espaciais.

EXEMPLO 6 Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO Vamos, inicialmente, calcular os ingredientes necessários para o cálculo do vetor normal unitário:

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo z. O vetor binormal é

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle$$ □

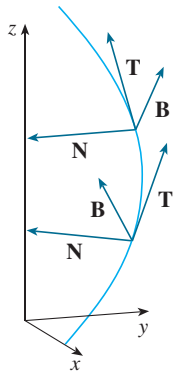


FIGURA 7

O plano determinado pelos vetores normal e binormal **N** e **B** em um ponto P sobre a curva C é chamado **plano normal** de C em P. Ele consiste em todas as retas que são ortogonais ao vetor tangente **T**. O plano determinado por **T** e **N** é denominado **plano osculador** de C em P. O nome vem do latim *osculum*, que significa "beijo". É o plano que mais se aproxima de conter a parte da curva próxima ao ponto P. (Para uma curva plana, o plano osculador é aquele que contém a curva.)

O círculo que está no plano osculador de C em P, tem a mesma tangente que C em P, fica do lado côncavo de C (na direção em que **N** aponta) e tem raio $\rho = 1/\kappa$ (o recíproco da curvatura) é conhecido como **círculo osculador** (ou **círculo da curvatura**) de C em P. É o círculo que melhor descreve o comportamento da curva C perto de P; e tem em comum com a curva a tangente, a normal e a curvatura em P.

EXEMPLO 7 Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice circular do Exemplo 6 no ponto $P(0, 1, \pi/2)$.

■ A Figura 8 mostra a hélice e o plano osculador do Exemplo 7.

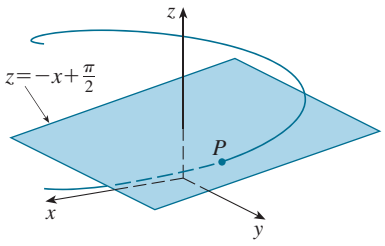


FIGURA 8

SOLUÇÃO O plano normal em P tem vetor normal $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1\rangle$, portanto sua equação é

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

O plano osculador em P contém os vetores **T** e **N**, e assim seu vetor normal é $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. Do Exemplo 6, temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Um vetor normal mais simples é $\langle 1, 0, 1\rangle$, então uma equação do plano osculador é

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = -x + \frac{\pi}{2} \qquad \square$$

EXEMPLO 8 Determine e desenhe o círculo osculador da parábola $y = x^2$ na origem.

SOLUÇÃO Do Exemplo 5, a curvatura da parábola na origem é $\kappa(0) = 2$. Dessa forma, o raio do círculo osculador é $1/\kappa = \frac{1}{2}$ e seu centro é $(0, \frac{1}{2})$. Sua equação é, portanto,

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

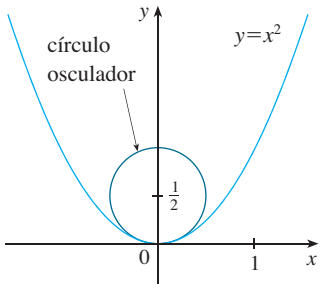


FIGURA 9

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \qquad \square$$

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 EXERCÍCIOS

1-6 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \cos t \rangle, \quad -10 \leq t \leq 10$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

7-9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle, \quad 1 \leq t \leq 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, t \ln t \rangle, \quad 1 \leq t \leq 2$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \operatorname{sen} 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

11. Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ e do plano $x + y + z = 2$.

13-14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t} \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 4t$, $z = 3 \cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1 \right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t. Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17-20

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.
(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \cos t \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle \qquad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3} t^3, t^2, 2t \rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t \rangle$

21-23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 4 \cos t\,\mathbf{k}$

24. Determine a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, t \rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas

$$x = t \qquad y = 4t^{3/2} \qquad z = -t^2$$

e calcule a curvatura no ponto $(1, 4, -1)$.

27-29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

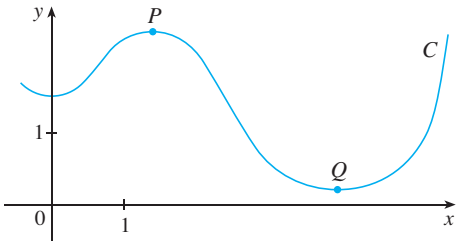
27. $y = 2x - x^2$ **28.** $y = \cos x$ **29.** $y = 4x^{5/2}$

30-31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.
(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.

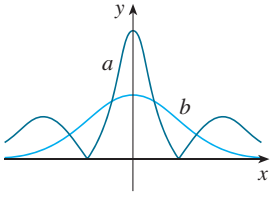


34-35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura $\kappa(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

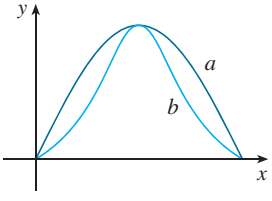
34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

36-37 Dois gráficos, a e b, são mostrados. Um é a curva $y = f(x)$ e o outro é o gráfico da sua função curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

36.



37.



SCA **38.** (a) Faça o gráfico da curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen } 3t, \text{ sen } 2t, \text{ sen } 3t \rangle$. Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?
(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

SCA **39.** O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\text{sen } t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \right\rangle$ é ilustrado na Figura 12(b), na Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

40. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada $x = f(t), y = g(t)$, é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t.

41-42 Use a fórmula do Exercício 40 para calcular a curvatura.

41. $x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \text{ sen } t$

42. $x = 1 + t^3, \qquad y = t + t^2$

43-44 Encontre os vetores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ no ponto indicado.

43. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \right\rangle, \qquad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$

44. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{ sen } t, \ln \cos t \rangle, (1, 0, 0)$

45-46 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

45. $x = 2 \text{ sen } 3t, \quad y = t, \quad z = 2 \cos 3t; \qquad (0, \pi, -2)$

46. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \qquad (1, 1, 1)$

47. Determine as equações para o círculo osculador da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

48. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

49. Em que ponto da curva $x = t^3, y = 3t, z = t^4$ o plano normal é paralelo ao plano $6x + 6y - 8z = 1$?

SCA **50.** Existe um ponto da curva do Exercício 49 onde o plano osculador é paralelo ao plano $x + y + z = 1$? (*Observação*: Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.)

51. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

52. Mostre que a curvatura de uma curva plana é $\kappa = |d\phi/ds|$, onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{i}$, isto é, ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

53. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{T}$.
(c) Deduza das partes (a) e (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algum número $\tau(s)$ chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)
(d) Mostre que para uma curva plana a torção é $\tau(s) = 0$.

54. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(A Fórmula 1 vem do Exercício 51, e a Fórmula 3, do Exercício 53.) Use o fato de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deduzir a Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

55. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Aqui as linhas indicam derivadas com relação a t . Comece como na demonstração do Teorema 10.)
(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$ (b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

56. Mostre que a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \text{ sen } t, bt \rangle$, onde a e b são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 55(d).]

57. Utilize a fórmula do Exercício 55(d) para calcular a torção da curva $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \right\rangle$.

58. Determine a curvatura e a torção da curva $x = \text{senh } t, y = \cosh t, z = t$ no ponto $(0, 1, 0)$.

59. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares (veja a Figura 3 na Seção 13.1). O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 ångströms ($1 \text{ Å} = 10^{-8}$ cm). Cada hélice, em uma volta completa, sobe 34 Å, e existem cerca de $2{,}9 \times 10^8$ voltas completas em uma molécula. Estime o comprimento de cada hélice circular.

60. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea de modo a fazer transições lisas entre as seções de trilhos retos. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo x precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta $y = 1$ para $x \geq 1$.
(a) Determine um polinômio $P = P(x)$ de grau 5 tal que a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.
(b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de F.

13.4 MOVIMENTO NO ESPAÇO: VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

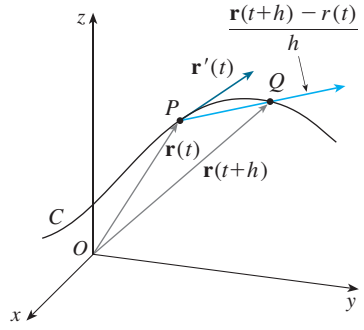


FIGURA 1

Nesta seção, mostraremos como as ideias dos vetores tangente e normal, assim como as de curvatura, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando estão se movendo ao longo de uma curva espacial. Em particular, seguiremos os passos de Newton, usando seu método para deduzir a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário.

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante t seja $\mathbf{r}(t)$. Observe da Figura 1 que, para pequenos valores de h, o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \tag{1}$$

se aproxima da direção de movimento da partícula que se move ao longo da curva $\mathbf{r}(t)$. Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo. O vetor (1) fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento h e seu limite é o **vetor velocidade** $\mathbf{v}(t)$ no instante t:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t) \tag{2}$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

A **velocidade escalar** da partícula no instante t é o módulo do vetor velocidade, ou seja, $|\mathbf{v}(t)|$. Isso é apropriado, pois, de (2) e da Equação 13.3.7, temos

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{taxa de variação da distância com relação ao tempo}$$

Como no caso de movimento unidimensional, a **aceleração** da partícula é definida como a derivada da velocidade:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EXEMPLO 1 O vetor posição de um objeto se movendo em um plano é dado por $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração do objeto no instante $t = 1$ e ilustre geometricamente.

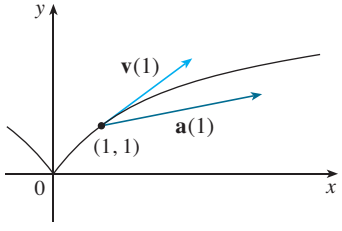


FIGURA 2

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração no instante t são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

e a velocidade escalar é

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Quando $t = 1$, temos

$$\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \qquad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Os vetores velocidade e aceleração estão mostrados na Figura 2. □

EXEMPLO 2 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar de uma partícula com vetor posição $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$.

SOLUÇÃO

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2 + t)e^t \rangle$$
$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1 + t)^2 e^{2t}}$$ □

A integração de vetores introduzida na Seção 13.2 pode ser usada para achar o vetor posição quando os vetores velocidade ou aceleração são conhecidos, como no seguinte exemplo.

EXEMPLO 3 Uma partícula se move a partir de uma posição inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$ com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Sua aceleração é dada por $\mathbf{a}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine sua velocidade e posição no instante t.

SOLUÇÃO Como $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, temos

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$$
$$= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Para determinar o valor do vetor constante $\mathbf{C}$, usaremos o fato de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. A equação anterior nos dá $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$, assim $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e

$$\mathbf{v}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$= (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$$

Como $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, temos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt$$
$$= \int [(2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}]\,dt$$
$$= \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}$$

Tomando $t = 0$, achamos que $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$. Então,

$$\mathbf{r}(t) = \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$ □

Em geral, por integração vetorial podemos recuperar a velocidade quando a aceleração for conhecida e a posição quando a velocidade for conhecida:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\,du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\,du$$

Se a força que age sobre a partícula é conhecida, então a aceleração pode ser determinada a partir da **Segunda Lei de Newton para o Movimento**. A versão vetorial dessa lei nos diz que, se em qualquer instante de tempo t, uma força $\mathbf{F}(t)$ age sobre um objeto de m produzindo uma aceleração $\mathbf{a}(t)$, então

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

EXEMPLO 4 Um objeto de massa m que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante ω tem vetor posição dado por $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$. Determine a força que age sobre o objeto e mostre que sua direção e sentido são dados pela reta que passa pela origem, apontando em direção à origem.

SOLUÇÃO Para encontrar a força, precisamos primeiro saber a aceleração:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

Portanto, pela Segunda Lei de Newton, temos a força

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j})$$

■ A Figura 3 mostra a trajetória da partícula do Exemplo 2 com vetores velocidade e aceleração quando $t = 1$.

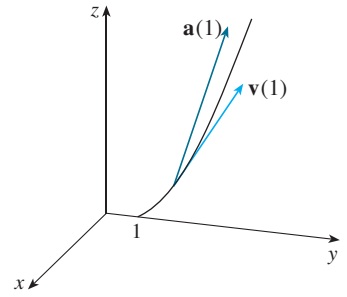


FIGURA 3

■ A expressão para $\mathbf{r}(t)$ que obtivemos no Exemplo 3 foi usada para traçar a trajetória da partícula na Figura 4 para $0 \leq t \leq 3$.

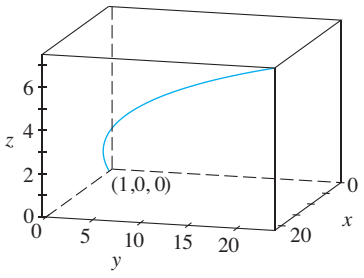


FIGURA 4

■ A velocidade angular do objeto em movimento com posição P é $\omega = d\theta/dt$, onde θ é o ângulo mostrado na Figura 5.

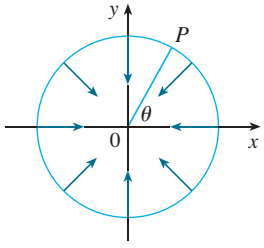


FIGURA 5

Observe que $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\,\mathbf{r}(t)$. Isso mostra que a força age na direção oposta ao vetor radial $\mathbf{r}(t)$ e, portanto, aponta para a origem (veja a Figura 5). Essa força é chamada *força centrípeta*. □

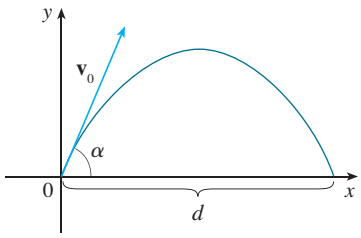


FIGURA 6

EXEMPLO 5 Um projétil é disparado com ângulo de elevação α e velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ (veja a Figura 6). Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade, determine a função posição $\mathbf{r}(t)$ do projétil. Para qual valor de α obtemos maior alcance (distância horizontal percorrida)?

SOLUÇÃO Fixamos os eixos coordenados de forma que a origem coincida com o ponto inicial da trajetória do projétil. Como a força devida à gravidade age para baixo, temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j}$$

onde $g = |\mathbf{a}| \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Então,

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$, temos

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Portanto,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando novamente, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Mas $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, e então o vetor de posição do projétil é dado por

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

Se escrevermos $|\mathbf{v}_0| = v_0$ (a velocidade escalar inicial do projétil), então

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$

e a Equação 3 se torna

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

As equações paramétricas da trajetória são

$$\boxed{4} \qquad \boxed{x = (v_0 \cos\alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2}$$

■ Se você eliminar t na Equação 4, verá que y é uma função quadrática de x. Logo, a trajetória da partícula é uma parábola.

A distância horizontal d é dada pelo valor de x quando $y = 0$. Impondo $y = 0$, obtemos $t = 0$ ou $t = (2v_0 \operatorname{sen}\alpha)/g$. O último valor de t fornece

$$d = x = (v_0 \cos\alpha)\,\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2\,(2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Claramente, d tem valor máximo quando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, ou seja, quando, $\alpha = \pi/4$. □

EXEMPLO 6 Um projétil é lançado com velocidade de disparo de 150 m/s e ângulo de elevação de 45° de um ponto 10 m acima do nível do solo. Onde o projétil vai atingir o solo e com que velocidade escalar?

SOLUÇÃO Se tomarmos a origem no nível do solo, então a posição inicial do projétil é (0, 10) e, portanto, precisamos adequar a Equação 4 adicionando 10 na expressão para y. Como $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45°$, e $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, temos

$$x = 150 \cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}\,t$$

$$y = 10 + 150 \operatorname{sen}(\pi/4)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}\,t - 4{,}9t^2$$

O impacto ocorrerá quando $y = 0$, isto é, quando $4{,}9t^2 - 75\sqrt{2}\,t - 10 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática (e usando somente o valor positivo de t), temos

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11\,250 + 196}}{9{,}8} \approx 21{,}74$$

Então $x \approx 75\sqrt{2}\,(21{,}74) \approx 2\,306$, assim o projétil atinge o solo a uma distância de cerca de 2 306 m.

A velocidade do projétil é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + (75\sqrt{2} - 9{,}8t)\,\mathbf{j}$$

Portanto, sua velocidade escalar no impacto é

$$|\mathbf{v}(21{,}74)| = \sqrt{(75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2} - 9{,}8 \cdot 21{,}74)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$ □

COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL DA ACELERAÇÃO

Quando estudamos o movimento de uma partícula, é frequentemente útil decompor a aceleração em duas componentes, uma na direção da tangente e outra na direção da normal. Se escrevemos $v = |\mathbf{v}|$ para a velocidade escalar da partícula, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

e, assim,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Se derivarmos ambos os lados em relação a t, obteremos

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}' \tag{5}$$

Se usarmos a expressão da curvatura dada pela Equação 13.3.9, temos

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \qquad \text{de modo que} \qquad |\mathbf{T}'| = \kappa v \tag{6}$$

O vetor normal unitário foi definido na seção anterior como $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, portanto de (6) vem

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v\mathbf{N}$$

e a Equação 5 se torna

$$\boxed{\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}} \tag{7}$$

Escrevendo a_T e a_N para as componentes tangencial e normal da aceleração, temos

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

onde

$$a_T = v' \qquad \text{e} \qquad a_N = \kappa v^2 \tag{8}$$

Essa conclusão está ilustrada na Figura 7.

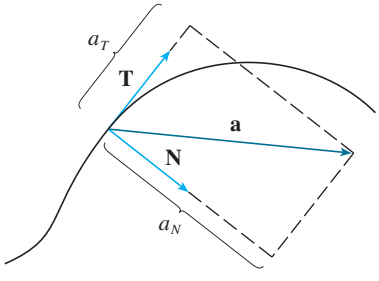


FIGURA 7

Vamos olhar agora o que a Fórmula 7 nos diz. A primeira coisa a observar é que o vetor binormal **B** não aparece. Independentemente de como o objeto se move no espaço, sua aceleração sempre está nos planos de **T** e **N** (o plano osculador). (Lembre-se de que **T** fornece a direção e sentido do movimento e **N** aponta a direção em que a curva está entortando.) Em seguida, observamos que a componente tangencial da aceleração é v', a taxa de variação da

velocidade escalar, e a componente normal da aceleração é κv^2, a curvatura vezes o quadrado da velocidade escalar. Isso explica o que acontece com um passageiro em um carro — uma virada brusca em uma rua pode ser vista como um valor grande de curvatura, de forma que a componente da aceleração perpendicular ao movimento é grande e o passageiro é jogado contra a porta do carro. A alta velocidade em uma curva tem o mesmo efeito: de fato, se dobrarmos nossa velocidade escalar, a_N será aumentada por um fator de 4.

Apesar de termos uma expressão para as componentes tangencial e normal da aceleração na Equação 8, é desejável obter expressões que dependam somente de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$. Com essa finalidade, tomamos o produto escalar de $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ com $\mathbf{a}$, como dada na Equação 7:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}) \\ &= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3 \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \\ &= vv' \qquad \text{(pois } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ e } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0\text{)}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{9} \qquad a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando a fórmula da curvatura dada pelo Teorema 13.3.10, temos

$$\boxed{10} \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} |\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EXEMPLO 7 Uma partícula se move com função posição $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$. Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= t^2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}''(t) &= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{8t^2 + 9t^4}\end{aligned}$$

Portanto, da Equação 9 vem que a componente tangencial é

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Como

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$$

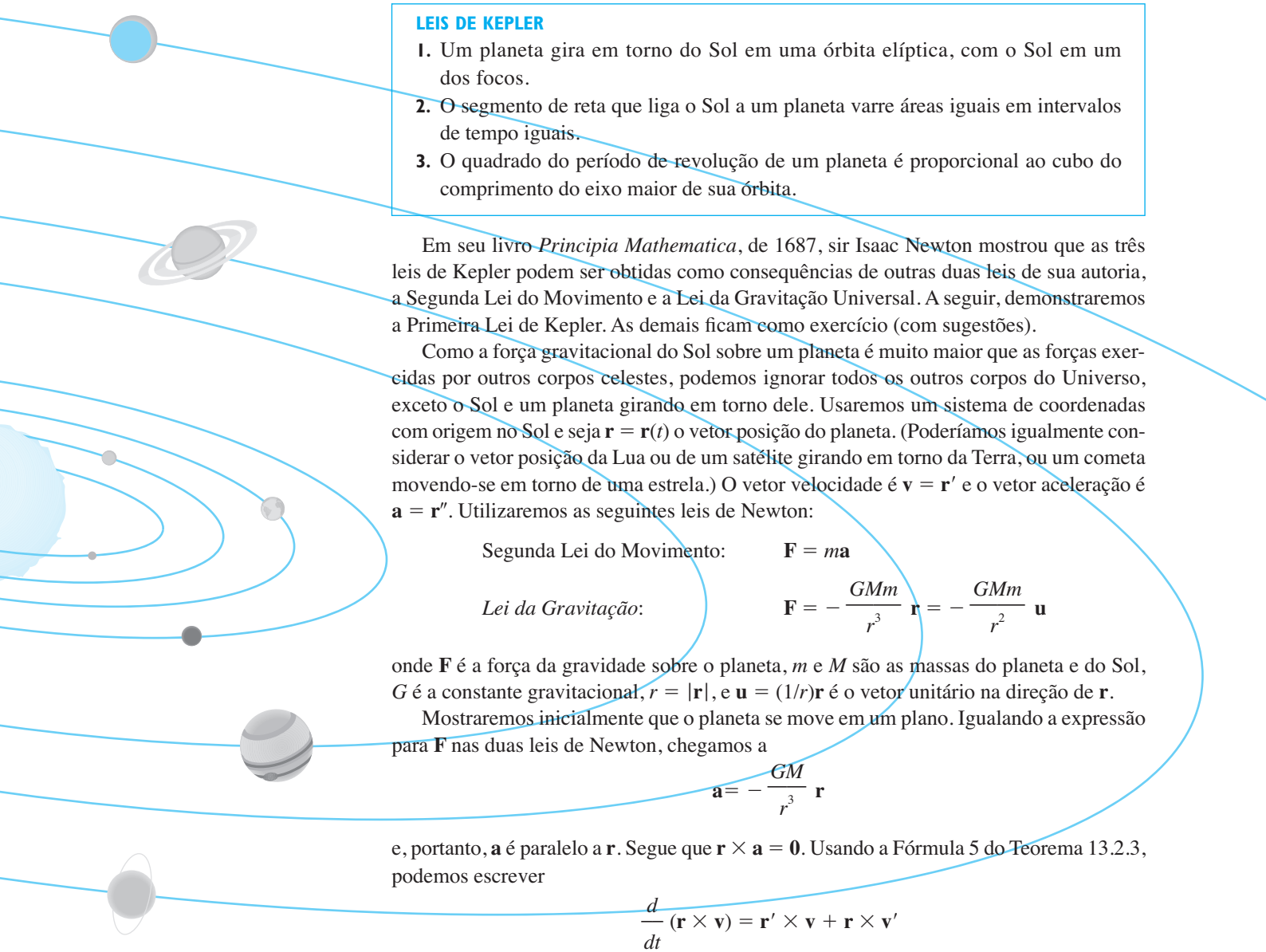
da Equação 10 obtemos a componente normal

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

□

LEIS DE KEPLER PARA O MOVIMENTO PLANETÁRIO

Descreveremos agora um dos principais feitos do cálculo mostrando como o material deste capítulo pode ser usado para demonstrar as leis de Kepler para o movimento planetário. Depois de 20 anos estudando as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou as seguintes três leis:



LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Em seu livro *Principia Mathematica*, de 1687, sir Isaac Newton mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como consequências de outras duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. A seguir, demonstraremos a Primeira Lei de Kepler. As demais ficam como exercício (com sugestões).

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros corpos celestes, podemos ignorar todos os outros corpos do Universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o vetor posição do planeta. (Poderíamos igualmente considerar o vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendo-se em torno de uma estrela.) O vetor velocidade é $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ e o vetor aceleração é $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

Segunda Lei do Movimento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Lei da Gravitação: $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{r^3}\,\mathbf{r} = -\dfrac{GMm}{r^2}\,\mathbf{u}$

onde $\mathbf{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$, e $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{r}$.

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para $\mathbf{F}$ nas duas leis de Newton, chegamos a

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\,\mathbf{r}$$

e, portanto, $\mathbf{a}$ é paralelo a $\mathbf{r}$. Segue que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Usando a Fórmula 5 do Teorema 13.2.3, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}' \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

onde $\mathbf{h}$ é um vetor constante. (Podemos supor que $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$; ou seja, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ não são paralelos.) Isso significa que o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é perpendicular a $\mathbf{h}$ para todos os valores de t, portanto o planeta está sempre em um plano que passa pela origem e é perpendicular a $\mathbf{h}$. Dessa forma, a órbita do planeta é uma curva plana.

Para demonstrar a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor $\mathbf{h}$ como segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' \\ &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \\ &= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2}\,\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM\,\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

$$= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \quad \text{(pelo Teorema 12.4.8, Propriedade 6)}$$

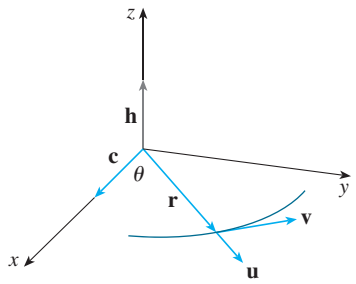


FIGURA 8

Mas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ e, como $|\mathbf{u}(t)| = 1$, segue do Exemplo 4 da Seção 13.2 que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

e, então,

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c} \tag{11}$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica $\mathbf{k}$ aponte na direção do vetor $\mathbf{h}$. O planeta se move assim no plano xy. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ e $\mathbf{u}$ são perpendiculares a $\mathbf{h}$, a Equação 11 mostra que $\mathbf{c}$ pertence ao plano xy. Isso significa que podemos escolher os eixos x e y de forma que o vetor $\mathbf{i}$ esteja na direção de $\mathbf{c}$, como mostrado na Figura 8.

Se θ é o ângulo entre $\mathbf{c}$ e $\mathbf{r}$, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \\ &= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}| \cos\theta = GMr + rc\cos\theta\end{aligned}$$

onde $c = |\mathbf{c}|$. Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM}\,\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

onde $e = c/(GM)$. Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde $h = |\mathbf{h}|$. Desse modo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Escrevendo $d = h^2/c$, obtemos a equação

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \tag{12}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade e. Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e, portanto, precisa ser uma elipse.

Isso completa a dedução da Primeira Lei de Kepler. Guiaremos você na dedução da Segunda e da Terceira Lei no Projeto Aplicado na página 807. As demonstrações dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta poderosa na descrição de leis da natureza.

13.4 EXERCÍCIOS

1. A tabela fornece coordenadas de uma partícula movendo-se no espaço ao longo de uma curva lisa.

(a) Determine a velocidade média nos intervalos de tempo [0; 1], [0,5; 1], [1; 2] e [1; 1,5].

(b) Estime a velocidade e a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.

t	x	y	z
0	2,7	9,8	3,7
0,5	3,5	7,2	3,3
1,0	4,5	6,0	3,0
1,5	5,9	6,4	2,8
2,0	7,3	7,8	2,7

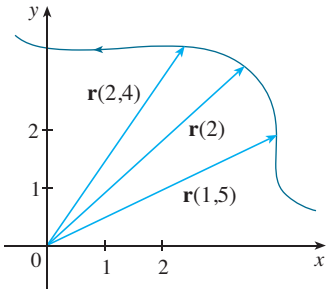
2. A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.

(a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $2 \leq t \leq 2{,}4$.

(b) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1{,}5 \leq t \leq 2$.

(c) Escreva uma expressão para o vetor velocidade $\mathbf{v}(2)$.

(d) Desenhe uma aproximação do vetor $\mathbf{v}(2)$ e estime a velocidade escalar da partícula em $t = 2$.



3–8 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle, \quad t = 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, 1 - t \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{2t}\,\mathbf{j}, \quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2 \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

9–14 Determine os vetores velocidade e aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + t \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

15–16 Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

15. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

16. $\mathbf{a}(t) = 2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 12t^2\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17–18

(a) Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração, e suas velocidade e posição iniciais.

(b) Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. A função posição de uma partícula é dada por $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$. Quando sua velocidade escalar é mínima?

20. Qual a força necessária para que uma partícula de massa m tenha a função posição $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$?

21. Uma força com módulo 20 N age diretamente no sentido ascendente a partir do plano xy em um objeto com massa 4 kg. O objeto começa na origem com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine sua função posição e sua velocidade escalar no instante t.

22. Mostre que, se uma partícula se move com velocidade escalar constante, então os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

23. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 500 m/s e ângulo de elevação de 30°. Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escalar no impacto.

24. Repita o Exercício 23, considerando agora o projétil disparado de uma posição 200 m acima do solo.

25. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de 45° em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qual a velocidade escalar inicial da bola?

26. Uma arma é disparada com ângulo de elevação de 30°. Qual a velocidade de disparo se o máximo de altura que a bala atinge são 500 m?

27. A velocidade de disparo de uma arma é 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância.

28. No beisebol, um batedor rebate uma bola, que está 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés e com ângulo de 50° acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)

29. Uma cidade medieval tem a forma de um quadrado e é protegida por muralhas com comprimento de 500 m e altura de 15 m. Você é o comandante de um exército atacante e o mais próximo que pode chegar da muralha é 100 m. Seu plano é incendiar a cidade arremessando com catapultas rochas aquecidas sobre a muralha (com velocidade escalar inicial de 80 m/s). Em que intervalo de ângulos você deve dizer a seus homens para armar a catapulta? (Suponha que a trajetória das rochas seja perpendicular à muralha.)

30. Uma bola com massa 0,8 kg é arremessada ao ar em direção ao sul com velocidade escalar de 30 m/s e ângulo de 30° com o solo. Um vento do oeste aplica uma força constante de 4 N à bola na direção leste. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

31. A água, descendo por um trecho reto de um rio, em geral escoa mais rapidamente no meio e a velocidade escalar diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio escoando para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a velocidade escalar máxima da água é de

3 m/s, podemos usar uma função quadrática como modelo básico para encontrar a taxa com que escoa a água x unidades de distância da margem oeste: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Um barco se move com uma velocidade escalar constante de 5 m/s a partir de um ponto de A na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a terra firme? Faça um gráfico da trajetória do barco.

(b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco a fim de atracar em um ponto B, diretamente oposto ao A, na margem leste. Se mantivermos a velocidade escalar constante de 5 m/s e uma direção constante, determine o ângulo no qual o barco deve ser conduzido. Depois, faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?

32. Outro modelo razoável para a velocidade escalar da água do rio no Exercício 31 é a função senoidal: $f(x) = 3 \operatorname{sen}(\pi x/40)$. Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de A até B com direção constante e velocidade escalar constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

33-38 Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

33. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{j}$

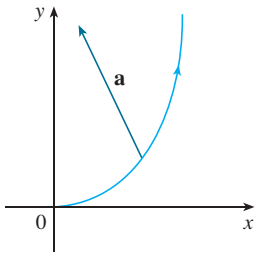
35. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}$

39. O módulo do vetor aceleração a é 10 cm/s^2. Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de a.



40. Se uma partícula com massa m se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$, então seu **momento angular** é definido como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ e seu **torque** é definido como $\tau(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Mostre que $\mathbf{L}'(t) = \tau(t)$. Deduza que, se $\tau(t) = \mathbf{0}$ para todo t, então $\mathbf{L}(t)$ é constante. (Esta é a *lei de conservação do momento angular*.)

41. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

e as coordenadas de uma estação espacial são (6, 4, 9). O capitão quer que a nave ataque na estação espacial. Quando os motores da nave devem ser desligados?

42. Um foguete que queima o combustível carregado dentro de si enquanto se move no espaço tem, no instante t, velocidade $\mathbf{v}(t)$ e massa $m(t)$. Se os gases provenientes da combustão escapam a uma velocidade de $\mathbf{v}_e$ relativamente ao foguete, deduz-se da Segunda Lei de Newton do movimento que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Mostre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln\dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da velocidade escalar de escape de seus gases de combustão, que fração de sua massa inicial o foguete deverá queimar como combustível?

PROJETO APLICADO

LEIS DE KEPLER

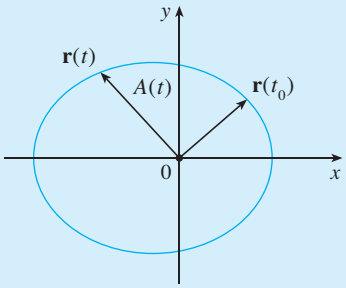
Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento planetário, baseando-se em uma grande quantidade de dados relativos à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Kepler formulou essas leis, pois elas se ajustavam aos dados astonômicos. Ele não foi capaz de perceber por que elas valiam nem como se relacionavam umas com as outras. Mas *sir* Isaac Newton, em seu *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou como deduzir as três leis de Kepler de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. Na Seção 13.4 demontramos a Primeira Lei de Kepler usando o cálculo de funções vetoriais. Neste projeto, guiaremos você pela demonstração da Segunda e da Terceira Leis de Kepler e exploraremos suas consequências.

1. Utilize os seguintes passos para demonstrar a Segunda Lei de Kepler. A notação será a mesma que foi empregada na demonstração da Primeira Lei na Seção 13.4. Em particular, use coordenadas polares de modo que $\mathbf{r} = (r \cos \theta)\,\mathbf{i} + (r \operatorname{sen} \theta)\,\mathbf{j}$.



(a) Mostre que $\mathbf{h} = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\,\mathbf{k}$.

(b) Deduza que $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h$.

(c) Se $A = A(t)$ é a área varrida pelo vetor radical $\mathbf{r} = \mathrm{r}(t)$ no intervalo de tempo $[t_0, t]$ como na figura, mostre que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

(d) Deduza que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} h = \text{constante}$$

Essa equação mostra que a taxa na qual A é percorrida é constante e demonstra a Segunda Lei de Kepler.

2. Seja T o período de um planeta em torno do Sol; ou seja, T é o tempo necessário para o planeta dar uma volta completa em torno do Sol, em sua órbita elíptica. Suponha que os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse sejam $2b$ e $2a$.

(a) Use a parte (d) do Problema 1 para mostrar que $T = 2\pi ab/h$.

(b) Mostre que $\dfrac{h^2}{GM} = ed = \dfrac{b^2}{a}$.

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}\,a^3$.

Isso demonstra a Terceira Lei de Kepler. [Observe que a constante de proporcionalidade $4\pi^2/(GM)$ independe do planeta.]

3. O período da Terra girando em torno do Sol é de aproximadamente 365,25 dias. Utilize esse fato e a Terceira Lei de Kepler para determinar o eixo maior da órbita terrestre. Você precisará do valor da massa do Sol, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, e da constante gravitacional, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

4. É possível colocar um satélite em órbita em torno da Terra de modo que ele permaneça fixo em uma posição localizada sobre o equador. Calcule a altitude necessária para esse satélite. A massa da Terra é $5{,}98 \times 10^{24}$kg, seu raio é $6{,}37 \times 10^{6}$m. (Essa órbita é chamada Órbita Geossíncrona de Clarke, em homenagem a Arthur C. Clarke, quem primeiro propôs a ideia, em 1945. O primeiro satélite com essas características, *Syncom II*, foi lançado em julho de 1963.)

13 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. O que é uma função vetorial? Como calcular sua derivada e sua integral?
2. Qual a relação entre funções vetoriais e curvas espaciais?
3. Como achar o vetor tangente a uma curva lisa em um ponto? Como achar a reta tangente? Como determinar o vetor tangente unitário?
4. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são funções vetoriais diferenciáveis, c é um escalar e f é uma função real, escreva as regras para derivar as seguintes funções vetoriais:
   (a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ (b) $c\mathbf{u}(t)$ (c) $f(t)\mathbf{u}(t)$
   (d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ (e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ (f) $\mathbf{u}(f(t))$
5. Como achar o comprimento de uma curva espacial dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$?
6. (a) Qual a definição de curvatura?
   (b) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{T}'(t)$.
   (c) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.
   (d) Escreva a fórmula para curvatura de uma curva plana com equação $y = f(x)$.
7. (a) Escreva as fórmulas para os vetores normal e binormal de uma curva lisa espacial $\mathbf{r}(t)$.
   (b) O que é o plano normal de uma curva em um ponto? E o plano osculador? O que é o círculo osculador?
8. (a) Como determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva espacial?
   (b) Escreva a aceleração em termos de suas componentes tangencial e normal.
9. Quais são as leis de Kepler?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. A curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + 3t^3\,\mathbf{k}$ é uma reta.
2. A derivada da função vetorial é obtida derivando cada componente da função.
3. Se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são funções vetoriais diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$
4. Se $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial diferenciável, então
$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$
5. Se $\mathbf{T}(t)$ é o vetor tangente unitário de uma curva lisa, então a curvatura é $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$.
6. O vetor binormal é dado por $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$.
7. Suponha que f seja duas vezes continuamente diferenciável. Em um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$, a curvatura é 0.
8. Se $\kappa = 0$ para todo t, a curva é uma reta.
9. Se $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todo t, então $|\mathbf{r}'(t)|$ é uma constante.
10. Se $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todo t, então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.
11. O círculo osculador de uma curva C em um ponto tem o mesmo vetor tangente, vetor normal e curvatura que C naquele ponto.
12. As parametrizações diferentes de uma mesma curva resultam em vetores tangentes idênticos em um mesmo ponto da curva.

EXERCÍCIOS

1. (a) Esboce a curva com função vetorial
$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \qquad t \geqslant 0$$
(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

2. Seja $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2 - t}, (e^t - 1)/t, \ln(t + 1) \rangle$.
(a) Determine o domínio de $\mathbf{r}$.
(b) Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$.
(c) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

3. Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $x + z = 5$.

4. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} 2t$, $z = 2 \operatorname{sen} 3t$ no ponto $(1, \sqrt{3}, 2)$. Desenhe a curva e a tangente em uma mesma tela.

5. Se $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}$, calcule $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt$.

6. Seja C a curva com equações $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln t$. Determine (a) o ponto de intersecção de C com o plano xz, (b) as equações paramétricas da reta tangente em $(1, 1, 0)$ e (c) uma equação para o plano normal a C em $(1, 1, 0)$.

7. Utilize a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento do arco da curva com equação $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 3$.

8. Determine o comprimento da curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

9. A hélice $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ intercepta a curva $\mathbf{r}_2(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ no ponto $(1, 0, 0)$. Determine o ângulo de intersecção dessas curvas.

10. Reparametrize a curva $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t \cos t\,\mathbf{k}$ em relação ao comprimento do arco de curva medido a partir do ponto $(1, 0, 1)$ na direção crescente de t.

11. Para a curva dada por $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, t \rangle$, determine (a) o vetor tangente unitário, (b) o vetor normal unitário e (c) a curvatura.

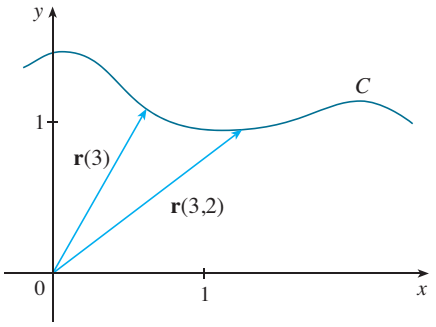
12. Determine a curvatura da elipse $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ nos pontos $(3, 0)$ e $(0, 4)$.

13. Encontre a curvatura da curva $y = x^4$ no ponto $(1, 1)$.

14. Determine uma equação do círculo osculador da curva $y = x^4 - x^2$ na origem. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.

15. Determine uma equação do plano osculador da curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = t$, $z = \cos 2t$ no ponto $(0, \pi, 1)$.

16. A figura mostra a curva C traçada por uma partícula com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.
(a) Desenhe o vetor que representa a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $3 \leqslant t \leqslant 3{,}2$.
(b) Escreva a expressão para a velocidade $\mathbf{v}(3)$.
(c) Escreva uma expressão para o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(3)$ e desenhe-o.



17. Uma partícula se move com função posição $\mathbf{r}(t) = t \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$. Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da partícula.

18. Uma partícula começa sua trajetória na origem com velocidade inicial $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Sua aceleração é $\mathbf{a}(t) = 6t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$. Determine sua função posição.

19. Um atleta arremessa um disco em um ângulo de 45° em relação à horizontal com velocidade escalar inicial de 13 m/s. Ela deixa sua mão a 2 m acima do chão.
(a) Onde está o disco 2 segundos depois?
(b) Qual a altura máxima que o disco atinge?
(c) Onde o disco atinge o chão?

20. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que se move com vetor posição
$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$$

21. Um disco de raio 1 está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante ω. Uma partícula inicia no centro do disco e se move em direção às bordas em uma direção radial fixa de forma que sua posição no instante t, $t \geqslant 0$, é dada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{R}(t)$, onde
$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$
(a) Mostre que a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula é
$$\mathbf{v} = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} + t\mathbf{v}_d$$
onde $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$ é a velocidade do ponto na borda do disco.
(b) Mostre que a aceleração $\mathbf{a}$ da partícula é
$$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{v}_d + t\,\mathbf{a}_d$$

onde $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$ é a aceleração na borda do disco. O termo extra $2\mathbf{v}_d$ é chamado *aceleração de Coriolis*; ele é o resultado da interação entre a rotação do disco e o movimento da partícula. Podemos obter uma demonstração física dessa aceleração andando em direção à borda de um carrossel.

(c) Determine a aceleração de Coriolis de uma partícula que se move em um disco rodando segundo a equação

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos \omega t\, \mathbf{i} + e^{-t}\operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

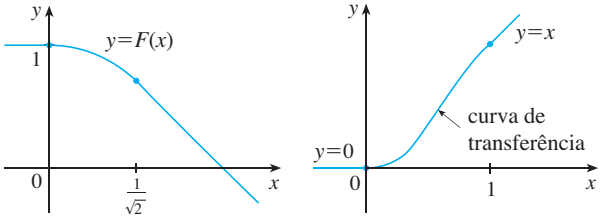
22. No projeto das *curvas de transferência*, usadas para ligar trechos retos dos trilhos de uma linha férrea, é importante entender que a aceleração do trem deve ser contínua de modo que a força de reação exercida pelo trem no trilho seja também contínua. Por causa das fórmulas obtidas na Seção 13.4 para as componentes da aceleração, este só será o caso se a curvatura variar de modo contínuo.

(a) Um candidato lógico à curva de transferência para juntar dois trilhos existentes dados por $y = 1$ para $x \leqslant 0$ e $y = \sqrt{2} - x$ para $x \geqslant 1/\sqrt{2}$ poderia ser a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 < x < 1/\sqrt{2}$, cujo gráfico é o arco de círculo mostrado na figura. À primeira vista, parece razoável. Mostre que a função

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leqslant 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{se } x \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua e tem derivada contínua, mas não tem curvatura contínua. Assim, f não é uma curva de transferência adequada.

(b) Determine um polinômio de quinto grau para servir de curva de transferência entre os dois segmentos de reta: $y = 0$ para $x \leqslant 0$ e $y = x$ para $x \geqslant 1$. Poderíamos utilizar um polinômio de quarto grau? Use uma calculadora gráfica ou computador para esboçar o gráfico da função "conectada" e verifique que ele se assemelha ao da figura.



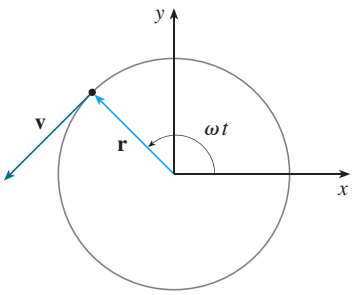


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. Uma partícula P move-se com velocidade angular constante ω em torno de um círculo com centro na origem e raio R. A partícula é dita estar em *movimento circular uniforme*. Suponha que o movimento seja no sentido anti-horário e que a partícula esteja no ponto $(R, 0)$ quando $t = 0$. O vetor posição no instante $t \geqslant 0$ é $\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$.

(a) Determine o vetor velocidade $\mathbf{v}$ e mostre que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = 0$. Conclua que $\mathbf{v}$ é tangente ao círculo e tem sentido igual ao do movimento.

(b) Mostre que a velocidade escalar $|\mathbf{v}|$ da partícula é a constante ωR. O *período* T da partícula é o tempo necessário para que a partícula complete uma volta. Conclua que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Encontre o vetor aceleração $\mathbf{a}$. Mostre que ele é proporcional a $\mathbf{r}$ e que aponta para a origem. Uma aceleração com essa propriedade é chamada *aceleração centrípeta*. Mostre que o módulo do vetor aceleração é $|\mathbf{a}| = R\omega^2$.

(d) Suponha que a partícula tenha massa m. Mostre que o módulo da força $\mathbf{F}$ que é necessária para produzir esse movimento, denominada *força centrípeta*, é

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

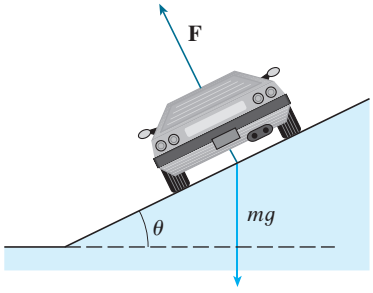


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

2. Uma curva circular de raio R em uma autoestrada é inclinada em um ângulo de θ de modo que um carro possa passar pela curva sem derrapar quando não existe atrito entre a estrada e os pneus. A perda de atrito ocorre, por exemplo, se a estrada está coberta com uma fina camada de água ou de gelo. A velocidade escalar nominal v_R associada a uma curva é a velocidade escalar máxima que o carro pode atingir sem derrapar. Suponha que um carro de massa m esteja transpondo a curva com a velocidade escalar nominal v_R. Duas forças estarão agindo sobre o carro: a força vertical, mg, devido ao peso do carro, e uma força $\mathbf{F}$ exercida pela estrada, perpendicular a ela (veja a figura).

A componente vertical de $\mathbf{F}$ equilibra o peso do carro, de forma que $|\mathbf{F}|\cos\theta = mg$. A componente horizontal de $\mathbf{F}$ produz uma força centrípeta no carro de forma que, pela Segunda Lei de Newton e pela parte (d) do Problema 1,

$$|\mathbf{F}|\,\text{sen}\,\theta = \frac{mv_R^2}{R}$$

(a) Mostre que $v_R^2 = Rg\,\text{tg}\,\theta$.

(b) Determine a velocidade escalar nominal associada a uma curva circular de raio 120 m que é inclinada em um ângulo de 12°.

(c) Suponha que os engenheiros projetistas queiram manter a inclinação em 12°, mas desejem aumentar a velocidade escalar nominal em 50%. Nesse caso, qual deve ser o raio da curva?

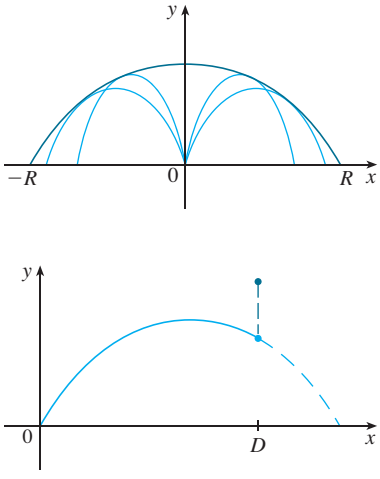


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

3. Um projétil é disparado da origem com um ângulo de elevação α e velocidade escalar inicial v_0. Supondo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força que age sobre o projétil seja a gravidade, g, foi mostrado no Exemplo 5 da Seção 13.4 que o vetor posição do projétil é

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\,\mathbf{i} + [(v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2]\,\mathbf{j}$$

Também foi mostrado que o alcance máximo do projétil ocorre quando $\alpha = 45°$ e, nesse caso, o alcance é $R = v_0^2/g$.

(a) Qual é o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir a altura máxima e qual é essa altura?

(b) Fixe uma velocidade escalar inicial v_0 e considere a parábola $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$, cujo gráfico é exposto na figura. Mostre que o projétil pode atingir qualquer alvo

dentro ou na fronteira da região limitada pela parábola e pelo eixo x, e que o projétil não pode atingir nenhum alvo fora dessa região.

(c) Suponha que o lançador do projétil tenha um ângulo de elevação α quando mirando um alvo que esteja suspenso a uma altura h diretamente acima de um ponto D unidades à frente. O alvo é solto no instante em que o projétil é lançado. Mostre que o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade v_0, desde que o projétil não atinja o solo "antes" de D.

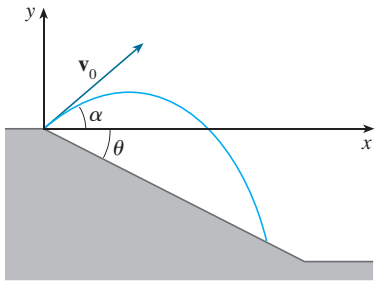


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

4. (a) Um projétil é disparado a partir da origem em direção a um plano inclinado para baixo em um ângulo θ com a horizontal. O ângulo de elevação do lançador e a velocidade escalar inicial do projétil são respectivamente α e v_0. Encontre o vetor posição do projétil e as equações paramétricas da trajetória do projétil como funções do tempo t. (Despreze a resistência do ar.)

(b) Mostre que o ângulo α de elevação que vai maximizar o alcance do projétil no plano inclinado é a metade do ângulo entre o plano e a vertical.

(c) Suponha que o projétil seja lançado sobre um plano inclinado para cima cujo ângulo de inclinação é θ. Mostre que, a fim de maximizar o alcance (ladeira acima), o projétil deverá ser disparado em direção à metade do ângulo entre o plano e a vertical.

(d) Em um artigo apresentado em 1686, Edmond Halley resumiu as leis da gravitação e do movimento de projéteis e as aplicou à artilharia. Um dos problemas propostos por ele envolvia disparar um projétil para atingir um alvo a uma distância R em um plano inclinado para cima. Mostre que o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir o alvo, mas usando a menor quantidade de energia, é o mesmo que o ângulo da parte (c). (Use o fato de que a energia necessária para disparar o projétil é proporcional ao quadrado da velocidade inicial, assim, minimizar a energia equivale a minimizar a velocidade inicial.)

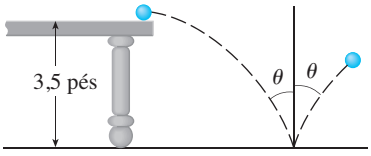


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

5. Uma bola rola de uma mesa com uma velocidade escalar de 0,5 m/s. A mesa tem 1,2 m de altura.

(a) Determine o ponto no qual a bola atinge o solo e encontre sua velocidade escalar no instante do impacto.

(b) Encontre o ângulo θ entre a trajetória da bola e a reta vertical que passa pelo ponto de impacto (veja a figura).

(c) Suponha que a bola repique no solo no mesmo ângulo com o qual ela o atinge, mas que perca 20% de sua velocidade escalar em virtude da energia absorvida no impacto. Onde a bola atinge o chão no segundo repique?

6. Determine a curvatura da curva com equações paramétricas

$$x = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta \qquad y = \int_0^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$

7. Se um projétil é disparado com ângulo de elevação α e velocidade escalar inicial v, as equações paramétricas de sua trajetória são

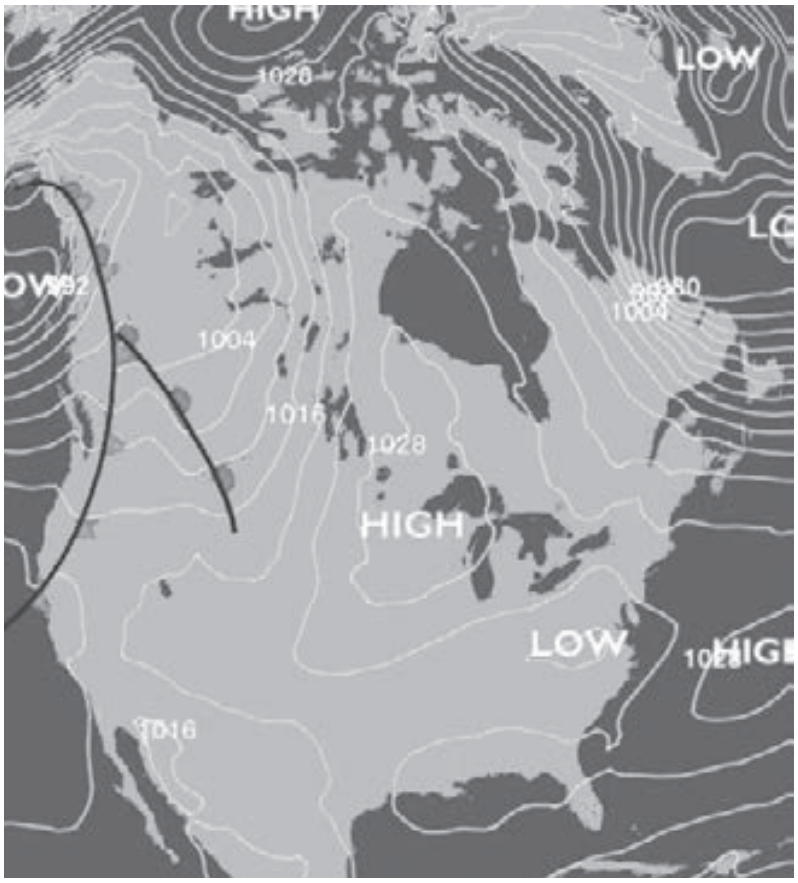
$$x = (v\cos\alpha)t \qquad y = (v\operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

(Veja o Exemplo 5 na Seção 13.4.) Sabemos que o alcance (distância horizontal percorrida) é maximizado quando $\alpha = 45°$. Qual valor de α maximiza a distância total percorrida pelo projétil? (Dê sua resposta com precisão de um grau.)

8. Um cabo tem raio r e comprimento L e está enrolado, sem sobreposição, em um carretel de raio R. Qual é o menor comprimento ao longo do carretel que é coberto pelo cabo?

14

DERIVADAS PARCIAIS



Funções de duas variáveis podem ser visualizadas por meio de curvas de nível, que ligam pontos nos quais a função assume um valor dado. A pressão atmosférica em um dado instante é uma função da longitude e da latitude e é medida em milibares. As curvas de nível da Figura são chamadas isobáricas e unem as posições que registraram a mesma pressão em 7 de março de 2007. (As curvas rotuladas 1028, por exemplo, ligam pontos com pressão 1028 mb.) Os ventos na superfície tendem a fluir de áreas de alta pressão através de isobáricas para áreas de baixa pressão e são mais fortes onde as isobáricas estão mais concentradas.

Até aqui tratamos o cálculo de funções de uma única variável. No entanto, no mundo real, quantidades físicas frequentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em funções de várias variáveis e estenderemos nossas ideias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

- verbalmente (pela descrição em palavras)
- numericamente (por uma tabela de valores)
- algebricamente (por uma fórmula explícita)
- visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

DEFINIÇÃO Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$.

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**. [Compare com a notação $y = f(x)$ para as funções de uma única variável.]

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy.

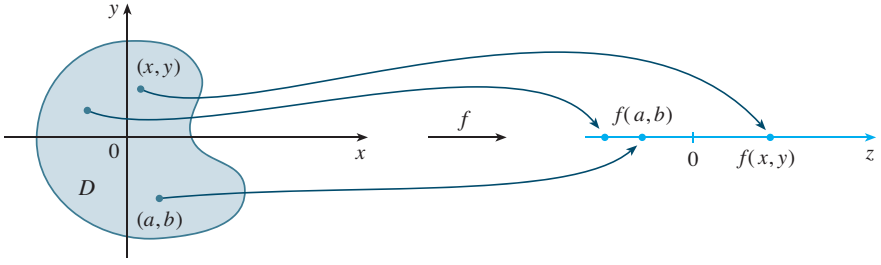


FIGURA 1

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

EXEMPLO 1 Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

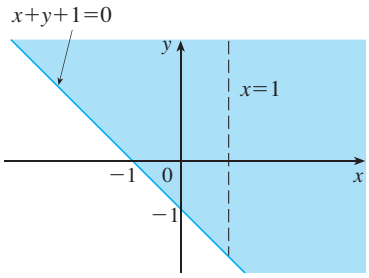


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

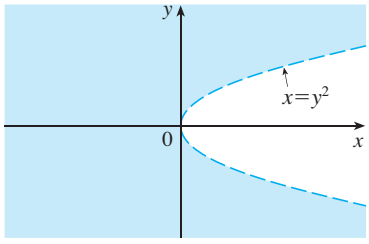


FIGURA 3

Domínio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUÇÃO

(a) $$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para f está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo. Portanto, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0, x \neq 1\}$$

A desigualdade $x + y + 1 \geqslant 0$, ou $y \geqslant -x - 1$, descreve os pontos que estão sobre ou acima da reta $y = -x - 1$, ao passo que $x \neq 1$ significa que os pontos sobre a reta $x = 1$ precisam ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)

(b) $$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Como $\ln(y^2 - x)$ está definido somente quando $y^2 - x > 0$, ou seja, $x < y^2$, o domínio de f é $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola $x = y^2$. (Veja a Figura 3.) □

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimativas numéricas de seus valores.

EXEMPLO 2 Em regiões com inverno severo, o *índice de sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v. Assim, W é uma função de T e de v, e podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

TABELA 1
Índice de sensação térmica como função da temperatura do ar e velocidade do vento

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é −5 °C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de −15 °C sem vento. Portanto,

$$f(-5, 50) = -15$$ □

EXEMPLO 3 Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelavam o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899 a 1922. Eles consideraram uma visão simplificada na qual a produção é determinada pela quantidade de trabalho e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros

■ **O NOVO ÍNDICE DE SENSAÇÃO TÉRMICA**
Um novo índice de sensação térmica foi introduzido em novembro de 2001 e é muito mais preciso que o velho índice de medição de quanto frio se sente quando está ventando. O novo índice é baseado em um modelo de quão rápido um rosto humano perde calor. Foi desenvolvido por meio de ensaios clínicos nos quais voluntários eram expostos a uma variedade de temperaturas e velocidade do vento em um túnel de vento refrigerado.

TABELA 2

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso. A função utilizada para modelar a produção era da forma

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \quad \boxed{1}$$

onde P é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano); L, a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano); e K, a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios). Na Seção 14.3, vamos mostrar como obter a Equação 1 a partir de algumas hipóteses econômicas.

Cobb e Douglas usaram dados econômicos publicados pelo governo para construir a Tabela 2. Eles tomaram o ano de 1899 como base e P, L e K foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens dos valores de 1899.

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 2 à função

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25} \quad \boxed{2}$$

(Veja o Exercício 75 para detalhes.)

Se usarmos o modelo dado pela função na Equação 2 para calcular a produção nos anos de 1910 e 1920, obteremos os valores

$$P(147, 208) = 1{,}01(147)^{0{,}75}(208)^{0{,}25} \approx 161{,}9$$
$$P(194, 407) = 1{,}01(194)^{0{,}75}(407)^{0{,}25} \approx 235{,}8$$

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção (1) foi usada posteriormente em muitos contextos, de firmas individuais até questões globais de economia. Ela passou a ser conhecida como **função de produção de Cobb-Douglas**. Seu domínio é $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$, pois, como L e K representam trabalho e capital, não podem ser negativos. □

EXEMPLO 4 Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUÇÃO O domínio de g é

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que é o disco com centro $(0, 0)$ e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de g é

$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

Como z é a raiz quadrada positiva, $z \geqslant 0$. Temos também

$$9 - x^2 - y^2 \leqslant 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

Assim, a imagem é

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$ □

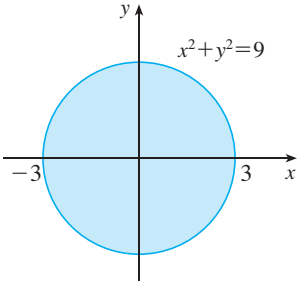


FIGURA 4
Domínio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

GRÁFICOS

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

DEFINIÇÃO Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

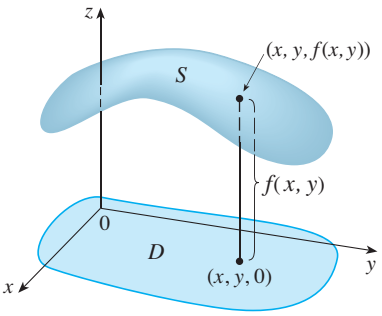


FIGURA 5

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy (veja a Figura 5).

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUÇÃO O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano. Para desenhar o plano, primeiro achamos as intersecções com os eixos. Fazendo $y = z = 0$ na equação, obtemos $x = 2$ como a intersecção com o eixo x. Analogamente, a intersecção com o eixo y é 3 e a intersecção com o eixo z é 6. Isso nos ajuda a esboçar a parte do gráfico que se encontra no primeiro octante (Figura 6).

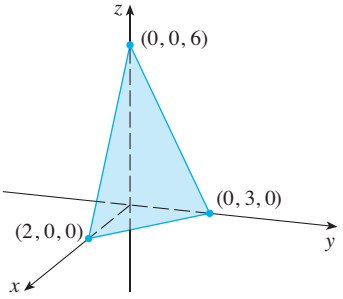


FIGURA 6

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma destas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \qquad \text{ou} \qquad ax + by - z + c = 0$$

e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

EXEMPLO 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUÇÃO O gráfico tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geqslant 0$, o gráfico de g é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7). □

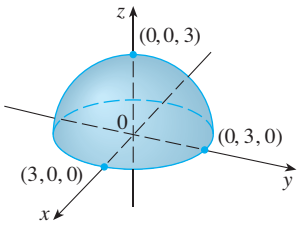


FIGURA 7
Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

OBS. Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y. Como vimos no Exemplo 6, o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EXEMPLO 7 Utilize o computador para traçar o gráfico da função de produção de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de P para os valores de trabalho L e capital K que estão entre 0 e 300. O computador utilizou os cortes verticais para desenhar a superfície. Vemos a partir desses cortes que o valor da produção P aumenta com o crescimento de L ou de K, como esperado.

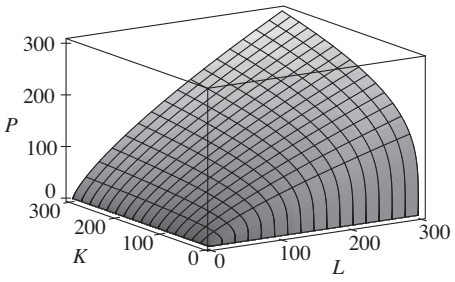


FIGURA 8

□

EXEMPLO 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Observe que $h(x, y)$ é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais (x, y), e seu domínio é $\mathbb{R}^2$, o plano xy todo. A imagem de h é o conjunto $[0, \infty)$ de todos os reais não negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ e $y^2 \geqslant 0$, portanto $h(x, y) \geqslant 0$ para todo x e y.]

O gráfico de h é dado pela equação $z = 4x^2 + y^2$, que é o paraboloide elíptico que esboçamos no Exemplo 4 da Seção 12.6. Os cortes horizontais são elipses e os verticais, parábolas (veja a Figura 9).

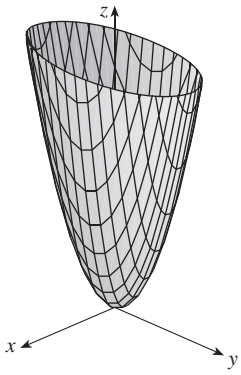
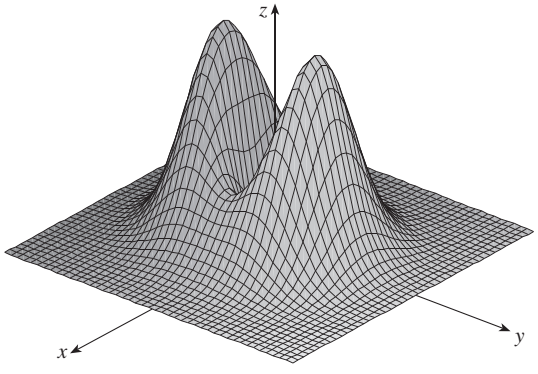


FIGURA 9
Gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

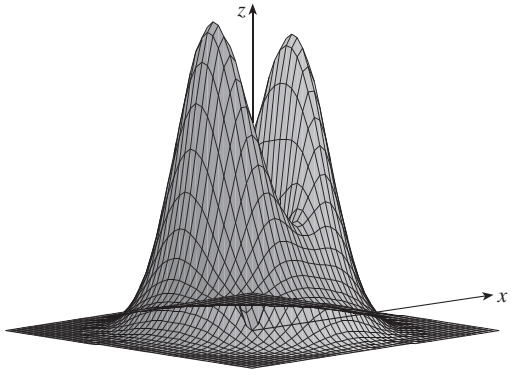
□

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

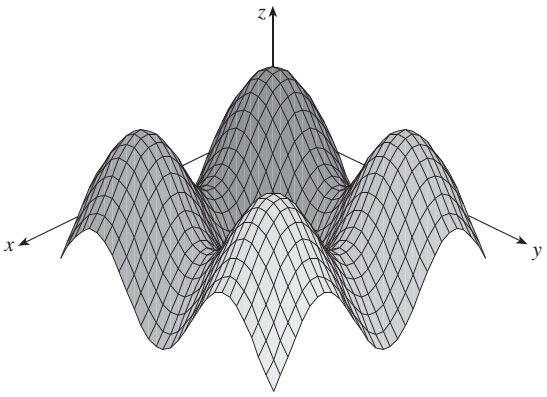
A Figura 10 mostra uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador. Observe que obtemos uma visão melhor da função quando a giramos de modo a olhá-la por diferentes pontos de vista. Nos itens (a) e (b) o gráfico da f é achatado e próximo do plano xy, exceto perto da origem; isso se dá porque $e^{-x^2-y^2}$ é muito pequeno quando x ou y é grande.



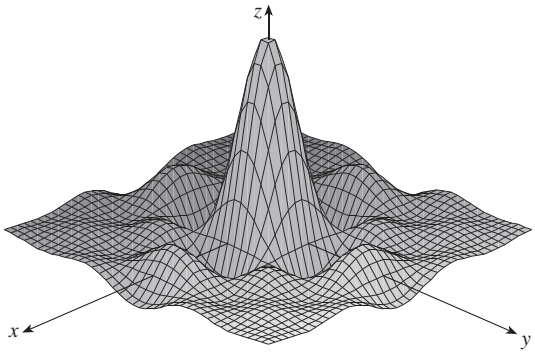
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$



(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

FIGURA 10

CURVAS DE NÍVEL

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: o diagrama de setas e os gráficos. Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível*.

DEFINIÇÃO As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k. Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

Você pode ver na Figura 11 a relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais. As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy. Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras. Ela é um pouco mais achatada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

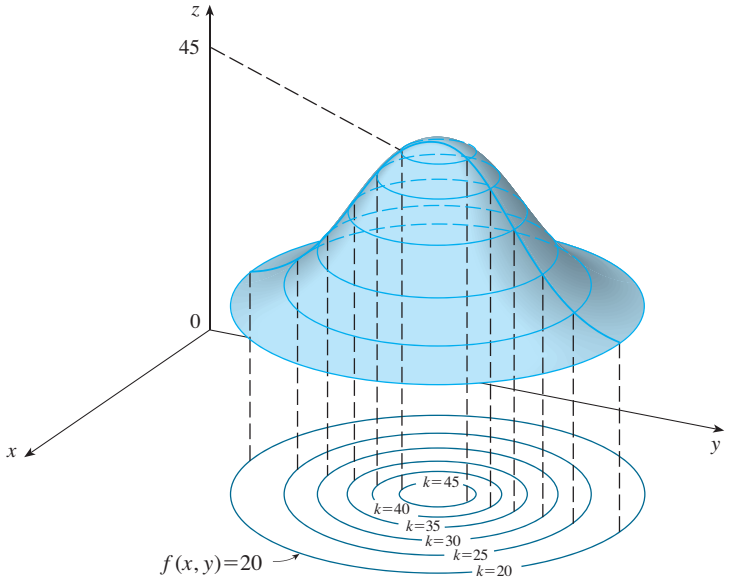


FIGURA 11

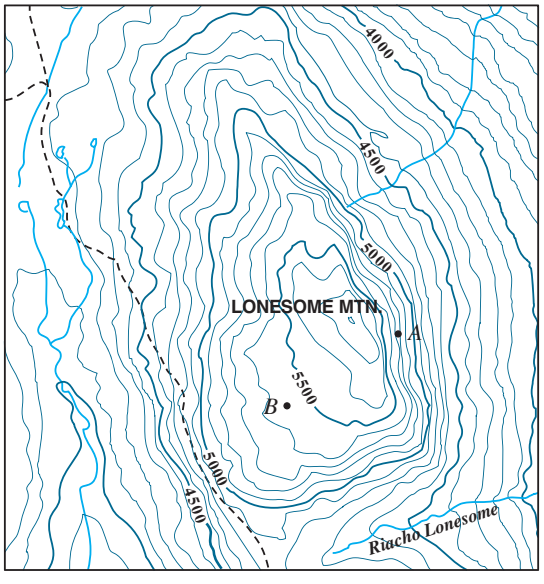


FIGURA 12

Um exemplo comum de curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 12. As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá. Outro exemplo comum é a função temperatura apresentada no parágrafo inicial desta seção. Aqui as curvas de nível são chamadas **curvas isotérmicas** e ligam localidades que têm a mesma temperatura. A Figura 13 mostra um mapa de clima indicando as temperaturas médias do mês de janeiro. Isotérmicas são as curvas que separam as bandas destacadas. As **isobáricas** no mapa de pressão atmosférica na página 814 fornecem outro exemplo de curvas de nível.

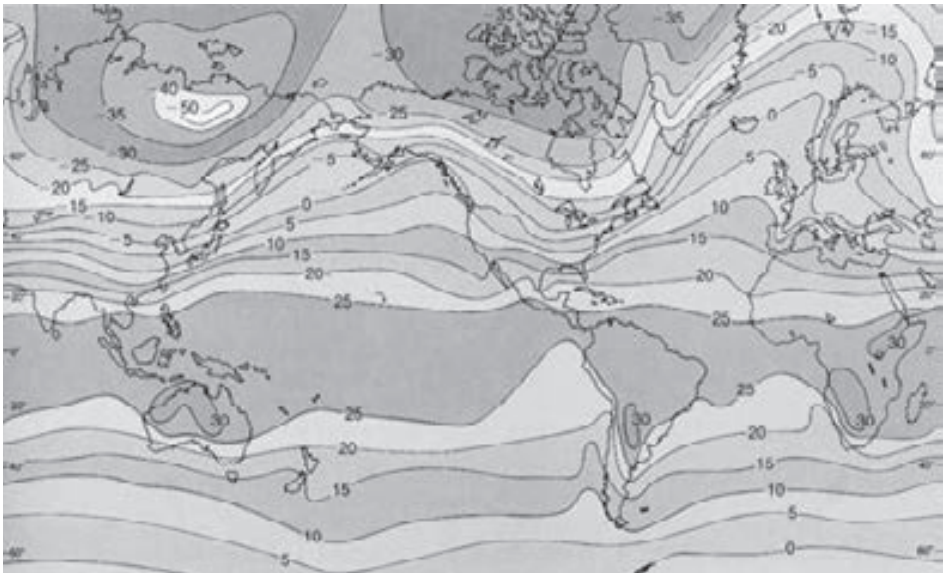


FIGURA 13
Temperaturas médias ao nível do mar no mês de janeiro, em graus Celsius

Tarbuck, Atmosphere: Introduction to Meteorology, 4. ed. © 1989. Reimpresso com permissão de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

EXEMPLO 9 A Figura 14 mostra um mapa de contorno para uma função f. Utilize-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.

SOLUÇÃO O ponto $(1, 3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma, estimamos que

$$f(4, 5) \approx 56$$ □

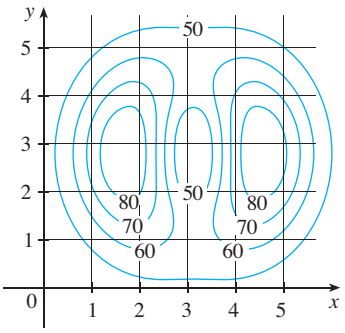


FIGURA 14

EXEMPLO 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

ou seja, uma família de retas com inclinação $-\frac{3}{2}$. As quatro curvas de nível particulares pedidas com $k = -6, 0, 6$ e 12 são $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ e $3x + 2y + 6 = 0$. Elas estão apresentadas na Figura 15. As curvas de nível são retas paralelas, igualmente espaçadas, porque o gráfico de f é um plano (veja a Figura 6). □

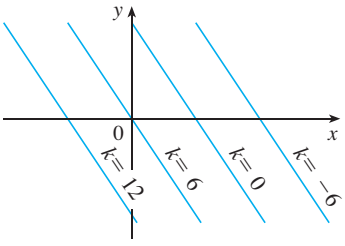


FIGURA 15
Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

EXEMPLO 11 Esboce as curvas de nível da função

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

que correspondem a uma família de circunferências concêntricas com centro em $(0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$. Os casos $k = 0, 1, 2, 3$ estão mostrados na Figura 16. Tente visualizar essas curvas de nível elevadas para formar uma superfície e compare com o gráfico de g (um hemisfério) na Figura 7.

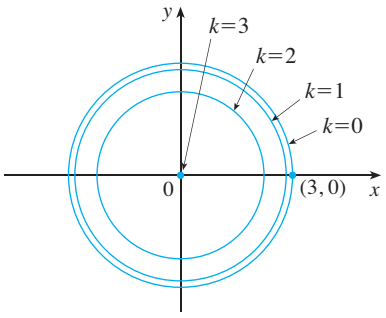


FIGURA 16
Mapa de contorno de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

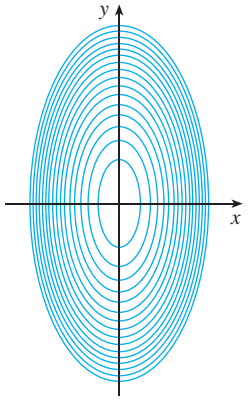
□

EXEMPLO 12 Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

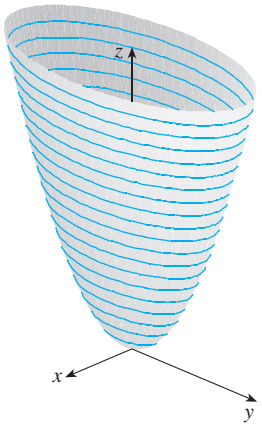
SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

que, para $k > 0$, descrevem uma família de elipses com semieixos $\sqrt{k}/2$e $\sqrt{k}$. A Figura 17(a) mostra o diagrama de contornos de h desenhado por computador com curvas de nível correspondendo a $k = 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, \ldots, 4$. A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para o gráfico de h (um paraboloide elíptico), onde elas se tornam os cortes horizontais. Vemos na Figura 17 como o gráfico de h é montado a partir de suas curvas de nível.



(a) Mapa de contorno



(b) Cortes horizontais são curvas de nível elevadas

FIGURA 17
O gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ é formado levantando-se as curvas de nível

□

EXEMPLO 13 Trace as curvas de nível da função de produção de Cobb-Douglas do Exemplo 3.

SOLUÇÃO Na Figura 18 usamos o computador para desenhar um mapa de contorno da função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

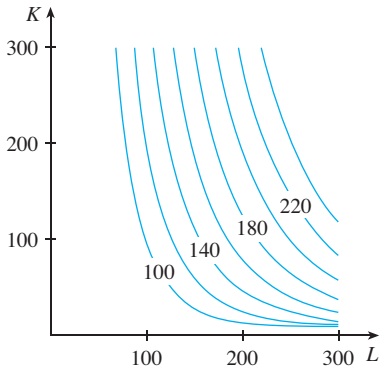
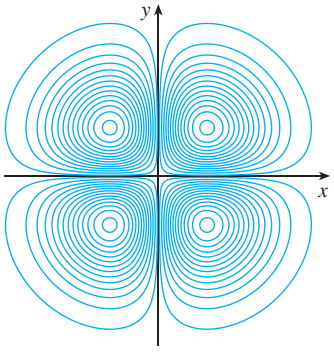


FIGURA 18

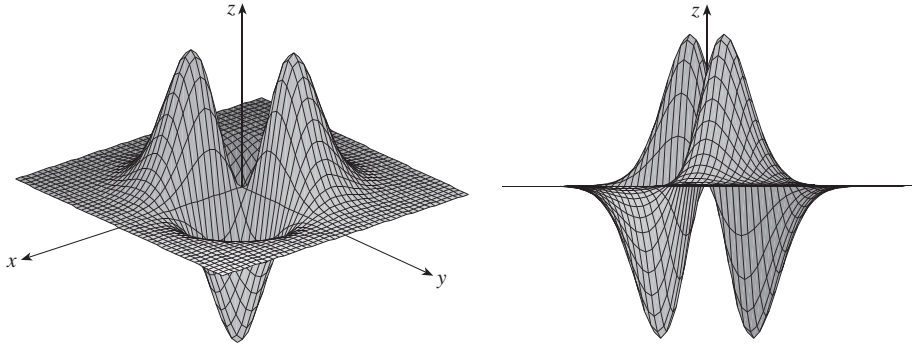
As curvas de nível estão indicadas com os valores da produção P correspondentes. Por exemplo, a curva de nível indicada com 140 mostra todos os valores de quantidade de trabalho L e de capital investido K que resultam na produção $P = 140$. Vemos que, para um valor fixo de P, quando L aumenta, K diminui e vice-versa. □

Para alguns propósitos, o mapa de contorno é mais útil que um gráfico. Certamente isso é verdadeiro no Exemplo 13. (Compare a Figura 18 com a Figura 8.) Isso também é válido quando queremos fazer uma estimativa de valores, como no Exemplo 9.

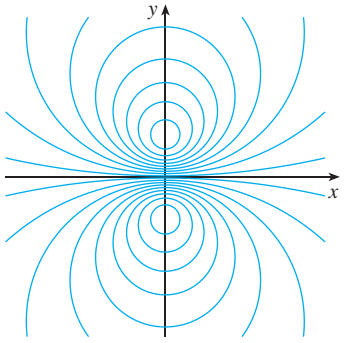
A Figura 19 mostra algumas curvas de nível geradas por computador juntamente com os gráficos correspondentes. Observe que as curvas de nível apresentadas na parte (c) da figura aparecem muito amontoadas perto da origem. Isso corresponde ao fato de o gráfico na parte (d) ser muito íngreme perto da origem.



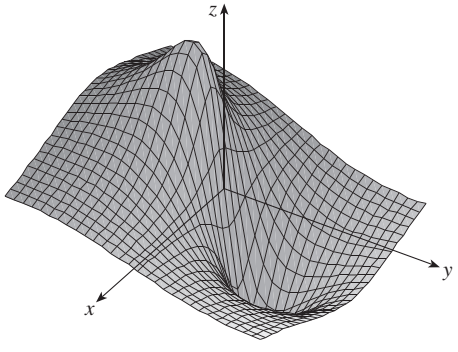
(a) Curvas de nível de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Duas vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(c) Curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$



(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$

FIGURA 19

FUNÇÕES COM TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS

Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$. Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude y e da longitude x do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

EXEMPLO 14 Determine o domínio de

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUÇÃO A expressão para $f(x, y, z)$ é definida desde que $z - y > 0$, de modo que o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Isso é o **semiespaço** constituído por todos os pontos que estão acima do plano $z = y$. □

É muito difícil visualizar uma função f de três variáveis por seu gráfico, uma vez que estaríamos em um espaço de quatro dimensões. Entretanto, conseguimos uma ideia de f desenhando suas **superfícies de nível**, que são as superfícies com equação $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se um ponto (x, y, z) se move ao longo de uma superfície de nível, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo.

EXEMPLO 15 Determine as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUÇÃO As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geqslant 0$. Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio $\sqrt{k}$. (Veja a Figura 20.) Então, quando (x, y, z) varia sobre uma das esferas com centro O, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo. □

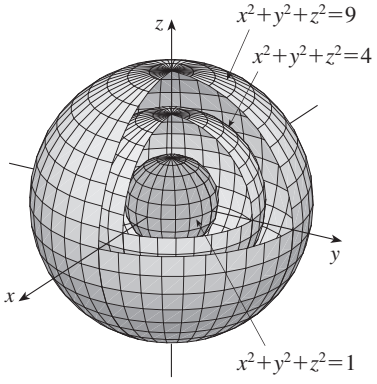


FIGURA 20

Funções com qualquer número de variáveis também podem ser consideradas. Uma **função com *n* variáveis** é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n-uplas. Por exemplo, se uma fábrica de alimentos usa n ingredientes diferentes para manufaturar um determinado alimento, sendo c_i o custo por unidade do i-ésimo ingrediente, e se são necessárias x_i unidades do i-ésimo ingrediente, então o custo total C dos ingredientes é uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \boxed{3}$$

A função f é uma função a valores reais cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algumas vezes utilizaremos a notação vetorial para escrever essas funções de forma mais compacta: se $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, frequentemente escreveremos $f(\mathbf{x})$ no lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$ em V_n.

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e os vetores posição $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ em V_n, podemos olhar de três formas diferentes para a função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como uma função de um único ponto variável $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como uma função de um único vetor variável $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista têm sua utilidade.

14.1 EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica ocasionado pelo vento, T, a temperatura real e v, a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.

(a) Qual o valor de $f(-15, 40)$? Qual seu significado?

(b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.

(c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T vale $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.

(d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva o comportamento dessa função.

(e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função.

2. *O índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?

(b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?

(c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?

(d) Qual o significado de $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isto também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

4. O índice de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:

$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

5. A altura das ondas h em mar aberto depende da velocidade do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em pés, são apresentados na tabela a seguir.

(a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?

(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.

(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.

(a) Calcule $f(1, 1)$.

(b) Calcule $f(e, 1)$.

(c) Determine e esboce o domínio de f.

(d) Determine a imagem de f.

7. Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.

(a) Calcule $f(2, 0)$.

(b) Determine o domínio de f.

(c) Determine a imagem de f.

8. Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. Qual é a imagem de f?

9. Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$.

(a) Calcule $f(2, -1, 6)$.

(b) Determine o domínio de f.

(c) Determine a imagem f.

10. Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.

(a) Calcule $g(2, -2, 4)$.

(b) Determine o domínio de g.

(c) Determine a imagem de g.

11-20 Determine e faça o esboço do domínio da função.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\,\ln(y + x)$

15. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

18. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21-29 Esboce o gráfico da função.

21. $f(x, y) = 3$

22. $f(x, y) = y$

23. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

24. $f(x, y) = \cos x$

25. $f(x, y) = y^2 + 1$

26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

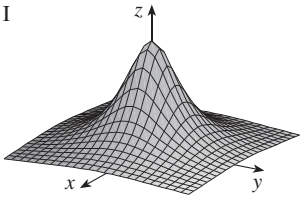
30. Faça uma correspondência entre a função e seu gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$ (b) $f(x, y) = |xy|$

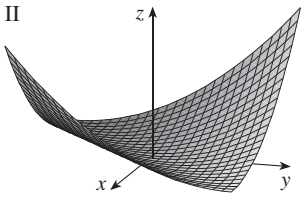
(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x, y) = (x - y)^2$ (f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$

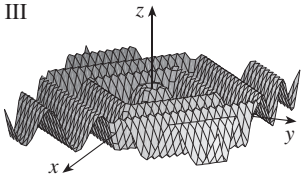
I



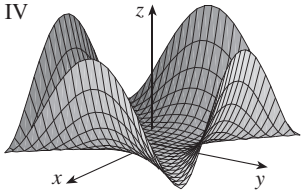
II



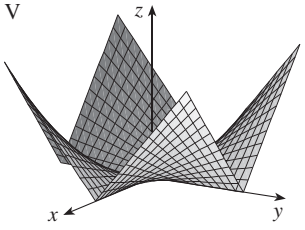
III



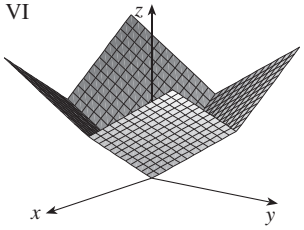
IV



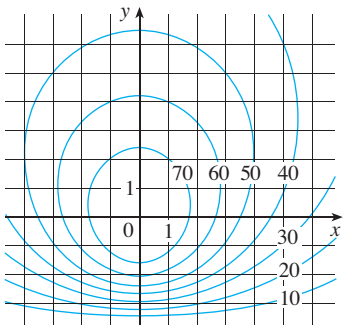
V



VI

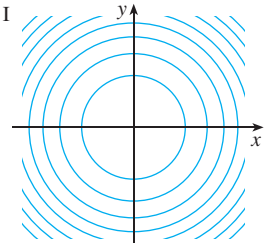


31. É mostrado um mapa de contorno da função f. Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

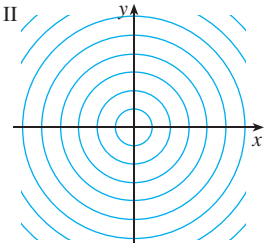


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?

I

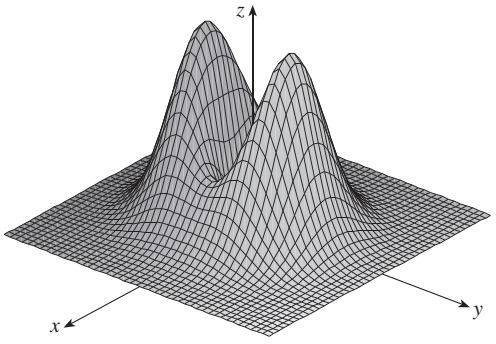


II



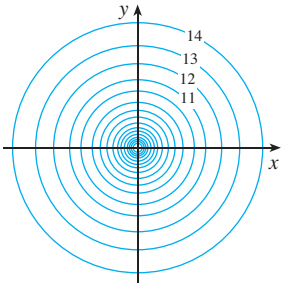
33. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.

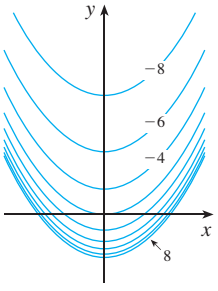


35-38 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

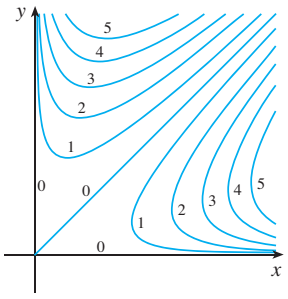
35.



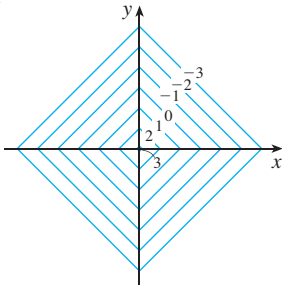
36.



37.



38.



39-46 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

39. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

40. $f(x, y) = x^3 - y$

41. $f(x, y) = y - \ln x$

42. $f(x, y) = e^{y/x}$

43. $f(x, y) = ye^x$

44. $f(x, y) = y \sec x$

45. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

46. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

47-48 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

47. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

48. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

49. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

50. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

51-54 Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

51. $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-2y^2}$

52. $f(x, y) = (1 - 3x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$

53. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

54. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

55-60 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A-F na página 828), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Justifique sua escolha.

55. $z = \text{sen}\,(xy)$

56. $z = e^x \cos y$

57. $z = \text{sen}\,(x - y)$

58. $z = \text{sen}\,x - \text{sen}\,y$

59. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

60. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

61-64 Descreva as superfícies de nível da função.

61. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

63. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

64. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

65-66 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

65. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

66. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

67-68 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

67. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

68. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

69-70 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

69. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

70. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

71. Utilize um computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?

72. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

73. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

74. Esboce o gráfico das funções

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $f(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

e $\qquad f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

a partir do gráfico de g?

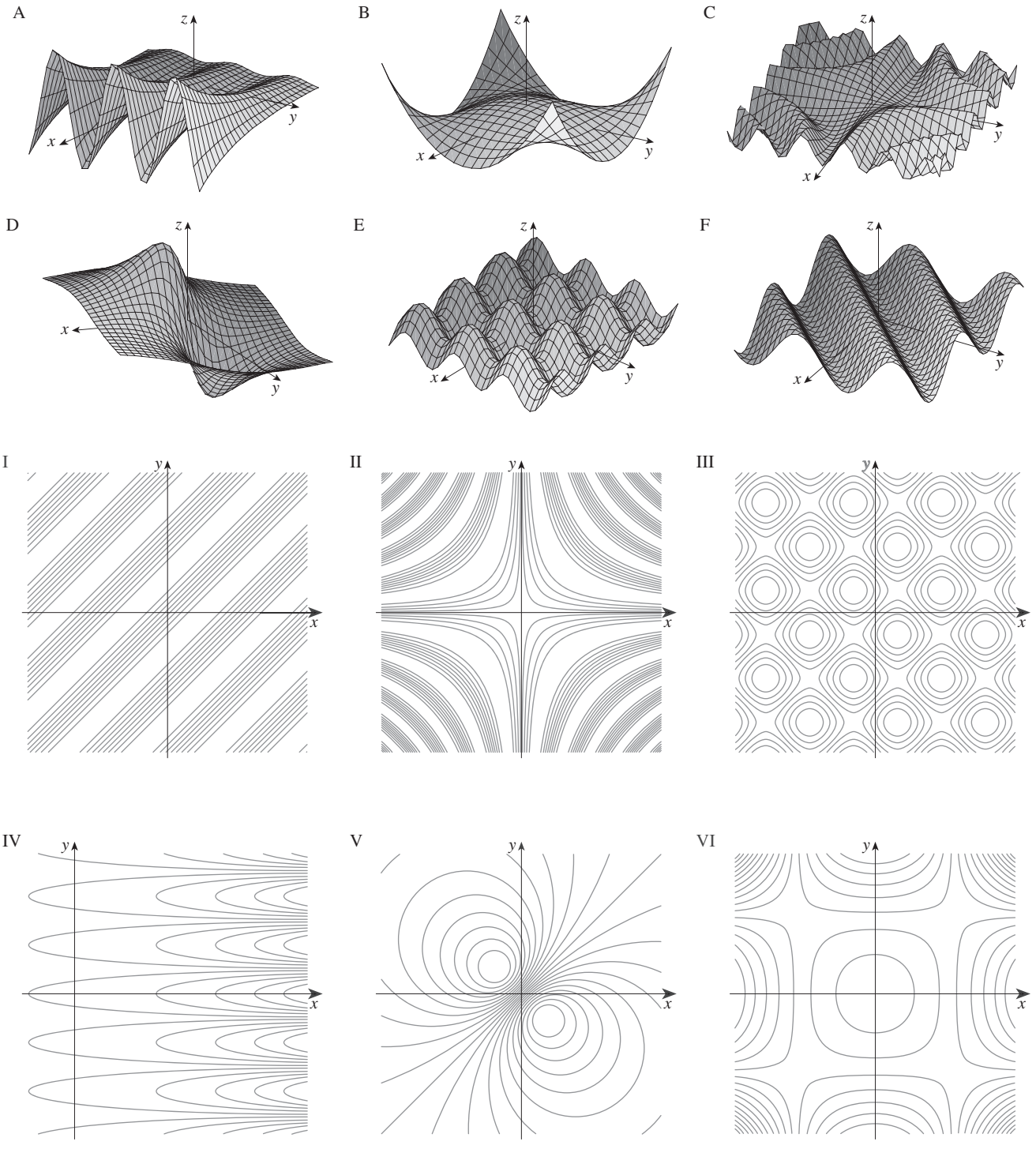
75. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

Gráficos e Mapas de Contorno para os Exercícios 55–60



14.2 LIMITES E CONTINUIDADE

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (x, y) se aproxima da origem].

TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

x \ y	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
−0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
−0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

x \ y	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
−0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
−0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0	−1,000	−1,000	−1,000		−1,000	−1,000	−1,000
0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão de três casas decimais, para pontos (x, y) próximos da origem. (Observe que nenhuma das funções está definida na origem.) Parece que, quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$, os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, ao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{não existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

para indicar que os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho contido no domínio da função f. Em outras palavras, podemos tornar os valores de $f(x, y)$ tão próximos de L quanto quisermos tomando pontos (x, y) suficientemente próximos do ponto (a, b), mas não iguais a (a, b). Uma definição mais precisa é a seguinte:

1 DEFINIÇÃO Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad (x, y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{e} \qquad f(x, y) \to L \text{ quando } (x, y) \to (a, b)$$

Observe que $|f(x, y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L, e $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b). Assim, a Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A Figura 1 ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas. Se nos for dado um pequeno intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos determinar uma bola aberta D_δ com centro em (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que f leve todos os pontos de D_δ [exceto possivelmente (a, b)] no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

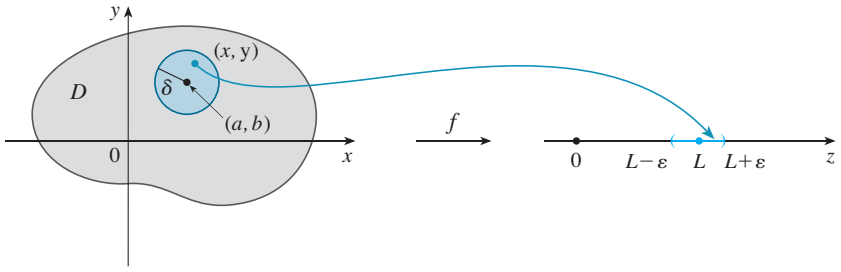


FIGURA 1

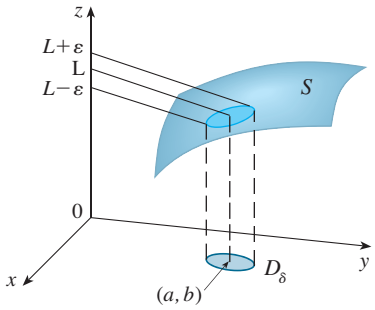


FIGURA 2

Outra ilustração da Definição 1 é dada na Figura 2, onde a superfície S representa o gráfico de f. Se $\varepsilon > 0$ é dado, podemos achar $\delta > 0$ tal que, se (x, y) pertence à bola aberta D_δ e $(x, y) \neq (a, b)$, sua imagem em S estará entre os planos horizontais $z = L - \varepsilon$ e $z = L + \varepsilon$.

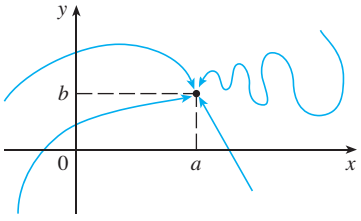


FIGURA 3

Para as funções de uma única variável, quando fazemos x tender a a, só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Lembremos a partir do Capítulo 2, no Volume I, que, se $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f.

A Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena tomando uma distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A definição refere-se somente à *distância* entre (x, y) e (a, b); não se refere à direção de aproximação. Portanto, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b). Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

> Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

EXEMPLO 1 Mostre que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Vamos primeiro nos aproximar de $(0, 0)$ ao longo do eixo x. Tomando $y = 0$, temos $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$, logo

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Agora, vamos nos aproximar ao longo do eixo y, colocando $x = 0$. Assim, $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para todo $y \neq 0$, logo,

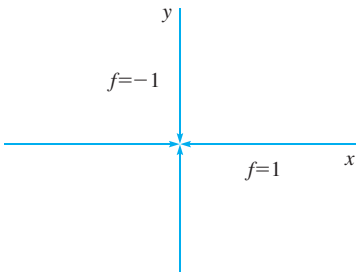


FIGURA 4

$$f(x, y) \to -1 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

(Veja a Figura 4.) Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.) □

EXEMPLO 2 Se $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, será que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Se $y = 0$, temos $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$. Assim

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Apesar de termos encontrado valores idênticos ao longo dos eixos, não podemos afirmar que o limite exista e seja 0. Vamos agora nos aproximar de $(0, 0)$ ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$. Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Logo, $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = x$

(Veja a Figura 5.) Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe. □

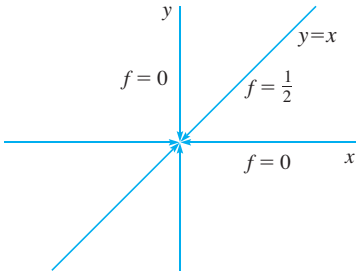


FIGURA 5

A Figura 6 nos dá uma ideia do que acontece no Exemplo 2. A cumeeira que ocorre acima da reta $y = x$ corresponde ao fato de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos os pontos (x, y) dessa reta, exceto na origem.

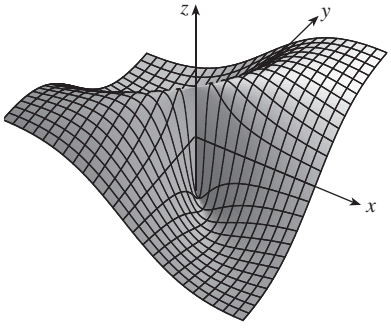


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, será que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Considerando a solução do Exemplo 2, vamos tentar economizar tempo fazendo $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de uma reta não vertical que passa pela origem. Tomemos $y = mx$, onde m é a inclinação da reta e

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto, $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = mx$

Logo, f tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não vertical que passe pela origem. Mas isso ainda não garante que o limite seja 0, pois, se tomarmos agora $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da parábola $x = y^2$, teremos

■ A Figura 7 mostra o gráfico da função do Exemplo 3. Observe a cumeeira sobre a parábola $x = y^2$.

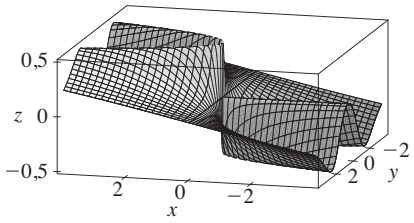


FIGURA 7

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

e assim $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $x = y^2$

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe. □

Vamos agora olhar o caso em que o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Propriedades do Limite listadas na Seção 2.3 do Volume I podem ser estendidas para as funções de duas variáveis. O limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

2 $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

EXEMPLO 4 Determine, se existir, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0. Isso não demonstra que o limite seja igual a 0, mas ao longo das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ também obtemos o limite 0, o que nos leva a suspeitar que o limite exista e seja igual a 0.
Seja $\varepsilon > 0$. Queremos achar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

ou seja, $$\text{se} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Mas $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geqslant 0$, logo $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ e portanto

3 $$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Então, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, teremos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$ □

■ Outro modo de resolver o Exemplo 4 é pelo Teorema do Confronto em vez de usar a Definição 1. De (2) segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$$

e, portanto, a primeira desigualdade em (3) mostra que o limite dado é 0.

CONTINUIDADE

Lembremo-nos de que o cálculo de limites de funções *contínuas* de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

4 DEFINIÇÃO Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia de uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará de uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma $cx^m y^n$, onde c é uma constante e m e n são números inteiros não negativos. Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Os limites em (2) mostram que as funções $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ e $h(x, y) = c$ são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f, g e h por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em* $\mathbb{R}^2$. Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUÇÃO Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11 \quad \square$$

EXEMPLO 6 Onde a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

SOLUÇÃO A função f é descontínua em $(0, 0)$, pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto $D = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$. $\square$

EXEMPLO 7 Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aqui g está definida em $(0, 0)$, mas ainda assim g é descontínua em 0, porque $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y)$ não existe (veja o Exemplo 1). $\square$

EXEMPLO 8 Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

■ A Figura 8 mostra o gráfico da função contínua do Exemplo 8.

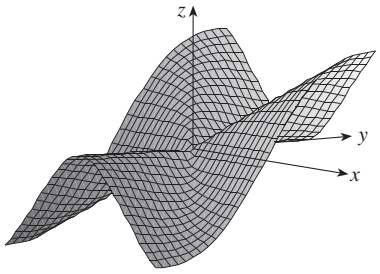


FIGURA 8

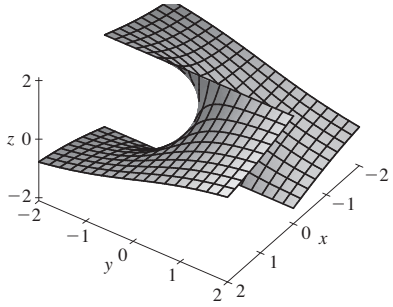


FIGURA 9
A função $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$ é descontínua quando $x = 0$

Sabemos que f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$, uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Portanto, f é contínua em $(0, 0)$, e, consequentemente, contínua em $\mathbb{R}^2$. □

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f, a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ também é contínua.

EXEMPLO 9 Onde a função $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$ é contínua?

SOLUÇÃO A função $f(x, y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$. A função $g(t) = \text{arctg}\, t$ é contínua em qualquer lugar. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \text{arctg}(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde $x = 0$. O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função h acima do eixo y. □

FUNÇÕES COM TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de $f(x, y, z)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de um caminho qualquer no domínio de f. Como a distância entre os dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$ é dada por $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, podemos escrever de forma precisa uma definição da seguinte forma: para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad (x, y, z) \text{ está no domínio de } f \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$
$$\text{então} \qquad |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

A função f é **contínua** em (a, b, c) se

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ou seja, é descontínua na esfera de centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no fim da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

5 Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3,1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.

(a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.

(b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.

(c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3-4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x,y)$ para (x,y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$

4. $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$

6. $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x - 2y)$

7. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

8. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^4 + 3y^4}$

10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

16. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

18. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\operatorname{sen}(\pi z/2)$

20. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23-24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Determine $h(x,y) = g(f(x,y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $\quad f(x,y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $\quad f(x,y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x,y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

30. $F(x,y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

31. $F(x,y) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y})$

32. $F(x,y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$

33. $G(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x,y) = \operatorname{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$

36. $f(x,y,z) = \sqrt{x + y + z}$

37. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

38. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

39-41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y), com $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Apesar da parte (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 DERIVADAS PARCIAIS

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Deste modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

TABELA 1
Índice humidex I como função da temperatura e umidade

Temperatura real (°C) \ Umidade relativa (%)	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de H. Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$. Então, $g(T)$ descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é 60%. A derivada de g quando $T = 30$ °C é a taxa de variação de I com relação a T quando $T = 30$ °C:

$$g'(30) = \lim_{h\to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Podemos aproximar seu valor usando a Tabela 1 e tomando $h = 2$ e -2:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

Tomando a média desses valores, podemos dizer que a derivada $g'(30)$ é aproximadamente 1,75. Isso significa que, quando a temperatura real é de 30 ºC e a umidade relativa é de 60%, a temperatura aparente (humidex) aumenta cerca de 1,75 ºC para cada grau que a temperatura real aumenta.

Olhemos agora para a linha sombreada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de $T = 30$ºC. Os números da linha correspondem aos valores da função $G(H) = f(30, H)$, que descrevem como o humidex cresce com o aumento de umidade relativa H quando a temperatura real é de $T = 30$ºC. A derivada dessa função quando $H = 60\%$ é a taxa de variação de I com relação a H quando $H = 60\%$:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Tomando $h = 5$ e -5, aproximamos o valor de $G'(60)$ usando os valores tabelados:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

Tomando a média desses valores, obtemos a estimativa $G'(60) \approx 0{,}3$. Isso nos diz que, quando a temperatura é de 30 °C e a umidade relativa é de 60%, o humidex aumenta em cerca de 0,3 °C para cada ponto porcentual que a umidade relativa aumenta.

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y, suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y, por exemplo, fazendo $y = b$, onde b é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x, a saber, $g(x) = f(x, b)$. Se g tem derivada em a, nós a chamaremos **derivada parcial de *f* em relação a *x* em (*a*, *b*)** e a denotaremos por $f_x(a, b)$. Assim,

1 $$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 fica

2 $$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Da mesma forma, a **derivada parcial de *f* em relação a *y* em (*a*, *b*)**, denotada por $f_y(a, b)$, é obtida mantendo-se x fixo ($x = a$) e determinando-se a derivada em b da função $G(y) = f(a, y)$:

3
$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}$$

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do índice de calor I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando $T = 30\,^{\circ}\text{C}$ e $H = 60\%$ como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1{,}75 \qquad f_H(30, 60) \approx 0{,}3$$

Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3, f_x e f_y se tornam funções de duas variáveis.

4 DEFINIÇÃO Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y e definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x, podemos escrever f_1 ou $D_1 f$ (para indicar a derivação em relação à *primeira* variável) ou $\partial f/\partial x$. Mas aqui $\partial f/\partial x$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

NOTAÇÃO PARA AS DERIVADAS PARCIAIS Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular as derivadas parciais, tudo o que temos a fazer é nos lembrarmos, a partir da Equação 1, que a derivada parcial com relação a x é a derivada *ordinária* da função g de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de y. Então, temos a seguinte regra.

REGRA PARA DETERMINAR A DERIVADA PARCIAL DE $z = f(x, y)$

1. Para encontrar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.

2. Para encontrar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

EXEMPLO 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

SOLUÇÃO Mantendo y constante e derivando em relação a x, obtemos

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

e, assim,

$$f_x(2,1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Mantendo x constante e derivando em relação a y, obtemos

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2,1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

□

INTERPRETAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS

Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície S (o gráfico de f). Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S. Fixando $y = b$, restringimos nossa atenção à curva C_1, na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S. (Ou seja, C_1 é o corte de S no plano $y = b$.) Da mesma forma, o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P (veja a Figura 1).

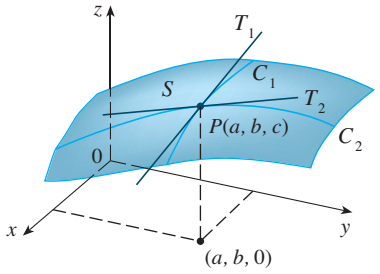


FIGURA 1
As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_1 e a C_2

Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$.

Então, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.

Como vimos no caso da função humidex, as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*. Se $z = f(x, y)$, então $\partial z/\partial x$ representa a taxa de variação de z com relação a x quando y é mantido fixo. Da mesma forma, $\partial z/\partial y$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

EXEMPLO 2 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, encontre $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO Temos

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$
$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$, e o plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Como na discussão precedente, indicamos esta curva por C_1 na Figura 2.) A inclinação da reta tangente à parábola no ponto $(1, 1, 1)$ é $f_x(1, 1) = -2$. Da mesma forma, a curva C_2 na qual o plano $x = 1$ intercepta o paraboloide é a parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$, e a inclinação da reta tangente em $(1, 1, 1)$ é $f_y(1, 1) = -4$. (Veja a Figura 3.)

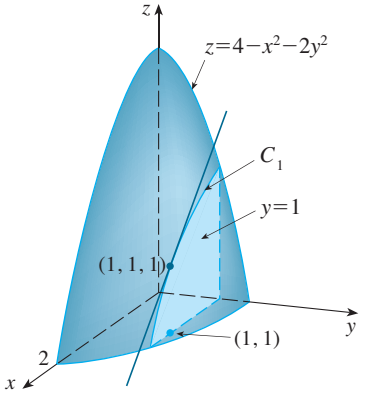


FIGURA 2

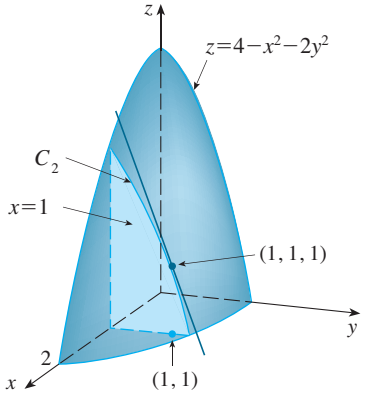


FIGURA 3

□

A Figura 4 nos mostra o gráfico desenhado pelo computador correspondente à Figura 2. A Parte (a) exibe o plano $y = 1$ interceptando a superfície para formar a curva C_1, e a Parte (b) mostra C_1 e T_1. [Usamos a equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 e $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.] Do mesmo modo, a Figura 5 corresponde à Figura 3.

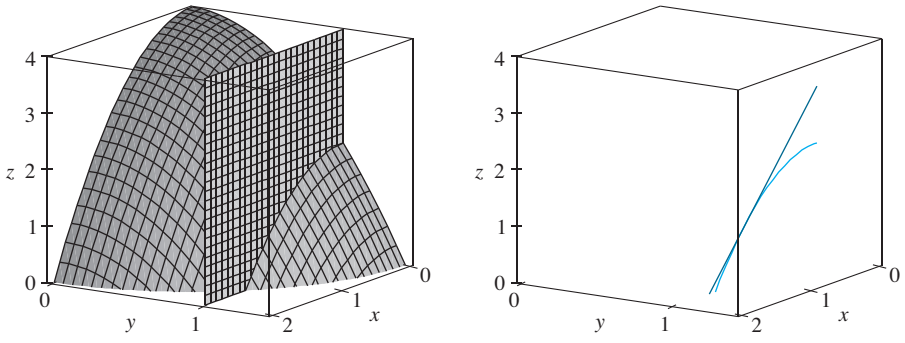


FIGURA 4

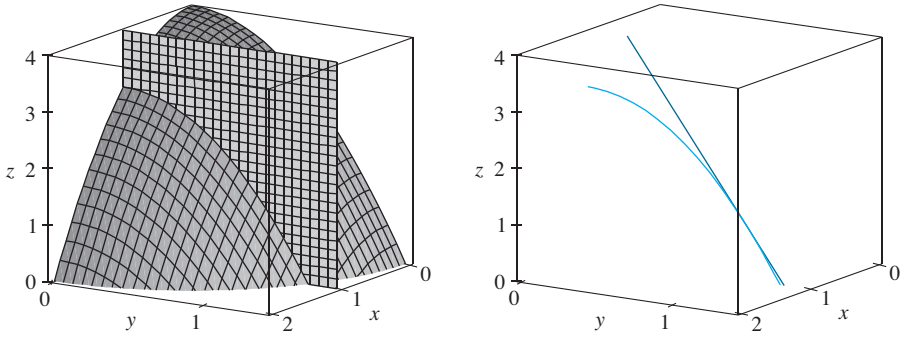


FIGURA 5

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1 + y}\right)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1 + y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{1}{1 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1 + y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{x}{(1 + y)^2}$$ □

■ Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar superfícies definidas por equações implícitas com três variáveis. A Figura 6 mostra o desenho da superfície definida implicitamente pela equação do Exemplo 4.



FIGURA 6

EXEMPLO 4 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUÇÃO Para achar $\partial z/\partial x$, derivamos implicitamente em relação a x, tomando o cuidado de tratar y como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Isolando $\partial z/\partial x$ nesta equação, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a y temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

□

FUNÇÃO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis x, y e z, então sua derivada parcial em relação a x é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

e pode ser encontrada olhando-se y e z como constantes e derivando-se $f(x, y, z)$ com relação a x. Se $w = f(x, y, z)$, então $f_x = \partial w/\partial x$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w em relação a x quando y e z são mantidos fixos. Entretanto, não podemos interpretá-la geometricamente porque o gráfico de f pertence ao espaço de dimensão quatro.

Em geral, se u é uma função de n variáveis, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sua derivada parcial em relação à i-ésima variável x_i é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

e podemos também escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EXEMPLO 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUÇÃO Mantendo constantes y e z e derivando em relação a x, temos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Da mesma forma, $f_y = xe^{xy} \ln z$ e $f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$

□

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f. Se $z = f(x, y)$, usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Portanto, a notação f_{xy} (ou $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$) significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y, ao passo que no cálculo de f_{yx} a ordem é invertida.

EXEMPLO 6 Determine as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUÇÃO No Exemplo 1 achamos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Logo,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4 \quad \square$$

■ A Figura 7 mostra o gráfico da função f do Exemplo 6 e os gráficos de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Observe que esses gráficos são consistentes com nossa interpretação de f_x e f_y como inclinação da reta tangente aos traços do gráfico de f. Por exemplo, o gráfico de f decresce se iniciamos em $(0, -2)$ e nos movemos no sentido de x positivo. Isso é refletido nos valores negativos de f_x. Você deveria comparar os gráficos de f_{yx} e f_{yy} com f_y para ver as relações.

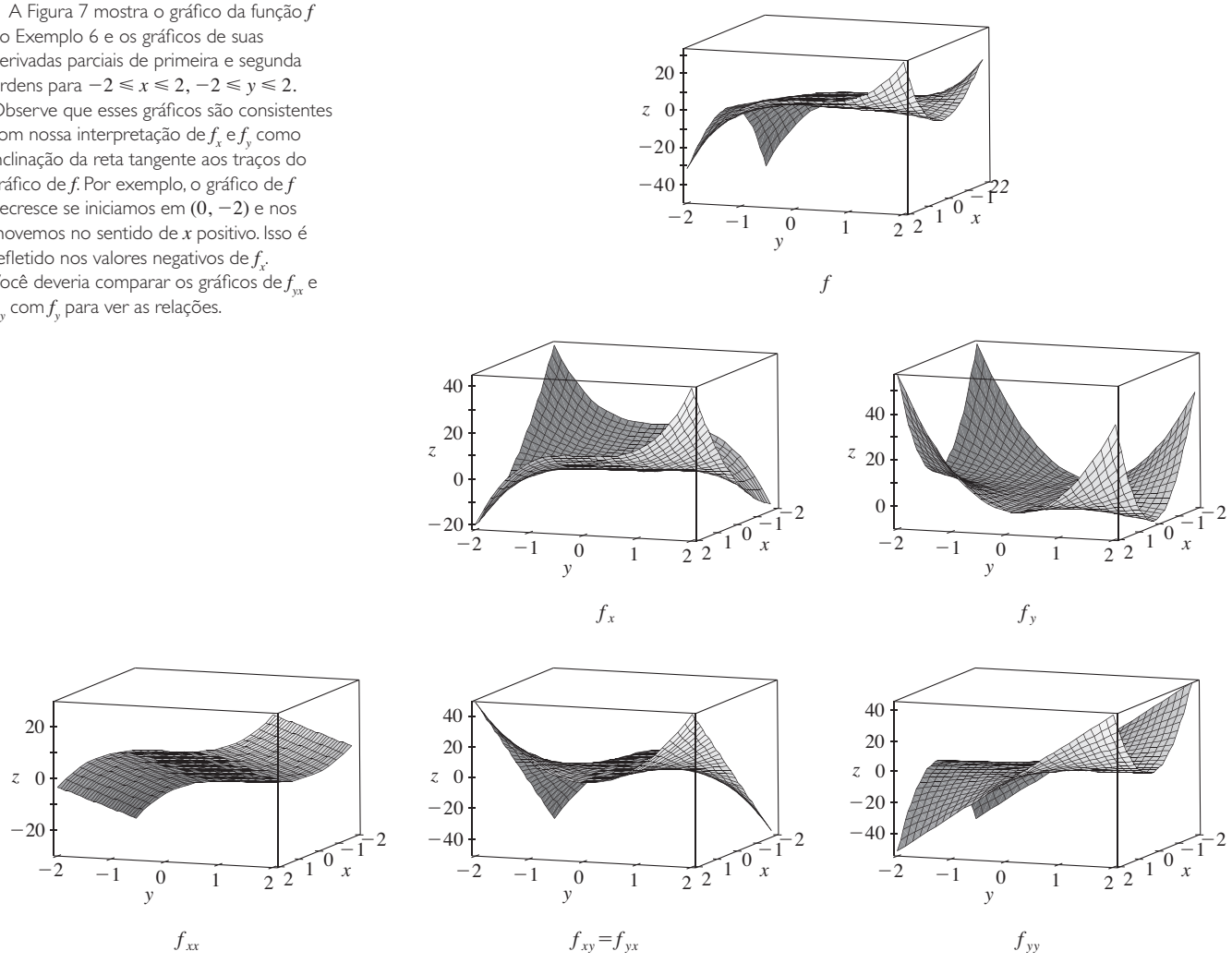


FIGURA 7

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. A demonstração é feita no Apêndice F.

■ Alexis Clairaut foi uma criança prodígio na matemática: aos 10 anos leu o texto de cálculo de L'Hôspital, e aos 13 apresentou um artigo sobre geometria na Academia Francesa de Ciências. Aos 18 anos, Clairaut publicou *Recherches sur les courbes à double courbure*, o primeiro tratado sistemático em geometria analítica tridimensional, em que incluiu o cálculo de curvas espaciais.

TEOREMA DE CLAIRAUT Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ se essas funções forem contínuas.

EXEMPLO 7 Calcule f_{xxyz} se $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(3x + yz)$.

SOLUÇÃO

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$
$$f_{xx} = -9\operatorname{sen}(3x + yz)$$
$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$
$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\operatorname{sen}(3x + yz)$$ □

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

EXEMPLO 8 Mostre que a função $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ é solução da equação de Laplace.

SOLUÇÃO

$$u_x = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_y = e^x \cos y$$
$$u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$$
$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Portanto, u satisfaz a equação de Laplace. □

A **equação da onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante. Por exemplo, se $u(x, t)$ representa o deslocamento da corda vibrante de violino no instante t e à distância x de uma das extremidades da corda (como na Figura 8), então $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.

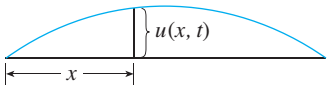


FIGURA 8

EXEMPLO 9 Verifique que a função $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - at)$ satisfaz a equação da onda.

SOLUÇÃO
$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_{xx} = -\operatorname{sen}(x - at)$$
$$u_t = -a\cos(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2\operatorname{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

Então, u satisfaz a equação da onda. □

A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DE COBB-DOUGLAS

No Exemplo 3 da Seção 14.1 descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas na modelagem da produção total P de um sistema econômico como função da quantidade de trabalho L e do capital investido K. Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular desse modelo deriva de certas hipóteses que eles fizeram sobre a economia.

Se a função de produção é denotada por $P = P(L, K)$, a derivada parcial $\partial P/\partial L$ é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho. Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho, ou *produtividade marginal do trabalho*. Da mesma forma, a derivada parcial $\partial P/\partial K$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é denominada *produtividade marginal do capital*. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser enunciadas da seguinte forma:

(i) Se ou o trabalho ou o capital se anulam, o mesmo acontece com a produção.

(ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.

(iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Como a produção por unidade de trabalho é P/L, a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha\frac{P}{L}$$

para alguma constante α. Se mantivermos K constante ($K = K_0$), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L} \tag{5}$$

Se resolvermos essa equação diferencial separável pelos métodos da Seção 9.3 (veja também o Exercício 79), obteremos

$$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha} \tag{6}$$

Observe que escrevemos a constante C_1 como função de K_0 porque ela pode depender do valor de K_0.

Analogamente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta\frac{P}{K}$$

e podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta} \tag{7}$$

Comparando as Equações 6 e 7, temos

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta} \tag{8}$$

onde b é uma constante independente de L e de K. A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Observe que, pela Equação 8, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e, portanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.

14.3 EXERCÍCIOS

1. A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.

(a) Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1º de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivas ou negativas? Explique.

2. No começo desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o humidex; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. A altura h das ondas em mar aberto depende da velocidade v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

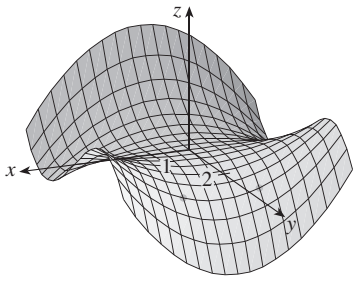
(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?

(b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-8 Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



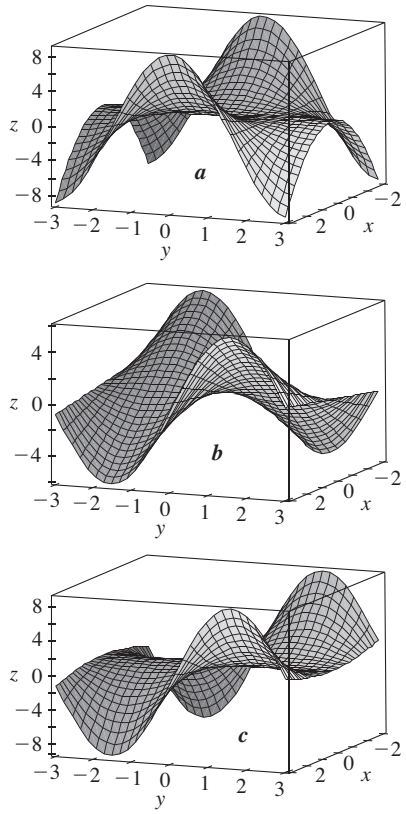
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

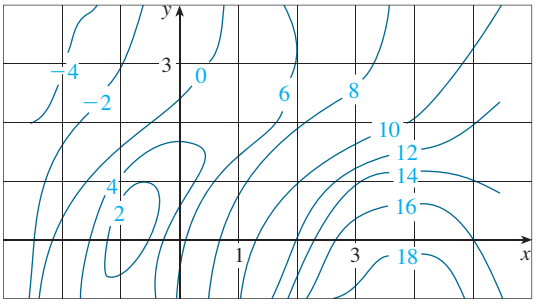
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

9. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



10. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



11. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13-14 Determine f_x e f_y e faça os gráficos de f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ **14.** $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

15-38 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

16. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

17. $z = xe^{3y}$ **18.** $f(x, y) = \sqrt{x} \ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$ **20.** $z = \operatorname{tg} xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **22.** $f(x, y) = x^y$

23. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$ **24.** $w = e^v/(u + v^2)$

25. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$ **26.** $f(x, t) = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{t}\right)$

27. $u = te^{w/t}$ **28.** $f(x, y) = \int_y^x \cos(t)^2\, dt$

29. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ **30.** $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y - z)$

31. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **32.** $w = ze^{xyz}$

33. $u = xy \operatorname{sen}^{-1}(yz)$ **34.** $u = x^{y/z}$

35. $f(x, y, z, t) = xyz^2 \operatorname{tg}(yt)$ **36.** $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

37. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

38. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

39-42 Determine as derivadas parciais indicadas.

39. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

40. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$; $f_x(2, 3)$

41. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

42. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

43-44 Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

43. $f(x, y) = x^2y - x^3y$ **44.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

45-48 Use a derivação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ **46.** $yz = \ln(x + z)$

47. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$ **48.** $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

49-50 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

49. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

50. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

51-56 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

51. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ **52.** $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

53. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ **54.** $v = \dfrac{xy}{x - y}$

55. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$ **56.** $v = e^{xe^y}$

57-60 Verifique que a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

57. $u = x \operatorname{sen}(x + 2y)$

58. $u = x^4y^2 - 2xy^5$

59. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

60. $u = xye^y$

61-68 Determine as derivadas parciais indicadas.

61. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

62. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt}, f_{txx}

63. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

64. $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$; f_{rss}, f_{rst}

65. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

66. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$

67. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

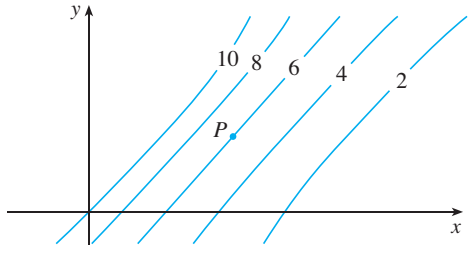
68. $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial y^2 \partial z^3}$

69. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

70. São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



71. Verifique que a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

72. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

73. Verifique que a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

74. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

(a) $u = \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

75. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 74.

76. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

77. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \right)^2 = 0$$

78. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

79. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

80. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1, 2)$ (a) com relação a x e (b) com relação a y.

81. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

82. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

83. Para o gás ideal do Exercício 82, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

84. O índice sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (ºC) e v, a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ ºC e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente caia se a temperatura real decrescer em 1 ºC? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

85. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

86. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

87. Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$ e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

88. O paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do paraboloide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

89. O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

90. No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?

(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?

(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k.

(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.

(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

91. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de f forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

92. (a) Quantas derivadas de n-ésima ordem tem uma função de duas variáveis?

(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?

(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

93. Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Sugestão*: Em vez de achar $f_x(x, y)$ primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

94. Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

95. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f.

(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.

(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.

(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4 PLANOS TANGENTES E APROXIMAÇÕES LINEARES

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I). Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

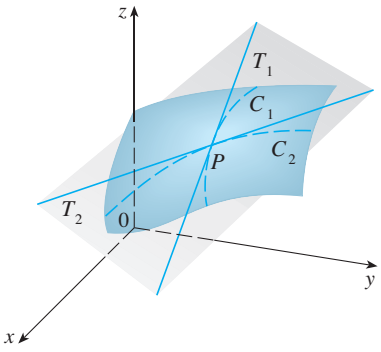


FIGURA 1
O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2

PLANOS TANGENTES

Suponha que a superfície S tenha equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Como na seção anterior, sejam C_1 e C_2 curvas obtidas pela intersecção de S com os planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$. O ponto P pertence à intersecção de C_1 com C_2. Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P. Então, o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as duas retas tangentes T_1 e T_2. (Veja a Figura 1.)

Veremos na Seção 14.6 que, se C é outra curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passe pelo ponto P, então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Portanto, podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P. O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P.

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como

$$\boxed{1} \qquad z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Se a Equação 1 representa o plano tangente em P, sua intersecção com o plano $y = y_0$ precisa ser a reta T_1. Impondo $y = y_0$ na Equação 1, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad y = y_0$$

que reconhecemos como a equação da reta (na forma de ponto, inclinação) com inclinação a. Mas da Seção 14.3 sabemos que a inclinação de T_1 é $f_x(x_0, y_0)$. Assim, $a = f_x(x_0, y_0)$.

Da mesma forma, tomando $x = x_0$ na Equação 1, obtemos $z - z_0 = b(y - y_0)$, que precisa representar a reta tangente T_2, e portanto $b = f_y(x_0, y_0)$.

■ Observe a semelhança entre a equação do plano tangente e a equação da reta tangente

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

2 Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

EXEMPLO 1 Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Portanto, por (2), temos a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou

$$z = 4x + 2y - 3$$

□

A Figura 2(a) mostra o paraboloide elíptico e seu plano tangente em $(1, 1, 3)$ que encontramos no Exemplo 1. Na parte (b) e (c) fazemos um *zoom* em torno do ponto $(1, 1, 3)$, diminuindo o domínio da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que, quanto mais ampliamos a região próxima ao ponto, mais plano parece o gráfico da superfície e mais se parece com o plano tangente.

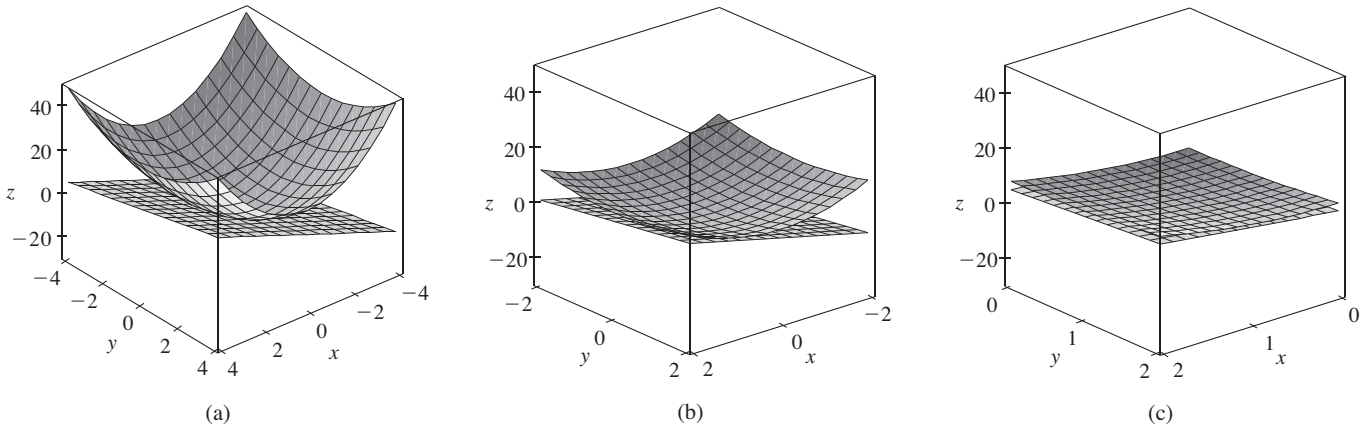


FIGURA 2 O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de (1, 1, 3)

Na Figura 3 reforçamos essa impressão dando *zoom* em torno de (1, 1) no mapa de contorno da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que, quanto mais ampliamos, mais as curvas de nível parecem retas igualmente espaçadas, o que caracteriza uma região plana.

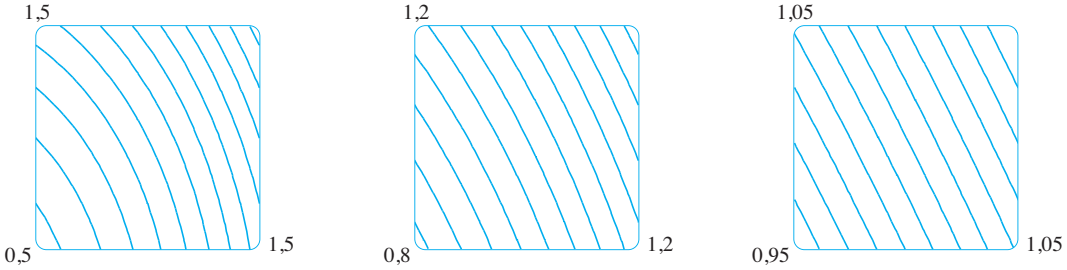


FIGURA 3
Dando *zoom* em torno do ponto (1, 1) no mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

APROXIMAÇÃO LINEAR

No Exemplo 1 achamos que a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$. Portanto, em vista da evidência visual nas Figuras 2 e 3, a função linear de duas variáveis

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação de $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (1, 1). A função L é chamada *linearização* de f em (1, 1), e a aproximação

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

é denominada *aproximação linear* ou *aproximação pelo plano tangente* de f em (1, 1). Por exemplo, no ponto (1,1, 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1{,}1, 0{,}95) \approx 4(1{,}1) + 2(0{,}95) - 3 = 3{,}3$$

que está bastante próximo do valor verdadeiro de $f(1{,}1, 0{,}95) = 2(1{,}1)^2 + (0{,}95)^2 = 3{,}3225$. Se, entretanto, tomarmos um ponto longe de (1, 1), como (2, 3), não teremos mais uma boa aproximação. De fato, $L(2, 3) = 11$, ao passo que $f(2, 3) = 17$.

Em geral, sabemos de (2) que uma equação do plano tangente ao gráfico de uma função f de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad \boxed{3}$$

é denominada **linearização** de f em (a, b), e a aproximação

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad \boxed{4}$$

é chamada **aproximação linear** ou **aproximação pelo plano tangente** de f em (a, b).

Definimos o plano tangente para as superfícies $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se f_x e f_y não são contínuas? A Figura 4 apresenta uma tal função. Sua equação é

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

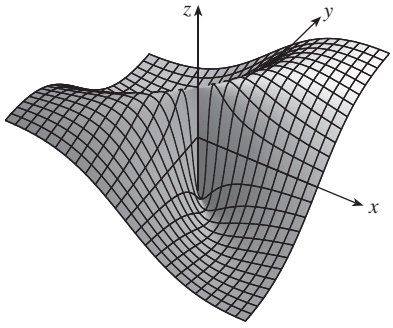


FIGURA 4

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$,

$f(0, 0) = 0$

Podemos verificar (veja o Exercício 46) que suas derivadas parciais existem na origem e são $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$, mas f_x e f_y não são contínuas. A aproximação linear seria $f(x, y) \approx 0$, porém $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos os pontos da reta $y = x$. Portanto, uma função de duas variáveis pode se comportar muito mal, mesmo se suas derivadas parciais existirem. Para evitar esse comportamento, introduzimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.

Lembremo-nos de que para uma função de uma variável, $y = f(x)$, se x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

No Capítulo 3, no Volume I, mostramos que, se f é diferenciável em a, então

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x \qquad \text{onde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0 \quad \boxed{5}$$

■ Esta é a Equação 3.5.7.

Considere agora uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, e suponha que x varie de a para $a + \Delta x$ e y varie de b para $b + \Delta y$. Então, o **incremento** correspondente de z é

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \quad \boxed{6}$$

Portanto, o incremento Δz representa a variação de valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogia a (5), definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como segue.

7 DEFINIÇÃO Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz pode ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

A Definição 7 diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear (4) é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (a, b). Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Algumas vezes é difícil usar a Definição 7 diretamente para verificar a diferenciabilidade da função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficientemente conveniente para a diferenciabilidade.

■ O Teorema 8 está demonstrado no Apêndice F.

8 TEOREMA Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

EXEMPLO 2 Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e determine sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1{,}1, -0{,}1)$.

SOLUÇÃO As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$
$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Ambas, f_x e f_y, são funções contínuas. Portanto, pelo Teorema 8, f é diferenciável. A linearização é dada por

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$
$$= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y$$

A aproximação linear correspondente é

$$xe^{xy} \approx x + y$$

portanto,
$$f(1{,}1, -0{,}1) \approx 1{,}1 - 0{,}1 = 1$$

Compare esse valor com o valor real de $f(1{,}1, -0{,}1) = 1{,}1\, e^{-0{,}11} \approx 0{,}98542$. □

■ A Figura 5 mostra o gráfico da função f e sua linearização L no Exemplo 2.

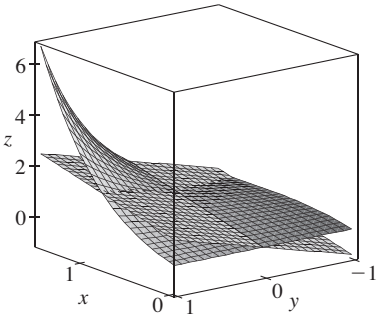


FIGURA 5

EXEMPLO 3 No início da Seção 14.3 discutimos o humidex (temperatura aparente) I como uma função da temperatura real T e da umidade relativa H e fornecemos a seguinte tabela de valores:

Umidade relativa

Temperatura real (ºC) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Determine uma aproximação linear para o humidex $I = f(T, H)$ quando T está próximo de 30 ºC e H está próximo de 60%. Use essa estimativa do humidex quando a temperatura estiver a 31 ºC e a umidade relativa for 62%.

SOLUÇÃO Lemos na tabela que $f(30, 60) = 38$. Na Seção 14.3 usamos os valores tabelados para estimar $f_T(30, 60) \approx 1{,}75$ e $f_H(30, 60) \approx 0{,}3$ (veja as páginas 836-837). Assim, a aproximação linear é

$$f(T, H) \approx f(30, 60) + f_T(30, 60)(T - 30) + f_H(30, 60)(H - 60)$$
$$\approx 38 + 1{,}75(T - 30) + 0{,}3(H - 60)$$

Em particular,

$$f(31, 62) \approx 38 + 1{,}75(1) + 0{,}3(2) = 40{,}35$$

Portanto, quando $T = 31$ ºC e $H = 62\%$, o humidex é

$$I \approx 40{,}4 \text{ ºC}$$

□

DIFERENCIAIS

Para uma função de uma única variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer qualquer número real. A diferencial de y é definida como

$$\boxed{9} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

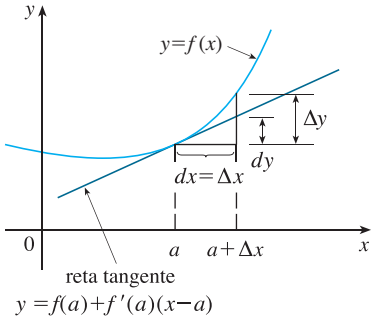


FIGURA 6

(Veja a Seção 3.10, no Volume I.) A Figura 6 mostra as relações entre o incremento Δy e a diferencial dy: Δy representa a variação de altura da curva $y = f(x)$ e dy representa a variação de altura da reta tangente quando x varia da quantidade $dx = \Delta x$.

Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as **diferenciais** dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então, a **diferencial** dz, também chamada **diferencial total**, é definida por

$$\boxed{10} \qquad dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(Compare com a Equação 9.) Algumas vezes a notação df é usada no lugar de dz.

Se tomamos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$ na Equação 10, então a diferencial de z é

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear (4) pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

A Figura 7 é a versão tridimensional da Figura 6 e mostra a interpretação geométrica da diferencial dz e do incremento Δz: dz representa a variação na altura do plano tangente, ao passo que Δz representa a variação da altura da superfície $z = f(x, y)$ quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

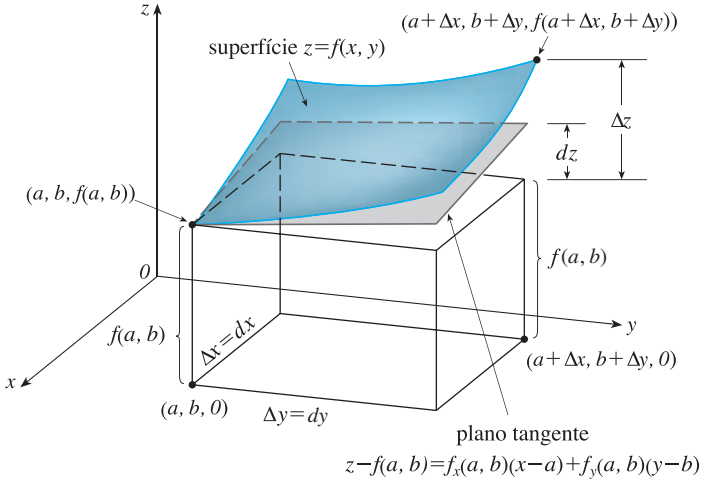


FIGURA 7

EXEMPLO 4

(a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

(b) Se x varia de 2 a 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

SOLUÇÃO

(a) Da Definição 10 vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

■ No Exemplo 4, dz está próximo de Δz porque o plano tangente é uma boa aproximação da superfície $z = x^2 + 3xy - y^2$ perto do ponto $(2, 3, 13)$ (veja a Figura 8).

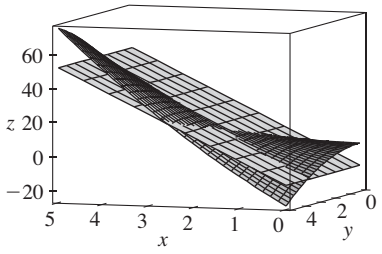


FIGURA 8

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$, obtemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04) = 0{,}65$$

O incremento de z é

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2{,}05, 2{,}96) - f(2, 3)\\ &= [(2{,}05)^2 + 3(2{,}05)(2{,}96) - (2{,}96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0{,}6449\end{aligned}$$

Observe que $\Delta z \approx dz$, mas dz é mais simples de calcular. □

EXEMPLO 5 Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

SOLUÇÃO O volume V do cone com raio da base r e altura h é $V = \pi r^2 h/3$. Logo, a diferencial de V é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Como cada erro é de, no máximo, 0,1 cm, temos $|\Delta r| \leq 0{,}1$, $|\Delta h| \leq 0{,}1$. Para achar o erro máximo no volume, tomamos o maior erro nas medidas de r e de h. Portanto, tomamos $dr = 0{,}1$ e $dh = 0{,}1$ para $r = 10$, $h = 25$. Isso dá

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0{,}1) + \frac{100\pi}{3}(0{,}1) = 20\pi$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de cerca de $20\pi\ \text{cm}^3 \approx 63\ \text{cm}^3$. □

FUNÇÕES DE TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis. Uma função diferenciável é definida por uma expressão semelhante àquela da Definição 7. Para essas funções a **aproximação linear** é

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e a linearização $L(x, y, z)$ é o lado direito dessa expressão.

Se $w = f(x, y, z)$, então o **incremento** de w é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

A **diferencial** dw é definida em termos das diferenciais dx, dy e dz das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EXEMPLO 6 As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

SOLUÇÃO Se as dimensões da caixa são x, y e z, seu volume é $V = xyz$ e

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leq 0{,}2$, $|\Delta y| \leq 0.2$ e $|\Delta z| \leq 0{,}2$. Para determinar o maior erro no volume, usamos $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ em conjunto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1\,980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1 980 cm^3 no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa. □

14.4 EXERCÍCIOS

1-6 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y, \quad (-1, 2, 4)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7, \quad (2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}, \quad (1, 1, 1)$

4. $z = y \ln x, \quad (1, 4, 0)$

5. $z = y \cos(x - y), \quad (2, 2, 2)$

6. $z = e^{x^2 - y^2}, \quad (1, -1, 1)$

7-8 Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2, \quad (1, 1, 5)$

8. $z = \operatorname{arctg}(xy^2), \quad (1, 1, \pi/4)$

9-10 Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}, \quad (1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right), \quad (1, 1, 3e^{-0{,}1})$

11-16 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad (1, 4)$

12. $f(x, y) = x^3 y^4, \quad (1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}, \quad (2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy} \cos y, \quad (\pi, 0)$

16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y), \quad (-3, 2)$

17-18 Verifique a aproximação linear em $(0, 0)$

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1{,}95, 1{,}08)$.

20. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6{,}9, 2{,}06)$. Ilustre, traçando o gráfico da função e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

22. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 °C e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 °C e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a velocidade do vento, v; por-

tanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a −15 °C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a −17 °C e a velocidade do vento for de 55 km/h.

25-30 Determine a diferencial da função.

25. $z = x^3 \ln(y^2)$

26. $v = y \cos xy$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos\lambda$

30. $w = xye^{xz}$

31. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1{,}05, 2{,}1)$, compare os valores de Δz e dz.

32. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

33. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

34. As dimensões de uma caixa retangular fechada foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo da área da superfície da caixa.

35. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

36. Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

37. Uma faixa interna de 8 cm de largura é pintada na borda de um retângulo de dimensões 30 m por 60 m. Utilize os diferenciais para aproximar a área, em metros quadrados, da faixa pintada.

38. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

39. Se R é a resistência equivalente de três resistores conectadas em paralelo, com resistências R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

40. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

41. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por $S = 72{,}09w^{0{,}425}h^{0{,}725}$, onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de w e h forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

42. Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2, 1, 3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

estão ambas em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

43-44 Mostre que a função é diferenciável achando valores ε_1 e ε_2 que satisfaçam à Definição 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demonstre que, se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b), então f é contínua em (a, b). *Sugestão*: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

corresponde ao gráfico da Figura 4. Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Sugestão*: Utilize o resultado do Exercício 45.]

(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

14.5 REGRA DA CADEIA

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para derivar uma função composta: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então y é indiretamente uma função diferenciável de t e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \boxed{1}$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta. A primeira versão (Teorema 2) diz respeito ao caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, função de uma variável t. Isso significa que z é indiretamente uma função de t, $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para derivar z como uma função de t. Estamos admitindo que f seja diferenciável (Definição 14.4.7). Lembremo-nos de que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas (Teorema 14.4.8).

2 REGRA DA CADEIA (CASO 1) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DEMONSTRAÇÃO Uma variação de Δt em t produz uma variação de Δx em x e Δy em y. Isso, por sua vez, produz uma variação de Δz em z, e da Definição 14.4.7 temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. [Se as funções ε_1 e ε_2 não estiverem definidas em $(0, 0)$, poderemos defini-las como 0 lá.] Dividindo ambos os lados da equação por Δt, temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se fizermos $\Delta t \to 0$, então $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ porque g é diferenciável e, portanto, contínua. Da mesma forma, $\Delta y \to 0$. Por outro lado, isso implica que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

□

■ Observe a semelhança com a definição da diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

Como frequentemente escrevemos $\partial z/\partial x$ no lugar de $\partial f/\partial x$, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

EXEMPLO 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \operatorname{sen} 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$.

SOLUÇÃO A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)$$

Não é necessário substituir as expressões de x e de y em função de t. Simplesmente observe que, quando $t = 0$, temos $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$. Logo,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$ □

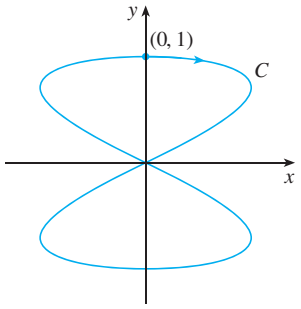


FIGURA 1
A curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

A derivada no Exemplo 1 pode ser interpretada como a taxa de variação de z com relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$. (Veja a Figura 1.) Em particular, quando $t = 0$, o ponto (x, y) é $(0, 1)$, e $dz/dt = 6$ é sua taxa de crescimento quando nos movemos ao longo da curva C passando por $(0, 1)$. Se, por exemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representar a temperatura no ponto (x, y), então a função composta $z = T(\operatorname{sen} 2t, \cos t)$ representa a temperatura dos pontos da curva C e sua derivada dz/dt corresponde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva C.

EXEMPLO 2 A pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula $PV = 8{,}31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de 0,1 K/s e o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de 0,2 L/s.

SOLUÇÃO Se t representa o tempo decorrido, medido em segundos, então em um dado instante temos $T = 300$, $dT/dt = 0{,}1$, $V = 100$, $dV/dt = 0{,}2$. Como

$$P = 8{,}31\frac{T}{V}$$

pela Regra da Cadeia

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8{,}31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8{,}31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8{,}31}{100}(0{,}1) - \frac{8{,}31(300)}{100^2}(0{,}2) = -0{,}04155$$

A pressão está decrescendo com a taxa de 0,042 kPa/s. □

Vamos considerar agora a situação onde $z = f(x, y)$, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Então z é indiretamente uma função de s e t e desejamos determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$. Lembre-se de que para calcular $\partial z/\partial t$ mantemos s fixo e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t. Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Argumento análogo serve para $\partial z/\partial s$, e assim demonstramos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

3 REGRA DA CADEIA (CASO 2) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e de t. Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EXEMPLO 3 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

SOLUÇÃO Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2t)$$ □

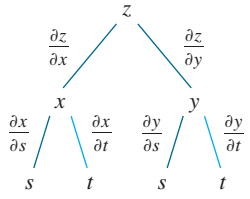


FIGURA 2

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis: s e t, que são variáveis **independentes**; x e y, chamadas variáveis **intermediárias**; e z, que é a variável **dependente**. Observe que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia unidimensional da Equação 1.

Para lembrar a Regra da Cadeia é útil desenhar o **diagrama em árvore** da Figura 2. Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente z para as variáveis intermediárias x e y a fim de indicar que z é uma função de x e y. Então desenhamos os ramos saindo de x e y para as variáveis independentes s e t. Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente. Para achar $\partial z/\partial s$ determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de z a s e somamos esses produtos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Da mesma forma, para determinar $\partial z/\partial t$ usamos os caminhos de z a t .

Consideremos agora uma situação mais geral na qual a variável dependente u é uma função de n variáveis intermediárias $x_1, \ldots, x_n$, cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que existem n termos, um para cada variável intermediária. A demonstração é semelhante à do Caso 1.

4 REGRA DA CADEIA (VERSÃO GERAL) Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então u é uma função diferenciável de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

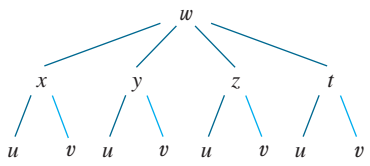


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

SOLUÇÃO Aplicamos o Teorema 4 com $n = 4$ e $m = 2$. A Figura 3 mostra o diagrama em árvore correspondente. Apesar de não termos escrito as derivadas nos ramos, entendemos que em um ramo que liga y a u a derivada parcial omitida é $\partial y/\partial u$. Com a ajuda do diagrama em árvore, podemos escrever as expressões pedidas:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

□

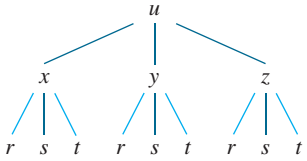


FIGURA 4

EXEMPLO 5 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2, s = 1, t = 0$.

SOLUÇÃO Com o auxílio do diagrama em árvore da Figura 4, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Quando $r = 2, s = 1$e $t = 0$, temos $x = 2, y = 2$ e $z = 0$. Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

□

EXEMPLO 6 Se $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUÇÃO Seja $x = s^2 - t^2$e $y = t^2 - s^2$. Então $g(s, t) = f(x, y)$ e a Regra da Cadeia nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Portanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

□

EXEMPLO 7 Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine (a) $\partial z/\partial r$ e (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUÇÃO

(a) A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

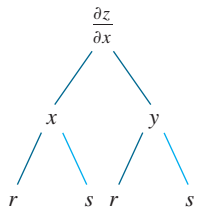


FIGURA 5

(b) Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{5}$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Mas, usando a Regra da Cadeia novamente, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Colocando essas expressões na Equação 5 e usando a igualdade das derivadas parciais de segunda ordem mistas, obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

□

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

A Regra da Cadeia pode ser usada para dar uma descrição mais completa do processo de derivação implícita introduzida nas Seções 3.5, no Volume I, e 14.3. Suponhamos que a equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, ou seja, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra de Cadeia para derivar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x. Como x e y são ambas funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

No entanto, $dx/dx = 1$; então, se $\partial F/\partial y \neq 0$, isolamos dy/dx para obtermos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{6}$$

Para deduzir essa equação, assumimos que $F(x, y) = 0$ define y implicitamente em função de x. O **Teorema da Função Implícita**, demonstrado em cálculo avançado, fornece condições sob as quais essa hipótese é válida. Ele afirma que se F é definida em uma bola aberta contendo (a, b), onde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas

nessa bola, então a equação $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x perto do ponto (a, b) e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

EXEMPLO 8 Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

■ A solução do Exemplo 8 deve ser comparada com a do Exemplo 2 da Seção 3.5, no Volume I.

SOLUÇÃO A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

□

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso é o mesmo que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Mas, $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, isolamos $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de modo semelhante.

7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** nos dá as condições sob as quais nossa hipótese é válida: se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais dessa função são dadas por (7).

EXEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

■ A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

SOLUÇÃO Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então, das Equações 7, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

□

14.5 EXERCÍCIOS

1-6 Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^4, \quad y = 1 - t^3$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}$

3. $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}$

4. $z = \operatorname{tg}^{-1}(x/y), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t$

7-12 Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s \cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

11. $z = e^r \cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$$x = g(t) \qquad y = h(t)$$
$$g(3) = 2 \qquad h(3) = 7$$
$$g'(3) = 5 \qquad h'(3) = -4,$$
$$f_x(2, 7) = 6 \qquad f_y(2, 7) = -8$$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u, e v são diferenciáveis, e

$$u(1, 0) = 2 \qquad v(1, 0) = 3$$
$$u_s(1, 0) = -2, \qquad v_s(1, 0) = 5$$
$$u_t(1, 0) = 6 \qquad v_t(1, 0) = 4,$$
$$F_u(2, 3) = -1 \qquad F_v(2, 3) = 10$$

Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
$(0, 0)$	3	6	4	8
$(1, 2)$	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17-20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t), y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, onde $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y), s = s(x, y), t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s), v = v(p, q, r, s), w = w(p, q, r, s)$

21-26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ve^w;$

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, \quad v = 1, \quad w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad r = y + x \cos t, \quad s = x + y \operatorname{sen} t;$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1, \quad y = 2, \quad t = 0$

23. $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2), \quad u = x + 2y, \quad v = 2x - y, w = 2xy;$

$\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ quando $x = y = 1$

24. $M = xe^{y-z^2}, x = 2uv, \quad y = u - v, \quad z = u + v;$

$\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}$, quando $u = 3, \quad v = -1$

25. $u = x^2 + yz, \quad x = pr \cos\theta, \quad y = pr \operatorname{sen}\theta, \quad z = p + r;$

$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ quando $p = 2, \quad r = 3, \quad \theta = 0$

26. $Y = w \operatorname{tg}^{-1}(uv), \quad u = r + s, \quad v = s + t, \quad w = t + r;$

$\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1, \quad s = 0, \quad t = 1$

27-30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

28. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

29. $\cos(x - y) = xe^y$

30. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

31-34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

32. $xyz = \cos(x + y + z)$

33. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$

34. $yz = \ln(x + z)$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção W de trigo em um determinado ano depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo

à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.

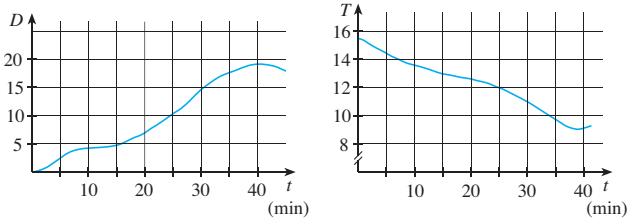
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?

(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?



38. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura decresce à taxa de 6,5 cm/s. Qual a taxa de variação do volume do cone quando seu raio é de 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w aumentam a uma taxa de 2 m/s, ao passo que h diminui à taxa de 3 m/s. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.

(a) O volume

(b) A área da superfície

(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação do Exemplo 2 para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 kPa e a temperatura é 320 K.

42. Um carro A está viajando para norte na rodovia 16 e um carro B está viajando para oeste na rodovia 83. Os dois carros se aproximam da intersecção dessas rodovias. Em um certo momento, o carro A está a 0,3 km da intersecção viajando a 90 km/h, ao passo que o carro B está a 0,4 km da intersecção viajando a 80 km/h. Qual a taxa de variação da distância entre os carros nesse instante?

43. Um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 3 cm/s e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

44. Se um som com frequência f_s for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade v_s e um observador estiver se movendo com velocidade v_o ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

onde c é a velocidade do som, cerca de 332 m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um momento particular, você está em um trem se movendo a 34 m/s e acelerando a 1,2 m/s^2. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s^2, e toca seu apito, que tem frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45-48 Suponha que todas as funções dadas são diferenciáveis.

45. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\,\frac{\partial z}{\partial t}$$

49-54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugestão*: Tome $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.
(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo valor de t, onde n é um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.
(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.
(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugestão*: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

56. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como função das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

14.6 DERIVADAS DIRECIONAIS E O VETOR GRADIENTE

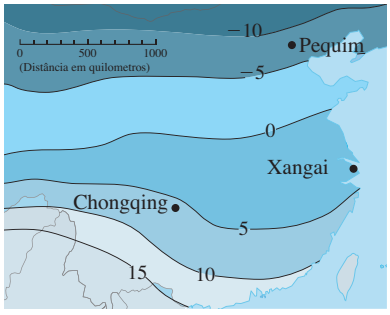


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um mapa de contorno da função temperatura $T(x, y)$ para a China às 15 horas em 28 de dezembro de 2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam localizações com a mesma temperatura. A derivada parcial T_x em um local como Chongqing é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Chongqing; T_y é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte. Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção? Nesta seção, introduziremos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \boxed{1}$$

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e representam as taxas de variação de z na direção positiva dos eixos x e y, ou seja, nas direções e sentidos dos versores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z no ponto (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ (veja a Figura 2). Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. O ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence a S. O plano vertical que passa por P na direção de $\mathbf{u}$ intercepta S em uma curva C (veja a Figura 3). A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$.

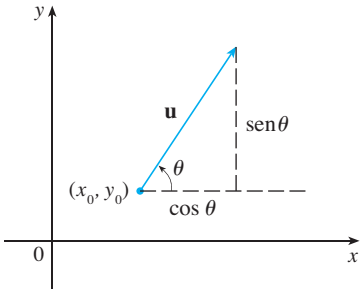
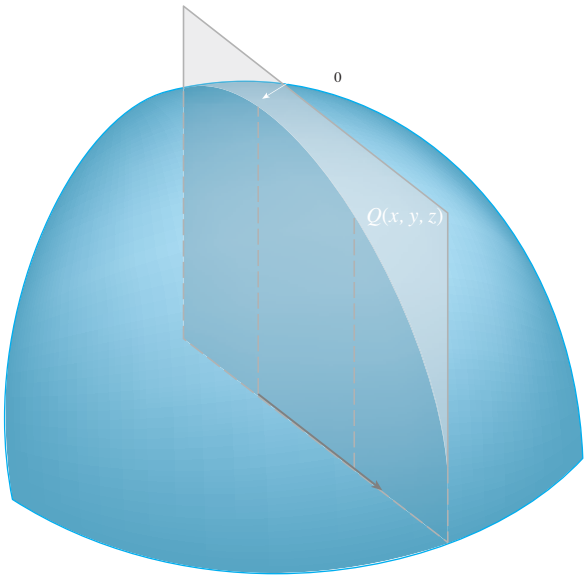


FIGURA 2
Um vetor unitário
$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = \langle\cos\theta, \text{sen}\,\theta\rangle$



Se $Q(x, y, z)$ é outro ponto sobre C e P', Q' são as projeções de P, Q sobre o plano xy, então o vetor $\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a $\mathbf{u}$, e portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algum escalar h. Dessa forma, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, de modo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$, que é chamada derivada direcional de f na direção e sentido de $\mathbf{u}$.

2 DEFINIÇÃO A **derivada direcional** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Comparando a Definição 2 com (1), vemos que, se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. Em outras palavras, as derivadas parciais de f com relação a x e y são casos particulares da derivada direcional.

EXEMPLO 1 Utilize o mapa meteorológico da Figura 1 para estimar o valor da derivada direcional da função temperatura em Chongqing na direção sudeste.

SOLUÇÃO O vetor unitário na direção sudeste é dado por $\mathbf{u} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$, mas não necessitaremos dessa expressão. Em vez disso, inicialmente traçamos uma reta que passa por Chongqing na direção sudeste (veja a Figura 4).

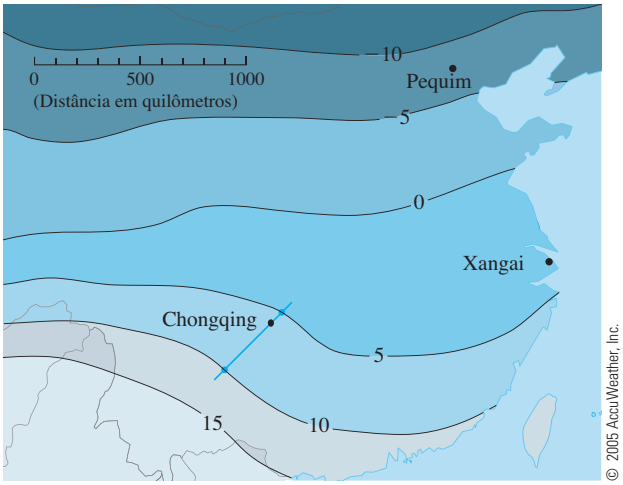


FIGURA 4

Aproximamos a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}T$ pela taxa média de variação de temperatura entre os pontos onde a reta traçada intercepta as isotérmicas $T = 5$ e $T = 10$. A temperatura no ponto a sudeste de Chongqing é $T = 10$ °C, e a temperatura no ponto a noroeste de Chongqing é $T = 5$ °C. A distância aproximada desses pontos é de 380 km. Logo, a taxa de variação da temperatura na direção sudeste é

$$D_{\mathbf{u}}T \approx \frac{10 - 5}{380} = \frac{5}{380} \approx 0{,}013 \text{ °C/km}$$ □

Quando calculamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema:

3 TEOREMA Se é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

DEMONSTRAÇÃO Se definirmos uma função g de uma única variável h por

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$\boxed{4} \quad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por outro lado, podemos escrever $g(h) = f(x, y)$, onde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$ e, pela Regra da Cadeia (Teorema 14.5.2), vem

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se tomarmos $h = 0$, então $x = x_0$, $y = y_0$, e

$$\boxed{5} \quad g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Comparando as Equações 4 e 5, vemos que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$ □

Se o vetor unitário $\mathbf{u}$ faz um ângulo θ com o eixo x positivo (como na Figura 2), então podemos escrever $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \tag{6}$$

EXEMPLO 2 Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

SOLUÇÃO A Fórmula 6 nos dá

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right]$$

Portanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$ □

■ A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ no Exemplo 2 representa a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$. Isto é a inclinação da reta tangente à curva obtida pela intersecção da superfície $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ com o plano vertical que passa por $(1, 2, 0)$ na direção de $\mathbf{u}$ mostrado na Figura 5.

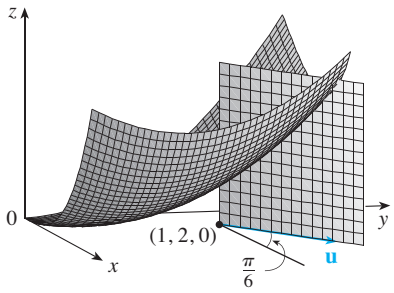


FIGURA 5

VETOR GRADIENTE

Observe no Teorema 3 que a derivada direcional pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \tag{7}$$

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações. Assim, daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de f) e uma notação especial (**grad** f ou ∇f, que lemos "del f").

8 DEFINIÇÃO Se f é uma função de duas variáveis x e y, o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

e

$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$ □

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a expressão (7) para a derivada direcional como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \tag{9}$$

que expressa a derivada direcional na direção de **u** como a projeção escalar do vetor gradiente sobre **u**.

■ O vetor gradiente $\nabla f(2, -1)$ do Exemplo 4 é mostrado na Figura 6 com ponto inicial $(2, -1)$. Também é mostrado o vetor **v**, que dá a direção da derivada direcional. Ambos os vetores estão sobrepostos ao mapa de contorno do gráfico de *f*.

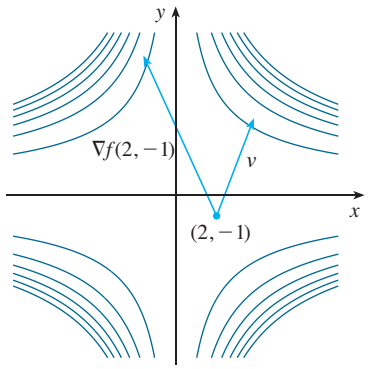


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

SOLUÇÃO Primeiramente, vamos calcular o gradiente de *f* no ponto $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Observe que **v** não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de **v** é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$D_{\mathbf{u}}f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

□

FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de modo semelhante. Novamente $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção de um vetor unitário **u**.

10 DEFINIÇÃO A **derivada direcional** de uma função *f* em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se o limite existir.

Se usarmos a notação vetorial, poderemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

11
$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

onde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ se $n = 2$ e $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ se $n = 3$. Isso era esperado, porque a equação vetorial da reta que passa por $\mathbf{x}_0$ na direção do vetor **u** é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ (Equação 12.5.1), e, portanto, $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa o valor de *f* em um ponto dessa reta.

Se $f(x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, então o mesmo método usado na demonstração do Teorema 3 pode ser usado para mostrar que

12
$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** f, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z) f_z(x, y, z) \rangle$$

ou, de modo mais abreviado,

13
$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

14
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

EXEMPLO 5 Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine o gradiente de f e (b) determine a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO

(a) O gradiente de f é

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z) f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

(b) No ponto $(1, 3, 0)$ temos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Portanto, da Equação 14, vem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

□

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL

Suponha que tenhamos uma função f de duas ou três variáveis e considere todas as possíveis derivadas direcionais de f em um ponto dado. Isso nos dará a taxa de variação da função em todas as direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções f varia mais rapidamente e qual a taxa máxima de variação? A resposta a essas perguntas é dada pelo seguinte teorema.

15 **TEOREMA** Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ e ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção que o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

DEMONSTRAÇÃO Da Equação 9 ou 14, temos

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$. O valor máximo de $\cos\theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$. Portanto, o valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ é $|\nabla f|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que ∇f. □

EXEMPLO 6

(a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO

(a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

O vetor unitário na direção $\overrightarrow{PQ} = \langle -1{,}5, 2 \rangle$ é $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1(-\tfrac{3}{5}) + 2(\tfrac{4}{5}) = 1$$

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. A máxima taxa de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$ □

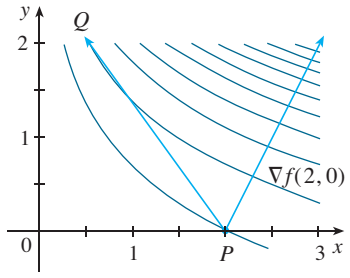


FIGURA 7

■ No ponto $(2, 0)$ a função do Exemplo 6 aumenta mais rapidamente na direção do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. Na Figura 7 observe que esse vetor parece ser perpendicular à curva de nível que passa por $(2, 0)$. A Figura 8 mostra o gráfico de f e o vetor gradiente.

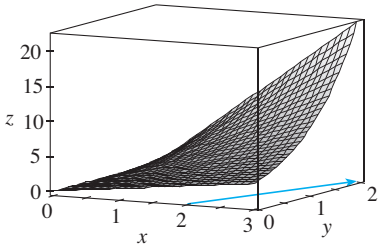


FIGURA 8

EXEMPLO 7 Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y e z, em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

SOLUÇÃO O gradiente de T é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k})$$

No ponto $(1, 1, -2)$, o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Pelo Teorema 15, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ ou, de modo equivalente, na direção de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ou ainda de seu vetor unitário $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4$ °C/m. □

PLANO TANGENTE ÀS SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Suponha que S seja uma superfície com equação $F(x, y, z) = k$, ou seja, uma superfície de nível de uma função F de três variáveis, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto sobre S. Seja C uma curva qualquer contida na superfície S que passe pelo ponto P. Lembre-se de que, da Seção 13.1, a curva C é descrita por uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Seja t_0 o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, ou seja, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Como C pertence a S, qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S, ou seja,

16 $$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Se x, y e z são funções diferenciáveis de t e F também é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da Equação 16, como a seguir:

17 $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Mas, como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ e $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, a Equação 17 pode ser escrita em termos do produto escalar como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, quando $t = t_0$, temos $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, e assim

18 $$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

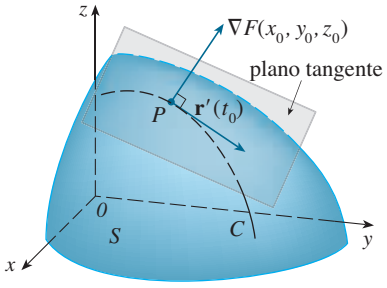


FIGURA 9

A Equação 18 nos diz que *o vetor gradiente em P,* $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *é perpendicular ao vetor tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a qualquer curva C em S que passe por P* (veja a Figura 9). Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, é natural definir o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ **em** $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Utilizando a equação geral do plano (Equação 12.5.7) podemos escrever a equação do plano tangente como

19 $$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

A **reta normal** a S em P é a reta que passa por P e é perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e, assim, pela Equação 12.5.3, suas equações simétricas são

20 $$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma $z = f(x, y)$ (ou seja, S é o gráfico da função f de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e considerar S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F. Então

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de modo que a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que é equivalente à Equação 14.4.2. Então, nossa nova, mais geral, definição de plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso especial da Seção 14.4.

EXEMPLO 8 Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUÇÃO O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Portanto, temos

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Então, da Equação 19, temos que a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$, é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

que pode ser simplificada para $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}} \qquad \square$$

■ A Figura 10 mostra o elipsoide, o plano tangente e a reta normal do Exemplo 8.

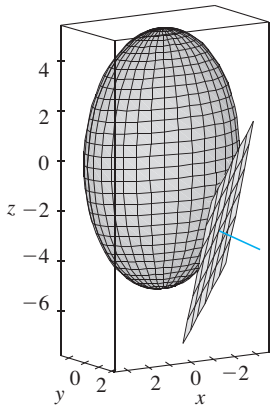


FIGURA 10

IMPORTÂNCIA DO VETOR GRADIENTE

Vamos resumir agora as maneiras pelas quais o vetor gradiente é importante. Inicialmente consideraremos uma função f de três variáveis e um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica a direção de maior crescimento da função f. Por outro, sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal às superfícies de nível S de f em P (veja a Figura 9). Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos afastamos de P em uma superfície de nível S, o valor da função f não se altera. Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

Da mesma maneira, podemos considerar uma função de duas variáveis f e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio. Novamente o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de maior crescimento de f. Além disso, por considerações semelhantes à nossa discussão sobre o plano tangente, podemos mostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P. Mais uma vez, isso é plausível intuitivamente, visto que os valores de f se mantêm constantes quando nos movemos ao longo da curva de nível (veja a Figura 11).

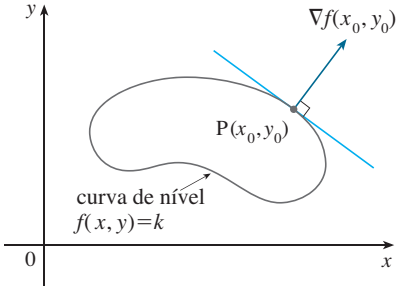


FIGURA 11

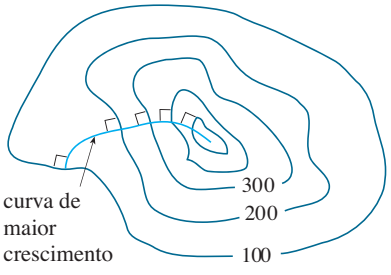


FIGURA 12

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Riacho Lonesome segue a curva de declive máximo.

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b). A Figura 13 mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobreposto a um mapa de contornos de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção de "subida de morro" e são perpendiculares às curvas de nível.

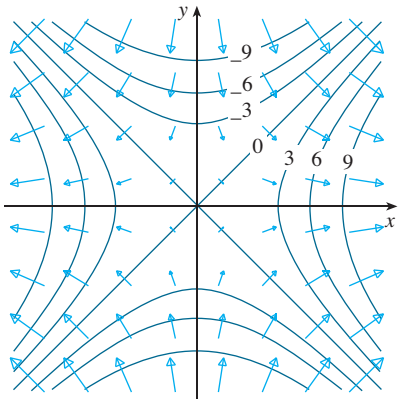
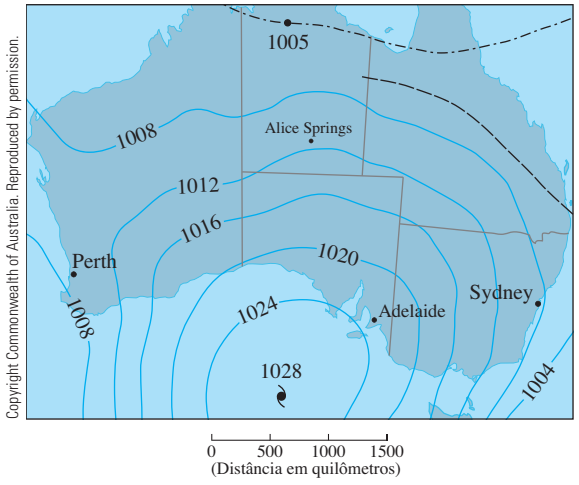


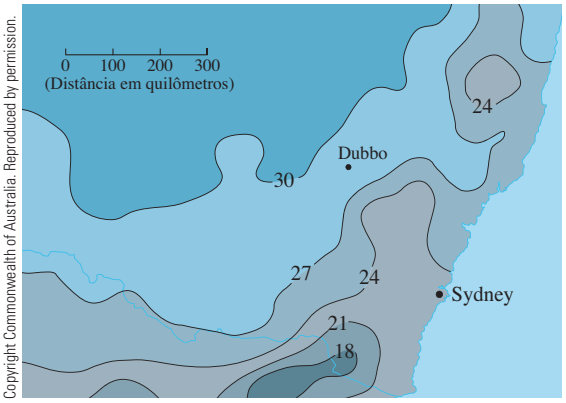
FIGURA 13

14.6 EXERCÍCIOS

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascais (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quis são as unidades da derivada direcional?



2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em ºC). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

4. $f(x, y) = x^2y^3 - y^4, \quad (2, 1), \quad \theta = \pi/4$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$

7–10

(a) Determine o gradiente de f.

(b) Calcule o gradiente no ponto P.

(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$

8. $f(x, y) = y \ln x$, $P(1, -3)$, $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11–17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

12. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

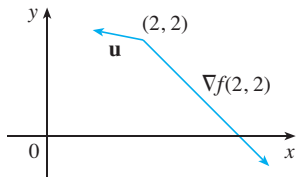
14. $g(r, s) = \operatorname{tg}^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$, $(1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ em $P(1, -1, 3)$ na direção de $Q(2, 4, 5)$.

21–26 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$

22. $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$, $(0, 0)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(x, y, z) = \operatorname{tg}(x + 2y + 3z)$, $(-5, 1, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.

(b) Utilize a parte (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Nas proximidades de uma boia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, onde x, y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 120°.

(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.

(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

onde T é medido em °C e x, y, z em metros.

(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.

(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?

(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas $(60, 40, 966)$. O eixo x positivo aponta para leste e o eixo y positivo aponta para o norte.

(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? Com que taxa?

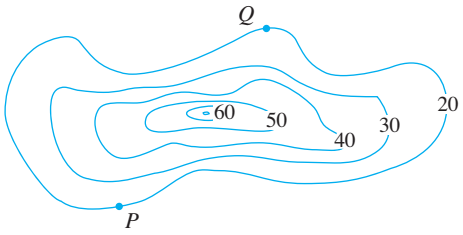
(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?

(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor

$\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

36. Para o mapa de contorno dado, desenhe as curvas de maior crescimento em P e em Q.

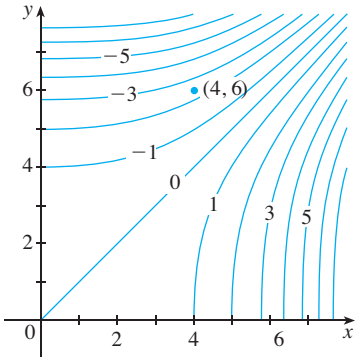


37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções de x e y, diferenciáveis, e a e b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39-44 Determine equações (a) do plano tangente e (b) da reta normal a uma superfície dada no ponto especificado.

39. $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

40. $y = x^2 - z^2, \quad (4, 7, 3)$

41. $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2, \quad (2, 1, -1)$

42. $x - z = 4\,\text{arctg}(yz), \quad (1 + \pi, 1, 1)$

43. $z + 1 = xe^y \cos z, \quad (1, 0, 0)$

44. $yz = \ln(x + z), \quad (0, 0, 1)$

45-46 Utilize um computador para traçar o gráfico da superfície, do plano tangente e da reta normal na mesma tela. Escolha o domínio com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

45. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$

46. $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

47. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

48. Se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, encontre o vetor gradiente $\nabla g(1, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ no ponto $(1, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

49. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

50. Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 49.

51. Mostre que a equação do plano tangente ao paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

52. Em qual ponto do paraboloide $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$?

53. Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

54. Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

55. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

56. Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

57. Mostre que a soma das intersecções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.

58. Mostre que as pirâmides cortadas do primeiro octante por qualquer plano tangente à superfície $xyz = 1$ em pontos do primeiro octante têm todas o mesmo volume.

59. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

60. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 1)$.

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

61. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equação $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais em um ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se, em P,

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

62. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma a parte (a).

63. Suponha que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por vetores unitários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. É possível determinar ∇f nesse ponto? Em caso afirmativo, como fazê-lo?

64. Mostre que, se $z = f(x, y)$ for diferenciável em $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, então

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugestão*: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

14.7 VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

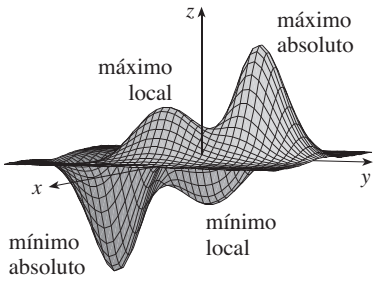


FIGURA 1

Como vimos no Capítulo 4, no Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo. Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade limitada de cartolina para trabalhar.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na Figura 1. Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um *máximo local*, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$. O maior destes dois valores é o *máximo absoluto*. Do mesmo modo, f tem dois *mínimos locais* onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos. O menor destes dois valores é o *mínimo absoluto*.

1 DEFINIÇÃO Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). [Isso significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todo ponto (x, y) em alguma bola aberta com centro em (a, b).] O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Se as inequações da Definição 1 valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

■ Observe que a conclusão do Teorema 2 pode ser colocada em termos dos vetores gradientes como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

2 TEOREMA Se uma função f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = f(x, b)$. Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b), então g tem um máximo (ou mínimo) local em a, de modo que $g'(a) = 0$ pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4, no Volume I). Mas $g'(a) = f_x(a, b)$ (veja a Equação 14.3.1), e assim $f_x(a, b) = 0$. Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função $G(y) = f(a, y)$, obtemos $f_y(a, b) = 0$. □

Se impusermos $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ na equação do plano tangente (Equação 14.4.2), obteremos $z = z_0$. Assim, a interpretação geométrica do Teorema 2 é que, se o gráfico de f tem um plano tangente em um ponto de máximo ou mínimo local, esse plano precisa ser horizontal.

Um ponto (a, b) é dito ser um **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir. O Teorema 2 diz que, se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f. Entretanto, como no cálculo de uma única variável, nem todos os pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

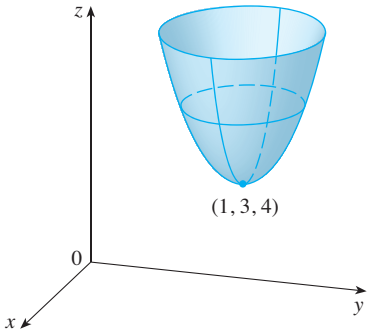


FIGURA 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EXEMPLO 1 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto o único ponto crítico é $(1, 3)$. Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Como $(x - 1)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$, temos $f(x, y) \geqslant 4$ para todos os valores de x e y. Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local, e de fato é um mínimo absoluto de f. Isso pode ser confirmado geometricamente do gráfico de f, que é um paraboloide elíptico com vértice $(1, 3, 4)$, mostrado na Figura 2. □

EXEMPLO 2 Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUÇÃO Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (se $x \neq 0$). Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$, e então $f(x, y) = y^2 > 0$ (se $y \neq 0$). Logo, todo disco com centro $(0, 0)$ contém pontos onde a função f tem valores positivos, assim como pontos onde f tem valores negativos. Por conseguinte, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f, e f não tem valor extremo. □

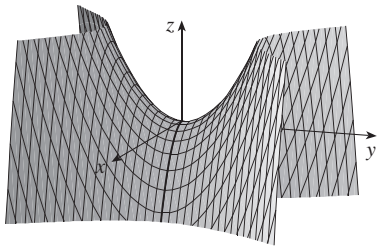


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$

O Exemplo 2 ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico. A Figura 3 mostra como isso é possível. O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tem plano horizontal tangente ($z = 0$) na origem. Você pode ver que $f(0, 0) = 0$ é um máximo na direção do eixo x, mas um mínimo na direção do eixo y. Perto da origem o gráfico tem o formato de uma sela, e por isso $(0, 0)$ é chamado *ponto de sela* de f.

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. O teste a seguir, que será demonstrado no fim desta seção, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.

3 TESTE DA SEGUNDA DERIVADA Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Obs. 1: No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

Obs. 2: Se $D = 0$, o teste não fornece informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

Obs. 3: Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

EXEMPLO 3 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUÇÃO Vamos inicialmente localizar os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \quad \text{e} \quad y^3 - x = 0$$

Para resolvê-las, substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, segue do caso (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela; ou seja, f não tem nem máximo local nem mínimo local em $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, vemos do caso (a) do teste que $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local. Da mesma forma, temos $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, e então $f(-1, -1) = -1$ é também um mínimo local.

O gráfico de f é mostrado na Figura 4. □

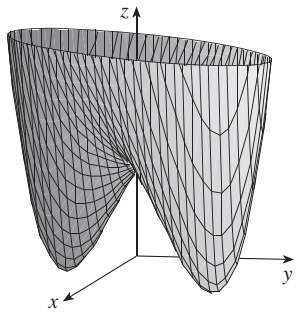


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

■ Um mapa de contorno da função f do Exemplo 3 é mostrado na Figura 5. As curvas de nível perto de $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ têm forma oval e indicam que, quando nos movemos para longe de $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$ em qualquer direção, os valores de f crescem. As curvas de nível perto de $(0, 0)$, por outro lado, parecem hipérboles. Elas revelam que, quando nos movemos para longe da origem (onde o valor de f é 1), os valores de f decrescem em algumas direções, mas crescem em outras. Portanto, o mapa de contornos sugere a presença dos mínimos e do ponto de sela que encontramos no Exemplo 3.

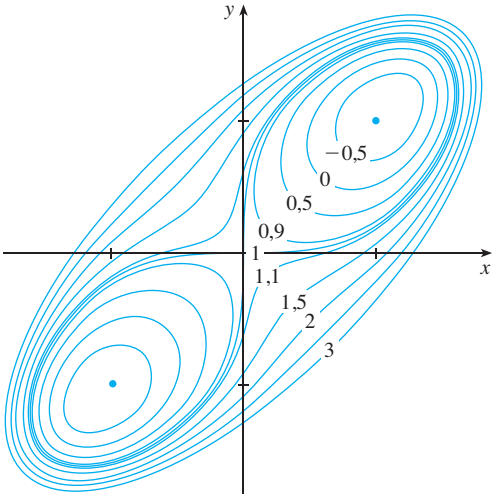


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

SOLUÇÃO As derivadas parciais de primeira ordem são

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Para achar os pontos críticos precisamos resolver as equações

$$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0 \quad (4)$$

$$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0 \quad (5)$$

Da Equação 4, vemos que

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

No primeiro caso ($x = 0$), a Equação 5 fica $-4y(1 + y^2) = 0$, assim $y = 0$ e temos um ponto crítico $(0, 0)$.

No segundo caso ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), temos

$$x^2 = 5y - 2{,}5 \quad (6)$$

e, substituindo na Equação 5, temos $25y - 12{,}5 - 4y - 4y^3 = 0$. Logo, temos de resolver a equação cúbica

$$4y^3 - 21y + 12{,}5 = 0 \quad (7)$$

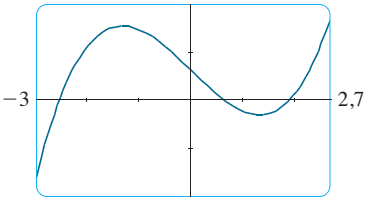


FIGURA 6

Utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico da função

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12{,}5$$

como na Figura 6, vemos que a Equação 7 tem três raízes reais. Dando *zoom* podemos achar as raízes com quatro casas decimais:

$$y \approx -2{,}5452 \qquad y \approx 0{,}6468 \qquad y \approx 1{,}8984$$

(Como alternativa, podemos usar o método de Newton ou um programa para localizar raízes para determiná-las.) Da Equação 6, os valores de x correspondentes são dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2{,}5}$$

Se $y \approx -2{,}5452$, então x não tem valor real correspondente. Se $y \approx 0{,}6468$, então $x \approx \pm 0\ 8567$. Se $y \approx 1{,}8984$, então $x \approx \pm 2{,}6442$. Assim, temos o total de cinco pontos críticos, que são analisados na tabela a seguir. Todos os valores estão arredondados para duas casas decimais.

Ponto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusões
$(0, 0)$	0,00	−10,00	80,00	máximo local
$(\pm 2{,}64, 1{,}90)$	8,50	−55,93	2 488,72	máximo local
$(\pm 0{,}86, 0{,}65)$	−1,48	−5,87	−187,64	ponto de sela

As Figuras 7 e 8 mostram o gráfico de f sob dois pontos de vista diferentes, e vemos que a superfície se abre para baixo. [Isso pode ser visto da expressão de $f(x, y)$: os termos dominantes são $-x^4 - 2y^4$ quando $|x|$ e $|y|$ são grandes.] Comparando os valores de f nos máximos locais, vemos que o máximo absoluto de f é $f(\pm 2{,}64, 1{,}90) \approx 8{,}50$. Em outras palavras, os pontos mais altos do gráfico de f são $(\pm 2{,}64, 1{,}90, 8{,}50)$.

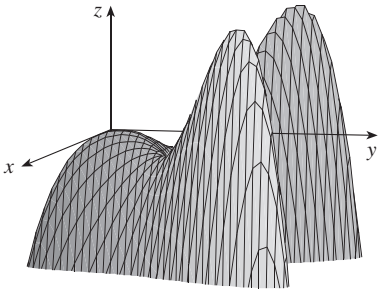


FIGURA 7

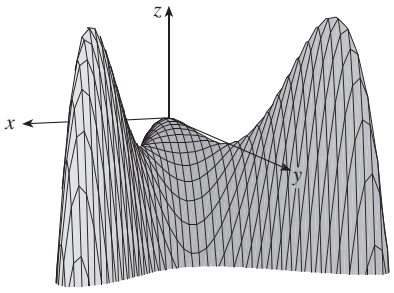


FIGURA 8 □

■ Os cinco pontos críticos da função f do Exemplo 4 estão destacados em azul no mapa de contorno de f na Figura 9.

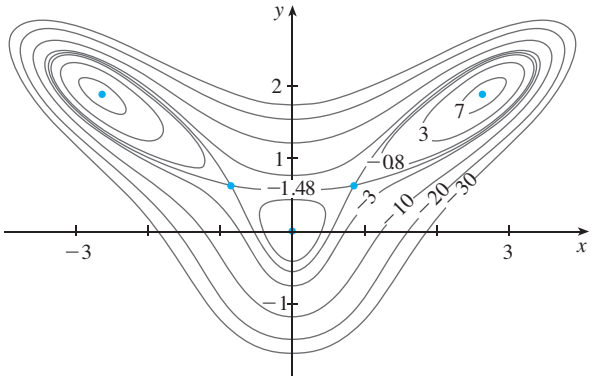


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUÇÃO A distância entre um ponto qualquer (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

mas, se (x, y, z) pertence ao plano $x + 2y + z = 4$, então $z = 4 - x - 2y$, e assim temos $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$. Podemos minimizar d minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6-x-2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

achamos que o único ponto crítico é $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Como $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ e $f_{yy} = 10$, temos $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (fxy)^2 = 24 > 0$ e $f_{xx} > 0$. Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de $(1, 0, -2)$. Se $x = \frac{11}{6}$ e $y = \frac{5}{3}$, então

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$

A menor distância de $(1, 0, -2)$ ao plano $x + 2y + z = 4$ é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$. □

■ O Exemplo 5 poderia ser resolvido utilizando-se vetores. Compare com os métodos da Seção 12.5.

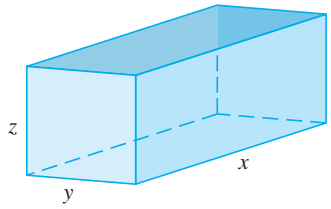


FIGURA 10

EXEMPLO 6 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.

SOLUÇÃO Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) como mostrado na Figura 10. O volume dessa caixa é

$$V = xyz$$

Podemos expressar V como função só de x e y usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Isolando z nessa equação, obtemos $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, e V fica

$$V = xy\,\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

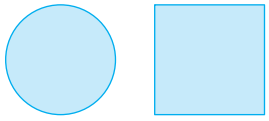
Se V é um máximo, então $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, mas $x = 0$ ou $y = 0$ fornecem $V = 0$, de modo que precisamos resolver as equações

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

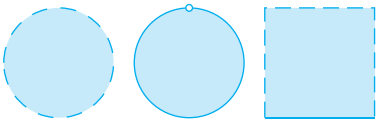
Isso leva a $x^2 = y^2$ e, portanto, $x = y$. (Observe que x e y precisam ser positivos no problema.) Se substituirmos $x = y$ em uma das equações, obteremos $12 - 3x^2 = 0$, o que dá $x = 2$, $y = 2$ e $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V, ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto e que, portanto, esse máximo ocorre quando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Assim, $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, e o volume máximo da caixa é 4 m^3. □

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTOS



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos que não são fechados

FIGURA 11

Para uma função f de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que, se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto. De acordo com o Método dos Intervalos Fechados da Seção 4.1 do Volume I, achamos esses valores calculando f não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.

Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante. Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um **conjunto fechado** de $\mathbb{R}^2$ contém todos os seus pontos da fronteira. [Um ponto da fronteira de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta com centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D.] Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, é um conjunto fechado porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$). Mas se um único ponto da fronteira for omitido, o conjunto deixa de ser fechado (veja a Figura 11).

Um **conjunto limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em algum disco. Em outras palavras, ele é finito em extensão. Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos enunciar o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para duas dimensões.

8 TEOREMA DO VALOR EXTREMO PARA AS FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS Se f for contínua em um conjunto fechado e limitado D de $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Para achar os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo Teorema 8, observamos que, pelo Teorema 2, se f tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f ou um ponto da fronteira de D. Portanto, temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados:

9 Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

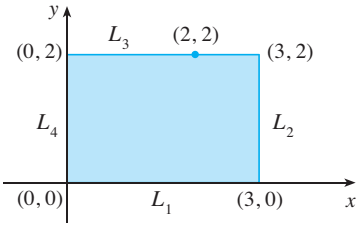


FIGURA 12

EXEMPLO 7 Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUÇÃO Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, e, portanto, o Teorema 8 nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto. De acordo com o passo 1 de (9), inicialmente devemos calcular os pontos críticos. Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

e, assim, o único ponto crítico existente é $(1, 1)$, no qual temos $f(1, 1) = 1$.

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3 e L_4, mostrados na Figura 12. Em L_1, temos $y = 0$ e

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Isso corresponde a uma função crescente de x, que tem valor mínimo $f(0, 0) = 0$ e máximo $f(3, 0) = 9$. Sobre L_2, temos $x = 3$ e

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Essa é uma função decrescente de y, portanto seu máximo é $f(3, 0) = 9$ e seu mínimo é $f(3, 2) = 1$. Sobre L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Pelos métodos do Capítulo 4, no Volume I, ou simplesmente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que o mínimo valor dessa função é $f(2, 2) = 0$, e seu valor máximo é $f(0, 2) = 4$. Finalmente, sobre L_4, temos $x = 0$ e

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

com valor máximo $f(0, 2) = 4$ e valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Portanto, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1, 1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3, 0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. A Figura 13 mostra o gráfico de f. □

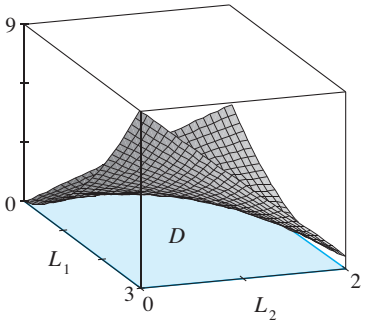


FIGURA 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Concluímos esta seção com a demonstração da primeira parte do Teste da Segunda Derivada. As partes (b) e (c) têm demonstrações semelhantes.

DEMONSTRAÇÃO DA PARTE (A) DO TEOREMA 3 Vamos calcular a derivada direcional de segunda ordem de f na direção de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. A derivada de primeira ordem é dada pelo Teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}} f = f_x h + f_y k$$

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k$$

$$= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k$$

$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(pelo Teorema de Clairaut)}$$

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) \qquad \boxed{10}$$

Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, logo, existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Portanto, olhando a Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Isso implica que, se C é uma curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ. Isso é verdadeiro na direção de todo vetor $\mathbf{u}$; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P. Logo, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local. □

14.7 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $(1, 1)$ seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que $(0, 2)$ seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

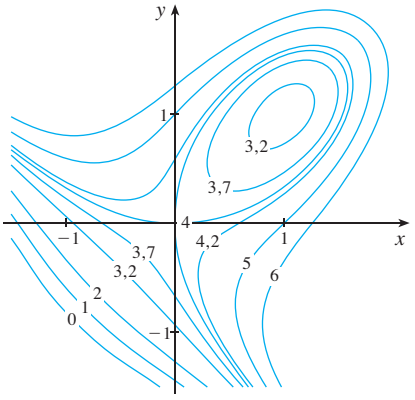
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

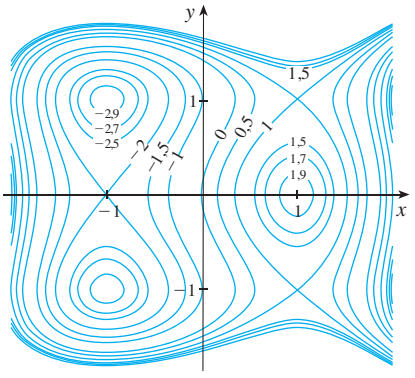
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, trace a função com um domínio e um ponto de vista que mostrem os seus aspectos importantes.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

8. $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = xy - 2x - y$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tem um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2 - y^2}$ tem valores máximos em $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ e valores mínimos em $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

21-24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para achar esses valores precisamente.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4, 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25-28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

25. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

26. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

27. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

28. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

29-36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

29. $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0), (2, 0)$, e $(0, 3)$

30. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D é a região triangular fechada com vértices $(1, 0), (5, 0)$, e $(1, 4)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3), (2, 3), (2, 2)$, e $(-2, -2)$.

37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de domínio e de ponto de vista para ver como isso é possível.

38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 1, -1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - y + z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1, 2, 3)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1 000 cm^3 que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm^2.

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32 000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m^2 por dia, as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m^2 por dia, o piso, a uma taxa de 1 unidade/m^2 por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m^2 por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m^3.

(a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.

(b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)

(c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?

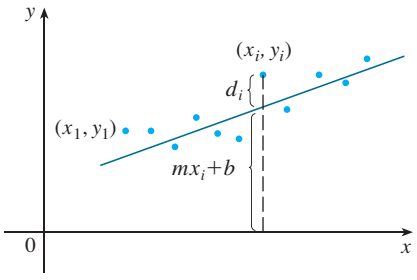
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L, qual é o maior volume possível?

54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e de b. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n), e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "ajuste" os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2 do Volume I para mais aplicações do método dos mínimos quadrados.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e que corta o menor volume do primeiro octante.

PROJETO APLICADO

PROJETO DE UMA CAÇAMBA

Para esse projeto, inicialmente localizamos uma caçamba de entulho para estudar sua forma e construção. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar e que minimize o custo de construção.

1. Primeiro localize uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.
2. Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
   - Os lados, a parte de trás e a da frente devem ser feitos com folhas de aço de tipo 12 (2,657 mm de espessura), que custam $ 8,00 por metro quadrado (incluindo quaisquer cortes ou dobras necessários).
   - A base deve ser feita de uma folha de aço de tipo 10 (3,416 mm de espessura), que custa $ 10,00 por metro quadrado.
   - As tampas custam aproximadamente $ 50,00 cada, independentemente das dimensões.
   - A soldagem custa aproximadamente $ 0,60 por metro para material e serviço combinados.

   Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.
3. Descreva como qualquer hipótese ou simplificação feita pode afetar o resultado.
4. Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração do projeto da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

PROJETO DE DESCOBERTA

APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA E PONTOS CRÍTICOS

A aproximação por polinômio de Taylor de uma função de uma variável discutida no Capítulo 11 pode ser estendida para as funções de duas ou mais variáveis. Estudaremos aqui a aproximação quadrática para as funções de duas variáveis e usaremos esse estudo para melhor entender o Teste da Segunda Derivada para classificar pontos críticos.

Na Seção 14.4 discutimos a linearização de uma função f de duas variáveis em um ponto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Lembre-se de que o gráfico de L é o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em $(a, b, f(a, b))$, e a aproximação linear correspondente é $f(x, y) \approx L(x, y)$. A linearização L é também chamada **polinômio de Taylor de primeiro grau** de f em (a, b).

1. Se f tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em (a, b), então o **polinômio de Taylor de segundo grau** de f em (a, b) é

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

   e a aproximação $f(x, y) \approx Q(x, y)$ é denominada **aproximação quadrática** de f em (a, b). Verifique que Q tem as mesmas derivadas parciais de primeira e segunda ordens que f em (a, b).

2. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ em $(0, 0)$.

(b) Trace o gráfico de f, L e Q. Comente quão boas são essas aproximações.

3. (a) Encontre os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = xe^y$ em $(1, 0)$.

(b) Compare os valores de L, Q e f em $(0{,}9, 0{,}1)$.

(c) Trace o gráfico de f, L e Q. Comente quão boas são essas aproximações.

4. Nesse problema analisaremos o comportamento do polinômio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sem utilizar o Teste da Segunda Derivada) identificando o gráfico como um paraboloide.

(a) Completando os quadrados, mostre que, se $a \neq 0$, então

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

(b) Seja $D = 4ac - b^2$. Demonstre que se $D > 0$ e $a > 0$, então f tem um mínimo local em $(0, 0)$.

(c) Demonstre que, se $D > 0$ e $a < 0$, então f tem um máximo local em $(0, 0)$.

(d) Demonstre que, se $D < 0$, então $(0, 0)$ é um ponto de sela.

5. (a) Suponha que f seja uma função qualquer com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tal que $f(0, 0) = 0$ e que $(0, 0)$ seja um ponto crítico de f. Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de segundo grau Q de f em $(0, 0)$.

(b) O que você conclui sobre Q usando os resultados do Problema 4?

(c) Em vista da aproximação quadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, o que a parte (b) sugere sobre f?

14.8 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

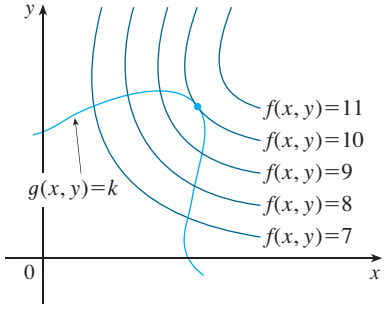


FIGURA 1

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy = 12$, que expressa a condição de a área da superfície ser de 12 m^2. Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então, vamos começar tentando determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y) = k$. Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$. A Figura 1 mostra essa curva juntamente com várias outras curvas de nível da função f. Essas curvas de nível têm equação $f(x, y) = c$, onde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é achar qual o maior valor de c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$. Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de c.) Isso significa que as retas normais ao ponto (x_0, y_0) onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo, os vetores gradientes são paralelos, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ.

Esse tipo de argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação $g(x, y, z) = k$. Em vez das curvas de nível da Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível $f(x, y, z) = c$ e argumentar que, se o valor máximo de f é

$f(x_0, y_0, z_0) = c$, então a superfície de nível $f(x, y, z) = c$ é tangente à superfície de nível $g(x, y, z) = k$, e então os correspondentes gradientes são paralelos.

Esse argumento intuitivo pode se tornar preciso da seguinte forma. Suponha que uma função f tenha um valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre a superfície S e seja C uma curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ que pertença a S e passe pelo ponto P. Se t_0 é o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, então $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. A função composta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ fornece os valores de f sobre a curva C. Como f tem um valor extremo em (x_0, y_0, z_0), segue que h tem um valor extremo em t_0, e, portanto, $h'(t_0) = 0$. Porém, se f for diferenciável, usando a Regra da Cadeia, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Isso mostra que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ para toda curva C assim obtida. Mas já vimos na Seção 14.6 que o vetor gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$, também é ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ (veja a Equação 14.6.18). Isso significa que os vetores $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ precisam ser paralelos. Portanto, se $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe um número λ tal que

■ Multiplicadores de Lagrange têm esse nome em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Veja no Volume I, à página 264, uma pequena biografia de Lagrange.

$$\boxed{1} \qquad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda\, \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

O número λ na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**. O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e de λ, tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda\, \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

■ Ao deduzir o Método de Lagrange, supusemos que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Em cada um de nossos exemplos, você pode verificar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em todos os pontos onde $g(x, y, z) = k$. Veja o Exercício 21 para descobrir o que pode sair errado se $\nabla g = \mathbf{0}$.

Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda\, \nabla g$ em termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficarão

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Isto é um sistema de quatro equações a quatro incógnitas, x, y, z e λ. Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para λ.

Para as funções de duas variáveis, o método dos multiplicadores de Lagrange é análogo àquele que acabamos de descrever. Para achar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeitos à restrição $g(x, y) = k$, olhamos para todos os valores de x, y e λ, tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda\, \nabla g(x, y) \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = k$$

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

EXEMPLO 1 Uma caixa retangular sem tampa é feita de 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 6 da Seção 14.7, sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z e λ, tais que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 12$. Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x, \qquad V_y = \lambda g_y, \qquad V_z = \lambda g_z, \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

ou seja:

$$yz = \lambda(2z + y) \tag{2}$$

$$xz = \lambda(2z + x) \tag{3}$$

$$xy = \lambda(2x + 2y) \tag{4}$$

$$2xz + 2yz + xy = 12 \tag{5}$$

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso, você pode observar que, se multiplicarmos (2) por x, (3) por y e (4) por z, os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

■ Outro método de resolver o sistema de equações (2-5) é isolar λ em cada uma das Equações 2, 3 e 4 para depois igualar as expressões resultantes.

$$xyz = \lambda(2xz + xy) \tag{6}$$

$$xyz = \lambda(2yz + xy) \tag{7}$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz) \tag{8}$$

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaria $yz = xz = xy = 0$ de (2), (3) e (4), e isso contradiz (5). Logo, de (6) e (7), temos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

que dá $xz = yz$. Mas $z \neq 0$ (uma vez que $z = 0$ daria $V = 0$), portanto $x = y$. De (7) e (8), obtemos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

que dá $2xz = xy$ e, assim (como $x \neq 0$), $y = 2z$. Se colocarmos $x = y = 2z$ em (5), obteremos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x, y, e z são todos positivos, temos, portanto, que $z = 1$ e $x = 2$, de modo que $y = 2$. Isto coincide com nossa resposta na Seção 14.7. □

EXEMPLO 2 Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

■ Em termos geométricos, o Exemplo 2 pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva C da Figura 2 que pertence ao paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ e que está diretamente acima do círculo de restrição $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 1$, que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

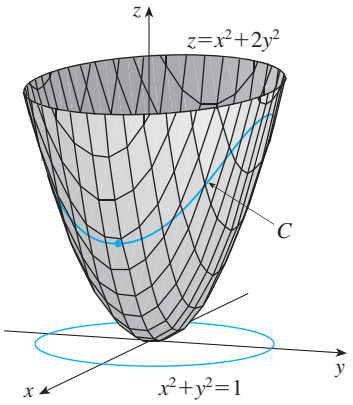


FIGURA 2

■ A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ correspondem às curvas de nível que tocam a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

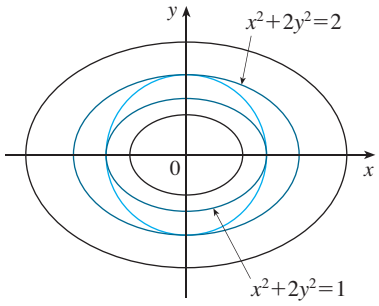


FIGURA 3

ou como

$$2x = 2x\lambda \tag{9}$$

$$4y = 2y\lambda \tag{10}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{11}$$

De (9), temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$, então (11) leva a $y = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ de (10), e assim (11) fornece $x = \pm 1$. Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$. Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis. □

EXEMPLO 3 Determine os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Como $f_x = 2x$ e $f_y = 4y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Comparamos o valor de f nesse ponto com os valores extremos de f na fronteira obtidos no Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$. □

EXEMPLO 4 Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(3, 1, -1)$ é

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$, o que nos leva a:

$$2(x - 3) = 2x\lambda \tag{12}$$

$$2(y - 1) = 2y\lambda \tag{13}$$

$$2(z + 1) = 2z\lambda \tag{14}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \tag{15}$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y e z em termos de λ de (12), (13) e (14), e substituir esses valores em (15). De (12), temos

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{ou} \qquad x(1 - \lambda) = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

■ A Figura 4 mostra a esfera e o ponto mais próximo P do Exemplo 4. Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de P sem usar o cálculo?

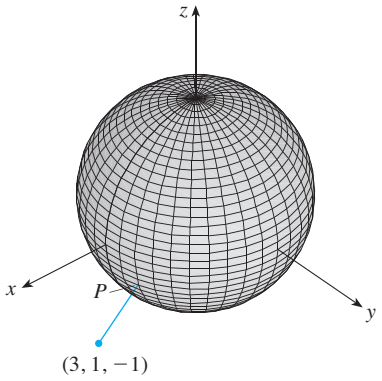


FIGURA 4

[Observe que $1 - \lambda \neq 0$ porque, de (12), $\lambda = 1$ é impossível.] De forma semelhante, (13) e (14) fornecem

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

Portanto, de (15) temos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

que nos dá $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$. Logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Esses valores de λ então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

É fácil ver que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é $(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11})$ e o mais distante é $(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11})$. □

DUAS RESTRIÇÕES

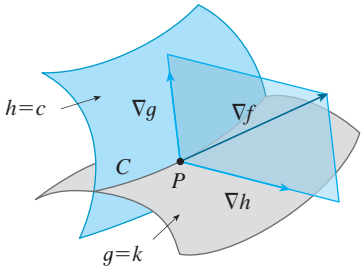


FIGURA 5

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições (vínculos) da forma $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrito a pertencer à curva C, obtida pela intersecção das superfícies de nível $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. (Veja a Figura 5.) Suponha que f tenha um tal valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$. Sabemos, do começo desta seção, que ∇f é ortogonal a C lá. Mas nós também sabemos que ∇g é ortogonal a $g(x, y, z) = k$ e que ∇h é ortogonal a $h(x, y, z) = c$, portanto ∇g e ∇h são ambos ortogonais a C. Isso significa que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ pertence ao plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Estamos supondo que esses vetores gradientes não são paralelos nem nulos.) Logo, existem números λ e μ (chamados multiplicadores de Lagrange), tais que

16

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Nesse caso, o método de Lagrange nos leva a procurar os valores extremos resolvendo cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z, λ e μ. Essas equações podem ser obtidas escrevendo-se a Equação (16) em termos das componentes e usando as equações das restrições:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

EXEMPLO 5 Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

■ O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 pergunta o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

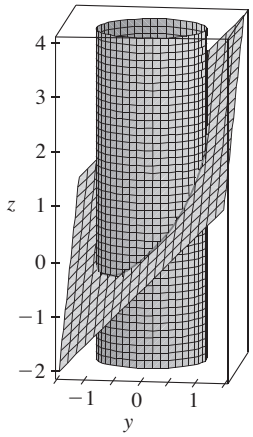


FIGURA 6

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$\boxed{17} \qquad 1 = \lambda + 2x\mu$$

$$\boxed{18} \qquad 2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$\boxed{19} \qquad 3 = \lambda$$

$$\boxed{20} \qquad x - y + z = 1$$

$$\boxed{21} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de (19)] em (17), obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, (18) dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em (21), temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

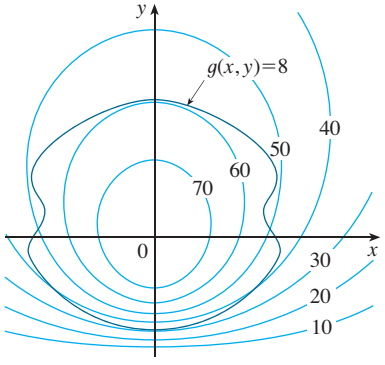
e assim $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \pm 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ e, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\pm\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$. □

14.8 EXERCÍCIOS

1. Na figura estão um mapa de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de c dessas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3-17 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$

4. $f(x, y) = 4x + 6y$; $x^2 + y^2 = 13$

5. $f(x, y) = x^2 y$; $x^2 + 2y^2 = 6$

6. $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

7. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 35$

8. $f(x, y, z) = 8x - 4z$; $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$

9. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15. $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy$; $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

18-19 Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

18. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leq 16$

19. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leq 1$

20. Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

(a) Tente utilizar multiplicadores de Lagrange para resolver o problema.

(b) $f(25, 0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?

(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de f.

(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.

(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

21. Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).

(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$, mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ.

(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

SCA **22.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita a $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.

(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

23. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ seguida de certas hipóteses econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

24. Em relação ao Problema 23, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Quais valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

25. Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.

26. Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero. [*Sugestão*: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.]

27-39 Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

27. Exercício 39 **28.** Exercício 40

29. Exercício 41 **30.** Exercício 42

31. Exercício 43 **32.** Exercício 44

33. Exercício 45 **34.** Exercício 46

35. Exercício 47 **36.** Exercício 48

37. Exercício 49 **38.** Exercício 50

39. Exercício 53

40. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

41. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

42. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.

(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.

(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

SCA **43-44** Ache os valores de máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

43. $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

44. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

45. (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.

(b) Deduza da parte (a) que, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

46. (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

e mostre que

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_j^2}\sqrt{\sum b_j^2}$$

para quaisquer números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

PROJETO APLICADO

CIÊNCIA DOS FOGUETES

Muitos foguetes, tais como o *Pegasus XL*, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o *Saturno V*, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para diminuir a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, colocando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou oferecer boa relação entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios, que foram projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo permitir que ele atinja a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação na velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1 - S)M_r}{P + M_r}\right)$$

onde M_r é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o *fator estrutural* determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e c é a velocidade (constante) de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A. Vamos supor que as forças externas sejam desprezíveis e que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Se M_i é a massa do i-ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa M_1 e sua carga tenha massa $M_2 + M_3 + A$; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ do propulsor do foguete sujeita à restrição que a velocidade desejada v_f do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificar, definimos variáveis N_i de modo que a restrição possa ser expressa como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Como é difícil exprimir M em termos dos N_i, é desejável usar uma função mais simples, que ao ser minimizada leve também à minimização de M. Mostre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

e conclua que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1 - S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Verifique que $\ln((M + A)/A)$ tem os mesmos pontos de mínimo que M; utilize os multiplicadores de Lagrange e o resultado do Problema 2 para determinar as expressões para os valores de N_i onde o mínimo ocorre sujeito à restrição $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Sugestão*: Utilize as propriedades dos logaritmos para ajudar a simplificar as expressões.]

4. Determine uma expressão para o valor mínimo de M como função de v_f.

5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 160 km acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 28 000 km/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural $S = 0{,}2$ e que a velocidade de exaustão seja $c = 9\,600$ km/h.
(a) Determine a massa total mínima M do propulsor do foguete como função de A.
(b) Determine a massa de cada estágio como função de A. (Eles não precisam ter tamanhos iguais!)

6. O mesmo foguete precisaria de uma velocidade final de 39 700 km/h, aproximadamente, para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete e lhe permitiria carregar uma sonda de 200 kg para o espaço.

PROJETO APLICADO

OTIMIZAÇÃO DE UMA TURBINA HIDRÁULICA

A Katahdin Paper Company, de Millinocket, no estado de Maine, opera uma usina hidroelétrica no rio Penobscot. A água é bombeada de uma represa para a usina geradora de potência. A taxa pela qual a água flui nas tubulações varia, dependendo de condições externas.

A usina geradora de potência tem três turbinas hidroelétricas diferentes; para cada uma delas, é conhecida a quantidade da potência elétrica gerada em função do fluxo de água que chega à turbina (função de potência da turbina). A água que chega pode ser distribuída em quantidades diferentes entre as turbinas, e nosso objetivo é determinar como programar essa distribuição de água para obter máxima produção de energia total para qualquer vazão.

Usando dados experimentais e a *equação de Bernoulli*, chegou-se ao modelo quadrático mostrado para a saída de potência de cada turbina, com as seguintes vazões de operação permitidas:

$$KW_1 = (-18{,}89 + 0{,}1277Q_1 - 4{,}08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1{,}6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_2 = (-24{,}51 + 0{,}1358Q_2 - 4{,}69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1{,}6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_3 = (-27{,}02 + 0{,}1380Q_3 - 3{,}84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1{,}6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$250 \leqslant Q_1 \leqslant 1\,110, \qquad 250 \leqslant Q_2 \leqslant 1\,110, \qquad 250 \leqslant Q_3 \leqslant 1\,225$$

onde

Q_i = fluxo através da turbina i em pés cúbicos por segundo
KW_i = potência gerada pela turbina i em quilowatts
Q_T = fluxo total através da usina geradora em pés cúbicos por segundo

1. Se todas as três turbinas estiverem sendo usadas, queremos determinar o fluxo Q_1 em cada turbina que resultará na produção total máxima de energia. Nossas limitações são que o fluxo total precisa ser igual ao fluxo que chega à usina e que para cada turbina o fluxo esteja na faixa permitida. Consequentemente, utilize os multiplicadores de Lagrange para achar os valores de cada fluxo individual (como função de Q_T) que maximizem a produção total de energia $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeita às restrições $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ e restrições de domínio de cada Q_i.
2. Para que valores de Q_T seu resultado é válido?
3. Para uma vazão de entrada de 2 500 pés^3/s, determine a distribuição para as turbinas e verifique (tentando algumas distribuições semelhantes) que seu resultado corresponde realmente a um máximo.
4. Até agora supusemos que as três turbinas estavam em operação. É possível que mais potência possa ser obtida usando somente uma turbina em algumas situações? Faça um gráfico das funções potência e utilize-o para decidir se uma vazão de entrada de 1 000 pés^3/s deveria ser distribuída para as três turbinas ou concentrada em uma só. (Se você concluir que só uma turbina deverá ser utilizada, responda: qual é ela?) E se a vazão for de somente 600 pés^3/s?
5. Talvez para alguns níveis de vazão seja vantajoso usar duas turbinas. Se a vazão de chegada for de 1 500 pés^3/s, quais duas turbinas devem ser utilizadas? Use os multiplicadores de Lagrange para determinar como a vazão deveria ser distribuída entre as duas turbinas para maximizar a energia produzida. Para essa vazão, o uso de duas turbinas é mais eficiente que o emprego das três?
6. Se a vazão de entrada for de 3 400 pés^3/s, o que você recomendaria para a empresa?

14 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma função de duas variáveis?
   (b) Descreva três métodos para visualizar uma função de duas variáveis.
2. O que é uma função de três variáveis? Como você pode visualizar tal função?
3. O que
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$
significa? Como mostrar que esse limite não existe?
4. (a) O que significa dizer que f é contínua em (a, b)?
   (b) Se f é contínua em $\mathbb{R}^2$, o que você pode dizer de seu gráfico?
5. (a) Escreva as expressões para as derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ como limites.
   (b) Como você interpreta $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ geometricamente? Como as interpreta como taxas de variação?
   (c) Se $f(x, y)$ é dada por uma fórmula, como calcular f_x e f_y?
6. O que o Teorema de Clairaut diz?
7. Como achar o plano tangente a cada um dos seguintes tipos de superfície?
   (a) Um gráfico de uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$
   (b) Uma superfície de nível de uma função de três variáveis, $F(x, y, z) = k$
8. Defina a linearização de f em (a, b). Qual é a correspondente aproximação linear? Qual é a interpretação geométrica da aproximação linear?
9. (a) O que significa dizer que f é diferenciável em (a, b)?
   (b) Como usualmente verificamos que f é diferenciável?
10. Se $z = f(x, y)$, o que são as diferenciais dx, dy e dz?
11. Diga qual é a Regra da Cadeia para o caso em que $z = f(x, y)$ e x e y são funções de uma única variável. E se x e y são funções de duas variáveis?
12. Se z é definido implicitamente como uma função de x e y por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$, como determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$?

13. (a) Escreva uma expressão como limite para a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. Como interpretá-la como taxa de variação? Como interpretá-la geometricamente?
(b) Se f é diferenciável, escreva uma expressão para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ em termos de f_x e f_y.

14. (a) Defina o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis.
(b) Exprima $D_{\mathbf{u}} f$ em termos de ∇f.
(c) Explique o significado geométrico do gradiente.

15. O que as seguintes sentenças significam?
(a) f tem um máximo local em (a, b).
(b) f tem um máximo absoluto em (a, b).
(c) f tem um mínimo local em (a, b).
(d) f tem um mínimo absoluto em (a, b).
(e) f tem um ponto de sela em (a, b).

16. (a) Se f tem um máximo local em (a, b), o que você pode dizer de suas derivadas parciais em (a, b)?
(b) O que é um ponto crítico de f?

17. Qual é o Teste da Segunda Derivada?

18. (a) O que é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$? O que é um conjunto limitado?
(b) Dê o enunciado do Teorema dos Valores Extremos para as funções de duas variáveis.
(c) Como achar os valores que o Teorema dos Valores Extremos garante existirem?

19. Explique como o método dos multiplicadores de Lagrange funciona para determinar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. E se tivermos uma segunda restrição $h(x, y, z) = c$?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y \to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$

2. Existe uma função f com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tais que $f_x(x, y) = x + y^2$ e $f_y(x, y) = x - y^2$.

3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$

4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$

5. Se $f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo de toda reta que passa por (a, b), então $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$.

6. Se $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ existem, então f é diferenciável em (a, b).

7. Se f tem um mínimo local em (a, b) e f é diferenciável em (a, b), então $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

8. Se f é uma função, então
$$\lim_{(x, y) \to (2, 5)} f(x, y) = f(2, 5)$$

9. Se $f(x, y) = \ln y$, então $\nabla f(x, y) = 1/y$.

10. Se $(2, 1)$ é um ponto crítico de f e
$$f_{xx}(2, 1) f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$
então f tem um ponto de sela em $(2, 1)$.

11. Se $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, então $-\sqrt{2} \leq D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leq \sqrt{2}$.

12. Se $f(x, y)$ tem dois máximos locais, então f tem um mínimo local.

EXERCÍCIOS

1-2 Determine e esboce o domínio da função.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

3-4 Esboce o gráfico da função.

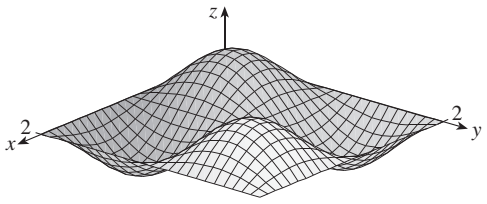
3. $f(x, y) = 1 - y^2$

4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

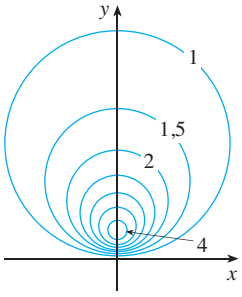
5-6 Esboce várias curvas de nível da função.

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ **6.** $f(x, y) = e^x + y$

7. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



8. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.



9-10 Calcule o limite ou mostre que ele não existe.

9. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2xy}{x^2+2y^2}$ **10.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+2y^2}$

11. Uma placa de metal está situada no plano xy e ocupa o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 10, 0 \leqslant y \leqslant 8$, onde x e y são medidos em metros. A temperatura no ponto (x, y) do plano é $T(x, y)$, onde T é medido em graus Celsius. Temperaturas em pontos igualmente espaçados foram medidas e registradas na tabela.

(a) Estime o valor das derivadas parciais $T_x(6,4)$ e $T_y(6,4)$. Quais são as unidades?

(b) Estime o valor de $D_{\mathbf{u}}T(6,4)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete o resultado.

(c) Estime o valor de $T_{xy}(6,4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Determine uma aproximação linear para a função temperatura $T(x, y)$ do Exercício 11 perto do ponto $(6, 4)$. Em seguida use-a para estimar a temperatura no ponto $(5, 3{,}8)$.

13-17 Determine as derivadas parciais de primeira ordem.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$ **14.** $u = e^{-r}\operatorname{sen} 2\theta$

15. $g(u, v) = u\,\operatorname{tg}^{-1} v$ **16.** $w = \dfrac{x}{y - z}$

17. $T(p, q, r) = p \ln(q + e^r)$

18. A velocidade da propagação da onda sonora no oceano é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão. Foi modelada como

$$C = 1\,449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + (1{,}34 - 0{,}01T)(S - 35) + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius), S é a salinidade (concentração de sal em partes por milhar, o que significa o número de gramas de sólidos dissolvidos por 1 000 g de água) e D é a profundidade abaixo da superfície do oceano (em metros). Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$, $\partial C/\partial D$ quando $T = 10$ °C, $S = 35$ partes por milhar e $D = 100$ m. Explique o significado físico dessas derivadas parciais.

19-22 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$ **20.** $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$ **22.** $v = r\cos(s + 2t)$

23. Se $z = xy + xe^{y/x}$, mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Se $z = \operatorname{sen}(z + \operatorname{sen} t)$, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25-29 Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x, \quad (1, -2, 1)$

26. $z = e^x \cos y, \quad (0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3, \quad (2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$

29. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z, \quad (2, -1, 0)$

30. Use um computador para traçar o gráfico da superfície $z = x^2 + y^4$ e de seu plano tangente e reta normal em $(1, 1, 2)$ na mesma tela. Escolha o domínio e ponto de vista para obter uma boa visão dos três objetos.

31. Encontre os pontos no hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Determine du se $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ no ponto $(2, 3, 4)$ e use-a para estimar o número $(1{,}98)^3\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}97)^2}$.

34. Os dois catetos de um triângulo retângulo medem 5 m e 12 m com um erro possível nas medidas de, no máximo, 0,2 cm em cada. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo (a) da área do triângulo e (b) do comprimento da hipotenusa.

35. Se $u = x^2y^3 + z^4$, onde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$ e $z = p\operatorname{sen} p$, use a Regra da Cadeia para encontrar du/dp.

36. Se $v = x^2\operatorname{sen} y + ye^{xy}$, onde $x = s + 2t$ e $y = st$, use a Regra da Cadeia para encontrar $\partial v/\partial s$ e $\partial v/\partial t$ quando $s = 0$ e $t = 1$.

37. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$,

$h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$ e $f_y(3, 6) = 8$. Determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ quando $s = 1$ e $t = 2$.

38. Utilize o diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ e $v = v(p, q, r, s)$, todas diferenciáveis.

39. Se $z = y + f(x^2 - y^2)$, onde f é diferenciável, mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. O comprimento x de um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 6 cm/s, o comprimento y de um outro lado está diminuindo a uma taxa de 4 cm/s e o ângulo θ entre eles está aumentando a uma taxa de 0,05 radiano/s. Quão rapidamente está variando a área do triângulo quando $x = 80$ cm, $y = 100$ cm e $\theta = \pi/6$?

41. Se $z = f(u, v)$, onde $u = xy$, $v = y/x$ e f têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Se $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine o gradiente da função $f(x, y, z) = z^2e^{x\sqrt{y}}$.

44. (a) Quando a derivada direcional de f é máxima?
(b) Quando é mínima?
(c) Quando é 0?
(d) Quando é a metade de seu valor máximo?

45-46 Determine a derivada direcional de f no ponto dado na direção indicada.

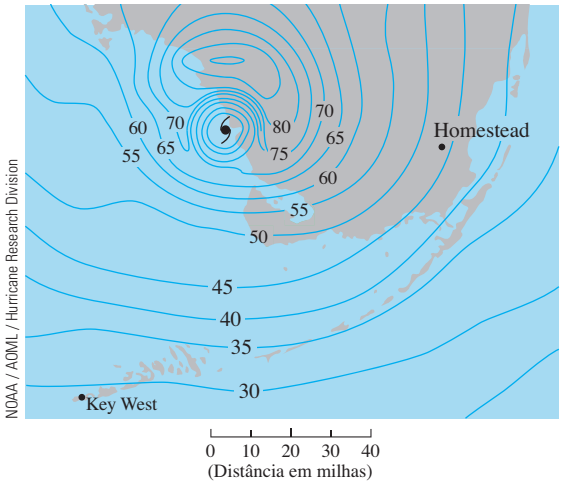
45. $f(x, y) = 2\sqrt{x} - y^2$, $(1, 5)$, na direção do ponto $(4, 1)$

46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, na direção de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

47. Determine a taxa máxima de variação de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ no ponto $(2, 1)$. Em que direção isso ocorre?

48. Determine a direção na qual $f(x, y, z) = ze^{xy}$ aumenta mais rápido no ponto $(0, 1, 2)$. Qual é a taxa máxima de aumento?

49. O mapa de contorno mostra a velocidade do vento em nós durante o furacão Andrew em 24 de agosto de 1992. Utilize-o para estimar o valor da derivada direcional da velocidade do vento em Homestead, Flórida, na direção do olho do furacão.



50. Determine as equações paramétricas da reta tangente no ponto $(-2, 2, 4)$ à curva de intersecção da superfície $z = 2x^2 - y^2$ com o plano $z = 4$.

51-54 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio conveniente para mostrar os aspectos importantes da função.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55-56 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D é a região triangular fechada do plano xy com vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(6, 0)$

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$

57. Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximo e mínimo e os pontos de sela de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

58. Use uma calculadora gráfica ou um computador (método de Newton ou sistema de computação algébrica) para determinar os pontos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique os pontos críticos e determine o ponto mais alto do gráfico.

59-62 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de f sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

59. $f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

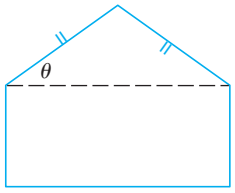
61. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2;$
$x + y + z = 1, x - y + 2z = 2$

63. Determine os pontos da superfície $xy^2z^3 = 2$ que estão mais próximos da origem.

64. Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secção transversal ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

65. Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro P fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximiza sua área.



66. Uma partícula de massa m se move sobre uma superfície $z = f(x, y)$. Sejam $x = x(t), y = y(t)$ as coordenadas x e y da partícula no instante t.

(a) Determine o vetor velocidade $\mathbf{v}$ e a energia cinética $K = \frac{1}{2} m\,|\mathbf{v}|^2$ da partícula.

(b) Determine o vetor aceleração $\mathbf{a}$.

(c) Seja $z = x^2 + y^2$ e $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \operatorname{sen} t$. Determine o vetor velocidade, a energia cinética e o vetor aceleração.

1. Um retângulo com comprimento L e largura W é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximo e mínimo da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.

2. Biólogos marinhos determinaram que, quando um tubarão detecta a presença de sangue na água, ele nada na direção em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em certos testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) em um ponto $P(x, y)$ na superfície é de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2 + 2y^2)/10^4}$$

onde x e y são medidos em metros em coordenadas cartesianas com a fonte do sangue como origem.

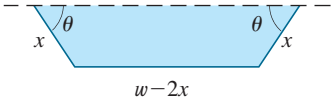
(a) Identifique as curvas de nível da função concentração e esboce vários membros dessa família, junto com a trajetória que o tubarão deve percorrer para chegar à fonte.

(b) Suponha que um tubarão esteja no ponto (x_0, y_0) quando detecta a presença de sangue na água. Determine a equação da trajetória do tubarão escrevendo e resolvendo uma equação diferencial.

3. Uma longa folha de metal galvanizado de espessura w polegadas deve ser dobrada em uma forma simétrica com três lados planos para fazer uma calha. A secção transversal é mostrada na figura.

(a) Determine as dimensões para permitir a máxima vazão, ou seja, determine as dimensões que fornecem a maior área da secção transversal.

(b) Você acharia melhor dobrar a folha de metal em uma calha com secção transversal semicircular do que em uma secção transversal de três lados?



4. Para que valores do número r a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^3$?

5. Suponha que f seja uma função diferenciável de uma variável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf(y/x)$ se interceptam em um ponto comum.

6. (a) O método de Newton para aproximar a raiz de uma equação $f(x) = 0$ (veja a Seção 4.8) pode ser adaptado para aproximar a solução de um sistema de equações $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$. As superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ se interceptam em uma curva que intercepta o plano xy no ponto (r, s), que é a solução deste sistema. Se uma aproximação inicial (x_1, y_1) estiver próxima deste ponto, então os planos tangentes às superfícies em (x_1, y_1) se interceptam em uma reta que intercepta o plano xy em um ponto (x_2, y_2), que deveria estar mais próximo de (r, s). (Compare com a Figura 2 na Seção 4.8) Mostre que

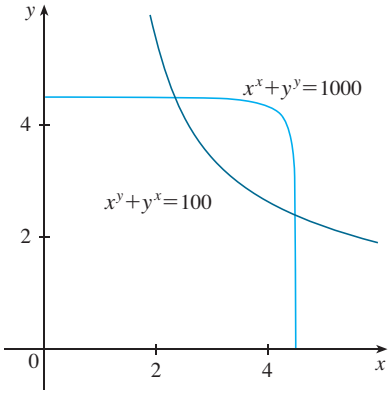
$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{e} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

onde f, g e suas derivadas parciais são calculadas em (x_1, y_1). Se continuarmos esse processo, obteremos uma sequência de aproximações sucessivas (x_n, y_n).

(b) Foi Thomas Simpson (1710-1761) quem formulou o método de Newton como o conhecemos hoje e quem o estendeu para as funções de duas variáveis como na parte (a) (veja a biografia de Simpson na página 474, no Volume I). O exemplo que ele deu para ilustrar o método foi resolver o sistema de equações

$$x^x + y^y = 1\,000 \qquad x^y + y^x = 100$$

Em outras palavras, ele descobriu os pontos de intersecção das curvas da figura. Utilize o método da parte (a) para determinar as coordenadas dos pontos de intersecção com precisão de seis casas decimais.

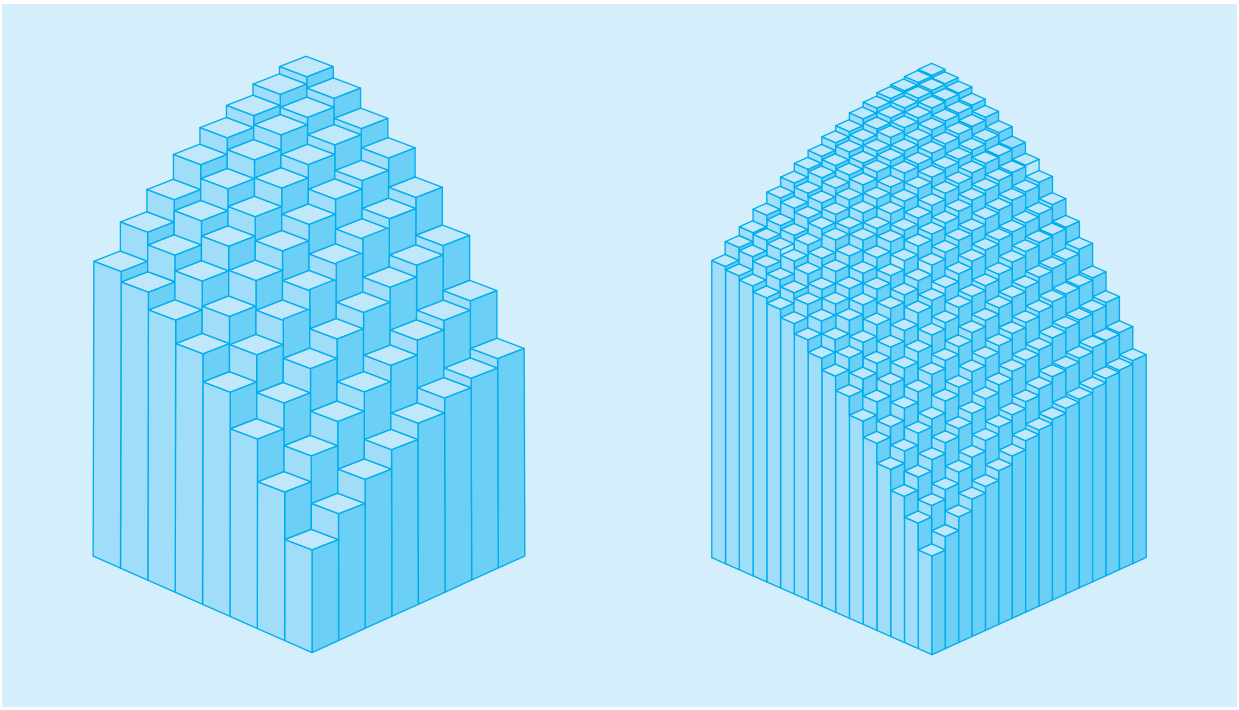


7. Se a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ circunda a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?

8. Entre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$, determine os que estão mais longe da origem.

15

INTEGRAIS MÚLTIPLAS



Uma integral dupla de uma função positiva é um volume, que é o limite das somas dos volumes de colunas retangulares.

Neste capítulo estendemos a ideia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis. Essas ideias serão usadas para calcular volumes, áreas de superfícies, massas e centroides de regiões mais gerais do que as consideradas nos Capítulos 6 e 8, no Volume I. Usaremos também as integrais duplas para calcular probabilidades quando duas variáveis aleatórias estiverem envolvidas.

Veremos que as coordenadas polares são úteis no cálculo de integrais duplas em alguns tipos de região. De modo parecido, introduziremos dois novos sistemas de coordenadas no espaço tridimensional – coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas – que simplificam muito o cálculo de integrais triplas em certas regiões sólidas que ocorrem frequentemente.

A tentativa de resolver o problema de determinar áreas, nos levou à definição de integral definida. Vamos aplicar procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido e, este processo, nos levará à definição de integral dupla.

REVISÃO DA INTEGRAL DEFINIDA

Antes de tudo, vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é definida em $a \leq x \leq b$, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos pontos arbitrários x_i^* em cada um desses subintervalos. Em seguida, formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \qquad \boxed{1}$$

e tomamos o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para obter a integral definida de a até b da função f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \qquad \boxed{2}$$

No caso especial em que $f(x) \geqslant 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores da Figura 1 e $\int_b^a f(x)\,dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

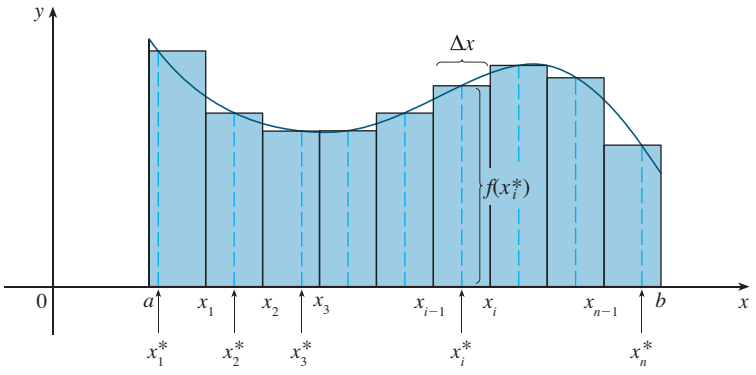


FIGURA 1

VOLUMES E INTEGRAIS DUPLAS

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

e vamos inicialmente supor $f(x, y) \geqslant 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f, isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant f(x, y), (x, y) \in R\}$$

(Veja a Figura 2.) Nosso objetivo é determinar o volume de S.

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento

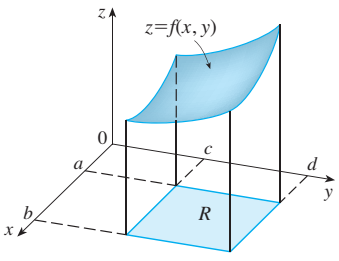


FIGURA 2

$\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, como na Figura 3, formamos os sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$.

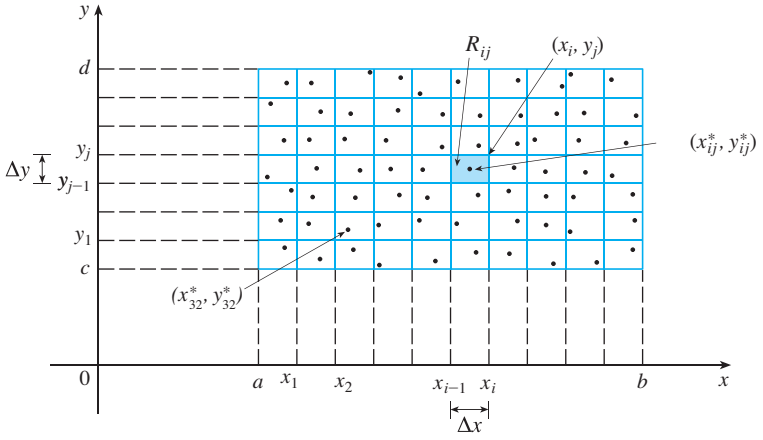


FIGURA 3
Dividindo R em sub-retângulos

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos **ponto amostral**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*), em cada R_{ij}, poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou "coluna") com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 4. (Compare com a Figura 1.) O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A \qquad \boxed{3}$$

(Veja a Figura 5.) Essa soma dupla significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

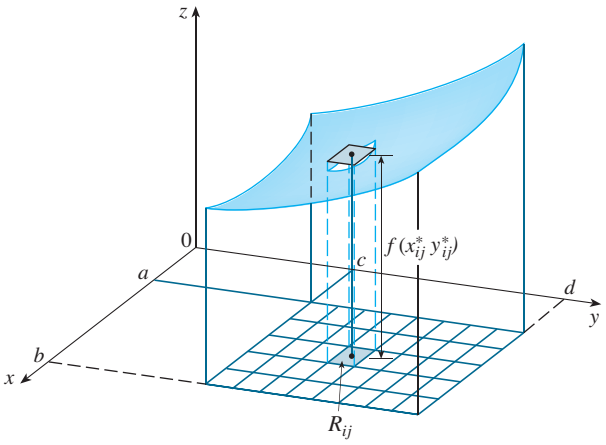


FIGURA 4

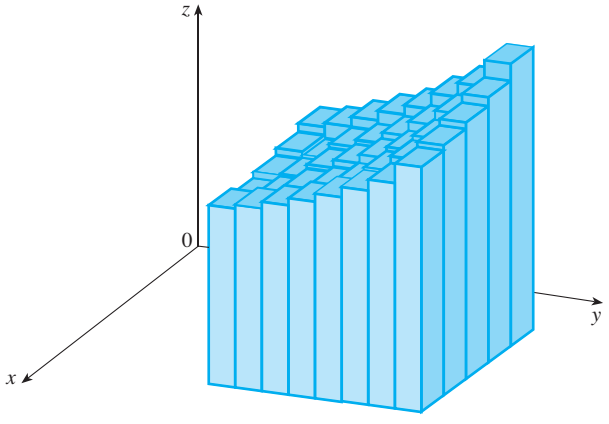


FIGURA 5

Nossa intuição diz que a aproximação dada em (3) melhora quando aumentamos os valores de m e n e, portanto, devemos esperar que

■ O significado do limite duplo na Equação 4 é que podemos tornar a somatória dupla tão próxima quanto desejarmos do número V [para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}] tomando m e n suficientemente grandes.

$$\boxed{4} \qquad V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Usamos a expressão da Equação 4 para definir o **volume** do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R. (Pode ser mostrado que essa definição é coerente com nossa fórmula de volume da Seção 6.2, no Volume I.)

Limites do tipo que aparecem na Equação 4 ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações – como será visto na Seção 15.5 – mesmo f não sendo uma função positiva. Assim, faremos a seguinte definição:

■ Observe a semelhança entre a Definição 5 e a definição de integral unidimensional na Equação 2.

5 DEFINIÇÃO A integral dupla de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

se esse limite existir.

■ Embora tenhamos definido a integral dupla dividindo R em sub-retângulos de mesmo tamanho, poderíamos ter usado sub-retângulos R_{ij} de tamanhos diferentes. Mas então teríamos de garantir que todas as dimensões deles tendessem a zero no processo de limite.

O significado preciso do limite da Definição 5 é que para todo $\varepsilon < 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y)\, dA - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos os inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}.

Uma função é dita **integrável** se o limite na Definição 5 existir. É mostrado em cursos de cálculo avançado que todas as funções contínuas são integráveis. Na realidade, a integral dupla de f existe contanto que f "não seja descontínua demais". Em particular, se f for limitada [isto é, existe uma constante M tal que $|f(x, y)| \leqslant M$ para todo (x, y) em R], e se f for contínua ali, exceto em um número finito de curvas lisas, então f é integrável em R.

O ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij}, porém, se o escolhermos como o canto superior direito de R_{ij} [ou seja, (x_i, y_j), veja a Figura 3], então a expressão da soma dupla ficará mais simples:

$$\boxed{6} \qquad \iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

Comparando as Definições 4 e 5, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f(x, y) \geqslant 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

A soma na Definição 5

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla. [Observe a semelhança dessa soma com a de Riemann em (1) para funções de uma única variável.] Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 5, e é uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R.

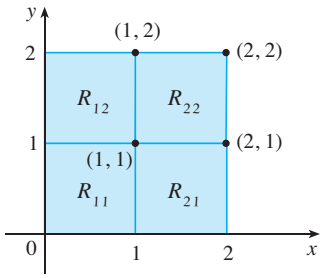


FIGURA 6

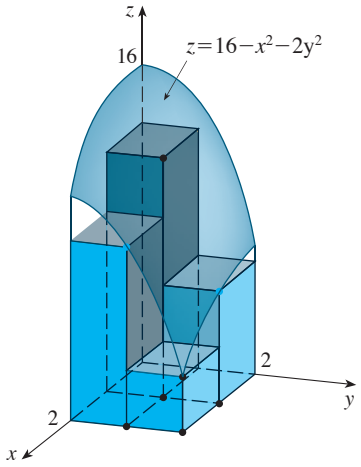


FIGURA 7

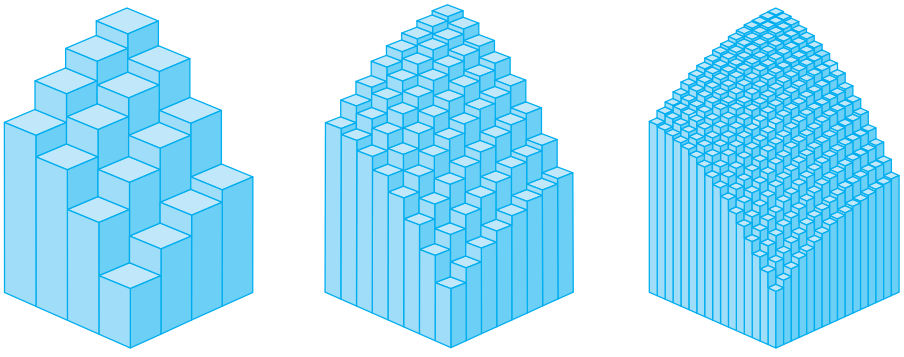
EXEMPLO 1 Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto amostral como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij}. Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.

SOLUÇÃO Os quadrados estão ilustrados na Figura 6. O paraboloide elíptico é o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ e a área de cada quadrado vale 1. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A \\ &= f(1, 1)\, \Delta A + f(1, 2)\, \Delta A + f(2, 1)\, \Delta A + f(2, 2)\, \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Esse é o volume das caixas aproximadoras mostradas na Figura 7. □

Obtemos melhores aproximações do volume no Exemplo 1, quando aumentamos o número de quadrados. A Figura 8 mostra como as colunas começam a parecer mais com o sólido verdadeiro e as aproximações correspondentes vão se tornando mais precisas quando usamos 16, 64 e 256 quadrados. Na próxima seção mostraremos que o volume exato é 48.



(a) $m=n=4$, $V \approx 41{,}5$ (b) $m=n=8$, $V \approx 44{,}875$ (c) $m=n=16$, $V \approx 46{,}46875$

FIGURA 8
A aproximação pela soma de Riemann para o volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ fica melhor à medida que m e n aumentam

EXEMPLO 2 Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

SOLUÇÃO Seria muito difícil calcular a integral diretamente da Definição 5, mas, como $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$, podemos calcular a integral interpretando-a como um volume. Se $z = \sqrt{1 - x^2}$, então $x^2 + z^2 = 1$ e $z \geq 0$, logo a integral dupla dada representa o volume do sólido S que está abaixo do cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ e acima do retângulo R (veja a Figura 9). O volume de S é a área de um semicírculo com raio uma vez o comprimento do cilindro. Portanto,

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \tfrac{1}{2}\, \pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$ □

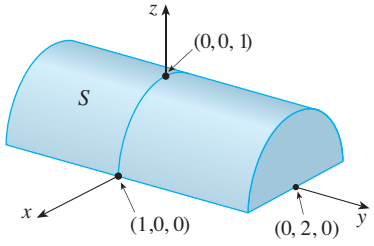


FIGURA 9

A REGRA DO PONTO MÉDIO

Os métodos usados para aproximar as integrais de funções de uma variável real (a Regra do Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson) têm seus correspondentes para integrais duplas. Consideraremos aqui somente a Regra do Ponto Médio para integrais duplas. Isso significa que usaremos a soma dupla de Riemann para aproximar a integral

dupla, na qual o ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} é tomado como o ponto central $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ de R_{ij}. Em outras palavras, $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

REGRA DO PONTO MÉDIO PARA INTEGRAIS DUPLAS

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

onde $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

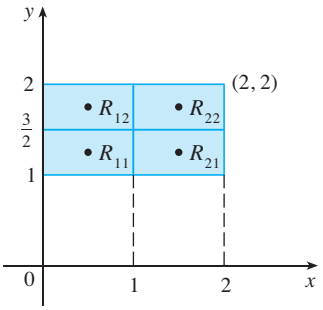


FIGURA 10

EXEMPLO 3 Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro dos quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10. Então, temos $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}, \bar{x}_2 = \frac{3}{2}, \bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ e $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. A área de cada sub-retângulo é $\Delta A = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\
&= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\
&= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A \\
&= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2} \\
&= -\tfrac{95}{8} = -11{,}875
\end{aligned}$$

Portanto, temos $$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11{,}875$$ □

Número de sub-retângulos	Aproximações pela Regra do Ponto Médio
1	−11,5000
4	−11,8750
16	−11,9687
64	−11,9922
256	−11,9980
1,024	−11,9995

OBS. Na próxima seção desenvolveremos um processo eficiente para calcular integrais duplas e veremos que o valor exato da integral dupla do Exemplo 3 é –12. (Lembre-se de que a interpretação da integral dupla como volume só é válida quando a função f é uma função *positiva*. O integrando no Exemplo 3 não é uma função positiva, dessa forma, a integral dupla não é um volume. Nos Exemplos 2 e 3 na Seção 15.2, discutiremos como interpretar integrais de uma função que não é sempre positiva em termos de volumes.) Se continuarmos dividindo cada sub-retângulo da Figura 10 em quatro menores, todos com a mesma forma, e calcularmos a aproximação pela Regra do Ponto Médio, obteremos os resultados que estão apresentados na tabela ao lado. Observe como esses valores estão se aproximando do valor exato da integral dupla, −12.

VALOR MÉDIO

Na Seção 6.5 do Volume I, mostramos que o valor médio de uma função f de uma variável definida em um intervalo $[a, b]$ é

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

De modo semelhante, definimos o **valor médio** de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

onde $A(R)$ é a área de R.

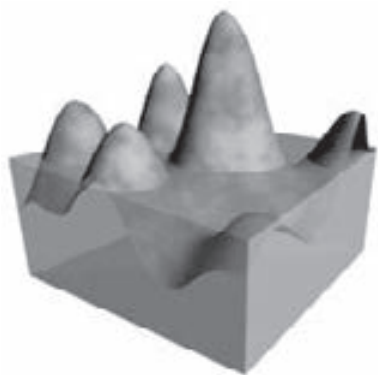


FIGURA 11

Se $f(x, y) \geqslant 0$, a equação

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

diz que a caixa com base R e altura f_{med} tem o mesmo volume que o sólido sob o gráfico de f. [Se $z = f(x, y)$ descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura f_{med}, então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar a região completamente plana. Veja a Figura 11.]

EXEMPLO 4 O mapa de contorno na Figura 12 mostra a precipitação de neve, em polegadas, no estado do Colorado em 20 e 21 de dezembro de 2006 (O estado tem a forma de um retângulo que mede 388 milhas de oeste a leste e 276 milhas do sul ao norte). Use o mapa de contorno para estimar a queda de neve média em todo o estado do Colorado naqueles dias.

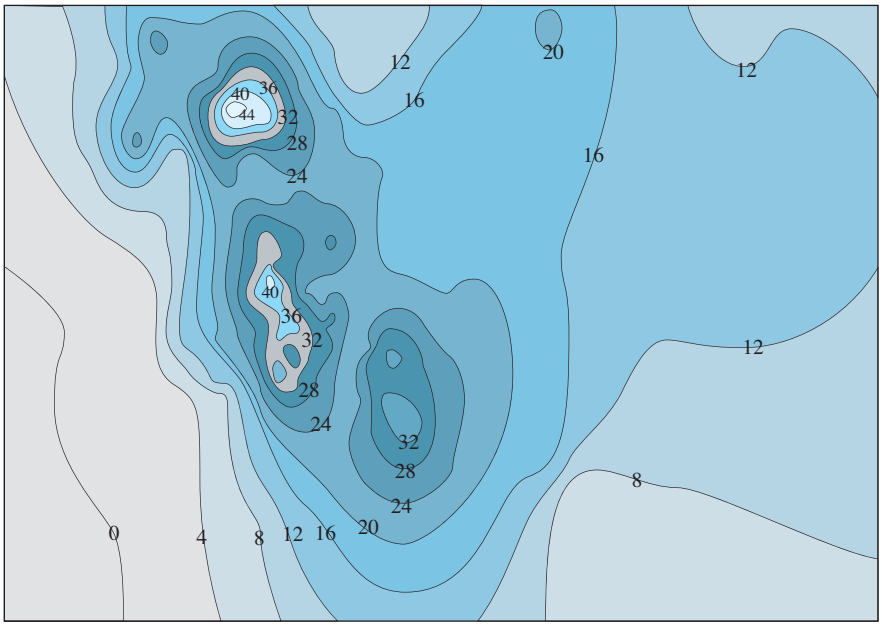


FIGURA 12

SOLUÇÃO Vamos colocar a origem no canto sudoeste do estado. Então, $0 \leqslant x \leqslant 388$, $0 \leqslant y \leqslant 276$, e $f(x, y)$ é a queda de neve, em polegadas, no local x milhas para leste e y milhas para norte da origem. Se R é o retângulo que representa o estado do Colorado, então a precipitação média de neve no Colorado em 20 e 21 de dezembro foi

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

onde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimar o valor dessa integral dupla, vamos usar a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$. Em outras palavras, dividimos R em 16 sub-retângulos de tamanhos iguais, como na Figura 13. A área de cada sub-retângulo é

$$\Delta A = \tfrac{1}{16}(388)(276) = 6\,693 \text{ mi}^2$$

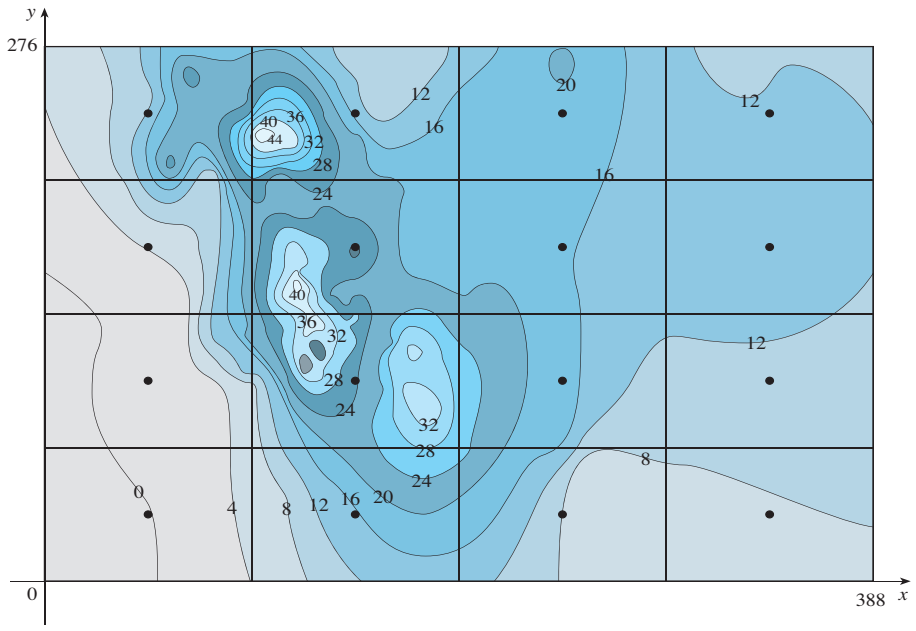


FIGURA 13

Usando o mapa de contorno para estimar o valor de f no ponto central de cada sub-retângulo, obtemos

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\,\Delta A$$

$$\approx \Delta A[0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18{,}5 + 11$$

$$+ 4{,}5 + 28 + 17 + 13{,}5 + 12 + 15 + 17{,}5 + 13]$$

$$= (6\,693)(207)$$

Portanto,
$$f_{\text{med}} \approx \frac{(6\,693)(207)}{(388)(276)} = 12{,}9$$

Em 20 e 21 de dezembro de 2006, o Colorado recebeu uma média de aproximadamente 13 polegadas de neve. □

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS DUPLAS

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser demonstradas como na Seção 5.2, no Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são conhecidas como *linearidade* da integral.

■ Integrais duplas se comportam assim porque as somas duplas que as definem se comportam dessa forma.

7 $$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

8 $$\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante.}$$

Se $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ para todo (x,y) em R, então

9 $$\iint_R f(x,y)\,dA \geqslant \iint_R g(x,y)\,dA$$

15.1 EXERCÍCIOS

1. (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo

$$R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4$$

Utilize a soma de Riemann com $m = 3, n = 2$ e tome como ponto amostral o canto superior direito de cada sub-retângulo.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).

2. Se $R = [-1, 3] \times [0, 2]$, use a soma de Riemann com $m = 4$, $n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R (y^2 - 2x^2)\, dA$. Tome os pontos amostrais como os cantos inferiores esquerdos dos sub-retângulos.

3. (a) Use uma soma de Riemann com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R \operatorname{sen}(x + y)\, dA$, onde $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Tome como pontos amostrais os cantos inferiores esquerdos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item (a).

4. (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = x + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$. Use a soma de Riemann com $m = n = 2$ e escolha os pontos amostrais como os cantos inferiores direitos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do item (a).

5. É dada a tabela de valores de uma função $f(x, y)$ definida em $R = [1, 3] \times [0, 4]$.

(a) Estime $\iint_R f(x, y)\, dA$ utilizando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$.

(b) Estime a integral dupla com $m = n = 4$, escolhendo como pontos amostrais os pontos mais distantes da origem.

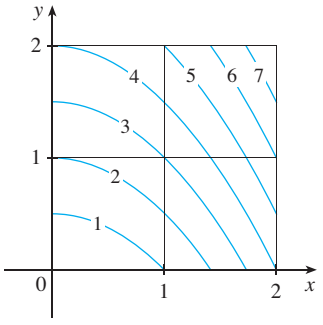
x \ y	0	1	2	3	4
1,0	2	0	−3	−6	−5
1,5	3	1	−4	−8	−6
2,0	4	3	0	−5	−8
2,5	5	5	3	−1	−4
3.0	7	8	6	3	0

6. Uma piscina de 8 por 12 metros está cheia de água. A profundidade é medida em intervalos de 2 metros, começando em um canto da piscina, e os valores foram registrados na tabela. Estime o volume de água na piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1,5	2	2,4	2,8	3	3
2	1	1,5	2	2,8	3	3,6	3
4	1	1,8	2.7	3	3,6	4	3,2
6	1	1,5	2	2,3	2,7	3	2,5
8	1	1	1	1	1,5	2	2

7. Seja V o volume do sólido que está abaixo do gráfico de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ e acima do retângulo dado por $2 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq 6$. Usamos as retas $x = 3$ e $y = 4$ para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann calculadas utilizando como pontos amostrais os cantos inferiores esquerdos e os cantos superiores direitos, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U, coloque-os em ordem crescente de valor e explique seu raciocínio.

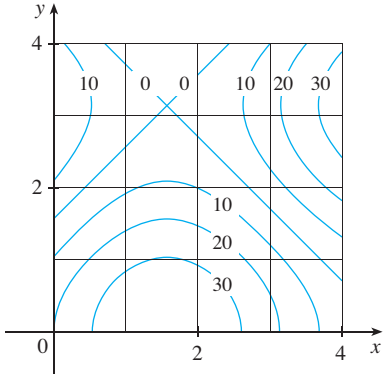
8. A figura mostra curvas de nível da função f no quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar $\iint_R f(x, y)\, dA$. Como você melhoraria sua estimativa?



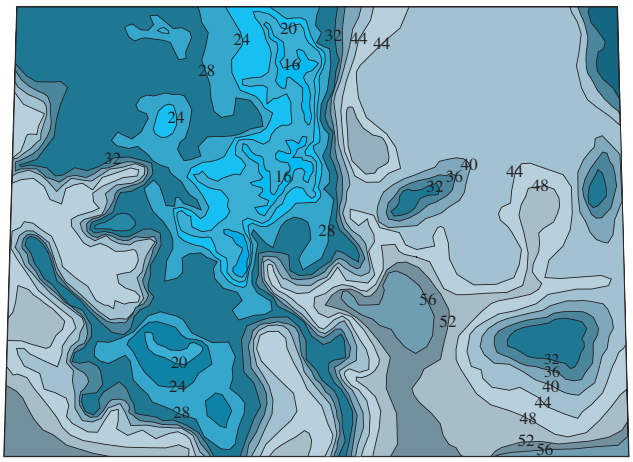
9. A figura mostra o mapa de contorno de f no quadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.

(a) Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.

(b) Estime o valor médio de f.



10. O mapa de contorno mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 4 horas da tarde do dia 26 de fevereiro de 2007, no estado do Colorado. (O estado mede 388 mi de leste a oeste e 276 mi de norte a sul.) Utilize a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$ para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora.



11-13 Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido.

11. $\iint_R 3\,dA, \qquad R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 6\}$

12. $\iint_R (5 - x)\,dA, \qquad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$

13. $\iint_R (4 - 2y)\,dA, \qquad R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. A integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\,dA$, onde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa o volume de um sólido. Esboce o sólido.

15. Utilize uma calculadora programável ou computador (ou o comando de soma de um SCA) para estimar

$$\iint_R \sqrt{1 - xe^{-y}}\,dA$$

onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Utilize a Regra do Ponto Médio com os seguintes números de quadrados de tamanhos iguais: 1, 4, 16, 64, 256 e 1 024.

16. Repita o Exercício 15 para a integral $\iint_R \operatorname{sen}(x + \sqrt{y})\,dA$.

17. Se f é uma função constante, $f(x, y) = k$, e $R = [a, b] \times [c, d]$, mostre que $\iint_R k\,dA = k(b - a)(d - c)$.

18. Use o resultado do Exercício 17 para mostrar que

$$0 \leq \iint_R \operatorname{sen} \pi x \cos \pi y\,dA \leq \frac{1}{32}$$

onde $R = \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

15.2 INTEGRAIS ITERADAS

Lembremos que geralmente é difícil calcular as integrais de funções de uma variável real diretamente da definição de integral, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição é ainda mais complicado, porém, nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas integrais unidimensionais.

Suponha que f seja uma função de duas variáveis contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y)\,dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y*. (Observe a semelhança com a derivada parcial.) Como $\int_c^d f(x, y)\,dy$ é um número que depende do valor de x, ele define uma função de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, obteremos

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx \qquad \boxed{1}$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Então,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx \qquad \boxed{2}$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b.

Da mesma forma, a integral iterada

$$\boxed{3} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que em ambas as Equações, 2 e 3, trabalhamos *de dentro para fora*.

EXEMPLO 1 Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \tfrac{3}{2} x^2$$

Portanto, a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{2} \Big]_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y\, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big]_1^2 = \frac{27}{2}$$

□

Observe que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x. Em geral acontece (ver o Teorema 4) de as duas integrais iteradas das Equações 2 e 3 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante. (Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.)

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada (em qualquer ordem).

■ O Teorema 4 tem o nome do matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), que demonstrou uma versão geral desse teorema em 1907. Mas a versão para as funções contínuas era conhecida pelo menos um século antes pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy.

4 TEOREMA DE FUBINI Se f for contínua no retângulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas lisas e que a integral iterada exista.

A demonstração do Teorema de Fubini foge ao escopo deste livro, mas podemos ao menos fornecer uma justificativa razoável de sua validade quando $f(x, y) \geq 0$. Lembremos que, se f é positiva, podemos interpretar a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ como o volume V do sólido que está acima de R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$. Contudo, temos outra fórmula usada para calcular volume, vista no Capítulo 6, no Volume I, que é

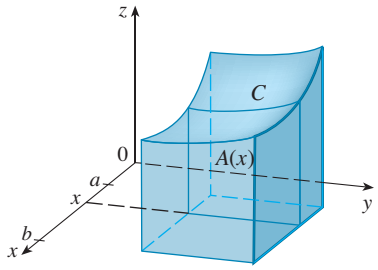


FIGURA 1

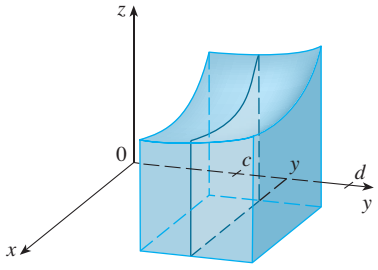


FIGURA 2

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

onde $A(x)$ é a área da secção transversal de S no plano que passa por x perpendicularmente ao eixo x. Da Figura 1 podemos ver que $A(x)$ é a área debaixo da curva C cuja equação é $z = f(x, y)$, onde x é mantido constante e $c \leq y \leq d$. Portanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

e temos

$$\iint_R f(x, y)\,dA = V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

Uma argumentação semelhante, usando a secção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 2, mostra que

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare com o Exemplo 3 da Seção 15.1.)

SOLUÇÃO 1 Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big[xy - y^3\Big]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\,dx = \frac{x^2}{2} - 7x\Big]_0^2 = -12$$

SOLUÇÃO 2 Novamente, aplicando o Teorema de Fubini, mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, temos

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\,dy = 2y - 2y^3\Big]_1^2 = -12 \qquad \square$$

■ Observe a resposta negativa no Exemplo 2; não há nada errado com isso. A função f no exemplo não é positiva, e a integral não representa um volume. Da Figura 3 vemos que, se f for sempre negativa em R, o valor da integral é *menos* o volume que está *acima* do gráfico de f e *abaixo* de R.

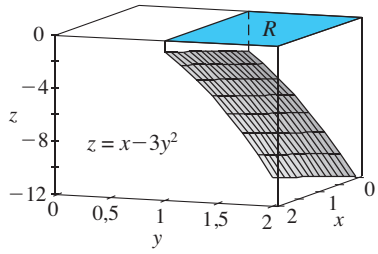


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUÇÃO 1 Se integrarmos primeiro em relação a x, obteremos

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\,dA = \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy = \int_0^\pi \Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y)\,dy$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y\Big]_0^\pi = 0$$

SOLUÇÃO 2 Se invertermos a ordem de integração, obteremos

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\,dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\,dy\,dx$$

Para calcular a integral interna, usamos a integração por partes com

$$u = y \qquad dv = \operatorname{sen}(xy)\,dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

■ Para uma função f com valores positivos e negativos, $\iint_R f(x, y)\,dA$ é a diferença dos volumes: $V_1 - V_2$, onde V_1 é o volume acima de R e abaixo do gráfico de f e V_2 é o volume abaixo de R e acima do gráfico. O fato de a integral do Exemplo 3 ser 0 significa que os dois volumes V_1 e V_2 são iguais (veja a Figura 4).

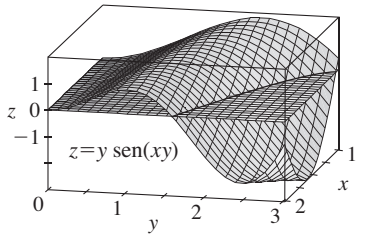


FIGURA 4

e então
$$\int_0^{\pi} y \operatorname{sen}(xy)\,dy = -\frac{y\cos(xy)}{x}\Big]_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\cos(xy)\,dy$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\operatorname{sen}(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2}$$

Se agora integrarmos o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi\cos\pi x\,dx$, obteremos $du = dx/x^2$, $v = \operatorname{sen}\pi x$, e

$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x}\right)dx = -\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} - \int\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2}\,dx$$

Portanto,
$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2}\right)dx = -\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}$$

e, assim,
$$\int_1^2\int_0^{\pi} y\operatorname{sen}(xy)\,dy\,dx = \left[-\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}\right]_1^2$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}2\pi}{2} + \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad \square$$

■ No Exemplo 2, as soluções 1 e 2 são igualmente simples, mas no Exemplo 3 a primeira solução é muito mais simples que a segunda. Portanto, ao calcular uma integral dupla, é recomendável escolher a ordem de integração que forneça integrais mais simples.

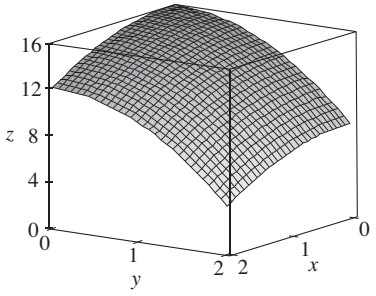


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Veja a Figura 5.) Esse sólido foi considerado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla, usando o Teorema de Fubini. Portanto,

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^2\left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$
$$= \int_0^2\left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right)dy = \left[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48 \qquad \square$$

No caso especial em que $f(x, y)$ pode ser fatorado como o produto de uma função só de x por uma função só de y, a integral dupla de f pode ser escrita de forma particularmente simples. Para sermos específicos, suponha que $f(x, y) = g(x)h(y)$ e $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, o Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d\int_a^b g(x)h(y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)\,dx\right]dy$$

Na integral interna, y é uma constante, então $h(y)$ é uma constante e podemos escrever

$$\int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)\,dx\right]dy = \int_c^d\left[h(y)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\right]dy = \int_a^b g(x)\,dx\int_c^d h(y)\,dy$$

já que $\int_a^b g(x)\,dx$ é uma constante. Portanto, nesse caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais unidimensionais:

5 $$\iint_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então, pela Equação 5,

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}\left[\operatorname{sen} y\right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1 \qquad \square$$

■ A função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R; assim, a integral representa o volume do sólido que está entre o gráfico de f e R, como mostrado na Figura 6.

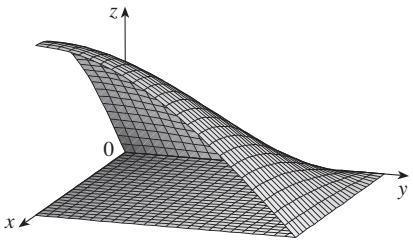


FIGURA 6

15.2 EXERCÍCIOS

1-2 Determine $\int_0^5 f(x, y)\,dx$ e $\int_0^1 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$ **2.** $f(x, y) = y + xe^y$

3-14 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\,dx\,dy$ **4.** $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos y\,dy\,dx$ **6.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\,dx\,dy$

7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8\,dx\,dy$ **8.** $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)dy\,dx$ **10.** $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 (u - v)^5\,du\,dv$ **12.** $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

13. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\,dr$ **14.** $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\,ds\,dt$

15-22 Calcule a integral dupla.

15. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$

16. $\iint_R \cos(x + 2y)\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$

17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$

18. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

19. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\,dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1 + xy}\,dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R xye^{x^2y}\,dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 2]$

22. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\,dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$

23-24 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$ **24.** $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

25. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x + 2y + z = 12$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}$.

26. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide hiperbólico $z = 4 + x^2 - y^2$ e acima do quadrado $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.

27. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

28. Determine o volume do sólido delimitado pela superfície $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y$ e pelos planos $x = \pm 1, y = 0, y = \pi$ e $z = 0$.

29. Encontre o volume do sólido delimitado pela superfície $z = x \sec^2 y$ e pelos planos $z = 0, x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = \pi/4$.

30. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 16 - x^2$ e pelo plano $y = 5$.

31. Encontre o volume do sólido delimitado pelo paraboloide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ e pelos planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = 4$.

32. Desenhe o sólido que está entre a superfície $z = 2xy/(x^2 + 1)$ e o plano $z = x + 2y$ e é limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$. A seguir, determine seu volume.

SCA **33.** Utilize um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida, use o SCA para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

SCA **34.** Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2}\cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Utilize um sistema de computação algébrica para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

35-36 Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.

35. $f(x, y) = x^2 y$, R tem vértices $(-1, 0), (-1, 5), (1, 5), (1, 0)$

36. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$, $R = [0, 4] \times [0, 1]$

SCA **37.** Utilize seu SCA para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

38. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?

(b) Se $f(x, y)$ é contínua em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 INTEGRAIS DUPLAS SOBRE REGIÕES GERAIS

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D está contida em uma região retangular R como na Figura 2. Definimos então uma nova função F, com domínio R, por

1
$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R, \text{ mas não em } D \end{cases}$$

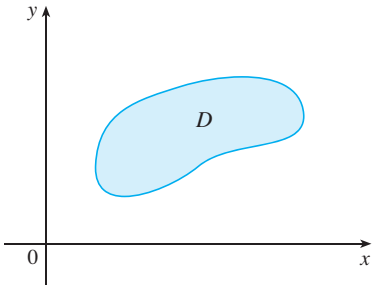


FIGURA 1

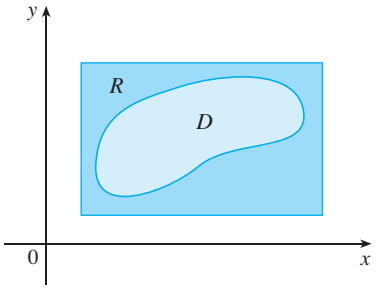


FIGURA 2

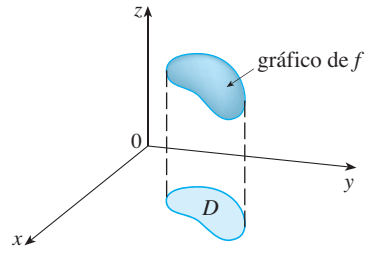


FIGURA 3

Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de f em D** por

2
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1.}$$

A Definição 2 faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R F(x, y)\, dA$ já foi definida na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0

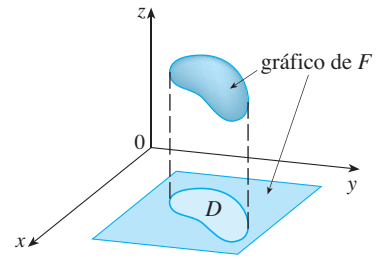


FIGURA 4

quando (x, y) está fora da região D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D.

No caso em que $f(x, y) \geqslant 0$, podemos ainda interpretar $\iint_D f(x, y)\, dA$ como o volume do sólido que está acima de D e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ (o gráfico de f). Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F nas Figuras 3 e 4 e lembrando que $\iint_R F(x, y)\, dA$ é o volume abaixo do gráfico de F.

A Figura 4 mostra também que F provavelmente tem descontinuidades nos pontos de fronteira de D. Apesar disso, se f for contínua em D e se a curva fronteira de D for "comportada" (em um sentido que está fora do escopo deste livro), então pode ser mostrado que $\iint_R F(x, y)\, dA$ existe e, portanto, $\iint_D f(x, y)\, dA$ existe. Em particular, esse é o caso para os tipos de regiões listados a seguir.

Uma região plana D é dita do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja,

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 5.

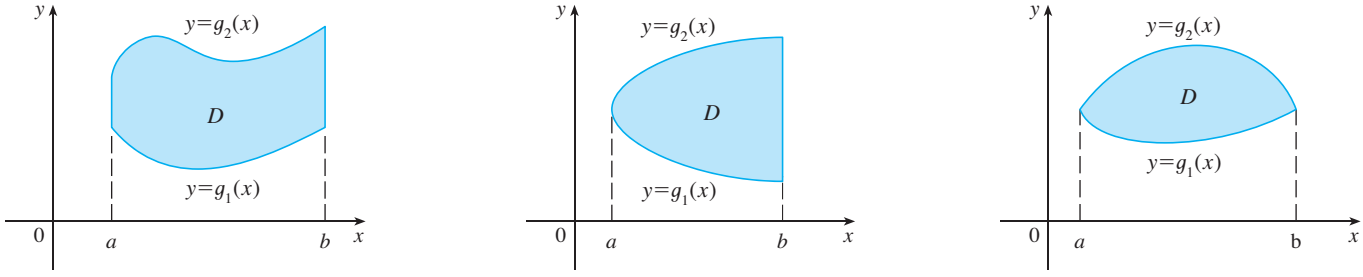


FIGURA 5
Algumas regiões do tipo I

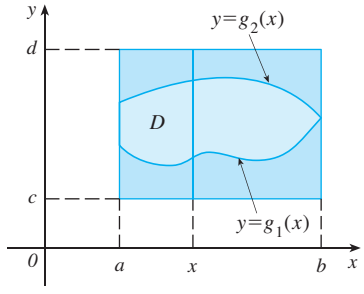


FIGURA 6

Para calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$ quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenha D, como na Figura 6, e consideramos a função F definida na Equação 1; ou seja, F coincide com f em D e F é 0 fora da região D. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\, dy\, dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$ porque (x, y) nessas condições está fora da região D. Assim,

$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ quando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Portanto, temos a seguinte fórmula, que nos permite calcular a integral dupla como uma integral iterada.

3 Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

então

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

A integral do lado direito de (3) é uma integral iterada semelhante às consideradas na seção anterior, exceto que na integral de dentro consideramos x constante não só em $f(x, y)$, mas também nos limites de integração $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

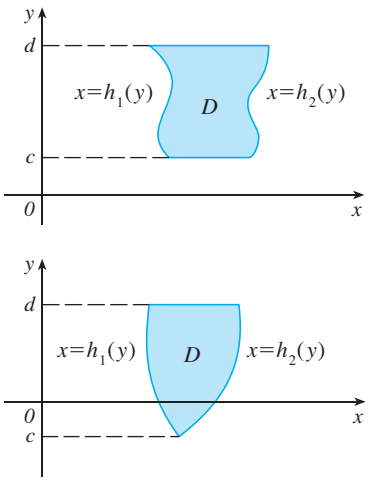


FIGURA 7

Consideraremos também regiões planas do **tipo II**, que podem ser expressas como

$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\} \tag{4}$$

onde h_1 e h_2 são contínuas. Dois exemplos de região do tipo II estão ilustrados na Figura 7.

Utilizando o mesmo método que usamos para estabelecer (3), podemos mostrar que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{5}$$

onde D é uma região do tipo II dada pela Equação 4.

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo $x = \pm 1$. Observamos que a região D, ilustrada na Figura 8, é uma região do tipo I, mas não do tipo II, e podemos escrever que

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

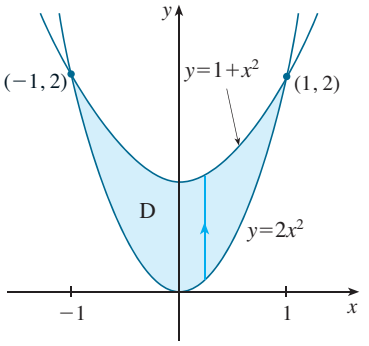


FIGURA 8

Como a fronteira de baixo é $y = 2x^2$ e a de cima é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2 \right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2 \right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\
&= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}
\end{aligned}$$

□

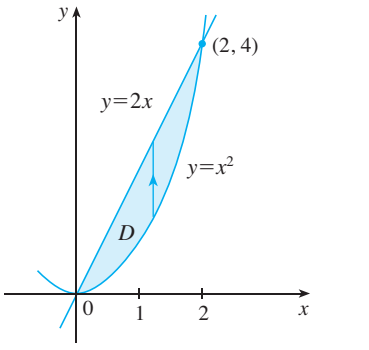


FIGURA 9
D como uma região do tipo I

Obs.: Quando escrevemos uma integral dupla como no Exemplo 1, é essencial desenhar um diagrama. Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na Figura 8. Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma: a seta começa na fronteira de baixo $y = g_1(x)$, que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima $y = g_2(x)$, que dá o extremo superior de integração. Para uma região do tipo II, a seta é desenhada horizontalmente da fronteira esquerda para a fronteira direita.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO 1 Da Figura 9 vemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

Portanto, o volume abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima de D é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

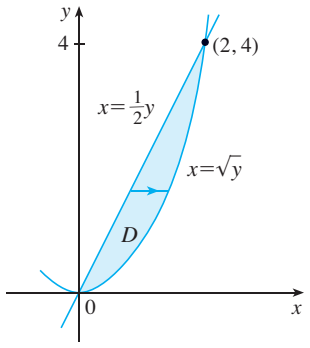


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Big]_0^2 = \frac{216}{35}$$

SOLUÇÃO 2 Da Figura 10, vemos que *D* pode ser descrita como uma região do tipo II,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \tfrac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Logo, outra expressão para *V* é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4 \Big]_0^4 = \tfrac{216}{35}$$ □

■ A Figura 11 mostra o sólido cujo volume é calculado no Exemplo 2. Ele está acima do plano *xy*, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$, e entre o plano $y = 2x$ e o cilindro parabólico $y = x^2$.

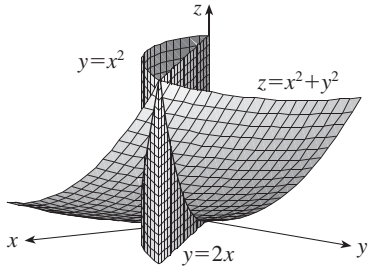
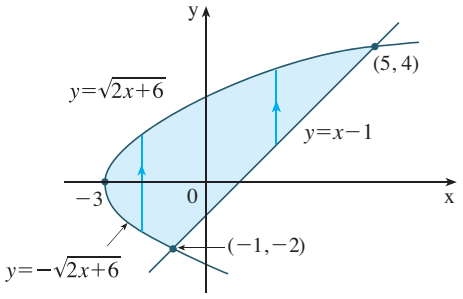


FIGURA 11

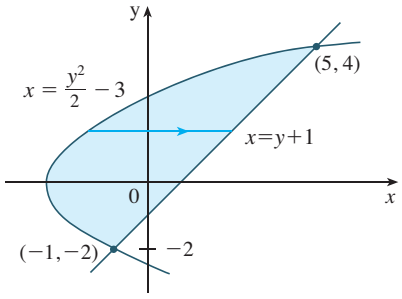
EXEMPLO 3 Calcule $\iint_D xy\, dA$, onde *D* é a região limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO A região *D* está representada na Figura 12. Novamente, *D* pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de *D* como região do tipo I é mais complicada, porque a fronteira inferior é constituída de duas partes. Portanto preferimos expressar *D* como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$$



(a) *D* como região do tipo I



(b) *D* como região do tipo II

FIGURA 12

Assim, (5) fornece

$$\iint_D xy\, dA = \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\, dx\, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^4 y[(y+1)^2 - (\tfrac{1}{2}y^2 - 3)^2]\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36$$

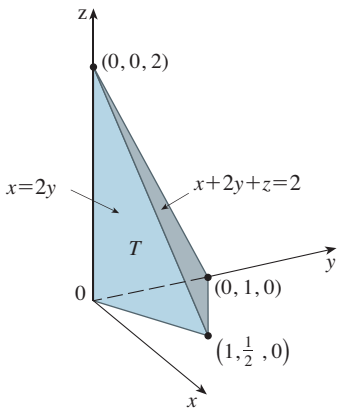


FIGURA 13

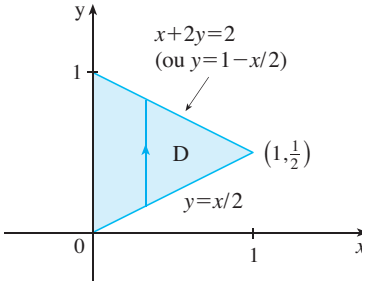


FIGURA 14

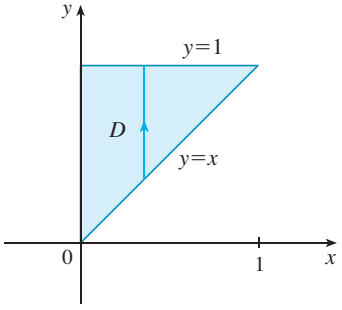


FIGURA 15

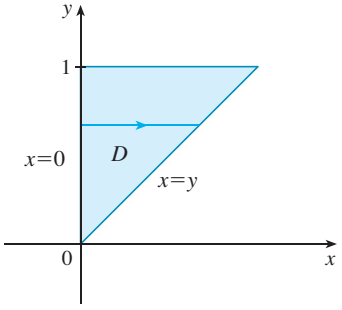


FIGURA 16

Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I usando a Figura 12(a), obteríamos

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

mas isso daria muito mais trabalho que o outro método. □

EXEMPLO 4 Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO Em uma questão como essa, é prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D sobre a qual o sólido se encontra. A Figura 13 mostra o tetraedro T limitado pelos planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, pelo plano vertical $x = 2y$ e pelo plano $x + 2y + z = 2$. Como $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$. (Veja a Figura 14.)

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - x - 2y)\,dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\ &= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 5 Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Se tentarmos calcular a integral na forma pela qual ela se apresenta, teremos inicialmente de resolver o problema de calcular $\int \operatorname{sen}(y^2)\,dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \operatorname{sen}(y^2)\,dy$ não é uma função elementar (veja o final da Seção 7.5, no Volume I). Precisamos então mudar a ordem de integração, o que pode ser conseguido escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla. Usando (3) na ordem inversa, temos

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\,dA$$

onde

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$$

Esboçamos essa região D na Figura 15. Então, da Figura 16, vemos que um modo alternativo de descrever D é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

Isso nos permite usar (5) para exprimir a integral dupla como uma integral iterada na ordem reversa:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx &= \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[x \operatorname{sen}(y^2)\right]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \operatorname{sen}(y^2)\,dy = -\tfrac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 1) \end{aligned}$$

□

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DUPLA

Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região D seguem imediatamente da Definição 2 e das Propriedades 7, 8 e 9 da Seção 15.1.

6 $$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$$

7 $$\iint_D cf(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA$$

Se $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ para todo (x,y) em D, então

8 $$\iint_D f(x,y)\,dA \geqslant \iint_D g(x,y)\,dA$$

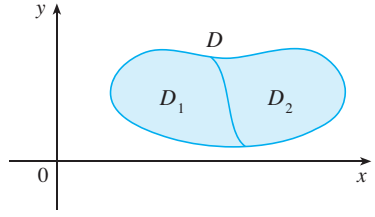


FIGURA 17

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real, dada pela equação $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

9 $$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA}$$

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões D que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse processo (veja os Exercícios 51 e 52).

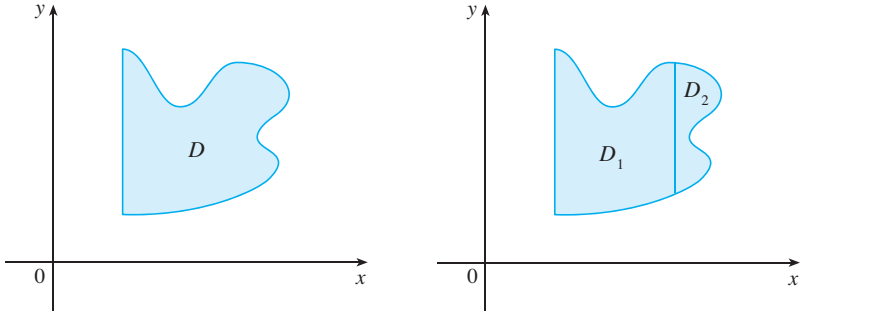


FIGURA 18

(a) D não é do tipo I nem do tipo II

(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x,y) = 1$ sobre uma região D, obteremos a área de D:

10 $$\boxed{\iint_D 1\,dA = A(D)}$$

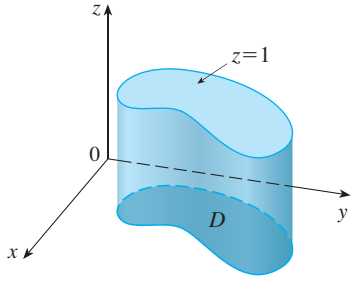


FIGURA 19
Cilindro com base D e altura 1

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e altura 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\,dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade (veja o Exercício 57):

11 Se $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo (x, y) em D, então

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EXEMPLO 6 Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^{1} = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$, e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$ □

15.3 EXERCÍCIOS

1-6 Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$

2. $\int_1^2 \int_y^2 xy\, dx\, dy$

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\, dy\, dx$

4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, dr\, d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^{v} \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7-18 Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D x^3 y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, -x \leqslant y \leqslant x\}$

8. $\iint_D \frac{4y}{x^3 + 2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$

9. $\iint_D x\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}$

10. $\iint_D x^3\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e, 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. $\iint_D y^2 e^{xy}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, 0 \leqslant x \leqslant y\}$

12. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y\}$

13. $\iint_D x \cos y\, dA, \quad D$ é limitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$

14. $\iint_D (x + y)\, dA, \quad D$ é limitada por $y = \sqrt{x}, y = x^2$

15. $\iint_D y^3\, dA,$
D é a região triangular com vértices $(0, 2), (1, 1)$ e $(3, 2)$

16. $\iint_D xy^2\, dA, \quad D$ é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

17. $\iint_D (2x - y)\, dA,$
D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

18. $\iint_D 2xy\, dA,$
D é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 2)$ e $(0, 3)$

19-28 Determine o volume do sólido dado.

19. Abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$

20. Abaixo do paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$

21. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1), (4, 1)$ e $(1, 2)$

22. Delimitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1, y = x, z = 0$

23. Limitada pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$

24. Limitado pelos planos $z = x, y = x, x + y = 2$ e $z = 0$

25. Delimitado pelos cilindros $z = x^2, y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$

26. Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y, x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

27. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z, x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

28. Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

29. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

30. Determine o volume aproximado do sólido no primeiro octante que é limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção.)

31-32 Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

31. O sólido delimitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2, 2x + 2y - z + 10 = 0$

32. O sólido delimitado pelo paraboloide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y, z = 2 + y$

33-34 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

33. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$ **34.** $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

SCA **35-38** Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

35. Abaixo da superfície $z = x^3y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

36. Entre os paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

37. Delimitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

38. Delimitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

39-44 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

39. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$ **40.** $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

41. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$ **42.** $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x, y)\, dx\, dy$

43. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$ **44.** $\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

45-50 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

45. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ **46.** $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy$

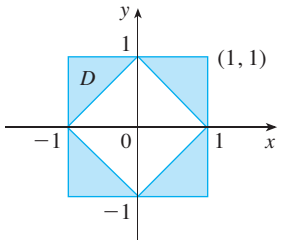
47. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$ **48.** $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

49. $\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

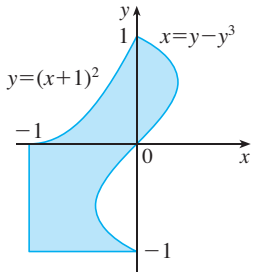
50. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

51-52 Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

51. $\iint_D x^2\, dA$



52. $\iint_D y\, dA$



53-54 Utilize a Propriedade 11 para estimar o valor da integral.

53. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q é o quarto de círculo com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$ no primeiro quadrante

54. $\iint_T \operatorname{sen}^4(x + y)\, dA$, T é o triângulo delimitado pelas retas $y = 0, y = 2x$ e $x = 1$

55-56 Encontre o valor médio de f na região D.

55. $f(x, y) = xy$, D é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 3)$

56. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, D é delimitado pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

57. Demonstre a Propriedade 11.

58. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

59. Calcule $\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4)\, dA$, onde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. [*Sugestão:* explore o fato de que D é simétrica com relação a ambos os eixos.]

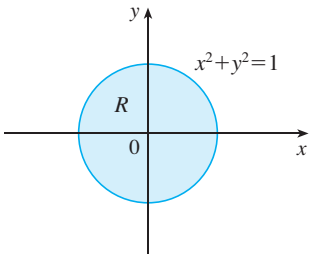
60. Utilize simetria para calcular $\iint_D (2 - 3x + 4y)\, dA$, onde D é a região limitada pelo quadrado com vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 5)$.

61. Calcule $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$, onde D é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, identificando primeiro a integral com o volume de um sólido.

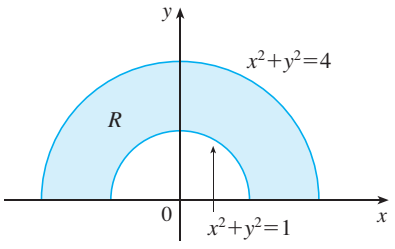
SCA **62.** Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu SCA para fazer esse desenho, para achar as equações das fronteiras da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.



(a) $R=\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



(b) $R=\{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

FIGURA 1

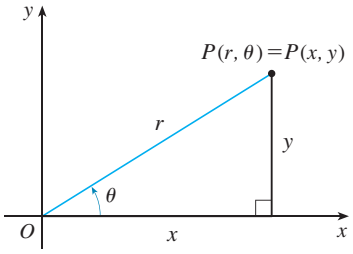


FIGURA 2

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores mostrados na Figura 4.

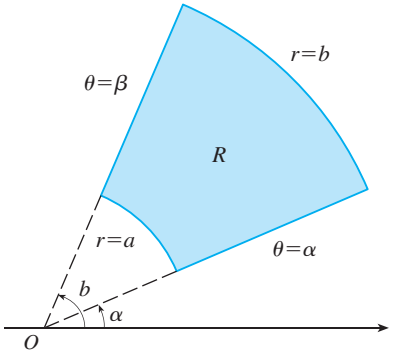


FIGURA 3 Retângulo polar

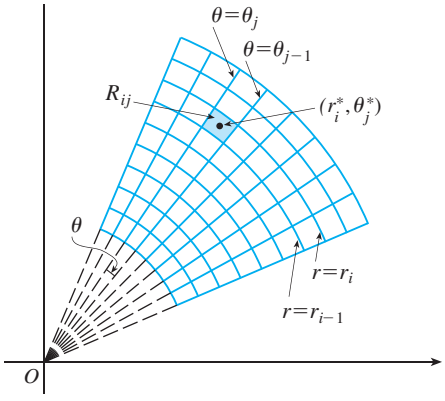


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

O "centro" dos sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij} usando o fato de a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ ser $\frac{1}{2}r^2\theta$. Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos que a área de R_{ij} é

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

Apesar de termos definido a integral dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$ em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f, obtemos a mesma resposta usando retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro R_{ij} são $(r_i^* \cos\theta_j^*,\ r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)$, portanto uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1}\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\operatorname{sen}\theta_j^*)\,r_i^*\,\Delta r\Delta\theta$$

Se escrevermos $g(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, então a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dA &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i \\ &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta = \int_\alpha^\beta\int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

2 MUDANÇA PARA COORDENADAS POLARES EM UMA INTEGRAL DUPLA Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

A fórmula em (2) diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, usando os limites de integração adequados para r e θ e substituindo dA por $r\,dr\,d\theta$. Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2. Um método clássico para se lembrar disso está na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares "infinitesimais" como retângulos convencionais com dimensões $r\,d\theta$ e dr e, portanto, com "área" $dA = r\,dr\,d\theta$.

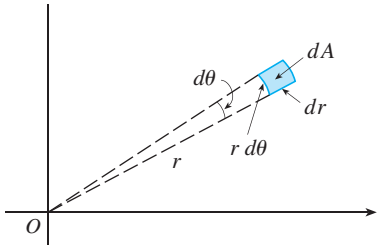


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Portanto, da Fórmula 2, segue

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3 \operatorname{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\Big[r^3\cos\theta + r^4 \operatorname{sen}^2\theta\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi}(7\cos\theta + 15\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\Big[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\Big]\, d\theta \\
&= 7\operatorname{sen}\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

■ Aqui usamos a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Veja a Seção 7.2, no Volume I, para informações sobre a integração de funções trigonométricas.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Se tomarmos $z = 0$ na equação do paraboloide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do paraboloide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

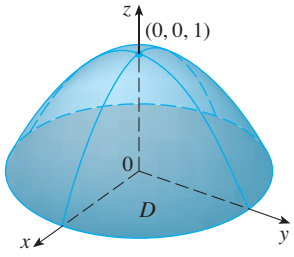


FIGURA 6

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

o que não é fácil de calcular, pois envolve determinar $\int (1 - x^2)^{3/2}\, dx$. □

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como o mostrado na Figura 7. Isso é semelhante à região com coordenadas retangulares do tipo II vista na Seção 15.3. De fato, combinando a Fórmula 2 desta seção com a Fórmula 15.3.5, obtemos o seguinte:

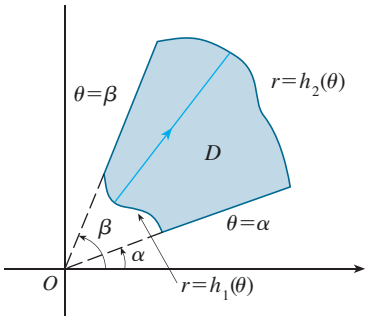


FIGURA 7

$D = \{(r, \theta) | \ \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) | \ \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$

que coincide com a Fórmula 10.4.3.

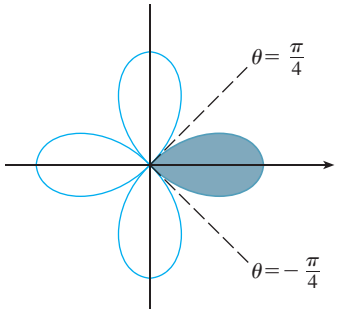


FIGURA 8

EXEMPLO 3 Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) | \ -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Sua área é

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ □

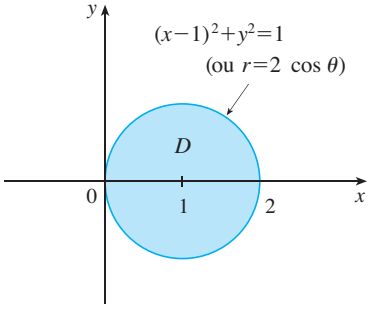


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cuja fronteira tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(veja as Figuras 9 e 10). Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$, assim, a fronteira circular fica $r^2 = 2r\cos\theta$, ou $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) | \ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$$

e, da Fórmula 3, vem

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} [1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)]\, d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \text{sen}\,2\theta + \tfrac{1}{8}\,\text{sen}\,4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$ □

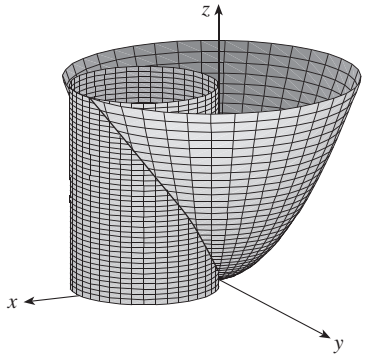
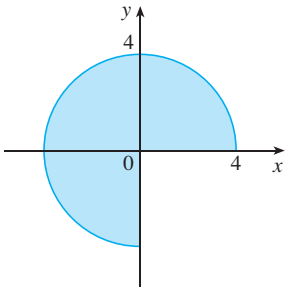


FIGURA 10

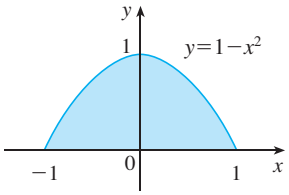
15.4 EXERCÍCIOS

1-4 Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

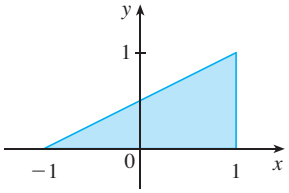
1.



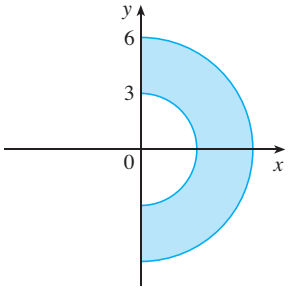
2.



3.



4.



5-6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a

5. $\int_{\pi}^{2\pi}\int_{4}^{7} r\, dr\, d\theta$ **6.** $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

7-14 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_D xy\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3

8. $\iint_R (x + y)\, dA$, onde R é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

9. $\iint_R \cos(x^2 + y^2)\, dA$, onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$

10. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$, onde D é a região delimitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\iint_R ye^x\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 25$

13. $\iint_R \operatorname{arctg}(y/x)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

14. $\iint_D x\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15-18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região delimitada pela curva $r = 4 + 3\cos\theta$

17. A região interior a ambos os círculos $r = \cos\theta$ e $r = \operatorname{sen}\theta$

18. A região dentro do círculos $r = 1 + \cos\theta$ e fora do círculo $r = 3\cos\theta$

19-27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 4$

20. Abaixo do paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy

21. Delimitado pelo hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitado pelo paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante

25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitada pelos paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo que passa pelo centro de uma esfera de raio r_2. Determine o volume do sólido em formato de anel resultante.

(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Observe que o volume depende somente de h e não de r_1 ou r_2.

29-32 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

29. $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dy\, dx$ **30.** $\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2 y\, dx\, dy$

31. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy$ **32.** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

33. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.

34. Um pulverizador agrícola distribui água em um padrão circular de 50 m de raio. Ele fornece água até uma profundidade de e^{-r} metros por hora a uma distância de r metros do pulverizador.

(a) Se $0 < R \leq 100$, qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro do círculo de raio R centrada no pulverizador?

(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora por metro quadrado fornecida à região dentro do círculo de raio R.

35. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

36. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \pi$$

(c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}\,x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.)

37. Utilize o resultado do Exercício 36, parte (c), para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ (b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}dx$

15.5 APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS DUPLAS

Já vimos uma aplicação da integral dupla: o cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, o que será feito na Seção 16.6. Nesta seção, vamos explorar as aplicações físicas, tais como cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos que essas ideias físicas também são importantes quando aplicadas a funções densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

DENSIDADE E MASSA

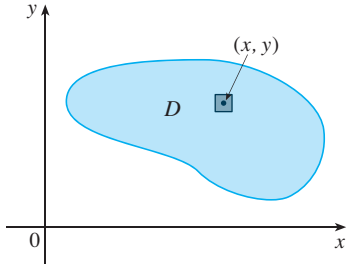


FIGURA 1

Na Seção 8.3, no Volume I, calculamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante, usando as integrais unidimensionais. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável. Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano xy e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua em D. Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área de um pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

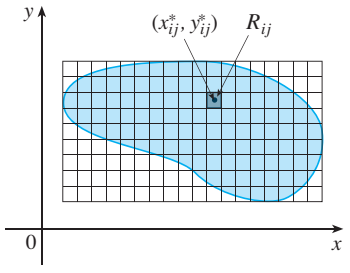


FIGURA 2

Para determinar a massa total m da lâmina, dividimos o retângulo R contendo D em sub-retângulos R_{ij}, todos do mesmo tamanho (como na Figura 2), e consideramos $\rho(x, y)$ como 0 fora de D. Se escolhermos um ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}, então a massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, onde ΔA é a área de R_{ij}. Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação do valor da massa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina como o valor-limite dessa aproximação:

$$m = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA \tag{1}$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto (x, y) em D, então a **carga total** Q é dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA \tag{2}$$

EXEMPLO 1 Uma carga está distribuída na região triangular D da Figura 3 de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.

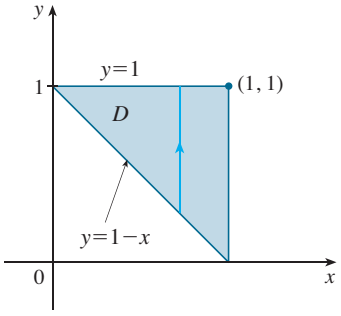


FIGURA 3

SOLUÇÃO Da Equação 2 e da Figura 3, temos

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \left[1^2 - (1 - x)^2\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Logo, a carga total é $\frac{5}{24}$C. □

MOMENTOS E CENTRO DE MASSA

Na Seção 8.3, do Volume I, determinamos o centro de massa de uma lâmina de densidade constante; aqui, consideraremos uma lâmina de densidade variável. Suponha que a lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Lembre-se de que no Capítulo 8, no Volume I, definimos o momento de uma partícula em relação a um eixo como o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo. Dividimos D em retângulos pequenos, como na Figura 2. Então a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$ e podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A]\, y_{ij}^*$$

Se somarmos essas quantidades e tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o **momento** da lâmina inteira **em relação ao eixo *x***:

$$M_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y\, \rho(x, y)\, dA \tag{3}$$

Da mesma forma, o **momento em relação ao eixo *y*** é:

$$M_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA \tag{4}$$

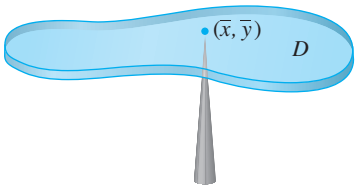


FIGURA 4

Como anteriormente, definimos o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ de modo que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

5 As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x, y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$

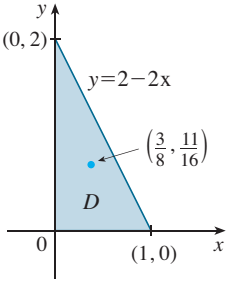


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

SOLUÇÃO O triângulo está mostrado na Figura 5. (Observe que a equação da fronteira superior é $y = 2 - 2x$.) A massa da lâmina é

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = 4\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Então, as fórmulas em (5) fornecem

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x, y)\,dA = \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[xy + 3x^2 y + x\,\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x, y)\,dA = \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x\,\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[7x - 9\,\frac{x^2}{2} - x^3 + 5\,\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

O centro de massa é o ponto $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$. □

EXEMPLO 3 A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

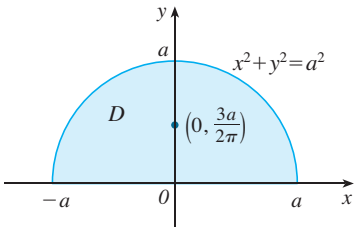


FIGURA 6

SOLUÇÃO Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ (veja a Figura 6). Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde K é alguma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Então $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e a região D é dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Logo, a massa da lâmina é

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{a} (Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= K\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr = K\pi \frac{r^3}{3}\Big]_0^{a} = \frac{K\pi a^3}{3}$$

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\bar{x} = 0$. A coordenada y é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D x\, \rho(x, y)\, dA = \frac{3}{K\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r \operatorname{sen}\theta\, (Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{a} r^3\, dr = \frac{3}{\pi a^3}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^{a}$$

$$= \frac{3}{\pi a^3}\frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$. □

■ Compare a localização do centro de massa no Exemplo 3 com o Exemplo 4 na Seção 8.3, no Volume I, onde encontramos que o centro de massa da lâmina com o mesmo formato, mas com densidade uniforme, está localizado no ponto $(0, 4a/(3\pi))$.

MOMENTO DE INÉRCIA

O **momento de inércia** (também chamado **segundo momento**) de uma partícula de massa m em relação a um eixo é definido como mr^2, onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ e que ocupa uma região D pelo mesmo processo que fizemos para os momentos normais. Dividimos D em pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em relação ao eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o **momento de inércia** da lâmina **em relação ao eixo *x***:

$$\boxed{6} \qquad I_x = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2\, \rho(x, y)\, dA$$

Da mesma forma, o **momento de inércia em relação ao eixo *y*** é:

$$\boxed{7} \qquad I_y = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2\, \rho(x, y)\, dA$$

É de interesse, ainda, considerar o **momento de inércia em relação à origem**, também chamado **momento polar de inércia**:

$$\boxed{8} \qquad I_0 = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2]\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

EXEMPLO 4 Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

SOLUÇÃO A fronteira de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares é descrito por $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 \, dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

Em vez de calcular I_x e I_y diretamente, vamos usar o fato de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (da simetria do problema). Portanto

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$

□

No Exemplo 4, observe que a massa do disco é

$$m = \text{densidade} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \tfrac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \tfrac{1}{2} ma^2$$

Portanto, se aumentarmos a massa ou o raio do disco, aumentaremos o momento de inércia. Em geral, o momento de inércia tem um papel em um movimento de rotação semelhante ao que a massa tem em um movimento linear. O momento de inércia de uma roda é o que torna difícil começar ou parar a rotação da roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a frenagem.

O **raio de giração de uma lâmina em relação a um eixo** é o número R tal que

9 $$mR^2 = I$$

onde m é a massa da lâmina e I é o momento de inércia em relação ao eixo dado. A Equação 9 nos diz que, se a massa da lâmina estiver concentrada a uma distância R do eixo, então o momento de inércia dessa "massa pontual" seria o mesmo que o momento de inércia da lâmina.

Em particular, o raio de giração $\bar{\bar{y}}$ em relação ao eixo x e o raio de giração $\bar{\bar{x}}$ em relação ao eixo y têm as equações

10 $$m\bar{\bar{y}}^2 = I_x \qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y$$

Então $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados resultantes. (Observe a analogia com o centro de massa.)

EXEMPLO 5 Determine o raio de giração em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Como observado, a massa do disco é $m = \rho\pi a^2$, e da Equação 10 temos

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de giração em relação ao eixo x é $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{2}a$, que é metade do raio do disco. □

PROBABILIDADE

Na Seção 8.5, consideramos a *função densidade de probabilidade f* de uma variável aleatória contínua X. Isso significa que $f(x) \geqslant 0$ para todo x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ e a probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma mulher adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\,dA$$

Em particular, se a região for um retângulo, a probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é

$$P(a \leqslant X \leqslant b, c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

(Veja a Figura 7.)

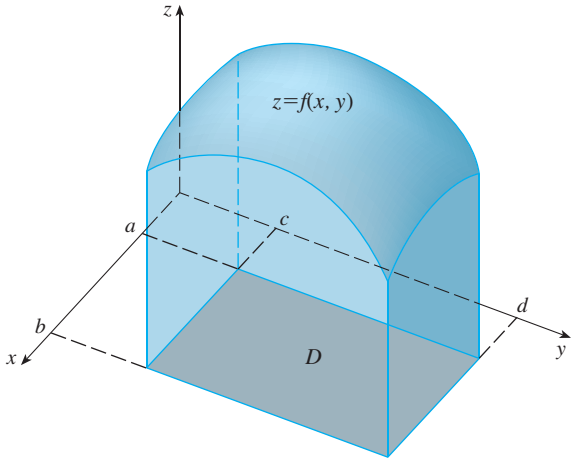


FIGURA 7
A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$ e abaixo do gráfico da função densidade conjunta

Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dA = 1$$

Como no Exercício 36 da Seção 15.4, a integral dupla sobre $\mathbb{R}^2$ é uma integral imprópria, definida como o limite da integral dupla sobre os círculos ou retângulos que se expandem, e podemos escrever

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$$

EXEMPLO 6 Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10, 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Em seguida, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x+2y)\,dy\,dx = C\int_0^{10}\left[xy+y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx$$

$$= C\int_0^{10}(10x+100)\,dx = 1\,500C$$

Portanto, $1500C = 1$, e então $C = \frac{1}{1\,500}$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7}\int_{2}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{7}\int_2^{10} \frac{1}{1\,500}(x+2y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{1\,500}\int_0^7\left[xy+y^2\right]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1\,500}\int_0^7 (8x+96)dx$$

$$= \frac{868}{1\,500} \approx 0{,}5787$$ □

Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_1(x)$ e Y seja uma variável aleatória com função densidade $f_2(y)$. Então, X e Y são ditas **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$$

Na Seção 8.5, no Volume I, modelamos o tempo de espera utilizando a função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

onde μ é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

EXEMPLO 7 O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

SOLUÇÃO Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individuais como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5}1 & \text{se } y \geqslant 0 \end{cases}$$

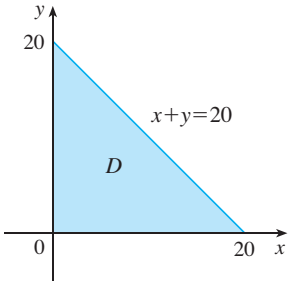


FIGURA 8

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{se } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Foi pedida também a probabilidade de $X + Y < 20$:

$$P(X+Y<20) = P((X,Y) \in D)$$

onde D é a região triangular mostrada na Figura 8. Então,

$$P(X+Y<20) = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^{20}\int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{50}\int_0^{20}\left[e^{-x/10}(-5)e^{-y/5}\right]_{y=0}^{y=20-x} dx$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^{20} e^{-x/10}(1-e^{(x-20)/5})\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10})\,dx$$
$$= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0{,}7476$$

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos que 20 minutos antes de tomar seus assentos. □

VALOR ESPERADO

Lembre-se da Seção 8.5, no Volume I, que, se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f, então sua *média* é

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f, definimos a **média X** e a **média Y**, também chamadas **valores esperados** de X e Y, como

11 $$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\,dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\,dA$$

Observe como são parecidas as expressões de μ_1 e μ_2 em (11) com os momentos M_x e M_y de uma lâmina com função densidade ρ nas Equações 3 e 4. De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída. Calculamos probabilidade da mesma maneira que calculamos massa: integrando a função densidade. E, como a "massa de probabilidade" total é 1, as expressões de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ em (5) mostram que podemos pensar que os valores esperados de X e Y, μ_1 e μ_2, são as coordenadas do "centro de massa" da distribuição de probabilidade.

No próximo exemplo trabalharemos com distribuições normais. Como na Seção 8.5, no Volume I, uma única variável aleatória tem *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

onde μ é sua média e σ é seu desvio-padrão.

EXEMPLO 8 Uma fábrica produz rolamentos (de forma cilíndrica) que são vendidos como tendo 4,0 cm de diâmetro e 6,0 cm de comprimento. Na verdade, o diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm, enquanto o comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm. Supondo que X e Y sejam independentes, escreva a função densidade conjunta e faça seu gráfico. Determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção ter comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que 0,02 cm.

SOLUÇÃO Temos que X e Y têm distribuições normais com $\mu_1 = 4{,}0$, $\mu_2 = 6{,}0$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}01$. As funções densidade individuais para X e Y são

$$f_1(x) = \frac{1}{0{,}01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-4)^2/0{,}0002} \qquad f_2(y) = \frac{1}{0{,}01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(y-6)^2/0{,}0002}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{0{,}0002\pi}\, e^{-(x-4)^2/0{,}0002} e^{-(y-6)^2/0{,}0002}$$

$$= \frac{5\,000}{\pi}\, e^{-5\,000[(x-4)^2+(y-6)^2]}$$

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.

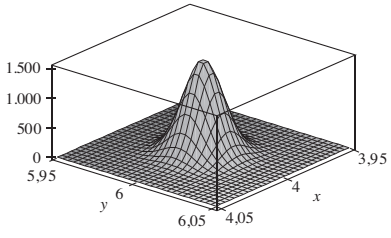


FIGURA 9
Gráfico da função densidade normal conjunta em duas variáveis do Exemplo 8

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de ambos, X e Y, diferirem de seus valores médios por menos de 0,02 cm. Usando uma calculadora ou computador para estimar a integral, temos

$$\begin{aligned} P(3{,}98 < X < 4{,}02,\ 5{,}98 < Y < 6{,}02) &= \int_{3{,}98}^{4{,}02} \int_{5{,}98}^{6{,}02} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \frac{5\,000}{\pi} \int_{3{,}98}^{4{,}02} \int_{5{,}98}^{6{,}02} e^{-5\,000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx \\ &\approx 0{,}91 \end{aligned}$$

Então, a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0{,}91 = 0{,}09$$ □

15.5 EXERCÍCIOS

1. Uma carga elétrica é distribuída sobre o retângulo $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.

2. Uma carga elétrica é distribuída sobre um disco $x^2 + y^2 \leq 4$ de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.

3-10 Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ.

3. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$; $\rho(x, y) = xy^2$

4. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$; $\rho(x, y) = cxy$

5. D é uma região triangular com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$

6. D é a região triangular delimitada pelas retas $x = 0$, $y = x$ e $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$

7. D é delimitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$; $\rho(x, y) = y$

8. D é delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$; $\rho(x, y) = x$

9. $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \operatorname{sen}(\pi x/L), 0 \leq x \leq L\}$; $\rho(x, y) = y$

10. D é delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$; $\rho(x, y) = \sqrt{x}$

11. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

12. Determine o centro de massa da lâmina do Exercício 11 se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

13. A fronteira de uma lâmina consiste nos semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$ juntamente com as partes do eixo x que os une. Encontre o centro de massa da lâmina se a densidade em qualquer ponto é proporcional à sua distância da origem.

14. Encontre o centro de massa da lâmina do Exercício 13 se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.

15. Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a, se a densidade em qualquer ponto for proporcional do quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.

16. Uma lâmina ocupa a região dentro do círculo $x^2 + y^2 = 2y$ mas fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Encontre o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.

17. Determine os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 7.

18. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 12.

19. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 15.

20. Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0{,}1x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y?

SCA **21-22** Utilize um sistema de computação algébrica para determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia da lâmina que ocupa a região D e tem a densidade dada.

21. $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi\}$; $\rho(x, y) = xy$

22. D é delimitada pelo cardioide $r = 1 + \cos\theta$; $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

SCA **23-26** Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa a região dada. Encontre os momentos de inércia I_x e I_y e os raios de giração $\bar{\bar{x}}$ e $\bar{\bar{y}}$.

23. O retângulo $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h$

24. O triângulo com vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ e $(0, h)$

25. A parte do disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ no primeiro quadrante

26. A região sob a curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

27. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

28. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.
(b) Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é f da parte (a), determine
(i) $P(X \geqslant \frac{1}{2})$ (ii) $P(X \geqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{2})$
(c) Determine os valores esperados de X e Y.

29. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0{,}1e^{-(0{,}5x+0{,}2y)} & \text{se } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Verifique que f é de fato uma função densidade conjunta.
(b) Determine as seguintes probabilidades.
(i) $P(Y \geqslant 1)$ (ii) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 4)$
(c) Determine os valores esperados de X e Y.

30. (a) Uma luminária tem duas lâmpadas de um tipo com tempo de vida médio de 1 000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1\,000$, determine a probabilidade de que ambas as lâmpadas venham a falhar dentro de um período de 1 000 horas.
(b) Outra luminária tem somente uma lâmpada do mesmo tipo das da parte (a). Se a lâmpada queima e é trocada por outra do mesmo tipo, determine a probabilidade de que as duas venham a falhar dentro de 1 000 horas.

SCA **31.** Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias, onde X tem distribuição normal com média 45 e desvio-padrão 0,5 e Y tem distribuição normal com média 20 e desvio-padrão 0,1.
(a) Encontre $P(40 \leqslant X \leqslant 50, 20 \leqslant Y \leqslant 25)$.
(b) Encontre $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leqslant 2)$.

32. Xavier e Yolanda têm aulas que terminam ao meio-dia e concordaram em se encontrar todo dia depois das aulas. Eles chegam em um café separadamente. O tempo de chegada de Xavier é X e o da Yolanda é Y, onde X e Y são medidos em minutos após o meio-dia. As funções densidade individuais são

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{se } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(Xavier chega algumas vezes depois do meio-dia, e é mais provável que ele chegue na hora do que se atrase. Yolanda sempre chega às 12h10 e é mais provável que se atrase do que chegue pontualmente.) Depois de Yolanda chegar, ela espera até meia hora por Xavier, mas ele não espera por ela. Determine a probabilidade de eles se encontrarem.

33. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 km na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto $A(x_0, y_0)$, suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \tfrac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

onde $d(P, A)$ denota a distância de P a A.
(a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por quilômetro quadrado. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A.
(b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde seria preferível viver?

15.6 INTEGRAIS TRIPLAS

Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

I $$B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, r \leqslant z \leqslant s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx, dividindo $[c, d]$ em m subintervalos

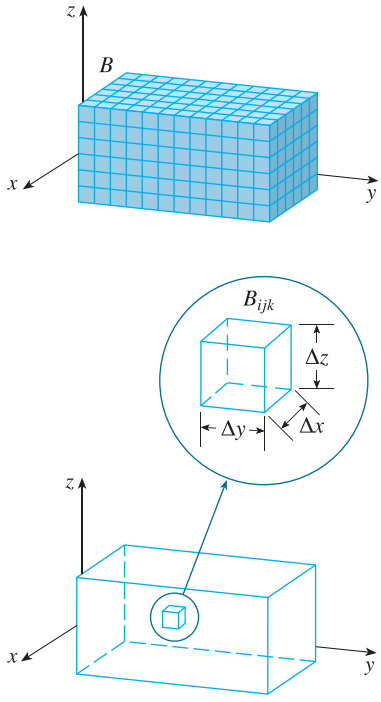


FIGURA 1

de comprimentos Δy, e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz. Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa B em lmn subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Assim formamos a **soma tripla de Riemann**

$$\boxed{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

onde o ponto amostral $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk}. Por analogia com a definição da integral dupla (15.1.5), definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em (2).

3 DEFINIÇÃO A **integral tripla** de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

se o limite existir.

Novamente, a integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhemos o ponto amostral como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto (x_i, y_j, z_k), obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada, como segue.

4 TEOREMA DE FUBINI PARA AS INTEGRAIS TRIPLAS Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e, finalmente, em relação a z. Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo, se primeiro integrarmos em relação a y, então em relação a z e depois a x, teremos

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\, dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obteremos

$$\iiint_B xyz^2\, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \frac{z^3}{4}\Big]_0^3 = \frac{27}{4}$$ □

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada geral *E*** no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas (15.3.2). Envolveremos E por uma caixa B do tipo dado pela Equação 1. Em seguida, definiremos uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E. Por definição,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

Essa integral existe se f for contínua e se a fronteira de E for "razoavelmente lisa". A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla (Propriedades 6-9 da Seção 15.3).

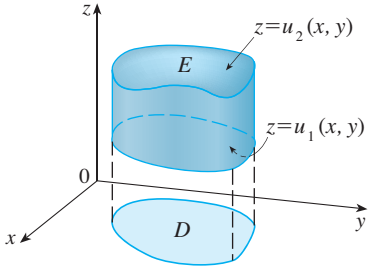


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

Vamos nos restringir às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região sólida E é dita do **tipo 1** se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y, ou seja,

5 $$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy, como mostrado na Figura 2. Observe que a fronteira superior do sólido E é a superfície de equação $z = u_2(x, y)$, enquanto a fronteira inferior é a superfície $z = u_1(x, y)$.

Pelos mesmos argumentos que nos levaram à Fórmula 15.3.3, podemos mostrar que, se E é uma região do tipo 1 dada pela Equação 5, então

6 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

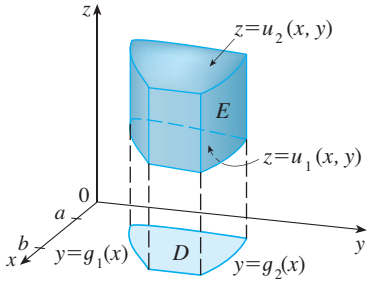


FIGURA 3
Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção D é uma região plana de tipo I

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que x e y são mantidos fixos e, assim, $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são vistas como constantes, enquanto $f(x, y, z)$ é integrada em relação a z.

Em particular, se a projeção D de E sobre o plano xy é uma região plana do tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 fica

7 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

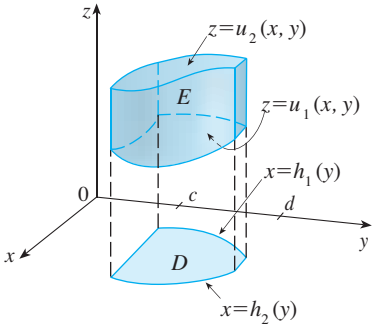


FIGURA 4
Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo II (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 fica

8 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x + y + z = 1$.

SOLUÇÃO Para escrevermos a integral tripla, é recomendável desenhar *dois* diagramas: um da região sólida E (veja a Figura 5) e outro de sua projeção D no plano xy (veja a Figura 6). A fronteira inferior do tetraedro é o plano $z = 0$ e a superior é o plano $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$) e então usamos $u_1(x, y) = 0$ e $u_2(x, y) = 1 - x - y$ na Fórmula 7. Observe que os planos $x + y + z = 1$ e $z = 0$ se interceptam na reta $x + y = 1$ (ou $y = 1 - x$) no plano xy. Logo, a projeção de E é a região triangular da Figura 6, e temos

$$\boxed{9} \qquad E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

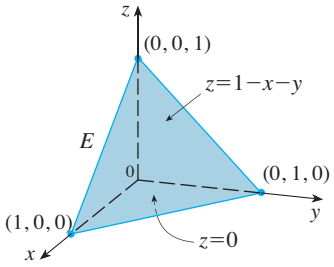


FIGURA 5

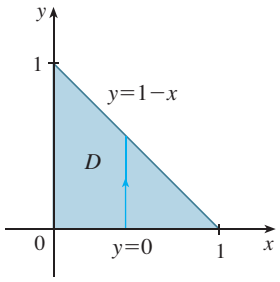


FIGURA 6

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\,dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

□

Uma região sólida E é do **tipo 2** se for da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 7). A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$ e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$. Assim, temos

$$\boxed{10} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx \right] dA$$

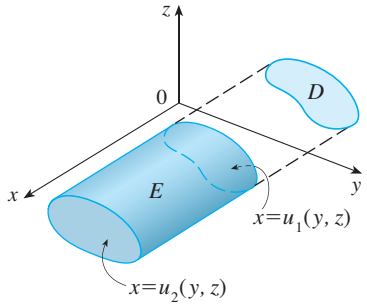


FIGURA 7 Uma região do tipo 2

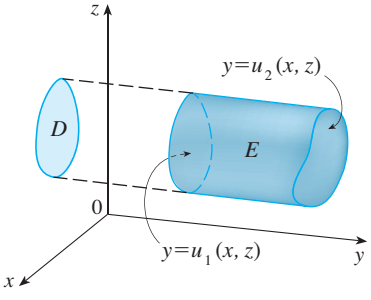


FIGURA 8 Uma região do tipo 3

Finalmente, uma região do **tipo 3** é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xz, $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 8). Para esse tipo de região, temos

$$\boxed{11} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

Em cada uma das Equações 10 e 11 podem existir duas possíveis expressões para a integral, dependendo de D ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

SOLUÇÃO O sólido E está mostrado na Figura 9. Se o olharmos como uma região do tipo 1, então precisaremos considerar sua projeção D_1 sobre o plano xy, que é a região parabólica da Figura 10. (O corte de $y = x^2 + z^2$ no plano $z = 0$ é a parábola $y = x^2$.)

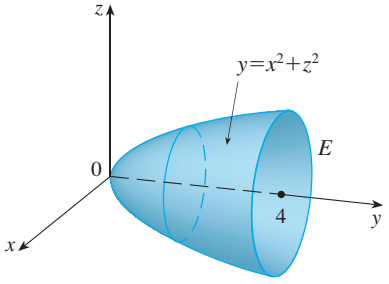


FIGURA 9
Região de integração

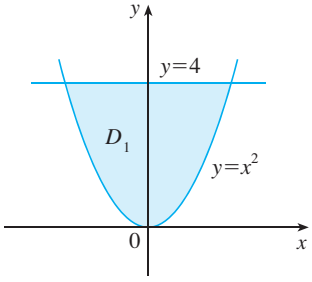


FIGURA 10
Projeção sobre o plano xy

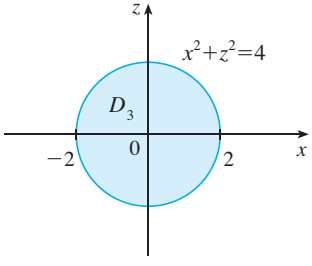


FIGURA 11
Projeção sobre o plano xz

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$ e então a superfície fronteira de baixo de E é $z = -\sqrt{y - x^2}$ e a superfície de cima é $z = \sqrt{y - x^2}$. Portanto, a descrição de E como região do tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}$$

e obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

Apesar de essa expressão estar correta, é extremamente difícil calculá-la. Vamos, em vez disso, considerar E como região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco $x^2 + z^2 \leq 4$ mostrado na Figura 11.

Então, a superfície lateral esquerda de E é o paraboloide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$. Assim, tomando $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x, z) = 4$ na Equação 11, temos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy \right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz: $x = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$, o que nos dá

A maior dificuldade no cálculo de uma integral tripla é escrever uma expressão para a região de integração (como na Equação 9 do Exemplo 2). Lembre-se de que os limites de integração da integral de dentro contêm no máximo duas variáveis, os limites de integração da integral do meio contêm no máximo uma variável e os limites de integração de fora precisam ser constantes.

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV &= \iint_{D_3} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\,r\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2-r^4)\,dr \\ &= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$

□

APLICAÇÕES DE INTEGRAIS TRIPLAS

Lembre-se de que, se $f(x) \geqslant 0$, então a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b, e se $f(x, y) \geqslant 0$, então a integral dupla $\iint_D f(x, y)\,dA$ representa o volume sob a superfície $z = f(x, y)$ acima de D. A interpretação correspondente para a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$, onde $f(x, y, z) \geqslant 0$, não é muito útil, porque seria um "hipervolume" de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o *domínio* da função f; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Apesar disso, a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações físicas, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e $f(x, y, z)$.

Vamos começar com o caso especial onde $f(x, y, z) = 1$ para todos os pontos em E. Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E:

12

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por exemplo, você pode ver isso no caso de uma região do tipo 1 colocando $f(x, y, z) = 1$ na Fórmula 6:

$$\iiint_E 1\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz\right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\,dA$$

e, da Seção 15.3, sabemos que isso representa o volume que está entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$.

EXEMPLO 4 Utilize uma integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy estão mostrados nas Figuras 12 e 13. A fronteira inferior de T é o plano $z = 0$, e a superior é o plano $x + 2y + z = 2$, ou seja, $z = 2 - x - 2y$.

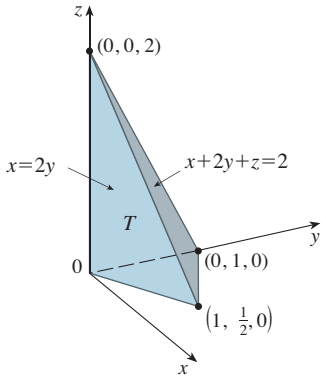


FIGURA 12

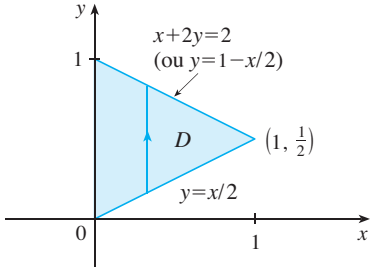


FIGURA 13

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx = \frac{1}{3}$$

pelo mesmo cálculo usado no Exemplo 4 da Seção 15.3.

(Observe que não é necessário usar as integrais triplas para calcular volumes. As integrais triplas simplesmente fornecem um método alternativo para descrever os cálculos.) □

Todas as aplicações de integrais duplas da Seção 15.5 podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z), então sua **massa** é

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV \tag{13}$$

e seus **momentos** em relação aos três planos coordenados são

$$M_{yz} = \iiint_E x\, \rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\, \rho(x, y, z)\, dV \tag{14}$$
$$M_{xz} = \iiint_E z\, \rho(x, y, z)\, dV$$

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} \tag{15}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centroide** de E. Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \tag{16}$$
$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

Como na Seção 15.5, a **carga elétrica** total sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\, dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X, Y e Z, sua **função densidade conjunta** é uma função das três variáveis tal que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

Em particular,

$$P(a \leqslant X \leqslant b, c \leqslant Y \leqslant d, r \leqslant Z \leqslant s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = 1$$

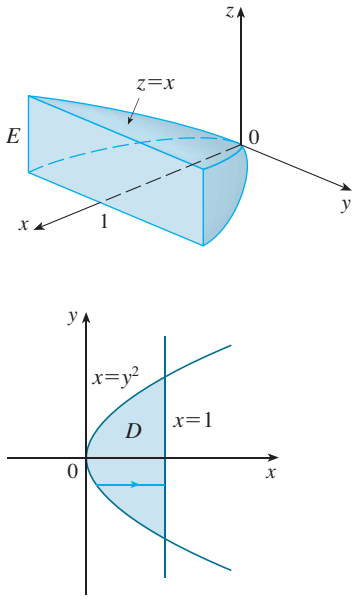


FIGURA 14

EXEMPLO 5 Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO O sólido E e sua projeção sobre o plano xy estão mostrados na Figura 14. As superfícies inferior e superior de E são os planos $z = 0$ e $z = x$, de modo que descrevemos E como uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, y^2 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x\}$$

Então, se a densidade é $\rho(x, y, z) = \rho$, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} \rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} (1 - y^4) \, dy = \rho \int_{0}^{1} (1 - y^4) \, dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

Por causa da simetria de E e ρ em relação ao plano xz, podemos dizer imediatamente que $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Os outros momentos são

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} x\rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2 \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} z\rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{7} \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14} \right)$$

□

15.6 EXERCÍCIOS

1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a y, depois z e então x.

2. Calcule a integral $\iiint_E (xz - y^3)\,dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3-8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\,dy\,dx\,dz$

4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz\,dz\,dy\,dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\,dx\,dz\,dy$

6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\,dx\,dy\,dz$

7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z)\,dz\,dx\,dy$

8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\,dy\,dz\,dx$

9-18 Calcule a integral tripla.

9. $\iiint_E 2x\,dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$

10. $\iiint_E yz \cos(x^5)\,dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq z \leq 2x\}$

11. $\iiint_E 6xy\,dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

12. $\iiint_E y\,dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$

13. $\iiint_E x^2 e^y\,dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$

14. $\iiint_E xy\,dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $y = x^2$ e $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$

15. $\iiint_T x^2\,dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

16. $\iiint_T xyz\,dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$

17. $\iiint_E x\,dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

18. $\iiint_E z\,dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

19-22 Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

19. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$

20. O sólido delimitado pelo cilindro elíptico $4x^2 + z^2 = 4$ e pelo planos $y = 0$ e $y = z + 2$

21. O sólido delimitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$

22. O sólido limitado pelo paraboloide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 16$

23. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortada do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.

SCA (b) Utilize a Tabela de Integrais (nas Páginas de Referência 6-10) ou um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

24. (a) Na **Regra do Ponto Médio para as Integrais Triplas,** usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla em uma caixa B, onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ da caixa B_{ijk}. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão de duas casas decimais. Compare com a resposta da parte (a).

25-26 Use a Regra do Ponto Médio para as integrais triplas (Exercício 24) para estimar o valor da integral. Divida B em oito subcaixas de igual tamanho.

25. $\iiint_B \dfrac{1}{\ln(1 + x + y + z)}\,dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8, 0 \leq z \leq 4\}$$

26. $\iiint_B \operatorname{sen}(xy^2z^3)\,dV$, onde
$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$

27-28 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\,dz\,dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\,dz\,dy$

29-32 Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - 4z^2$, $y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9$, $x = -2$, $x = 2$

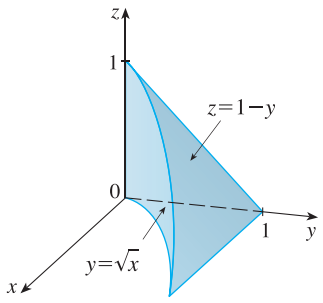
31. $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$

32. $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, $x + y - 2z = 2$

33. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

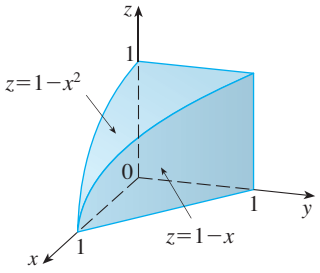
Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



34. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



35-36 Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

36. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

37-40 Determine a massa e o centro de massa do sólido dado E com função densidade dada ρ.

37. E é o sólido do Exercício 11; $\rho(x, y, z) = 2$

38. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x + z = 1, x = 0$ e $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

39. E é o cubo dado por $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

40. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

41-44 Suponha que o sólido tenha densidade constante k.

41. Encontre os momentos de inércia para um cubo com comprimento do lado L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

42. Encontre os momentos de inércia de um tijolo retangular com dimensões a, b e c e massa M se o centro do tijolo está localizado na origem e as arestas são paralelas aos eixos coordenados.

43. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$.

44. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cone sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$.

45-46 Escreva, mas não calcule, as expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z.

45. O sólido do Exercício 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

46. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

SCA **47.** Seja E o sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z, x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema de computação algébrica para determinar os valores exatos das seguintes quantidades para E.

(a) A massa

(b) O centro de massa

(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

SCA **48.** Se E é o sólido do Exercício 18 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três casas decimais.

(a) A massa

(b) O centro de massa

(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

49. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X, Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ e $f(x, y, z) = 0$ caso contrário.

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.

(c) Determine $P(X + Y + Z \leq 1)$.

50. Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0,5x+0,2y+0,1z)}$ se $x \geq 0, y \geq 0$, $z \geq 0$ e $f(x, y, z) = 0$ caso contrário.

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.

(c) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.

51-52 O **valor médio** de uma função $f(x, y, z)$ em uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E. Por exemplo, se ρ é a função densidade, então ρ_{med} é a densidade média de E.

51. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ no cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante, com um vértice na origem e arestas pararelas aos eixos coordenados.

52. Ache o valor médio da função $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ na região delimitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

53. Determine a região E para a qual a integral

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

é máxima.

PROJETO DE DESCOBERTA

VOLUMES DE HIPERESFERAS

Neste projeto, determinaremos as fórmulas para o volume limitado por uma hiperesfera em um espaço n-dimensional.

1. Utilize uma integral dupla e substituições trigonométricas, juntamente com a Fórmula 64 da Tabela de Integrais, para determinar a área do círculo de raio r.
2. Use uma integral tripla e substituições trigonométricas para determinar o volume da esfera de raio r.
3. Utilize uma integral quádrupla para determinar o hipervolume delimitado pela hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ em $\mathbb{R}^4$ (Use somente substituição trigonométrica e fórmulas de redução para $\int \text{sen}^n x\,dx$ ou $\int \cos^n x\,dx$.)
4. Use uma integral n-upla para determinar o volume delimitado por uma hiperesfera de raio r no espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão*: as fórmulas para n par e para n ímpar são diferentes.]

15.7 INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

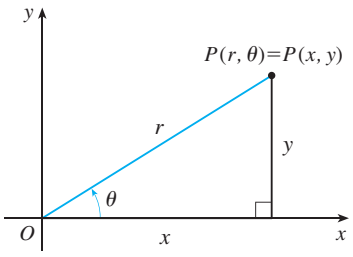


FIGURA 1

Em geometria plana, o sistema de coordenadas polares é usado para dar uma descrição conveniente de certas curvas e regiões (veja a Seção 10.3). A Figura 1 nos permite relembrar a ligação entre coordenadas polares e cartesianas. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, da figura,

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Em três dimensões, há um sistema de coordenadas, chamado *coordenadas cilíndricas*, que é análogo às coordenadas polares e dá descrições convenientes de algumas superfícies e sólidos que ocorrem usualmente. Como veremos, algumas integrais triplas são muito mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

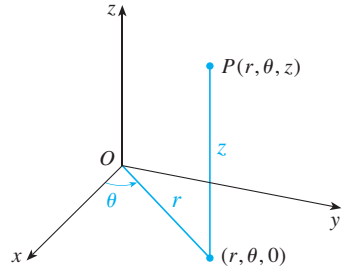


FIGURA 2
As coordenadas cilíndricas de um ponto

No **sistema de coordenadas cilíndricas**, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P. (Veja a Figura 2.)

Para converter de coordenadas cilíndricas para retangulares, usamos as equações

1 $$x = r\cos\theta \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \quad z = z$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$

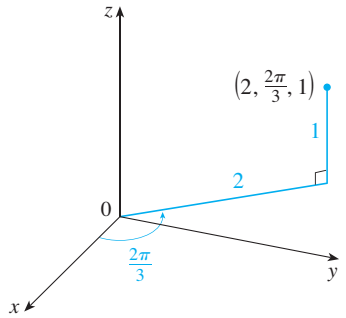


FIGURA 3

EXEMPLO 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUÇÃO

(a) O ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está marcado na Figura 3. Das Equações 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Logo, o ponto é $(-1, \sqrt{3}, 1)$ em coordenadas retangulares.

(b) Das Equações 2 temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{so} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Outro é $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Como no caso das coordenadas polares, existem infinitas escolhas. □

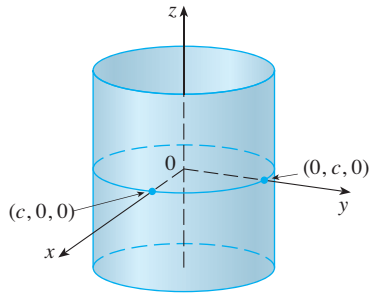


FIGURA 4
$r = c$, um cilindro

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo z. Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. (Veja a Figura 4.) Esta é a razão para o nome coordenadas "cilíndricas".

EXEMPLO 2 Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

SOLUÇÃO A equação diz que o valor z, ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que r, a distância do ponto ao eixo z. Como θ não aparece, ele pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $z = k$ $(k > 0)$ é um círculo de raio k. Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada convertendo a equação para coordenadas retangulares. Da primeira equação em 2, temos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconhecemos a equação $z^2 = x^2 + y^2$ (pela comparação com a Tabela 1 na Seção 12.6) como o cone circular cujo eixo é o eixo z. (Veja a Figura 5.) □

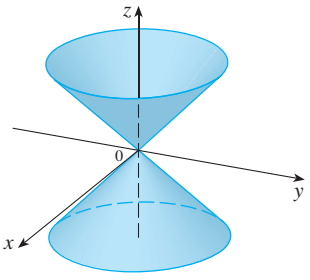


FIGURA 5
$z = r$, um cone

CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 6). Em particular, suponha que f seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é dado em coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

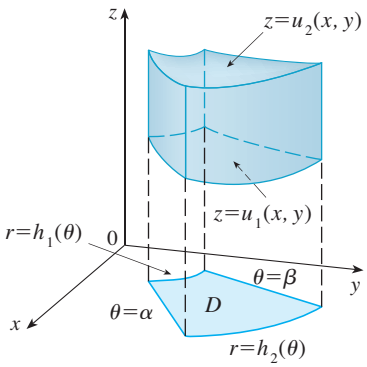


FIGURA 6

Sabemos da Equação 15.6.6 que

$$\boxed{3} \qquad \iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 3 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\boxed{4} \qquad \iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

A Fórmula 4 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z, r e θ, e trocando dV por $r\,dz\,dr\,d\theta$ (A Figura 7 mostra como se lembrar disso.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E for uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas e, especialmente, quando a função $f(x, y, z)$ envolver a expressão $x^2 + y^2$.

EXEMPLO 3 Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ (veja a Figura 8). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z, a função densidade é

$$f(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.6.13, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2+y^2}\,dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (Kr)\,r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 Kr^2[4-(1-r^2)]\,dr\,d\theta \\ &= K\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2+r^4)\,dr \\ &= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5} \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 4 Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \{(x,y,z) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$ (veja a Figura 9). Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}$$

Portanto, temos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)\,dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$ □

15.7 EXERCÍCIOS

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(2, \pi/4, 1)$ (b) $(4, -\pi/3, 5)$

2. (a) $(1, \pi, e)$ (b) $(1, 3\pi/2, 2)$

3-4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(1, -1, 4)$ (b) $(-1, -\sqrt{3}, 2)$

4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

5-6 Descreva em palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$ **6.** $r = 5$

7-8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$ **8.** $2r^2 + z^2 = 1$

9-10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + y^2 = 2y$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11-12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leqslant r \leqslant 2, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido delimitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15-16 Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

15. $\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_r^4 r\,dz\,d\theta\,dr$ **16.** $\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$

17-26 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

18. Calcule $\iiint_E (x^3 + xy^2)\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

19. Calcule $\iiint_E y\,dV$, onde E é o sólido que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = x + 2$.

20. Calcule $\iiint_E x\,dV$, onde E está delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

21. Calcule $\iiint_E x^2\,dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. (a) Ache o volume da região E limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
(b) Encontre o centroide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).

24. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a\cos\theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

25. Determine a massa e o centro de massa do sólido S delimitado pelo paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$, se S tem densidade constante K.

26. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z.

27-28 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

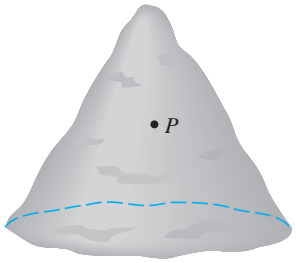
27. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dz\,dx\,dy$

28. $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

29. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho necessária para erguer uma montanha a partir do nível do mar. Considere uma montanha que tenha essencialmente o formato de um cone circular reto. Suponha que a densidade do material na vizinhança de um ponto P seja $g(P)$ e a altura seja $h(P)$.

(a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.

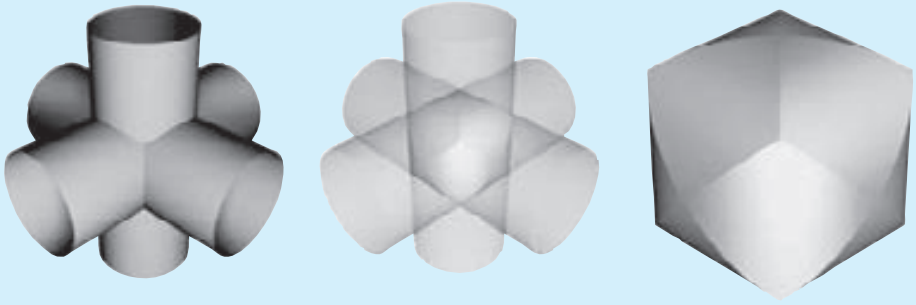
(b) Assuma que o monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 19 000 m, altura de 3 800 m e densidade constante de 3 200 kg/m^3. Quanto trabalho foi feito para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?



PROJETO DE DESCOBERTA

A INTERSECÇÃO DE TRÊS CILINDROS

A figura mostra o sólido delimitado por três cilindros circulares de mesmo diâmetro que se interceptam em ângulos retos. Neste projeto, vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



1. Esboce cuidadosamente o sólido delimitado pelos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique a posição dos eixos coordenados e identifique as faces com as equações dos cilindros correspondentes.
2. Determine o volume do sólido do Problema 1.
3. SCA Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar as arestas do sólido.
4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
5. Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, escreva, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

15.8 INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Outro sistema de coordenadas tridimensionais útil é o *sistema de coordenadas esféricas*. Ele simplifica o cálculo de integrais triplas em regiões limitadas por esferas ou cones.

COORDENADAS ESFÉRICAS

As **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no espaço são mostradas na Figura 1, onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P, θ é o mesmo ângulo que nas coordenadas ci-

líndricas e ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP. Observe que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

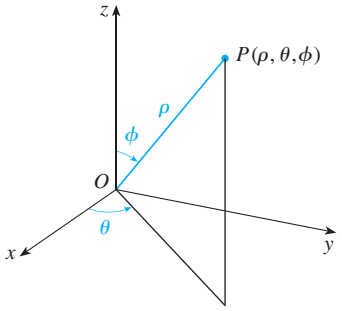


FIGURA 1
As coordenadas esféricas de um ponto

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto. Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 2) – essa é a razão do nome "coordenadas esféricas". O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 3) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja a Figura 4).

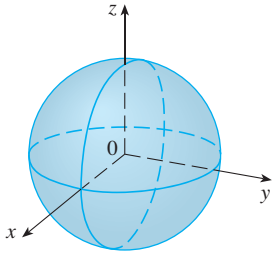


FIGURA 2 $\rho = c$, uma esfera

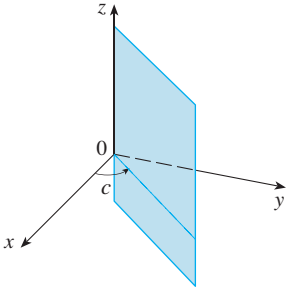


FIGURA 3 $\theta = c$, um semiplano

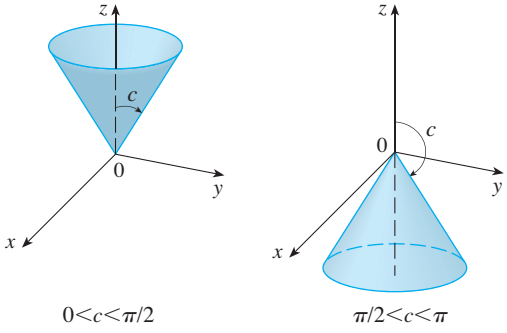


FIGURA 4 $\phi = c$, um semicone

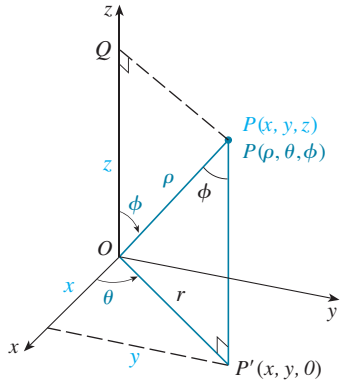


FIGURA 5

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5. Dos triângulos OPQ e OPP', temos

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

1 $\quad x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$

Além disso, a fórmula da distância mostra que

2 $\quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Usamos essa equação para converter de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

EXEMPLO 1 O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas. Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares.

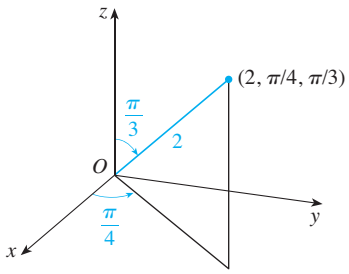


FIGURA 6

SOLUÇÃO Marcamos o ponto na Figura 6. Das Equações 1, temos

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Logo, o ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ em coordenadas retangulares. □

ATENÇÃO Não existe uma convenção universal na notação de coordenadas esféricas. A maioria dos livros de física troca os significados de θ e ϕ e usa r no lugar de ρ.

EXEMPLO 2 O ponto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado em coordenadas retangulares. Encontre coordenadas esféricas para este ponto.

SOLUÇÃO Da Equação 2, temos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

e, assim, as Equações 1 fornecem

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$, pois $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Portanto, as coordenadas esféricas do ponto dado são $(4, \pi/2, 2\pi/3)$. □

CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

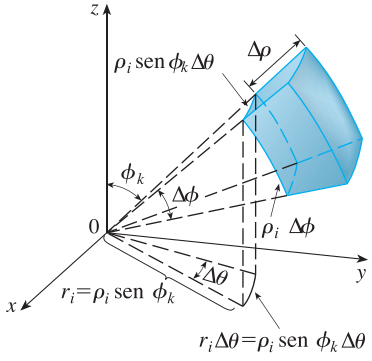


FIGURA 7

Nesse sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

onde $a \geqslant 0$, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ e $d - c \leqslant \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$. A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i\Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \operatorname{sen}\phi_k$ e ângulo $\Delta\theta$). Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} = (\Delta\rho)(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio (Exercício 45), que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

onde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ é algum ponto do interior de E_{ijk}. Sejam $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ as coordenadas retangulares desse ponto. Então

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \operatorname{sen}\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k)\,\tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

Mas essa soma é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi$$

Consequentemente, chegamos à seguinte **fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas**:

3 $$\iiint_E f(x,y,z)dV$$
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$

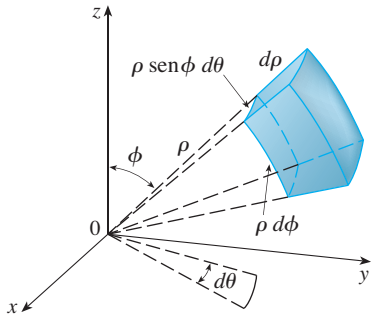


FIGURA 8
Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

utilizamos os limites de integração apropriados e substituindo dV por $\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$. Isso é ilustrado na Figura 8.

Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que (3), exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta,\phi)$ e $g_2(\theta,\phi)$.

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam a fronteira da região de integração.

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

SOLUÇÃO Como a fronteira de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\}$$

Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Então, de (3) temos

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho$$

$$= \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}(2\pi)\Big[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\Big]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e-1)$$

□

OBS. Seria extremamente complicado calcular a integral do Exemplo 3 sem coordenadas esféricas. Com coordenadas retangulares, a integral iterada seria

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz\,dy\,dx$$

EXEMPLO 4 Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (veja a Figura 9).

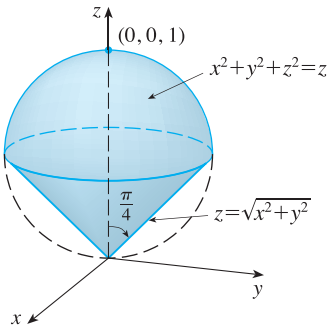


FIGURA 9

SOLUÇÃO Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho\cos\phi \qquad \text{ou} \qquad \rho = \cos\phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\,\text{sen}^2\phi\,\cos^2\theta + \rho^2\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}^2\theta} = \rho\,\text{sen}\,\phi$$

Isto dá $\text{sen}\,\phi = \cos\phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto, a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi\}$$

A Figura 11 mostra como E é varrido se integramos primeiro em relação a ρ, depois em relação a ϕ, e então em relação a θ. O volume de E é

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \text{sen}\,\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \text{sen}\,\phi\cos^3\phi\,d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

■ A Figura 10 mostra uma visão (desta vez, utilizando o MAPLE) do sólido do Exemplo 4.

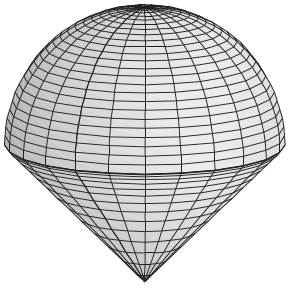


FIGURA 10

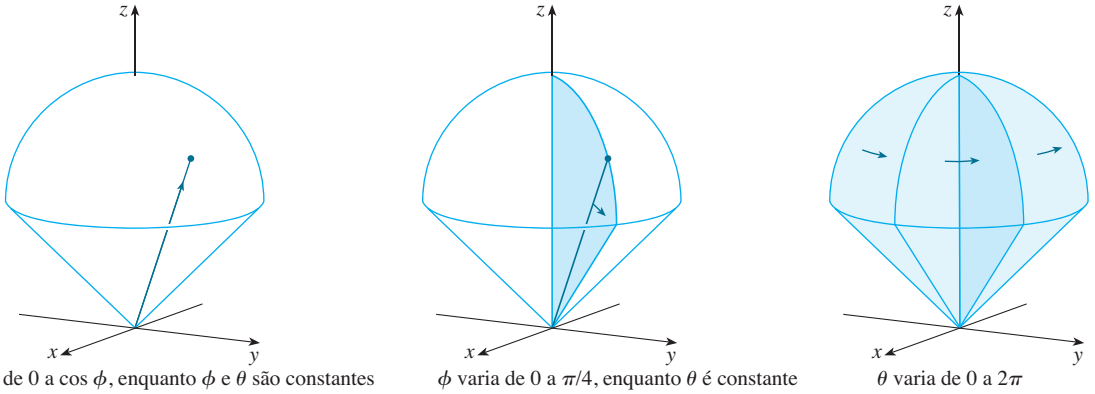


FIGURA 11 ρ varia de 0 a $\cos\phi$, enquanto ϕ e θ são constantes — ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante — θ varia de 0 a 2π □

15.8 EXERCÍCIOS

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(1, 0, 0)$ (b) $(2, \pi/3, \pi/4)$

2. (a) $(5, \pi, \pi/2)$ (b) $(4, 3\pi/4, \pi/3)$

3-4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (b) $(0, -1, -1)$

4. (a) $(1, 1, \sqrt{2})$ (b) $(-\sqrt{3}, -3, -2)$

5-6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7-8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ **8.** $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

9-10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$

10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

11-14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $\rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

12. $2 \leq \rho \leq 3, \quad \pi/2 \leq \phi \leq \pi$

13. $\rho \leq 1, \quad 3\pi/4 \leq \phi \leq \pi$

14. $\rho \leq 2, \quad \rho \leq \operatorname{cossec}\phi$

15. Um sólido está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

16. (a) Encontre desigualdades que descrevam uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas que escolheu.
(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.

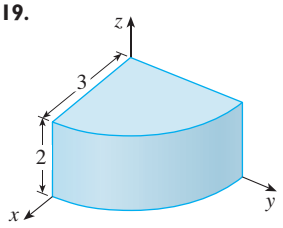
17-18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

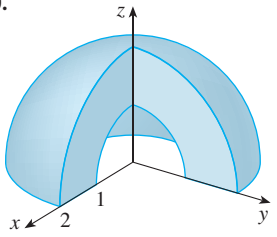
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

19-20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

19.



20.



21-34 Utilize coordenadas esféricas.

21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$.

23. Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

24. Calcule $\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dV$, onde E é delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante.

25. Calcule $\iiint_E x^2 \, dV$, onde E é limitado pelo plano xz e pelos hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.

26. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E está entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leq a$ que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro.

29. (a) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4 \cos\phi$.
(b) Encontre o centroide do sólido na parte (a).

30. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. Determine o centroide do sólido do Exercício 25.

32. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
(a) Determine a massa de H.
(b) Determine o centro de massa de H.
(c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.

33. (a) Determine o centroide do hemisfério sólido homogêneo de raio a.

(b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação a um diâmetro de sua base.

34. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

35-38 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

35. Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

SCA **37.** Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está está acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja as Páginas de Referência) ou um sistema de computação algébrica para calcular a integral.

38. (a) Determine o volume delimitado pelo toro $\rho = \operatorname{sen}\phi$.

(b) Utilize um computador para desenhar o toro.

39-40 Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

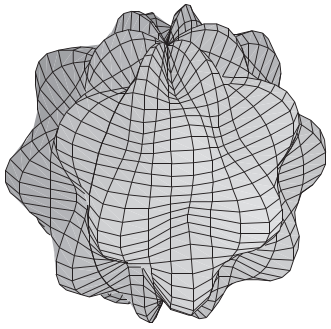
39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

41. Use uma ferramenta gráfica para desenhar um silo que consista em um cilindro de raio 3 e altura 10 com um hemisfério no topo.

42. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas com as coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como a seguir. Tomamos a origem como o centro da Terra e o eixo z passando pelo polo norte. O eixo x positivo passa pelo ponto onde o meridiano principal (o meridiano por Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Então a latitude de P é $\alpha = 90^\circ - \phi^\circ$ e a longitude é $\beta = 360^\circ - \theta^\circ$. Encontre a distância sobre um círculo máximo de Los Angeles (lat. 34,06° N, long. 118,25° W) a Montreal (lat. 45,50° N, long. 73,60° W). Tome o raio da Terra como 6 730 km. (Um *círculo máximo* é o círculo de intersecção de uma esfera com um plano que passe pelo centro da esfera.)

SCA **43.** As superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\phi$ têm sido usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



44. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

45. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r \operatorname{cotg} \phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ e $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

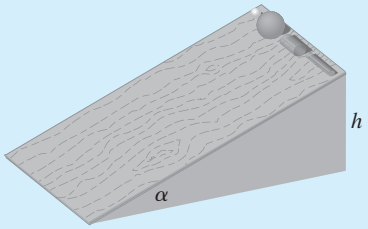
onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROJETO APLICADO

CORRIDA NA RAMPA

Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de *squash*), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolem em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará embaixo mais depressa? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão, consideramos a bola ou o cilindro com massa m, raio r e momento de inércia I (em relação ao eixo de rotação). Se a queda vertical for h, a energia potencial no topo será mgh. Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular ω, de modo que $v = \omega r$. A energia cinética na base da rampa é



composta por duas partes: $\frac{1}{2}mv^2$ da translação (movimento de descida da rampa) e $\frac{1}{2}I\omega^2$ da rotação. Se supusermos que a perda de energia por atrito na descida é desprezível, então a lei de conservação de energia nos dá:

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

1. Mostre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \qquad \text{onde} \quad I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Se $y(t)$ é a distância vertical percorrida até o instante t, então o mesmo raciocínio utilizado no Problema 1 mostra que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ em qualquer instante t. Utilize esse resultado para mostrar que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}}\ (\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{y}$$

onde α é o ângulo de inclinação da rampa.

3. Resolvendo a equação diferencial do Problema 2, mostre que o tempo total de percurso é

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g\ \operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Isso mostra que o objeto com menor valor de I^* ganha a corrida.

4. Mostre que $I^* = \frac{1}{2}$ para o cilindro sólido e $I^* = 1$ para o cilindro oco.

5. Calcule I^* para a bola parcialmente oca com raio interior a e raio externo r. Expresse sua resposta em termos do coeficiente $b = a/r$. O que acontece quando $a \to 0$ e quando $a \to r$?

6. Mostre que $I^* = \frac{2}{5}$ para a bola sólida e $I^* = \frac{2}{3}$ para a bola oca. Assim, os objetos terminam a corrida na seguinte ordem: bola sólida, cilindro sólido, bola oca, cilindro oco.

15.9 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Em cálculo unidimensional, frequentemente usamos uma mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de x e u, podemos escrever a Regra da Substituição (5.5.6, dada no Capítulo 5, no Volume I) como

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$. Outro modo de escrever a Fórmula 1 é o seguinte:

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para coordenadas polares. As novas variáveis r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\ \operatorname{sen}\ \theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis (15.4.2) pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy.

De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

$$\boxed{3} \qquad x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Em geral, consideramos T uma **transformação C^1**, o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Se $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, então o ponto (x_1, y_1) é denominado **imagem** do ponto (u_1, v_1). Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é **injetora**. A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação T em uma região S do plano uv. T transforma S em uma região R no plano xy denominada **imagem de S**, constituída das imagens de todos os pontos de S.

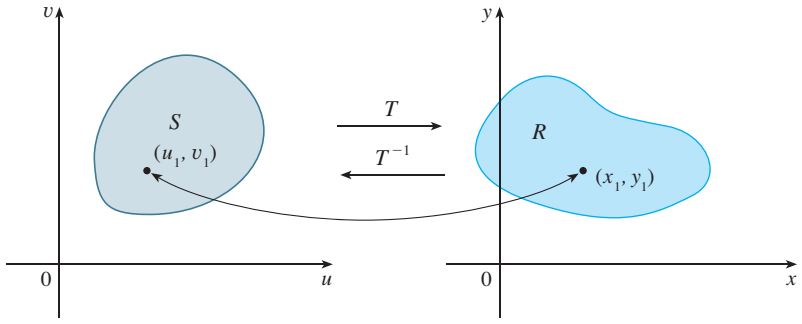


FIGURA 1

Se T é injetora, então existe uma **transformação inversa** T^{-1} do plano xy para o plano uv e pode ser possível inverter as Equações 3 para escrever u e v em termos de x e y:

$$u = G(x, y) \qquad v = H(x, y)$$

EXEMPLO 1 Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

SOLUÇÃO A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S. O primeiro lado, S_1, é dado por $v = 0$ $(0 \leq u \leq 1)$ (veja a Figura 2). Das equações dadas, temos $x = u^2$, $y = 0$, e portanto $0 \leq x \leq 1$. Então, S_1 é levado no segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 0)$ no plano xy. O segundo lado, S_2, é $u = 1$ $(0 \leq v \leq 1)$ e, substituindo $u = 1$ nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

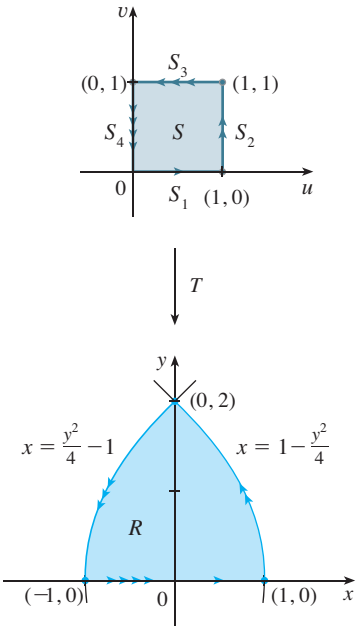


FIGURA 2

Eliminando v, obtemos

$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{4}$$

que é parte de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dado por $v = 1$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, cuja imagem é o arco parabólico

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0 \tag{5}$$

Finalmente, S_4 é dado por $u = 0$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$, cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja, $-1 \leqslant x \leqslant 0$ (Observe que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário.) A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas pelas Equações 4 e 5. □

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Comecemos com um retângulo pequeno S no plano uv cujo canto inferior esquerdo é o ponto (u_0, v_0) e cujas dimensões são Δu e Δv (veja a Figura 3).

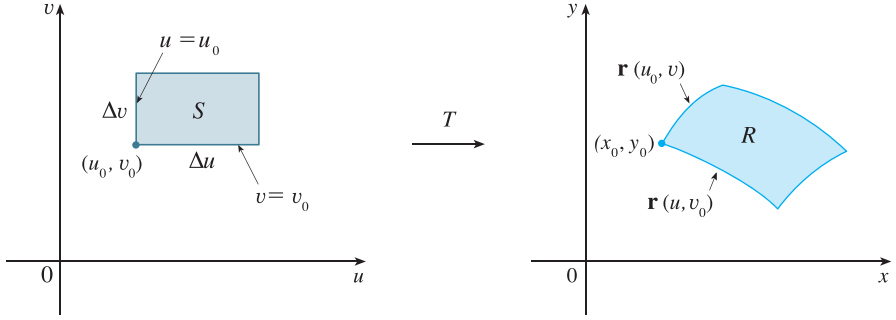


FIGURA 3

A imagem de S é a região R do plano xy, sendo que um dos pontos da fronteira é $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. O vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\mathbf{i} + h(u, v)\mathbf{j}$$

é o vetor posição da imagem do ponto (u, v). A equação do lado inferior de S é $v = v_0$, cuja curva imagem é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

Da mesma forma, o vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem do lado esquerdo de S $(u = u_0)$ é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados na Figura 4. Mas

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

e então,

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u\,\mathbf{r}_u$$

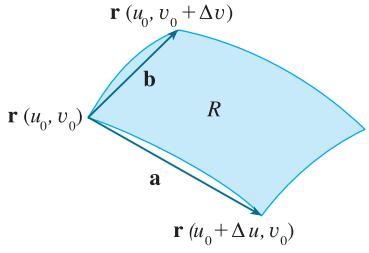


FIGURA 4

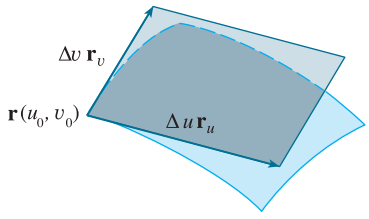


FIGURA 5

Da mesma forma $\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v\, \mathbf{r}_v$

Isso significa que podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ e $\Delta v\, \mathbf{r}_v$ (veja a Figura 5). Portanto, podemos aproximar a área de R pela área desse paralelogramo, que da Seção 12.4, é

$$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v \tag{6}$$

O jacobiano recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Apesar de o matemático francês Cauchy ter sido o primeiro a usar estes determinantes especiais, envolvendo derivadas parciais, Jacobi usou-os para desenvolver um método para cálculo de integrais múltiplas.

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial:

7 DEFINIÇÃO O **jacobiano** da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Com essa notação, podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área ΔA de R:

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v \tag{8}$$

onde o jacobiano é calculado em (u_0, v_0).

Em seguida, dividimos a região S do plano uv em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij} (veja a Figura 6).

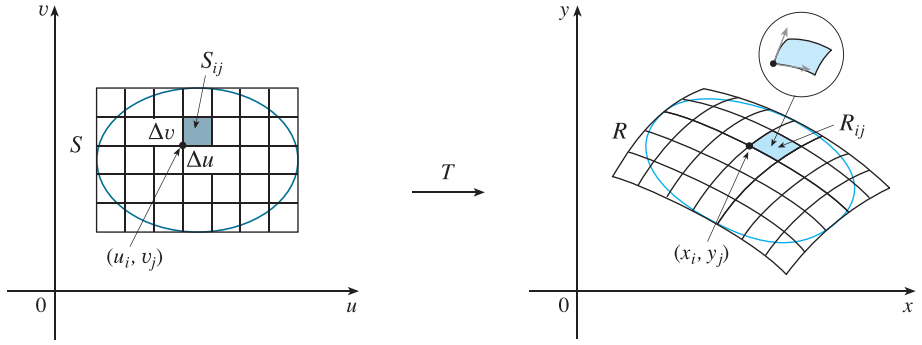


FIGURA 6

Aplicando a aproximação (8) a cada R_{ij}, aproximamos a integral dupla de f sobre R, como segue:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j). Observe que a soma dupla é a soma de Riemann para a integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

A argumentação precedente sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro (Uma demonstração completa é dada em livros de cálculo avançado.)

9 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM UMA INTEGRAL DUPLA Suponha que T seja uma transformação C^1 cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy. Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S. Então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

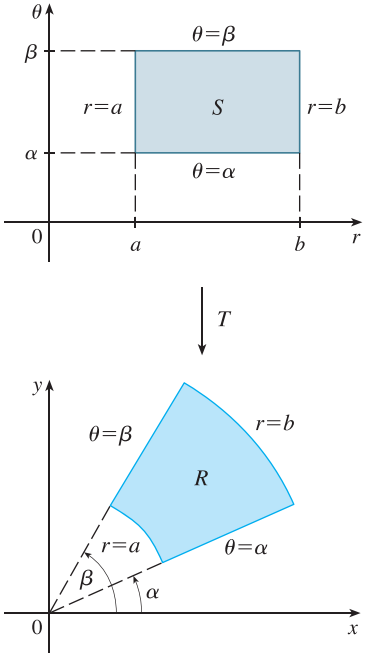


FIGURA 7
Transformação para as coordenadas polares

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Observe a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du, temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja, $|\,\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial deste. Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos\theta \qquad y = h(r, \theta) = r \operatorname{sen}\theta$$

e a geometria da transformação é mostrada na Figura 7. T transforma um retângulo comum do plano $r\theta$ em um retângulo polar do plano xy. O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r \cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r > 0$$

Assim, o Teorema 9 nos leva a

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

que é o mesmo que a Fórmula 15.4.2.

EXEMPLO 2 Utilize a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y\, dA$, onde R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geqslant 0$.

SOLUÇÃO A região R está mostrada na Figura 2, na página 963. No Exemplo 1, descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R. Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Portanto, pelo Teorema 9,

$$\iint_R y\,dA = \iint_S 2uv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA = \int_0^1\int_0^1 (2uv)4(u^2+v^2)\,du\,dv$$

$$= 8\int_0^1\int_0^1 (u^3v+uv^3)\,du\,dv = 8\int_0^1 \left[\tfrac{1}{4}u^4v+\tfrac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v+4v^3) = \left[v^2+v^4\right]_0^1 = 2 \qquad \square$$

OBS. O Exemplo 2 não foi um problema muito difícil de resolver porque já conhecíamos uma mudança de variáveis apropriada. Se não a conhecêssemos de antemão, então o primeiro passo seria descobrir uma mudança de variáveis apropriada. Se $f(x, y)$ é difícil de integrar, então a forma de $f(x, y)$ pode sugerir uma transformação. Se a região de integração R é complicada, então a transformação deve ser escolhida para que a região S correspondente no plano uv tenha uma descrição mais conveniente.

EXEMPLO 3 Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ e $(0, -1)$.

SOLUÇÃO Como não é fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, vamos fazer a mudança de variáveis sugerida pela forma da função:

$$u = x + y \qquad v = x - y \tag{10}$$

Essas equações definem a transformação T^{-1} do plano xy para o plano uv. O Teorema 9 diz respeito à transformação T do plano uv para o plano xy. Esta é obtida isolando-se x e y nas Equações 10:

$$x = \tfrac{1}{2}(u+v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u-v) \tag{11}$$

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}$$

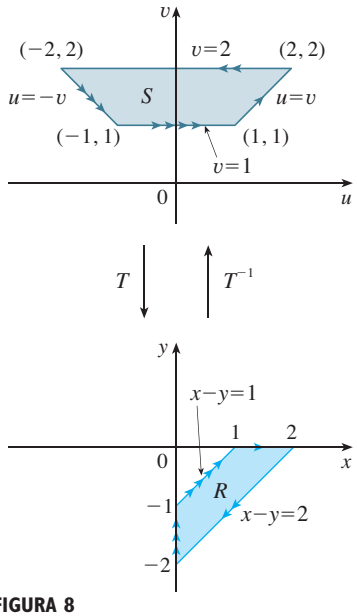


FIGURA 8

Para determinar a região S do plano uv correspondente a R, observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

e, das Equações 10 ou 11, as retas imagem do plano uv são

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$$

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices $(1, 1), (2, 2), (-2, 2)$ e $(-1, 1)$ mostrada na Figura 8. Como

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant v \leqslant 2, -v \leqslant u \leqslant v\}$$

o Teorema 9 leva a

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA = \iint_S e^{u/v} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\, dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{u/v}\right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1})v\, dv = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1})$$ □

INTEGRAIS TRIPLAS

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja T a transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$$

O **jacobiano** de T é o seguinte determinante 3×3:

12
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sob hipóteses semelhantes àquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

13
$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw$$

EXEMPLO 4 Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} - \rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi\,(-\rho^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\operatorname{sen}^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\cos^2\theta)$$

$$-\rho\operatorname{sen}\phi\,(\rho\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= -\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos^2\phi - \rho^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\phi = -\rho^2\operatorname{sen}\phi$$

Como $0 \leq \phi \leq \pi$, temos $\operatorname{sen}\phi \geq 0$. Portanto,

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right| = |-\rho^2\operatorname{sen}\phi| = \rho^2\operatorname{sen}\phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

que é equivalente à Fórmula 15.8.3. □

15.9 EXERCÍCIOS

1-6 Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = 5u - v, \quad y = u + 3v$

2. $x = uv, \quad y = u/v$

3. $x = \dfrac{u}{u+v}, \quad y = \dfrac{v}{u-v}$

4. $x = \alpha \operatorname{sen}\beta, \quad y = \alpha\cos\beta$

5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw$

6. $x = v + w^2, \quad y = w + u^2, \quad z = u + v^2$

7-10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$;
$x = 2u + 3v, y = u - v$

8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$;
$x = v, y = u(1 + v^2)$

9. S é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$;
$x = u^2, y = v$

10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leq 1$; $x = au, y = bv$

11-16 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

11. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, onde R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$; $x = 2u + v, \quad y = u + 2v$

12. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, onde R é o paralelogramo com vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ e $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

13. $\iint_R x^2\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$;
$x = 2u, \quad y = 3v$

14. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, onde R é a região delimitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}\, u - \sqrt{2/3}\, v, \quad y = \sqrt{2}\, u + \sqrt{2/3}\, v$

15. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1, \quad xy = 3$;
$x = u/v, \quad y = v$

16. $\iint_R y^2\, dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1, xy = 2$, $xy^2 = 1, xy^2 = 2$; $u = xy, \quad v = xy^2$.
Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R.

17. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido delimitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv, z = cw$.
(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6\,378$ km e $c = 6\,356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.

18. Se o sólido do Exercício 17(a) tiver densidade constante k, encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z.

19-23 Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

19. $\iint_R \dfrac{x - 2y}{3x - y}\, dA$, onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x - 2y = 0, x - 2y = 4, 3x - y = 1$ e $3x - y = 8$

20. $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dA$, onde R é o retângulo delimitado pelas retas $x - y = 0, x - y = 2, x + y = 0$ e $x + y = 3$

21. $\iint_R \cos\left(\dfrac{y - x}{y + x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ e $(0, 1)$

22. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

23. $\iint_R e^{x+y} dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$

24. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 uf(u)\, du$$

15 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Suponha que f seja uma função contínua definida sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
(a) Escreva uma expressão para a soma dupla de Riemann de f. Se $f(x, y) \geqslant 0$, o que essa soma representa?
(b) Escreva a definição de $\iint_R f(x, y)\, dA$ como um limite.
(c) Qual é a interpretação geométrica de $\iint_R f(x, y)\, dA$ se $f(x, y) \geqslant 0$? E se f tiver valores positivos e valores negativos?
(d) Como calcular $\iint_R f(x, y)\, dA$?
(e) O que a Regra do Ponto Médio para integrais duplas diz?
(f) Escreva uma expressão para o valor médio de f.

2. (a) Como você define $\iint_D f(x, y)\, dA$ se D é uma região limitada que não é retangular?
(b) O que é uma região do tipo I? Como calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$ se D for uma região do tipo I?
(c) O que é uma região do tipo II? Como calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$ se D for uma região do tipo II?
(d) Quais as propriedades de uma integral dupla?

3. Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral dupla em coordenadas polares? Por que você faria isso?

4. Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade $\rho(x, y)$, escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.
(a) A massa
(b) Os momentos em relação aos eixos
(c) O centro de massa
(d) Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem

5. Seja f uma função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y.
(a) Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d.
(b) Que propriedades f possui?
(c) Quais são os valores esperados de X e Y?

6. (a) Escreva a definição da integral tripla de f sobre uma caixa retangular B.
(b) Como calcular $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?
(c) Como definir $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?
(d) O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região deste tipo?
(e) O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região deste tipo?
(f) O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região deste tipo?

7. Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade $\rho(x, y, z)$. Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.
(a) A massa
(b) Os momentos em relação aos planos coordenados
(c) As coordenadas do centro de massa
(d) Os momentos de inércia em relação aos eixos

8. (a) Como, em uma integral tripla, mudar de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas?
(b) Como, em uma integral tripla, mudar de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas?
(c) Em que situações você deve mudar para coordenadas cilíndricas ou esféricas?

9. (a) Se uma transformação T é dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, qual é o jacobiano de T?
(b) Como você muda de variáveis em uma integral dupla?
(c) Como você muda de variáveis em uma integral tripla?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\int_{-1}^{2} \int_{0}^{6} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dx\, dy = \int_{0}^{6} \int_{-1}^{2} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dy\, dx$

2. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \sqrt{x + y^2}\, dy\, dx = \int_{0}^{x} \int_{0}^{1} \sqrt{x + y^2}\, dx\, dy$

3. $\int_{1}^{2} \int_{3}^{4} x^2 e^y\, dy\, dx = \int_{1}^{2} x^2\, dx \int_{3}^{4} e^y dy$

4. $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y\, dx\, dy = 0$

5. Se D é um disco dado por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, então

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA = \tfrac{16}{3}\pi$$

6. $\int_{1}^{4} \int_{0}^{1} (x^2 + \sqrt{y}) \operatorname{sen}(x^2 y^2)\, dx\, dy \leqslant 9$

7. A integral

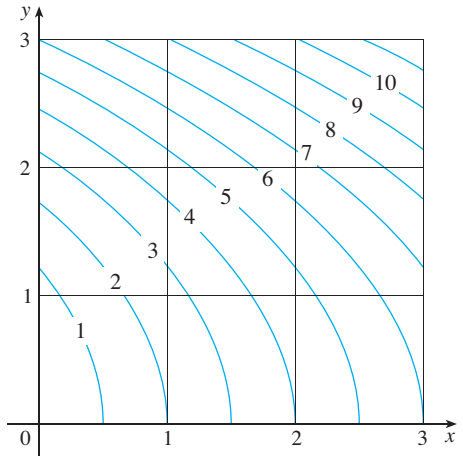
$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{r}^{2} dz\, dr\, d\theta$$

representa o volume delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$.

8. A integral $\iiint_E kr^3\, dz\, dr\, d\theta$ representa o momento de inércia em relação ao eixo z de um sólido E com densidade constante k.

EXERCÍCIOS

1. A figura mostra um mapa de contorno de uma função f sobre o quadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Utilize uma soma de Riemann de nove termos para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$. Tome os pontos amostrais como os cantos superiores direitos dos quadrados.



2. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a integral do Exercício 1.

3-8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^2 \int_0^2 (y + 2xe^y)\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy} dx\, dy$

5. $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2)\, dy\, dx$

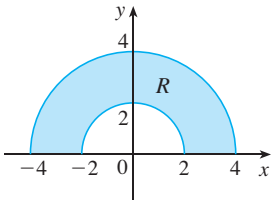
6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2\, dy\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x\, dz\, dy\, dx$

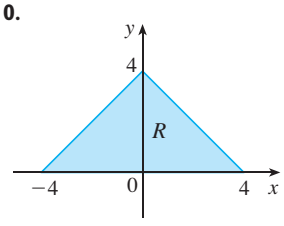
8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz\, dz\, dx\, dy$

9-10 Escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde R é a região mostrada e f é uma função arbitrária contínua em R.

9.



10.



11. Descreva a região cuja área é dada pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

12. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

e calcule essa integral.

13-14 Calcule a integral iterada, primeiro invertendo a ordem de integração.

13. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\, dy\, dx$

14. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}\, dx\, dy$

15-28 Calcule o valor da integral múltipla.

15. $\iint_R ye^{xy}\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$

16. $\iint_D xy\, dA$, onde $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y + 2\}$

17. $\iint_D \frac{y}{1 + x^2}\, dA$, onde D é limitada por $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$

18. $\iint_D \frac{y}{1 + x^2}\, dA$, onde D é a região triangular de vértices $(0, 0), (1, 1)$ e $(0, 1)$

19. $\iint_D y\, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 8 - y^2$

20. $\iint_D y\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole $xy = 1$ e da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 2$

21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}\, x$ e pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$

22. $\iint_D x\, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$

23. $\iiint_E xy\, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}$

24. $\iiint_T xy\, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices em $(0, 0, 0), \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

25. $\iiint_E y^2 z^2\, dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$

26. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelos planos $y = 0, z = 0$, $x + y = 2$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante

27. $\iiint_E yz\, dV$, onde E está acima do plano $z = 0$, abaixo do plano $z = y$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

28. $\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, onde H é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano xy

29-34 Determine o volume do sólido dado.

29. Abaixo do paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$

30. Abaixo da superfície $z = x^2 y$ e acima do triângulo do plano xy com vértices $(1, 0), (2, 1)$ e $(4, 0)$

31. O tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$

32. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$

33. Uma das cunhas obtidas pelo corte do cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ pelos planos $z = 0$ e $z = mx$

34. Acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

---

35. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola $x = 1 - y^2$ e pelos eixos coordenados, com função densidade $\rho(x, y) = y$.
(a) Determine a massa da lâmina.
(b) Determine o centro de massa.
(c) Determine os momentos de inércia e os raios de giração em relação aos eixos x e y.

36. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ que está no primeiro quadrante.
(a) Determine o centroide da lâmina.
(b) Determine o centro de massa da lâmina se a função densidade for $\rho(x, y) = xy^2$.

37. Determine o centroide de um cone circular reto com altura h e raio da base a. (Coloque o cone de forma que a base esteja sobre o plano xy com o centro na origem e seu eixo esteja sobre o eixo z.)

38. Encontre o momento de inércia do cone do Exercício 37 em relação a seu eixo (o eixo z).

39. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx.$$

40. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$$

41. Se D é uma região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = e^x$, determine o valor aproximado da integral $\iint_D y^2\, dA$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção das curvas.)

42. Determine o centro de massa do tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ e função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

43. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leq 2, Y \geq 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leq 1)$.

44. Uma luminária tem três lâmpadas, cada uma com vida média de 800 horas. Se modelarmos a probabilidade de falha das lâmpadas por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade das três lâmpadas virem a falhar dentro de um intervalo de 1 000 horas.

45. Reescreva a integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

como uma integral iterada na ordem $dx\, dy\, dz$.

46. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

47. Utilize a transformação $u = x - y$, $v = x + y$ para calcular $\iint_R (x - y)/(x + y)\, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$.

48. Utilize a transformação $x = u^2, y = v^2, z = w^2$ para determinar o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

49. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e uma transformação adequada para calcular $\iint_R xy\, dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(1, -1)$.

50. O **Teorema do Valor Médio para as integrais duplas** diz que, se f é uma função contínua em uma região plana D do tipo I ou do tipo II, então existe um ponto (x_0, y_0) em D, tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)\, A(D)$$

Utilize o Teorema do Valor Extremo (14.7.8) e a Propriedade 15.3.11 das integrais para demonstrar esse teorema. (Use a demonstração da versão unidimensional da Seção 6.5, no Volume I, como guia.)

51. Suponha que f seja contínua sobre um disco que contém o ponto (a, b). Seja D_r o disco fechado com centro em (a, b) e raio r. Utilize o Teorema do Valor Médio para as integrais duplas (veja o Exercício 50) para mostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

52. (a) Calcule $\iint_D \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}}\, dA$, onde n é um inteiro e D é a região limitada pelos círculos com centro na origem e raios r e R, $0 < r < R$.
(b) Para que valores de n a integral da parte (a) tem limite quando $r \to 0^+$?
(c) Determine $\iiint_E \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}}\, dV$, onde E é a região limitada pelas esferas com centro na origem e raios r e R, $0 < r < R$.
(d) Para que valores de n a integral da parte (c) tem limite quando $r \to 0^+$?

1. Se $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro contido em x, calcule a integral

$$\iint_R \lfloor x + y \rfloor \, dA$$

onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$.

2. Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2, y^2\}} dy \, dx$$

onde $\max\{x^2, y^2\}$ significa o maior dos números x^2 e y^2.

3. Determine o valor médio da função $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2) \, dt$ no intervalo $[0, 1]$.

4. Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores constantes, $\mathbf{r}$ é o vetor de posição $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e E é dado pelas inequações $0 \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \leq \alpha$, $0 \leq \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \leq \beta$, $0 \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leq \gamma$, mostre que

$$\iiint_E (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

5. A integral dupla $\int_0^1 \int_0^1 \dfrac{1}{1 - xy} \, dx \, dy$ é uma integral imprópria e pode ser definida como o limite da integral dupla sobre o retângulo $[0, t] \times [0, t]$ quando $t \to 1^-$. Mas, se expandirmos o integrando como uma série geométrica, podemos exprimir a integral como a soma de uma série infinita. Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} \, dx \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler determinou o valor exato da soma da série do Problema 5. Em 1736, ele demonstrou que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Nesse problema, pedimos que você demonstre esse fato calculando a integral dupla do Problema 5. Comece fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

Isso corresponde a uma rotação em torno da origem de um ângulo de $\pi/4$. Você precisará esboçar a região correspondente no plano uv. [*Sugestão*: se, calculando a integral, você encontrar a expressão $(1 - \operatorname{sen}\theta)/\cos\theta$ ou $(\cos\theta)/(1 + \operatorname{sen}\theta)$, utilize a identidade $\cos\theta = \operatorname{sen}((\pi/2) - \theta)$ e a identidade correspondente para $\operatorname{sen}\theta$.]

7. (a) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz} \, dx \, dy \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Ninguém jamais foi capaz de determinar o valor exato da soma dessa série.)

(b) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz} \, dx \, dy \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use essa equação para calcular a integral tripla com precisão de duas casas decimais.

8. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

primeiro escrevendo a integral como uma integral iterada.

9. (a) Mostre que quando a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

é escrita em coordenadas cilíndricas, ela se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(b) Mostre que quando a equação de Laplace é escrita em coordenadas esféricas ela se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{cotg} \phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

10. (a) Uma lâmina tem densidade constante ρ e o formato de um disco com centro na origem e raio R. Utilize a Lei de Newton da Gravitação (veja a Seção 13.4) para mostrar que a intensidade da força de atração que a lâmina exerce sobre um corpo com massa m colocado em um ponto $(0, 0, d)$ no eixo z positivo é

$$F = 2\pi G m \rho d \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right)$$

[*Sugestão*: divida o disco como na Figura 4 da Seção 15.4 e calcule primeiro a componente vertical da força exercida pelo sub-retângulo polar R_{ij}.]

(b) Mostre que a intensidade da força de atração da lâmina com densidade ρ que ocupa o plano inteiro sobre um objeto de massa m localizado à distância d do plano é

$$F = 2\pi G m \rho$$

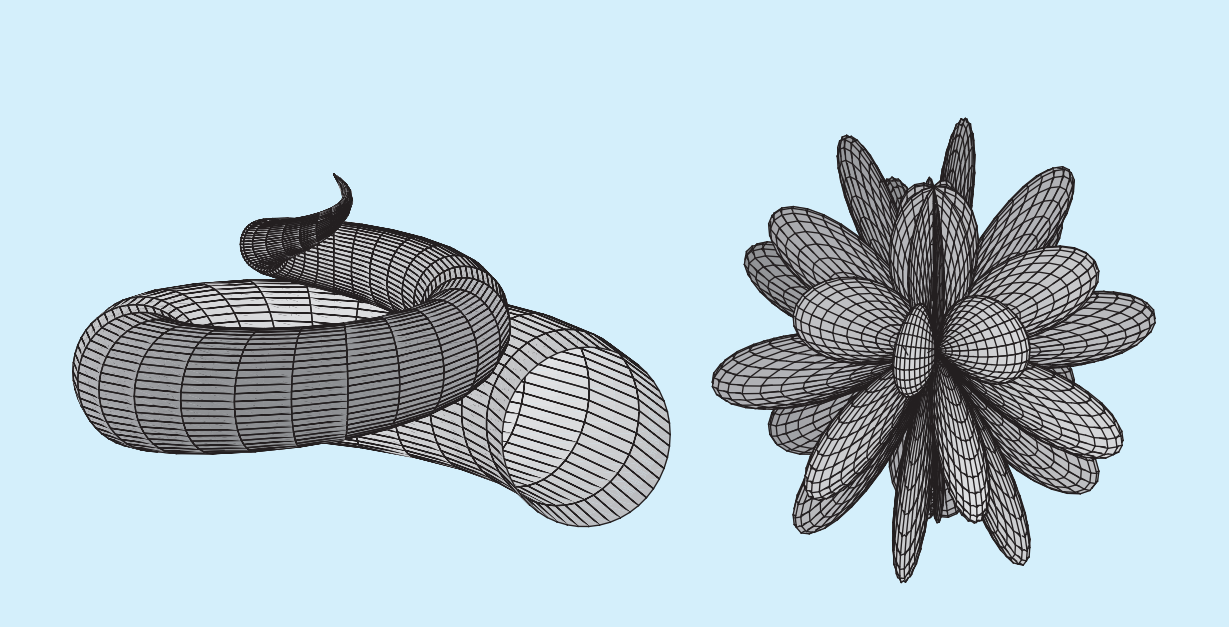
Observe que essa expressão não depende de d.

11. Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)\, dt\, dz\, dy = \tfrac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 f(t)\, dt$$

16

CÁLCULO VETORIAL



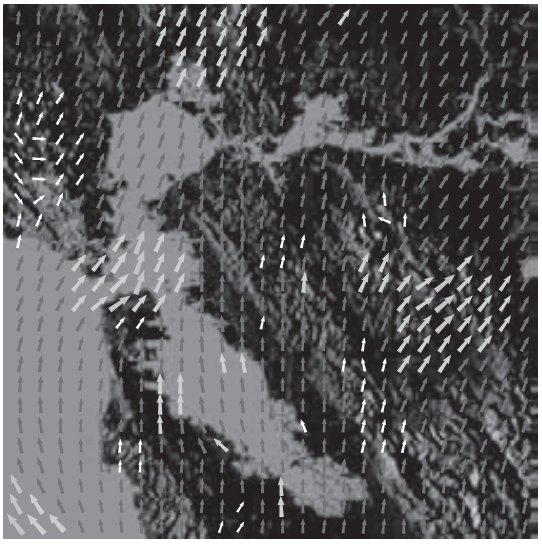
As equações paramétricas nos permitem traçar superfícies com formas estranhas e belas.

Neste capítulo estudaremos o cálculo de campos vetoriais (esses campos são funções que associam vetores a pontos do espaço). Em particular, definiremos a integral de linha (que pode ser utilizada para determinar o trabalho efetuado por um campo de força agindo sobre um objeto que se move ao longo de uma curva) e definiremos a integral de superfície (que pode ser usada para determinar a vazão de um fluido através de uma superfície). As conexões entre esses novos tipos de integrais e as integrais unidimensionais, duplas e triplas que já vimos são dadas por versões em maior dimensão do Teorema Fundamental do Cálculo, conhecidas como Teorema de Green, Teorema de Stokes e Teorema do Divergente.

Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a velocidade escalar, a direção e o sentido do vento em pontos a 10 m da superfície, na área da baía de São Francisco (Observe que os padrões de vento em dias consecutivos são bem diferentes). Associado a cada ponto do ar, podemos imaginar um vetor velocidade do vento. Este é um exemplo de *campo vetorial de velocidade*.



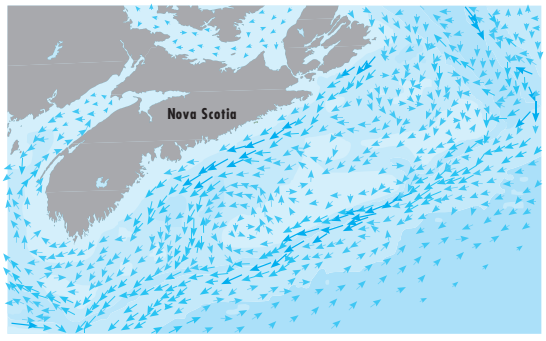
(a) 20 de fevereiro de 2007, 12 horas



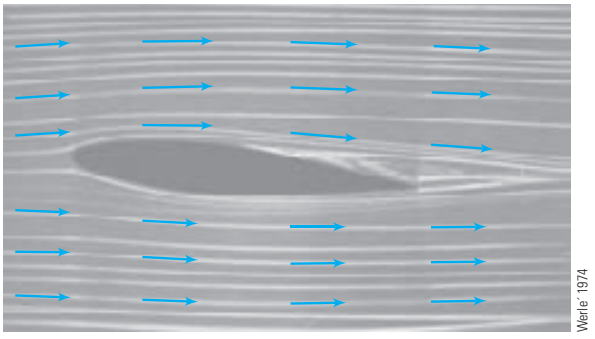
(b) 21 de fevereiro de 2007, 14 horas

FIGURA 1 Campos vetoriais de velocidade mostrando aspectos do vento na baía de São Francisco

Outros exemplos de campos vetoriais de velocidade estão ilustrados na Figura 2: correntes oceânicas e o escoamento por um aerofólio.



(a) Correntes oceânicas em frente à costa de Nova Scotia



(b) Escoamento do ar por um aerofólio inclinado

FIGURA 2 Campos vetoriais velocidade

Outro tipo de campo vetorial, chamado *campo de força*, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional que examinaremos no Exemplo 4.

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

1 DEFINIÇÃO Seja D um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

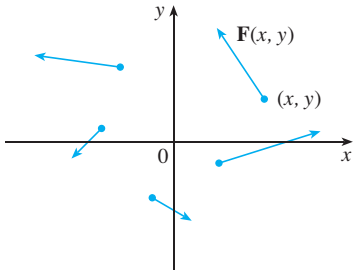


FIGURA 3
Campo vetorial no $\mathbb{R}^2$

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores $\mathbf{F}(x, y)$, começando no ponto (x, y). É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y), mas podemos visualizar $\mathbf{F}$ fazendo isso para alguns pontos representativos em D, como na Figura 3. Como $\mathbf{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q, da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

ou, de forma mais compacta, $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$

Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distingui-los dos campos vetoriais.

2 DEFINIÇÃO Seja E um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

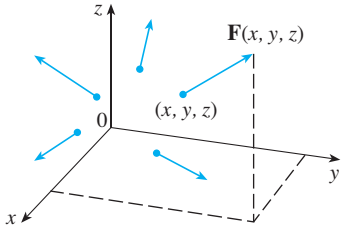


FIGURA 4
Campo vetorial no $\mathbb{R}^3$

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ está ilustrado na Figura 4. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Como nas funções vetoriais na Seção 13.1, podemos definir a continuidade dos campos vetoriais e mostrar que $\mathbf{F}$ será contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R forem contínuas.

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ e escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então, $\mathbf{F}$ se torna uma função que associa um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a um vetor $\mathbf{x}$.

EXEMPLO 1 Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ desenhando alguns de seus vetores $\mathbf{F}(x, y)$, como na Figura 3.

SOLUÇÃO Como $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 5. Como $\mathbf{F}(1, 0) = -\mathbf{i}$, desenhamos o vetor $\langle -1, 0\rangle$ iniciando no ponto $(0, 1)$. Continuamos desse modo desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 5.

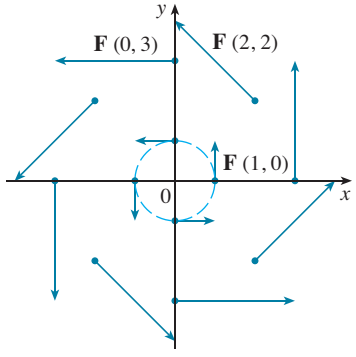


FIGURA 5
$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Na Figura 5, parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Para confirmar isso, vamos tomar o produto escalar do vetor posição $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ com o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Isso mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y\rangle$ e, portanto, tangente ao círculo com centro na origem e raio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe também que

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y^2) + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

de modo que o comprimento do vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo. □

Alguns sistemas de computação algébrica são capazes de traçar um campo vetorial em duas ou três dimensões. Eles fornecem melhor visualização do campo que o esboço feito à mão, pois o computador pode desenhar grande número de vetores representativos. A Figura 6 apresenta uma saída de computador para o campo vetorial do Exemplo 1; as Figuras 7 e 8 mostram outros dois campos vetoriais. Observe que o computador muda a escala de comprimento do vetor para que ele não fique comprido demais, embora ainda seja proporcional ao verdadeiro comprimento.

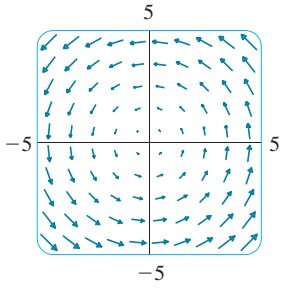


FIGURA 6
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$

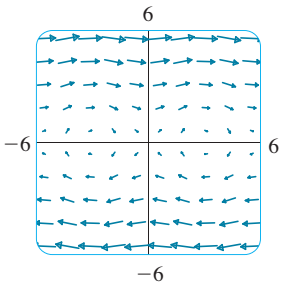


FIGURA 7
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \operatorname{sen} x\rangle$

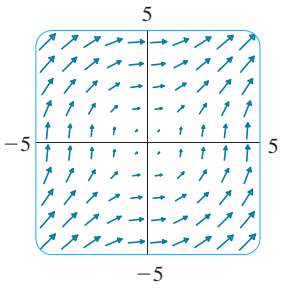


FIGURA 8
$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2)\rangle$

EXEMPLO 2 Esboce o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O desenho está mostrado na Figura 9. Observe que todos os vetores são verticais, apontando para cima, quando acima do plano xy, e para baixo, quando abaixo do plano xy. O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy.

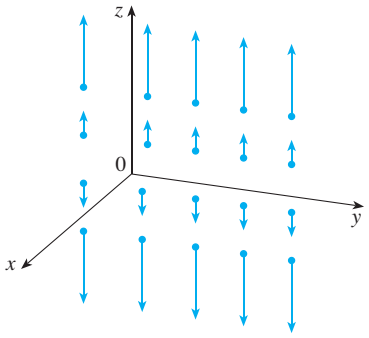


FIGURA 9
$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$

□

Somos capazes de desenhar o campo vetorial do Exemplo 2 à mão, pois ele é especialmente simples. Entretanto, é impossível desenhar à mão a maioria dos campos vetoriais tridimensionais, e portanto precisamos do auxílio de um sistema de computação algébrica. Exemplos estão ilustrados nas Figuras 10, 11 e 12. Observe que os campos vetoriais das Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes, mas todos os vetores da Figura 11 apontam na direção negativa do eixo y, porque sua componente y vale -2. Se o campo vetorial da Figura 12 representa um campo de velocidade, então uma partícula seria levada para cima em uma espiral em torno do eixo z no sentido horário, quando visto de cima.

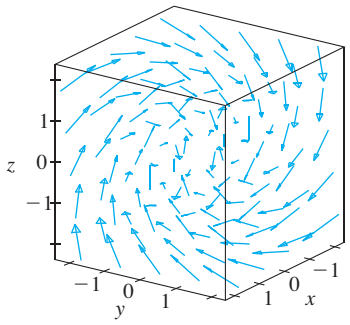


FIGURA 10

$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

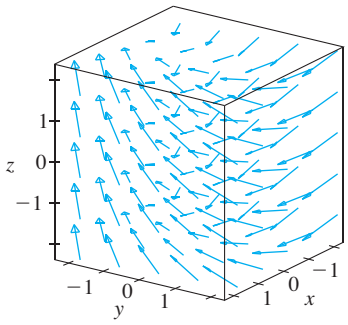


FIGURA 11

$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

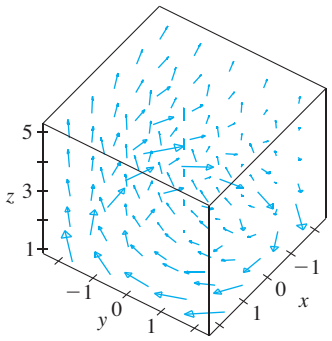


FIGURA 12

$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z}\,\mathbf{i} + \frac{x}{z}\,\mathbf{j} + \frac{z}{4}\,\mathbf{k}$

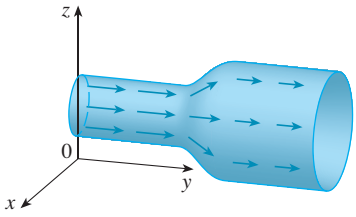


FIGURA 13
Campo de velocidade do escoamento de um fluido

EXEMPLO 3 Imagine um líquido escoando uniformemente em um cano e seja $\mathbf{V}(x, y, z)$ o vetor velocidade em um ponto (x, y, z). Então $\mathbf{V}$ associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de um certo domínio E (interior do cano). Assim, $\mathbf{V}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, chamado **campo de velocidade**. Um campo de velocidade possível está ilustrado na Figura 13. A velocidade escalar em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Campos de velocidade ocorrem em outras áreas da física. Por exemplo: o campo vetorial do Exemplo 1 pode ser usado como o campo de velocidade descrevendo a rotação no sentido anti-horário de uma roda. Vimos outros exemplos de campo de velocidade nas Figuras 1 e 2. □

EXEMPLO 4 A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional (esse é um exemplo de uma lei de um inverso do quadrado). Vamos admitir que o objeto com massa M esteja localizado na origem no $\mathbb{R}^3$ (por exemplo, M poderia ser a massa da Terra e a origem seria seu centro). Seja $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ o vetor posição do objeto com massa m. Então $r = |\mathbf{x}|$, portanto $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \qquad \boxed{3}$$

[Os físicos frequentemente utilizam a notação $\mathbf{r}$ em vez de $\mathbf{x}$ para o vetor posição, de modo que você pode encontrar a Fórmula 3 escrita como $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] A função dada pela Equação 3 é um exemplo de campo vetorial, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor [a força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] a cada ponto $\mathbf{x}$ do espaço.

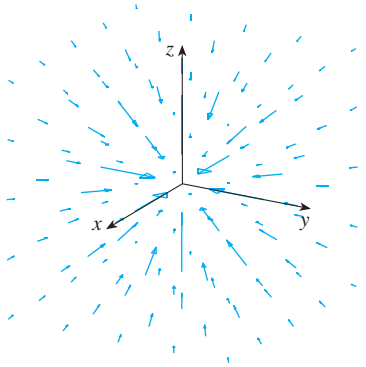


FIGURA 14
Campo de força gravitacional

A Fórmula 3 é um modo compacto de escrever o campo gravitacional, mas podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes, usando o fato de que $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

O campo gravitacional $\mathbf{F}$ está ilustrado na Figura 14. □

EXEMPLO 5 Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x} \qquad \boxed{4}$$

onde ε é uma constante (que depende da unidade usada). Para cargas de mesmo sinal, utilizamos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas opostas temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Observe a semelhança entre as Fórmulas 3 e 4. Ambas são exemplos de **campos de força**.

Em vez de considerar a força elétrica $\mathbf{F}$, os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

Então, $\mathbf{E}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ chamado **campo elétrico** de Q. □

CAMPOS GRADIENTE

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente ∇f (ou grad f) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e é denominado **campo vetorial gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

EXEMPLO 6 Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de f. Como estão relacionados?

SOLUÇÃO O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo vetorial gradiente. Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico. □

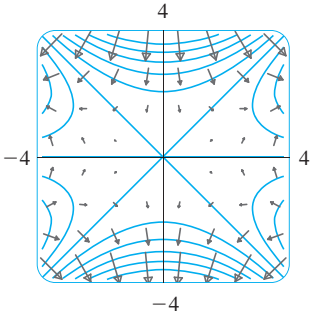


FIGURA 15

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação, f é denominada **função potencial** de $\mathbf{F}$.

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional **F** do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

$$= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{F}(x, y, z)$$

Nas Seções 16.3 e 16.5, aprenderemos a determinar se um campo vetorial é conservativo ou não.

16.1 EXERCÍCIOS

1-10 Esboce o campo vetorial **F,** desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{k}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

11-14 Faça a correspondência entre o campo vetorial **F** e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

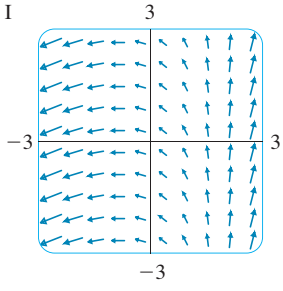
11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \operatorname{sen} y \rangle$

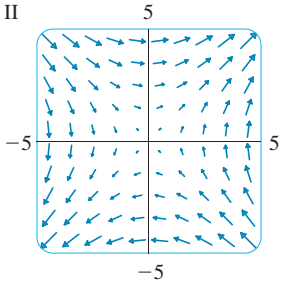
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$

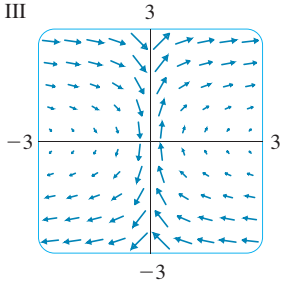
I



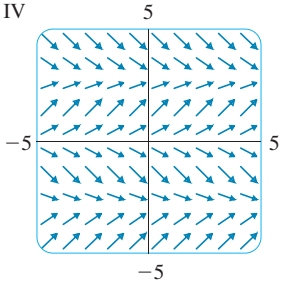
II



III



IV



15-18 Faça a correspondência entre o campo vetorial **F** em $\mathbb{R}^3$ e a figura rotulada de I-IV. Justifique suas escolhas.

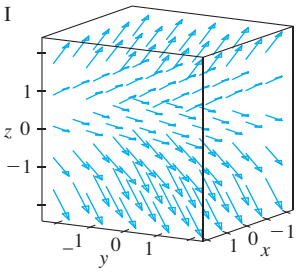
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

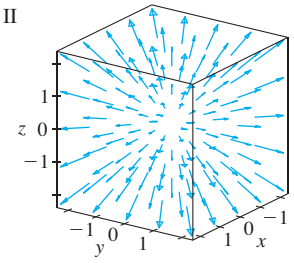
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

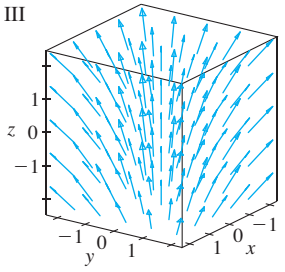
I



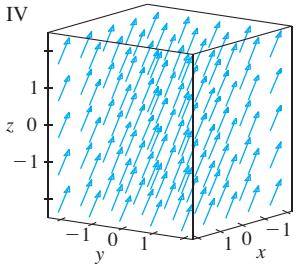
II



III



IV



SCA **19.** Se você dispõe de um SCA que trace campos vetoriais (o comando para fazê-lo no Maple é "fieldplot" e no Mathematica é "PlotVectorField"), use-o para traçar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\,\mathbf{j}$$

Explique sua aparência, determinando um conjunto de pontos (x, y) tal que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

SCA **20.** Seja $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ e $r = |\mathbf{x}|$. Use um SCA para traçar esse campo vetorial em vários domínios, até con-

seguir visualizar o que ocorre. Descreva a aparência do desenho e explique-o, determinando os pontos onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21-24 Determine o campo vetorial gradiente de f.

21. $f(x, y) = \ln(x + 2y)$ **22.** $f(x, y) = x^{\alpha} e^{-\beta x}$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **24.** $f(x, y, z) = x \cos(y/z)$

25-26 Determine o campo vetorial gradiente ∇f de f e o esboce.

25. $f(x, y) = x^2 - y$ **26.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

SCA **27-28** Trace o campo vetorial gradiente de f e o mapa de contorno de f. Explique como eles estão relacionados.

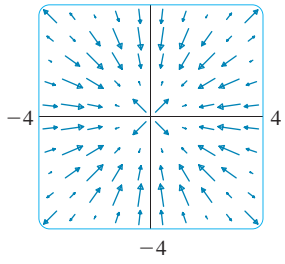
27. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ **28.** $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$

29-32 Faça uma correspondência entre as funções ***f*** e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes (rotulados de I-IV). Justifique suas escolhas.

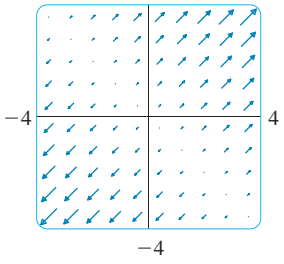
29. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **30.** $f(x, y) = x(x + y)$

31. $f(x, y) = (x + y)^2$ **32.** $f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

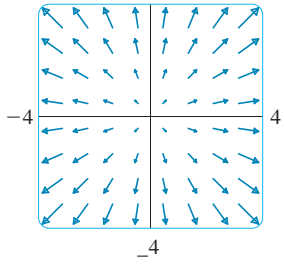
I



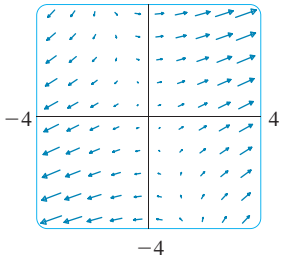
II



III



IV



33. Uma partícula se move em um campo de velocidade $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2 \rangle$. Se ela está na posição $(2, 1)$ no instante $t = 3$, estime sua posição no instante $t = 3{,}01$.

34. No instante $t = 1$, uma partícula está localizada na posição $(1, 3)$. Se ela se move em um campo de velocidade

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2, y^2 - 10 \rangle$$

encontre sua posição aproximada no instante $t = 1{,}05$.

35. As **linhas de escoamento** (ou **linhas de corrente**) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de escoamento.

(a) Use um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para desenhar algumas linhas de escoamento. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de escoamento?

(b) Se as equações paramétricas de uma linha de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por que essas funções satisfazem as equações diferenciais $dx/dt = x$ e $dy/dt = -y$. Resolva então as equações de forma a obter uma equação da linha de escoamento que passe pelo ponto $(1, 1)$.

36. (a) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ e algumas linhas de escoamento. Qual é o formato que essas linhas de escoamento parecem ter?

(b) Se as equações paramétricas das linhas de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que $dy/dx = x$.

(c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por $\mathbf{F}$, determine uma equação para a trajetória percorrida por ela.

16.2 INTEGRAIS DE LINHA

Nesta seção, definiremos uma integral que é semelhante à integral unidimensional, exceto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva C. Tais integrais são chamadas *integrais de linha*. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

I $\qquad x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$

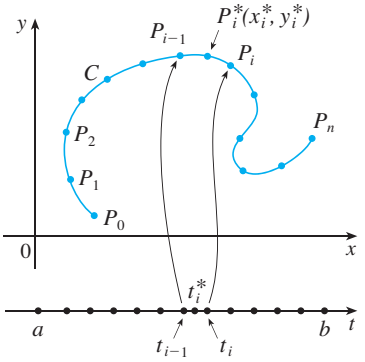


FIGURA 1

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, e supomos que C seja uma curva lisa. [Isso significa que $\mathbf{r}'$ é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Veja a Seção 13.3.] Se dividirmos o intervalo $[a, b]$ do parâmetro em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem C em n subarcos de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ (veja a Figura 1). Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ no i-ésimo subarco. (Isso corresponde a um ponto t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$.) Se f é uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C, calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*), multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

o que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida, tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição, por analogia com a integral unidimensional:

2 DEFINIÇÃO Se f é definida sobre uma curva lisa C dada pelas Equações 1, então a **integral de linha de f sobre C** é

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.2 verificamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

3
$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida uma única vez quando t cresce de a para b.

■ A função comprimento de arco s foi discutida na Seção 13.3.

Se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de memorizar a Fórmula 3 é escrever tudo em termos do parâmetro t. Usando a parametrização para exprimir x e y em termos de t, temos ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

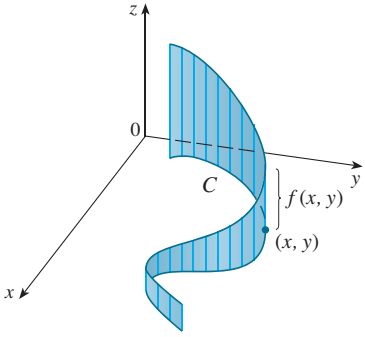


FIGURA 2

No caso especial em que C é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ a $(b, 0)$, tomando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C da seguinte forma: $x = x$, $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, 0)\,dx$$

e, nesse caso, a integral de linha se reduz a uma integral unidimensional.

Assim como para as integrais unidimensionais, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se $f(x, y) \geqslant 0$, $\int_C f(x, y)\,ds$ representa a área da "cerca" ou "cortina" da Figura 2, cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

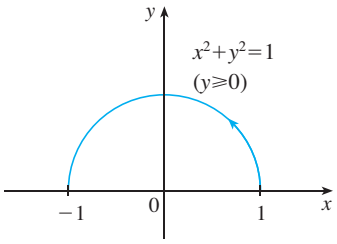


FIGURA 3

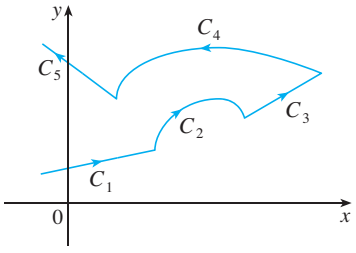


FIGURA 4
Curva lisa por partes

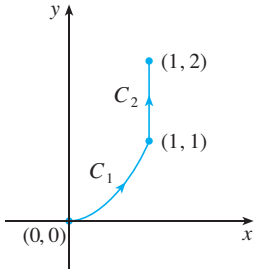


FIGURA 5
$C = C_1 \cup C_2$

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Para usar a Fórmula 3, precisamos de equações paramétricas que representem a curva C. Como já vimos, o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (veja a Figura 3). Logo, da Fórmula 3, temos

$$\int_C (2 + x^2y)\, ds = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi + \tfrac{2}{3}$$ □

Suponha agora que C seja uma **curva lisa por partes**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas lisas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto final de C_i. Neste caso, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada trecho liso de C:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

EXEMPLO 2 Calcule $\int_C 2x\, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5. C_1 é o gráfico de uma função de x; então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Portanto,

$$\int_{C_1} 2x\, ds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leq y \leq 2$$

e $$\int_{C_2} 2x\, ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^2 2\, dy = 2$$

Então, $$\int_C 2x = \int_{C_1} 2x\, ds + \int_{C_2} 2x\, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$ □

Qualquer interpretação física da integral de linha $\int_C f(x, y)\, ds$ depende da interpretação física da função f. Suponha que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear num ponto (x, y) de um arame fino com o formato de uma curva C. A massa da parte do arame do ponto P_{i-1}

até P_i na Figura 1 é aproximadamente $\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$. Assim, a massa total do arame terá valor aproximado de $\sum \rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$. Tomando cada vez mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da **massa** m do arame como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\, ds$$

[Por exemplo: se $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa a densidade de um arame semicircular, então a integral do Exemplo 1 representa a massa do arame.] O **centro de massa** do arame com função densidade ρ está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\boxed{4} \qquad \bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x, y)\, ds \qquad\qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y)\, ds$$

Outras interpretações físicas das integrais de linha serão discutidas adiante neste capítulo.

EXEMPLO 3 Um arame com o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto for proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$, e determinamos que $ds = dt$. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante e, então, a massa do arame é

$$m = \int_C k(1 - y)\, ds = \int_0^{\pi} k(1 - \operatorname{sen} t)\, dt = k\big[t + \cos t\big]_0^{\pi} = k(\pi - 2)$$

Das Equações 4, temos

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y)\, ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C y\, k(1 - y) ds$$

$$= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)\, dt = \frac{1}{\pi - 2}\left[-\cos t - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}$$

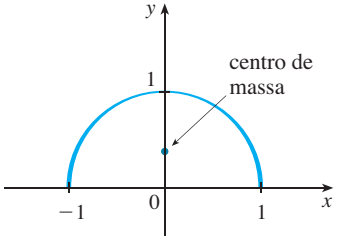


FIGURA 6

Por simetria vemos que $\bar{x} = 0$ e o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\right) \approx (0, 0{,}38)$$

(Veja a Figura 6.) □

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas **integrais de linha de *f* ao longo de *C* com relação a *x* e *y***:

$$\boxed{5} \qquad \int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

$$\boxed{6} \qquad \int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta y_i$$

Quando queremos distinguir a integral de linha original $\int_C f(x, y)\, ds$ das Equações 5 e 6, a chamamos de **integral de linha com relação ao comprimento do arco**.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$.

7

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)\, dt$$

Frequentemente, as integrais de linha com relação a x e y aparecem juntas. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Quando estamos nos preparando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar na representação paramétrica da curva cuja descrição geométrica foi dada. Em especial, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, portanto, é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em $\mathbf{r}_0$ e termina em $\mathbf{r}_1$ é dada por

8

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.)

EXEMPLO 4 Calcule $\int_C y^2\, dx + x\, dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ (veja a Figura 7).

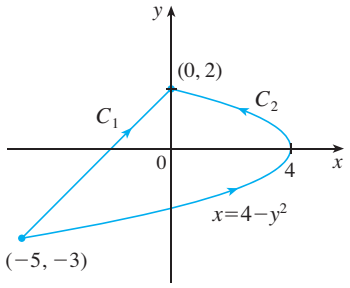


FIGURA 7

SOLUÇÃO

(a) A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Use a Equação 8 com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3\rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2\rangle$.) Assim, $dx = 5\, dt$, $dy = 5\, dt$ e a Fórmula 7 fornece

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2\, dx + x\, dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5\, dt) + (5t - 5)(5\, dt)\\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\, dt\\ &= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

(b) Como a parábola é dada em função de y, usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Então $dx = -2y\, dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\, dx + x\, dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y)\, dy + (4 - y^2)\, dy\\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)dy\\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^2 = 40\tfrac{5}{6}\end{aligned}$$

□

Observe que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 4 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades. Em geral, portanto, o valor de uma integral de linha depende não somente das extremidades da curva, como também da própria trajetória (mas veja a Seção 16.3 para condições nas quais a integral independe da trajetória).

Observe também que as respostas do Exemplo 4 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se $-C_1$ representa o segmento de reta que vai de $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, você pode verificar, usando a parametrização

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

que

$$\int_{-C_1} y^2\,dx + x\,dy = \tfrac{5}{6}$$

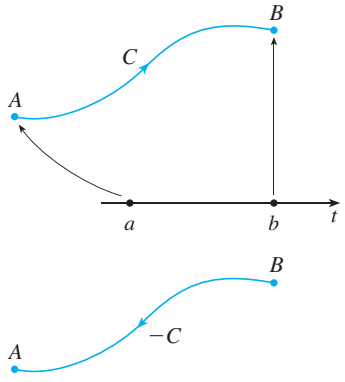


FIGURA 8

Em geral, dada a parametrização $x = x(t), y = y(t), a \leqslant t \leqslant b$, determina-se uma **orientação** da curva C, com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a $t = b$).

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C, mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y)\,dx = -\int_C f(x, y)\,dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\,dy = -\int_C f(x, y)\,dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha não se altera ao revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\,ds = \int_C f(x, y)\,ds$$

Isso ocorre porque Δs_i é sempre positivo, enquanto Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando invertemos a orientação de C.

INTEGRAIS DE LINHA NO ESPAÇO

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial lisa dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

ou pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C, então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito nas curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta s_i$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \qquad \int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (ver a Seção 13.3.3).

Também podemos definir integrais de linha ao longo de C em relação a x, y e z. Por exemplo,

$$\int_C f(x,y,z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta z_i$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)dt$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano, podemos calcular integrais da forma

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \qquad \boxed{10}$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t.

EXEMPLO 5 Calcule $\int_C y \operatorname{sen} z\,ds$, onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (veja a Figura 9).

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\int_C y \operatorname{sen} z\,ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$ □

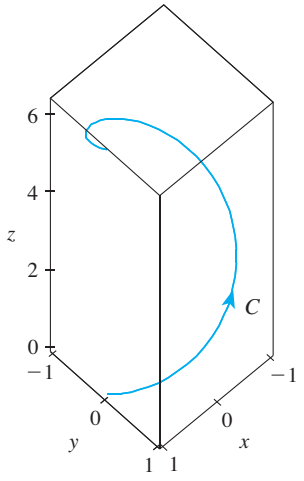


FIGURA 9

EXEMPLO 6 Calcule $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, onde C consiste no segmento de reta C_1 que une $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a curva C. Usando a Equação 8, escrevemos C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 2,0,0\rangle + t\langle 3,4,5\rangle = \langle 2+t, 4t, 5t\rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \qquad y = 4t \qquad z = 5t \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Então

$$\int_{C_1} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (4t)\,dt + (5t)4\,dt + (2+t)5\,dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)\,dt = 10t + 29\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = 24{,}5$$

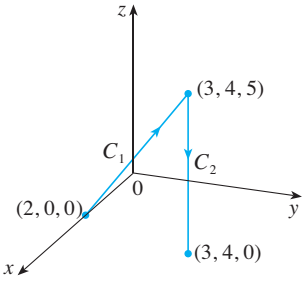


FIGURA 10

Da mesma maneira, C_2 pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 3,4,5\rangle + t\langle 3,4,0\rangle = \langle 3, 4, 5-5t\rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5 - 5t \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Então, $dx = 0 = dy$, de modo que

$$\int_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 3(-5)\,dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = 24{,}5 - 15 = 9{,}5$$ □

INTEGRAIS DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS

Lembre-se, da Seção 6.4, no Volume I, que o trabalho feito por uma força $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é dado por $W = \int_a^b f(x)\,dx$. Depois, na Seção 12.3, vimos que o trabalho feito por uma força constante $\mathbf{F}$ para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ seja um campo de força contínuo em $\mathbb{R}^3$, tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1 (um campo de força em $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y). Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva lisa C.

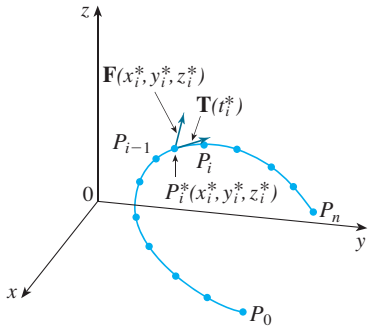


FIGURA 11

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em subintervalos de mesmo tamanho (veja a Figura 1 para o caso bidimensional ou a Figura 11 para o caso tridimensional). Escolha $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i-ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro t_i^*. Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente unitário a P_i^*. Então, o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i\, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\, \Delta s_i \tag{11}$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) sobre C. Intuitivamente, podemos ver que essas aproximações devem melhorar quando n aumenta. Portanto, definimos o **trabalho** W feito por um campo de força $\mathbf{F}$ como o limite da soma de Riemann dada por (11), ou seja,

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \tag{12}$$

A Equação 12 nos diz que o *trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força*.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, então $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ e, pela Equação 9, podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Essa última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física. Portanto, definimos a integral de linha de *qualquer* campo vetorial contínuo como a seguir:

13 DEFINIÇÃO Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Então, a **integral de linha de F ao longo de C** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Quando usamos a Definição 13, devemos nos lembrar de que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é uma abreviação para $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$ e $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ deve ser calculada tomando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ na expressão de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Observe também que podemos formalmente escrever que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$.

■ A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

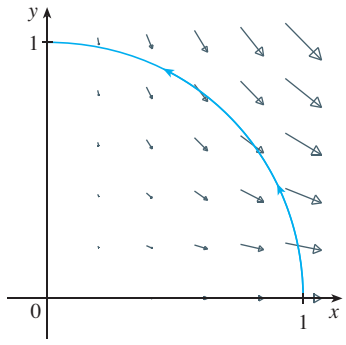


FIGURA 12

EXEMPLO 7 Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

SOLUÇÃO Como $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Portanto o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

□

OBS. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocarem de sinal quando a orientação do caminho for invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pois o versor tangente $\mathbf{T}$ é substituído por seu oposto quando C é trocado por $-C$.

■ A Figura 13 mostra a cúbica torcida C do Exemplo 8 e alguns vetores típicos atuando sobre três pontos em C.

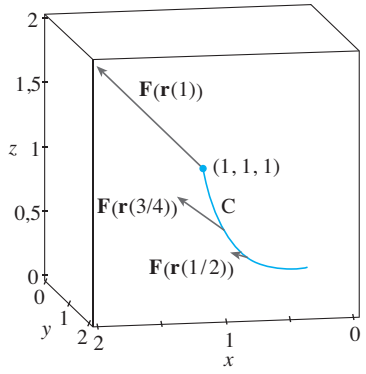


FIGURA 13

EXEMPLO 8 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$$

Então,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}$$

□

Finalmente, observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ seja dado sob a forma de componentes pela equação $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular sua integral de linha ao longo de C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot (x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt$$

Mas essa última integral é exatamente a integral de linha de (10). Portanto, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{onde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Por exemplo, a integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

16.2 EXERCÍCIOS

1-16 Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y^3\,ds$, C: $x = t^3$, $y = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C xy\,ds$, C: $x = t^2$, $y = 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4\,ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

4. $\int_C x \operatorname{sen} y\,ds$, C é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.

5. $\int_C \left(x^2y^3 - \sqrt{x}\right) dy$,
C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.

6. $\int_C \operatorname{sen} x\,dx$,
C é o arco da curva $x = y^4$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

7. $\int_C xy\,dx + (x - y)\,dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.

8. $\int_C x\sqrt{y}\,dx + 2y\sqrt{x}\,dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(1, 0)$ e no segmento de reta de $(1, 0)$ a $(4, 3)$.

9. $\int_C xy^3\,ds$, C: $x = 4 \operatorname{sen} t$, $y = 4 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

10. $\int_C xyz^2\,ds$, C é o segmento de reta de $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$.

11. $\int_C xe^{yz}\,ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

12. $\int_C (2x + 9z)\,ds$, C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

13. $\int_C x^2y\sqrt{z}\,dz$, C: $x = t^3$, $y = t$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\,dx + x\,dy + ydz$, C: $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

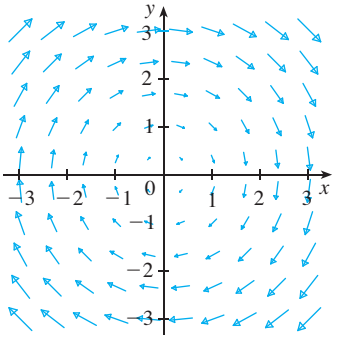
15. $\int_C (x + yz)\,dx + 2x\,dy + xyz\,dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$.

16. $\int_C x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$ e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$.

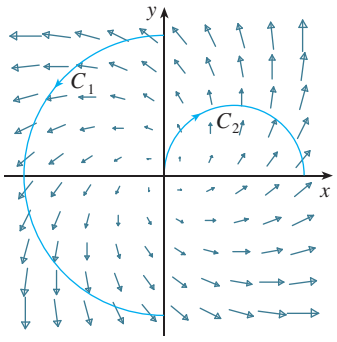
17. Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial mostrado na figura.

(a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positiva, negativa ou zero.

(b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positiva, negativa ou zero.



18. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas, C_1 e C_2. As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19-22 Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$,
$0 \leqslant t \leqslant \pi$

23-26 Use uma calculadora ou um SCA para calcular a integral de linha correta até a quarta casa decimal.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t^2}\,\mathbf{j}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + z \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

25. $\int_C x \operatorname{sen}(y + z)\,ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

26. $\int_C ze^{-xy}\,ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

SCA **27-28** Use um gráfico do campo vetorial $\mathbf{F}$ e a curva C para dizer se a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida, calcule a integral.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido anti-horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$.

28. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$,
C é a parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$.

29. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde
$\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ e C é dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$,
$0 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0, 1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).

30. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm \frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

SCA **31.** Encontre o valor exato de $\int_C x^3 y^2 z\, ds$, onde C é a curva com equações paramétricas $x = e^{-t} \cos 4t$, $y = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

SCA (b) Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta para a parte (a).

33. Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4, x \geqslant 0$. Se a densidade linear for uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

34. Um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a. Se a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, encontre a massa e o centro de massa do arame.

35. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com função densidade $\rho(x, y, z)$ e forma da curva espacial C.

(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2 \operatorname{sen} t, y = 2 \cos t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade for uma constante k.

36. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t, y = \cos t, z = \operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da sua distância do ponto à origem.

37. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos por

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y)\, ds \qquad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y)\, ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.

38. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x, y e z são definidos por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 35.

39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$ sobre um objeto que se move sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

40. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y + z, x + z, x + y \rangle$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 2)$.

42. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1). Determine o trabalho realizado quando a partícula se move sobre o segmento de reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

43. Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de tinta de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é realizado pelo homem contra a gravidade para subir ao topo?

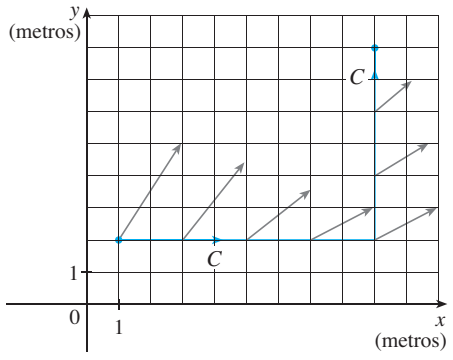
44. Suponha que exista um furo na lata de tinta do Exercício 43 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo e uniforme durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?

45. (a) Mostre que um campo de força constante realiza trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Isso também é verdadeiro para um campo de força $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, onde k é uma constante e $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?

46. A base de uma cerca circular de raio 10 m é dada por $x = 10 \cos t, y = 10 \operatorname{sen} t$. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função $h(x, y) = 4 + 0{,}01(x^2 - y^2)$, portanto a altura varia de 3 m a 5 m. Suponha que 1 L de tinta permita pintar 100 m^2. Faça um esboço da cerca e determine quanto de tinta você precisará para pintar os dois lados da cerca.

47. Um objeto se move sobre a curva C, mostrada na figura, de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Os comprimentos dos vetores do campo de força $\mathbf{F}$ são medidos em newtons pela escala nos eixos. Estime o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto.

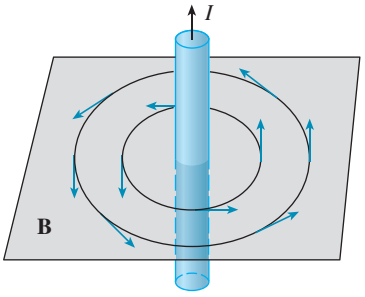


48. Experiências mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A *Lei de Ampère* relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e afirma que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente total que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada permeabilidade no vácuo. Tomando C como um círculo de raio r, mostre que o módulo $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS INTEGRAIS DE LINHA

Lembre-se, da Seção 5.3, no Volume I, que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \boxed{1}$$

onde F é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 também é chamada Teorema da Variação Total: a integral da taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser considerado uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

2 TEOREMA Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

OBS. O Teorema 2 nos diz que podemos calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) sabendo apenas o valor de f nas extremidades de C. De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de ∇f é a variação total de f. Se f é uma função de duas variáveis e C, uma curva plana com início em $A(x_1, y_1)$ e término em $B(x_2, y_2)$, como na Figura 1, o Teorema 2 fica

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C, uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vejamos agora a demonstração do Teorema 2 para este caso.

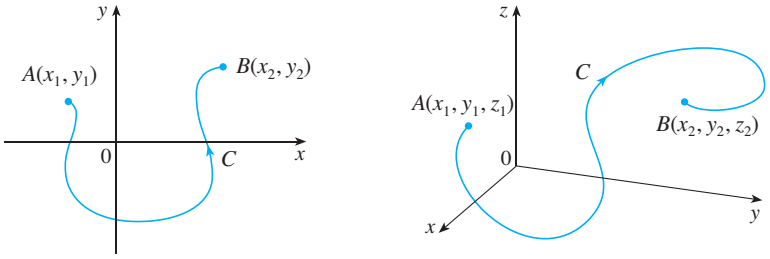


FIGURA 1

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt \qquad \text{(pela Regra de Cadeia)} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))\end{aligned}$$

O último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Equação 1). □

Apesar de termos demonstrado o Teorema 2 para curvas lisas, ele também vale para curvas lisas por partes. Isso pode ser confirmado subdividindo C em um número finito de curvas lisas e somando as integrais resultantes.

EXEMPLO 1 Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo da curva lisa por partes C (veja o Exemplo 4 da Seção 16.1).

SOLUÇÃO Da Seção 16.1, sabemos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)\end{aligned}$$

□

INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas lisas por partes (denominadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B. Sabemos do Exemplo 4 da Seção 16.2 que, em geral, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínua. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente das extremidades da curva.

Em geral, se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho*.

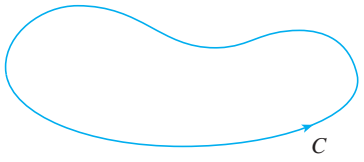


FIGURA 2
Uma curva fechada

Uma curva é dita **fechada** se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2). Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D, podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A (veja a Figura 3). Então,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos inicial e final.

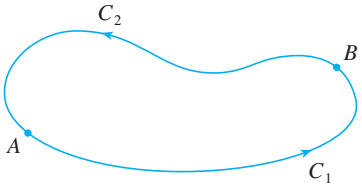


FIGURA 3

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D, podemos demonstrar a independência do caminho da seguinte forma. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então,

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, demonstramos o seguinte teorema:

3 TEOREMA $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo $\mathbf{F}$ é independente do caminho, segue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir fala que *todos* os campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele foi enunciado e demonstrado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admita que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existirá uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D. (Portanto, D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, admita que D seja **conexo**. Isso significa que quaisquer dois pontos de D poderão ser ligados por um caminho inteiramente contido em D.

4 TEOREMA Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta conexa D. Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D, então $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $A(a, b)$ um ponto fixo em D. Vamos construir a função potencial f desejada definindo

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

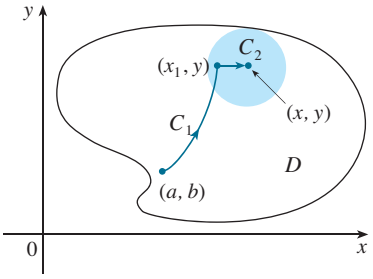


FIGURA 4

para qualquer ponto (x, y) em D. Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, não interessa qual o caminho de integração utilizado entre (a, b) e (x, y) para definir $f(x, y)$. Como D é aberto, existe uma bola aberta contida em D com centro em (x, y). Escolha qualquer ponto (x_1, y) na bola aberta com $x_1 < x$ e considere C como qualquer caminho C_1 de (a, b) a (x_1, y) seguido pelo segmento de reta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y) (veja a Figura 4). Então

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Observe que a primeira dessas integrais não depende de x, e assim

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Se escrevermos $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, então

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

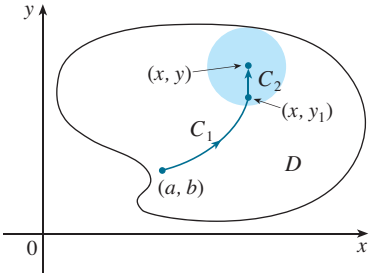


FIGURA 5

Sobre C_2, y é constante, $dy = 0$. Usando t como parâmetro, onde $x_1 \leqslant t \leqslant x$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t, y)\,dt = P(x, y)$$

pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3, no Volume I). Uma argumentação semelhante, usando um segmento de reta vertical (veja a Figura 5), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y)$$

Então,

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = \nabla f$$

o que mostra que $\mathbf{F}$ é conservativo. □

Uma questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ é conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

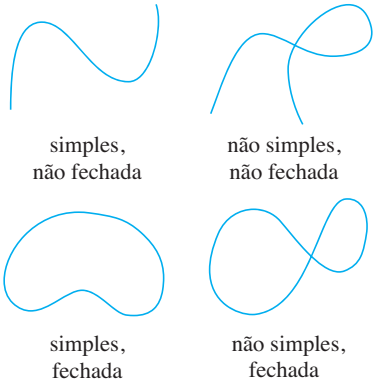


FIGURA 6
Tipos de curva

5 TEOREMA Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

A recíproca do Teorema 5 só é verdadeira para um tipo especial de região. Para explicar isso, precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva fechada simples, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]

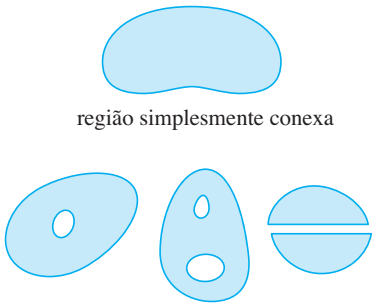


FIGURA 7

No Teorema 4 precisamos de região conexa. Para o próximo teorema, precisaremos de uma condição mais forte. Uma **região simplesmente conexa** em um plano é uma região conexa D tal que toda curva simples fechada em D contorna somente pontos que estão em D. Observe a partir da Figura 7 que, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém buracos nem é constituída por dois pedaços separados.

Para regiões simplesmente conexas podemos agora enunciar a recíproca do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é conservativo. A demonstração será esboçada na próxima seção, como consequência do Teorema de Green.

6 TEOREMA Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em } D$$

Então $\mathbf{F}$ é conservativo.

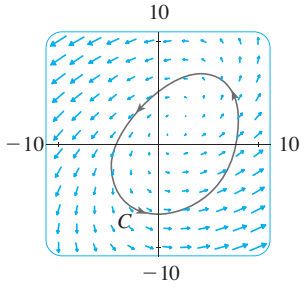


FIGURA 8

■ As Figuras 8 e 9 mostram os campos vetoriais dos Exemplos 2 e 3, respectivamente. Os vetores da Figura 8 que começam na curva fechada C parecem apontar aproximadamente para a mesma direção que C. Assim, parece que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ e portanto $\mathbf{F}$ não seria conservativo. Os cálculos no Exemplo 2 confirmam essa impressão. Alguns dos vetores perto das curvas C_1 e C_2 na Figura 9 apontam aproximadamente para a mesma direção que as curvas, enquanto outros apontam para a direção oposta. Portanto, parece razoável que as integrais de linha sobre toda curva fechada sejam 0. O Exemplo 3 mostra que, de fato, $\mathbf{F}$ é conservativo.

EXEMPLO 2 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, $\mathbf{F}$ não é conservativo. □

EXEMPLO 3 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de $\mathbf{F}$ é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$) que é aberto e simplesmente conexo. Portanto, podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que $\mathbf{F}$ é conservativo. □

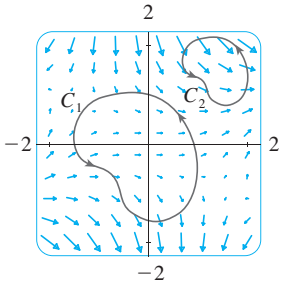


FIGURA 9

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que $\mathbf{F}$ é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. A demonstração do Teorema 4 dá indícios de como encontrar f, utilizando "integração parcial", como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4
(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

SOLUÇÃO
(a) Do Exemplo 3 sabemos que $\mathbf{F}$ é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy \tag{7}$$

$$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2 \tag{8}$$

Integrando (7) com relação a x, obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2 y + g(y) \tag{9}$$

Observe que a constante de integração é uma constante em relação a x, ou seja, uma função de y, que chamamos $g(y)$. Em seguida, derivamos ambos os lados de (9) em relação a y:

$$f_y(x, y) = x^2 + g'(y) \tag{10}$$

Comparando (8) e (10), vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em (9), temos

$$f(x, y) = 3x + x^2 y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicar o Teorema 2, devemos conhecer os pontos inicial e final de C, ou seja, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$. Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), qualquer valor da constante K serve. Então tomemos $K = 0$. Assim temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2. □

Um critério para determinar se um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ é ou não conservativo será dado na Seção 16.5. Enquanto isso, o próximo exemplo mostra que a técnica para achar funções potenciais é muito semelhante à utilizada para campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, determine uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Se existe tal função f, então

$$f_x(x, y, z) = y^2 \tag{11}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z} \tag{12}$$

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z} \tag{13}$$

Integrando (11) em relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z) \tag{14}$$

onde $g(y, z)$ é uma constante em relação a x. Então, derivando (14) em relação a y, temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + gy(y, z)$$

e, comparando com (12), vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então, $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ e reescrevemos (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, derivando em relação a z e comparando com (13), obtemos $h'(z) = 0$ e, portanto, $h(z) = K$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$. □

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Vamos aplicar as ideias deste capítulo a um campo de forças contínuo $\mathbf{F}$ que move um objeto ao longo de uma trajetória C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto final de C. Pela Segunda Lei do Movimento de Newton (veja a Seção 13.4), a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ em um ponto de C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt \qquad \text{(Teorema 13.2.3, Fórmula 4)}$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt = \frac{m}{2} \left[|\mathbf{r}'(t)|^2 \right]_a^b \qquad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)}$$

$$= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2 \right)$$

Portanto,

$$W = \tfrac{1}{2} m\, |\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2} m\, |\mathbf{v}(a)|^2 \qquad \boxed{15}$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2} m\, |\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

$$W = K(B) - K(A) \qquad \boxed{16}$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças conservativo; ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto (x, y, z) é defi-

nida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, e temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

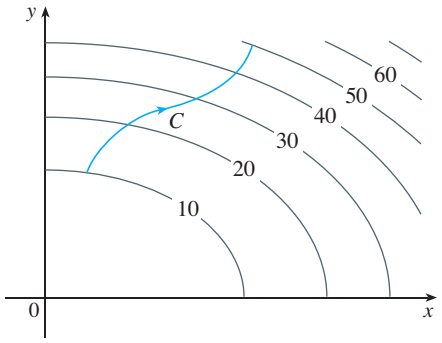
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei de Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas

$$x = t^2 + 1, \qquad y = t^3 + t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3-10 Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e \cos y\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4xy + 3)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x \cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cos xy + \operatorname{sen} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cos xy)\,\mathbf{j}$

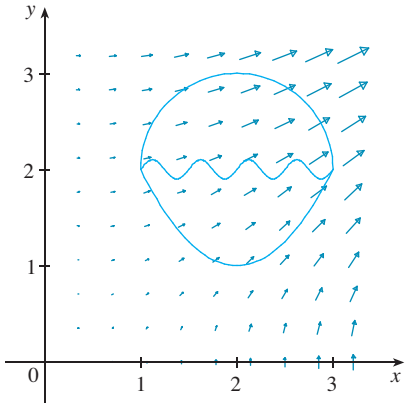
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \operatorname{senh} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\,\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



12-18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + 2y \operatorname{arctg} x\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$, C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (x^2 + 3z^2)\,\mathbf{k}$,
C: $x = t^2, y = t + 1, z = 2t - 1, 0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z\,\mathbf{i} + 2xy \cos z\,\mathbf{j} - xy^2 \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + (z + 1)e^z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19-20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C 2x \operatorname{sen} y\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$,
C é qualquer caminho de $(-1, 0)$ a $(5, 1)$

20. $\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)\, dx + (4xy - 9x^4y^2)\, dy$,
C é qualquer caminho de $(1, 1)$ a $(3, 2)$

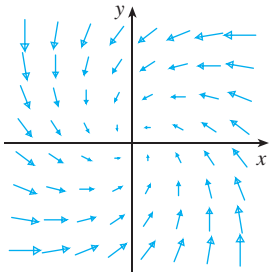
21-22 Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de P a Q.

21. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1), Q(2, 4)$

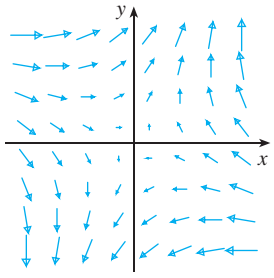
22. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\,\mathbf{i} - xe^{-y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1), Q(2, 0)$

23-24 A partir do gráfico de F você diria que o campo é conservativo? Explique.

23.



24.



SCA **25.** Se $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x \cos y)\,\mathbf{j}$, use um gráfico para conjecturar se $\mathbf{F}$ é conservativo. Então, determine se sua conjectura estava correta.

26. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Determine curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.
(a) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

27. Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

28. Use o Exercício 27 para mostrar que a integral de linha $\int_C y\, dx + x\, dy + xyz\, dz$ não é independente do caminho.

29-32 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo e (c) simplesmente conexo.

29. $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ **30.** $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$

31. $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

32. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ou } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

33. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.
(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [*Sugestão*: calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isso contraria o Teorema 6?

34. (a) Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo inverso do quadrado é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 da Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1{,}52 \times 10^8$ km do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1{,}47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.)

(c) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\varepsilon = 8{,}985 \times 10^9$.)

16.4 TEOREMA DE GREEN

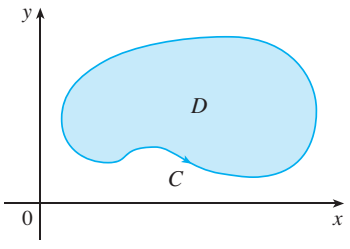


FIGURA 1

O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha em torno de uma curva fechada simples C e uma integral dupla na região D do plano delimitada por C (veja a Figura 1. Vamos supor que D consista em todos os pontos dentro de C, bem como nos pontos sobre C). Para enunciar o Teorema de Green, usaremos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C se refere a percorrer C no *sentido anti-horário* uma única vez. Assim, se C for dada como uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre à esquerda quando o ponto $\mathbf{r}(t)$ percorrer C (veja a Figura 2).

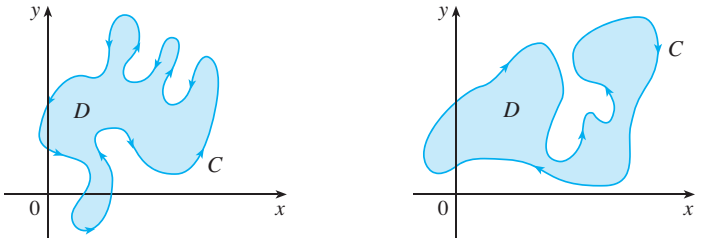


FIGURA 2 (a) Orientação positiva (b) Orientação negativa

■ Lembre-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$.

TEOREMA DE GREEN Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Obs.: A notação

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{ou} \qquad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

é usada algumas vezes para indicar que a integral de linha é calculada usando-se a orientação positiva da curva fechada C. Outra notação para a orientação positiva da curva fronteira a D é ∂D, assim a equação no Teorema de Green pode ser escrita como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \qquad (1)$$

O Teorema de Green pode ser olhado como o correspondente do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais duplas. Compare a Equação 1 com o enunciado da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas (F', $\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) do lado esquerdo da equação. E, em ambos os casos, o lado direito envolve valores da função original (F, Q e P) somente na *fronteira* da região (no caso unidimensional, a região é um intervalo $[a, b]$ cuja fronteira é constituída apenas pelos dois pontos a e b).

O Teorema de Green não é fácil de demonstrar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma demonstração para o caso especial onde a região é tanto de tipo I como de tipo II (veja a Seção 15.3). Chamamos tais regiões de **regiões simples**.

■ O Teorema de Green recebeu esse nome em homenagem ao cientista inglês autodidata George Green (1793-1841), que trabalhava em período integral na padaria do pai desde os nove anos e aprendeu matemática em livros de biblioteca. Em 1828, Green publicou *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, aos quarenta anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lorde Kelvin) encontrou uma cópia dos ensaios de Green, percebeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu trabalho serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

DEMOSTRAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN NOS CASOS ONDE D É UMA REGIÃO SIMPLES Observe que o Teorema de Green estará demonstrado se mostrarmos que

$$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \qquad (2)$$

e

$$\int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \qquad (3)$$

Vamos demonstrar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\boxed{4} \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\, dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

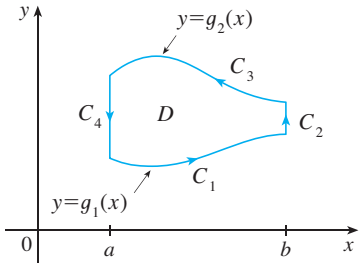


FIGURA 3

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união das quatro curvas C_1, C_2, C_3 e C_4 mostradas na Figura 3. Sobre C_1 tomamos x como parâmetro e escrevemos as equações paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Assim

$$\int_{C_1} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita. Podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Portanto

$$\int_{C_3} P(x, y)\, dx = -\int_{-C_3} P(x, y)\, dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\, dx$$

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante e, assim, $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y)\, dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y)\, dx$$

Portanto,

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx + \int_{C_3} P(x, y)\, dx + \int_{C_4} P(x, y)\, dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\, dx$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y)\, dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

A Equação 3 pode ser demonstrada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II (veja o Exercício 28). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green. □

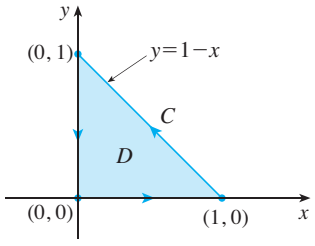


FIGURA 4

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C x^4\, dx + xy\, dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUÇÃO Apesar de essa integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\, dx + xy\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{6} (1 - x)^3 \Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

□

EXEMPLO 2 Calcule $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\,dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\begin{aligned}\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\,dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\operatorname{sen} x}) \right] dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3)\, r\, dr\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\, dr = 36\pi\end{aligned}$$ □

■ Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que D é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_D 4\,dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

Nos Exemplos 1 e 2, consideramos que a integral dupla era mais fácil de calcular que a integral de linha. (Tente escrever a integral de linha do Exemplo 2 e você ficará convencido rapidamente!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesses casos, usaremos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo, se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C, então o Teorema de Green nos dá

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

não importando quais os valores das funções P e Q em D.

Outra aplicação da direção inversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1\,dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D:

5

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

EXEMPLO 3 Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \operatorname{sen} t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t)\,dt - (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab\end{aligned}$$ □

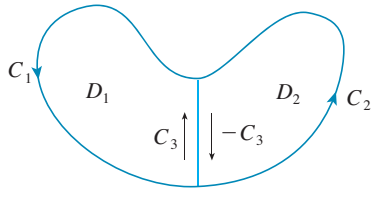


FIGURA 5

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green somente para o caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo, se D é uma região como a mostrada na Figura 5, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$. Assim, aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos

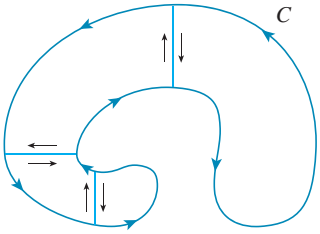


FIGURA 6

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não se sobreponham (veja a Figura 6).

EXEMPLO 4 Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde C é a fronteira da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y a divide em duas regiões simples (veja a Figura 7). Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

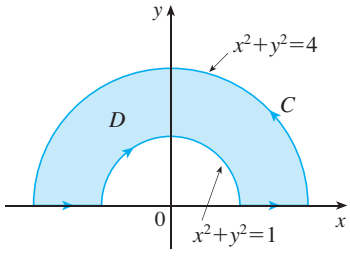


FIGURA 7

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3} \qquad \square$$

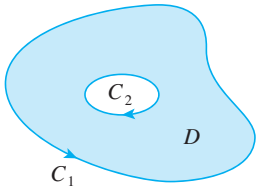


FIGURA 8

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 8 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2. Admitiremos que essas curvas fronteiras são orientadas de modo que a região D esteja à esquerda quando percorrermos a curva C. Então a orientação positiva é anti-horária na curva externa C_1, mas é horária na curva interna C_2. Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' pela introdução das retas mostradas na Figura 9 e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'', obteremos

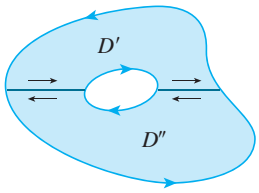


FIGURA 9

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy$$

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

que é o Teorema de Green para a região D.

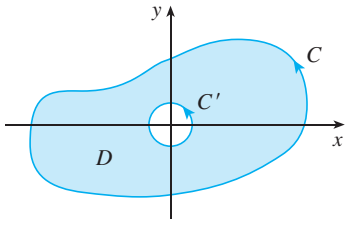


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Vamos então considerar um círculo, percorrido no sentido anti-horário C' com centro na origem e raio a, onde o a escolhido é pequeno o suficiente para que C' esteja inteiramente contido em C (veja a Figura 10). Seja D a região limitada por C e C'. Então a orientação positiva da fronteira é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0$$

Portanto,
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

ou seja,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \qquad \square$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado enunciado na seção anterior.

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 16.3.6 Admitindo que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D, que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C, o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em diversas curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C. Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue então que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo. $\square$

16.4 EXERCÍCIOS

1-4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y)dx + (x + y)dy$, C é o círculo com centro na origem e raio 2

2. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, C é o retângulo com vértices (0,0), (3, 0), (3, 1) e (0, 1)

3. $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$, C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)

4. $\oint_C x\,dx + y\,dy$, C consiste nos segmentos de reta de (0, 1) a (0, 0) e de (0, 0) a (1, 0) e na parábola $y = 1 - x^2$ de (1, 0) a (0, 1)

5-10 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

5. $\int_C e^y\,dx + 2xe^y\,dy$, C é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

6. $\int_C x^2y^2\,dx + 4xy^3\,dy$, C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 3), e (0, 3)

7. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right)dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, C é a fronteira da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

8. $\int_C xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)\,dy$, C é a fronteira da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

9. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C \operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy$, C é a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

11-14 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$,
C consiste no arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ de (0, 0) a $(\pi, 0)$ e no segmento de reta $(\pi, 0)$ a (0, 0)

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \operatorname{sen} x \rangle$,
C é o triângulo de (0, 0) a (2, 6) a (2, 0) a (0, 0)

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2y, e^y - xy^2 \rangle$,
C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, orientada no sentido horário

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2\,\mathrm{tg}^{-1}(y/x) \rangle$,
C é a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário

SCA **15-16** Verifique o Teorema de Green, usando um sistema de computação algébrica para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

15. $P(x, y) = y^2e^x$, $\quad Q(x, y) = x^2e^y$,
C consiste no segmento de reta de $(-1, 1)$ a (1, 1) seguido pelo arco da parábola $y = 2 - x^2$ de (1,1) a $(-1, 1)$

16. $P(x, y) = 2x - x^3y^5$, $\quad Q(x, y) = x^3y^8$,
C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até (1, 0), em seguida ao longo de um segmento de reta até (0, 1), e então de volta à origem ao longo do eixo y.

18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x até (2, 0) e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.

19. Use uma das fórmulas em (5) para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada epicicloide, com equações paramétricas $x = 5\cos t - \cos 5t$, $y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$. Faça o gráfico da epicicloide e use (5) para calcular a área da região que ela envolve.

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, mostre que a área do polígono é

$$A = \tfrac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)\right]$$

(c) Determine a área do pentágono com vértices (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho fechado simples C no plano xy. Utilize o Teorema de Green para demonstrar que as coordenadas do centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

onde A é a área de D.

23. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide de um quarto de uma região circular de raio a.

24. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide da região triangular de vértices (0, 0), $(a, 0)$ e (a, b), onde $a > 0$ e $b > 0$.

25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C. Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy$$

26. Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante em relação a um diâmetro (compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5).

27. Se $\mathbf{F}$ é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passe pela origem e nem a circunde.

28. Complete a demonstração do Teorema de Green demonstrando a Equação 3.

29. Utilize o Teorema de Green para demonstrar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.9.9) para o caso onde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\, dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Aqui, R é a região do plano xy que corresponde à região S do plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

[*Sugestão*: observe que o lado esquerdo é $A(R)$ e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv.]

16.5 ROTACIONAL E DIVERGENTE

Nesta seção, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais e que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

ROTACIONAL

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1)$$

Para auxiliar na memorização, vamos reescrever a Equação 1 usando notação de operadores. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Quando ele opera sobre uma função escalar, produz o gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial F, como segue:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

2 $$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

EXEMPLO 1 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine o rotacional de $\mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Usando a Equação 2, temos

■ A maioria dos sistemas de computação algébrica tem comandos para calcular rotacional e divergente de campos vetoriais. Se você tem acesso a um SCA, use esses comandos para verificar as respostas dos exemplos e exercícios desta seção.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$ □

Lembre-se de que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$, de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é $\mathbf{0}$.

3 **TEOREMA** Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot } (\nabla f) = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO Temos

■ Observe a semelhança com o que sabemos da Seção 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todo vetor tridimensional $\mathbf{a}$.

$$\text{rot } (\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

pelo Teorema de Clairaut. □

■ Compare isso com o Exercício 27 da Seção 16.3.

Como um campo vetorial conservativo é da forma $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

Se $\mathbf{F}$ é conservativo, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

E assim obtemos um modo de verificar que um campo vetorial não é conservativo.

EXEMPLO 2 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

SOLUÇÃO No Exemplo 1 mostramos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Isso mostra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, pelo Teorema 3, $\mathbf{F}$ não é conservativo. □

Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se $\mathbf{F}$ for definido em todo o espaço, a recíproca vale. (Mais especificamente, a recíproca vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, "não apresenta furos".) O Teorema 4 é a versão tridimensional do Teorema 16.3.6. Sua demonstração requer o Teorema de Stokes e será apresentada no final da Seção 16.8.

4 TEOREMA Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{F}$ será um campo vetorial conservativo.

EXEMPLO 3
(a) Mostre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

é um campo vetorial conservativo.
(b) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUÇÃO
(a) Calculemos o rotacional de $\mathbf{F}$:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\,\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\,\mathbf{k}$$
$$= \mathbf{0}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e o domínio de $\mathbf{F}$ é $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, pelo Teorema 4.
(b) A técnica para achar f foi dada na Seção 16.3. Temos

$$\mathbf{5} \qquad f_x(x, y, z) = y^2z^3$$

$$\mathbf{6} \qquad f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

$$\mathbf{7} \qquad f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Integrando (5) em relação a x, obtemos

$$\mathbf{8} \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$$

Derivando (8) em relação a y, obtemos $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$ e comparando com (6), temos $g_y(y, z) = 0$. Então, $g(y, z) = h(z)$ e

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Então, de (7) temos $h'(z) = 0$. Portanto

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$ □

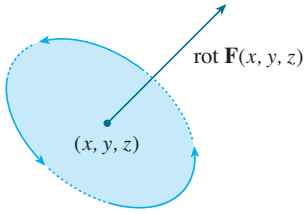


FIGURA 1

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma das conexões será explicada no Exercício 37. Outra ocorre quando **F** representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (ver Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas de perto (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de rot **F** (x, y, z), e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se rot **F** = **0** no ponto P, então o fluido não gira em P e **F** é chamado **irrotacional** em P. Em outras palavras, não existe redemoinho em P. Se rot **F** = **0**, uma pequena roda com pás deslizaria com o fluido, mas não rodaria em torno de seu eixo. Se rot **F** ≠ **0**, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Veremos mais detalhes sobre essa explanação na Seção 16.8, como consequência do Teorema de Stokes.

DIVERGENTE

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e existem $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$, então o **divergente de F** é a função de três variáveis definida por

9

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que rot **F** é um campo vetorial, mas div **F** é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, o divergente de **F** pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e **F**:

10

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, encontre div **F**.

SOLUÇÃO Pela definição de divergente (Equação 9 ou 10), temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$ □

Se **F** é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$, então rot **F** também é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$. Como tal, podemos calcular seu divergente. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

11 TEOREMA Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

■ Observe a analogia com o produto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Usando as definições de divergente e rotacional temos

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}$$

$$= 0$$

pois os termos se cancelam aos pares, pelo Teorema de Clairaut. □

EXEMPLO 5 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja, $\mathbf{F} \neq \text{rot}\,\mathbf{G}$.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 mostramos que

$$\text{div}\,\mathbf{F} = z + xz$$

e portanto div $\mathbf{F} \neq 0$. Se fosse verdade que $\mathbf{F} = \text{rot}\,\mathbf{G}$, pelo Teorema 11, teríamos

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \text{div rot}\,\mathbf{G} = 0$$

o que contradiz div $\mathbf{F} \neq 0$. Portanto $\mathbf{F}$ não é o rotacional de outro campo vetorial. □

■ A razão para essa interpretação de **div F** será explicada ao final da Seção 16.9 como consequência do Teorema do Divergente.

Novamente, a razão para o nome *divergente* pode ser entendida no contexto da mecânica dos fluidos. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a velocidade de um fluido (ou gás), então div $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa a taxa de variação total (com relação ao tempo) da massa do fluido (ou gás) escoando do ponto (x, y, z), por unidade de volume. Em outras palavras, div $\mathbf{F}(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z). Se div $\mathbf{F} = 0$, então $\mathbf{F}$ é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f. Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\text{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão frequentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado **operador de Laplace** ou laplaciano, por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

em termos de suas componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

FORMAS VETORIAIS DO TEOREMA DE GREEN

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil futuramente. Considere uma região plana D, sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Então, podemos considerar o campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

e, considerando $\mathbf{F}$ como um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ com terceira componente 0, temos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Portanto,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \tag{12}$$

A Equação 12 expressa a integral de linha da componente tangencial de $\mathbf{F}$ ao longo de C como uma integral dupla da componente vertical de rot $\mathbf{F}$ sobre a região D delimitada por C. Vamos deduzir agora uma fórmula semelhante, envolvendo a componente *normal* de $\mathbf{F}$. Se C é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

então o vetor tangente unitário (veja a Seção 13.2) é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

Você pode verificar que o vetor normal unitário externo a C é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

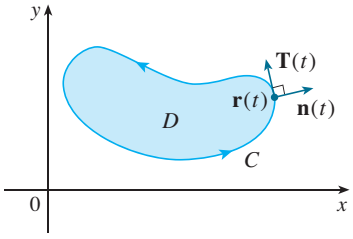


FIGURA 2

(Veja a Figura 2.) Então, da Equação 16.2.3, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)|\mathbf{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\, y'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\, x'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt - Q(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt \\ &= \int_C P\, dy - Q\, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é o divergente de $\mathbf{F}$. Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}(x, y)\, dA \tag{13}$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de $\mathbf{F}$ ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de $\mathbf{F}$ na região D delimitada por C.

16.5 EXERCÍCIOS

1-8 Determine (a) o rotacional e (b) o divergente do campo vetorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2 y\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 yz\,\mathbf{i} + xy^2 z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + y\,\operatorname{tg}^{-1}(x/z)\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$

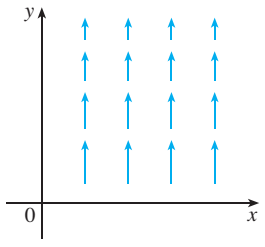
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, e^{xy}, e^{xyz} \rangle$

9-11 O campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais (em outras palavras, $\mathbf{F}$ é independente de z e sua componente z é 0).

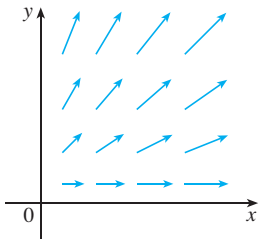
(a) O div $\mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Explique.

(b) Determine se o rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção rot $\mathbf{F}$ aponta?

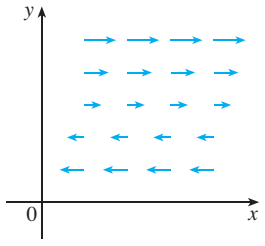
9.



10.



11.



12. Seja f um campo escalar e $\mathbf{F}$ um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f (b) grad f

(c) div $\mathbf{F}$ (d) rot(grad f)

(e) grad $\mathbf{F}$ (f) grad(div $\mathbf{F}$)

(g) div(grad f) (h) grad(div f)

(i) rot(rot $\mathbf{F}$) (j) div(div $\mathbf{F}$)

(k) (grad f) $\times$ (div $\mathbf{F}$) (l) div(rot(grad f))

13-18 Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2 z^2\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2 yz^2\,\mathbf{j} + x^2 y^2 z\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + xe^z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x}\,\mathbf{i} + e^{-x}\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos xy\,\mathbf{i} + x \cos xy\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\mathbf{k}$

19. Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy \rangle$? Explique.

20. Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle xyz, -y^2 z, yz^2 \rangle$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

22. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

é incompressível.

23-29 Demonstre a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ forem campos vetoriais, então $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ e $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ serão definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

30-32 Seja $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique as identidades.

(a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$

(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique as identidades.

(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$

(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ (d) $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Se $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, ache div $\mathbf{F}$. Existe um valor de p para o qual div $\mathbf{F} = 0$?

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para demonstrar a **primeira identidade de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\, dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot \mathbf{n}\, ds - \iint_D \nabla f\cdot \nabla g dA$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g\cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}}g$ aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal $\mathbf{n}$ e é chamada **derivada normal** de g.)

34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para demonstrar a **segunda identidade de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathbf{n}\, ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

35. Lembre-se, da Seção 14.3, que uma função g é dita *harmônica* em D quando satisfaz a equação de Laplace, ou seja, $\nabla^2 g = 0$ em D. Use a primeira identidade de Green (com as mesmas hipóteses que no Exercício 33) para mostrar que se g for harmônica em D, então $\oint_C D_{\mathbf{n}} g\, ds = 0$. Aqui, $D_{\mathbf{n}}g$ é a derivada normal de g definida no Exercício 33.

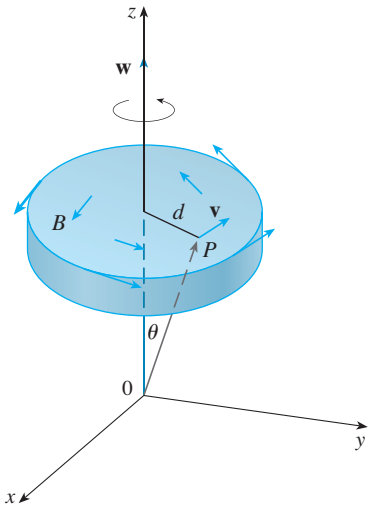
36. Use a primeira identidade de Grenn para mostrar que se f for harmônica em D, e se $f(x, y) = 0$ na curva fronteira C, então $\iint_D |\nabla f|^2\, dA = 0$. (Suponha que são válidas as mesmas hipóteses que no Exercício 33.)

37. Este exercício ilustra a relação entre vetor rotacional e rotações. Seja B um corpo rígido girando em torno do eixo z. A rotação pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, onde ω é a velocidade angular de B, ou seja, a velocidade tangencial de qualquer ponto P em B dividido pela distância d do eixo de rotação. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ o vetor posição de P.

(a) Considerando o ângulo θ da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$.

(b) Mostre que $\mathbf{v} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}$.

(c) Mostre que rot $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{H}$, quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \qquad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

onde c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

(a) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2\mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Sugestão:* Use o Exercício 29.]

(d) $\nabla^2\mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Vimos que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfazem a equação rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = $ rot $\mathbf{G}$ satisfazem a equação div $\mathbf{F} = 0$ (supondo a continuidade das correspondentes derivadas parciais). Isso sugere a pergunta: existe alguma equação que todas as funções da forma $f = $ div $\mathbf{G}$ devam satisfazer? Mostre que a resposta para essa pergunta é "não", demonstrando que *toda* função contínua f em $\mathbb{R}^3$ é o divergente de algum campo de vetores. [*Sugestão*: Tome $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0\rangle$, onde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z)\, dt$.]

16.6 SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS E SUAS ÁREAS

Até agora, consideramos tipos especiais de superfícies: cilindros, superfícies quádricas, gráficos de funções de duas variáveis e superfícies de nível de funções de três variáveis. Aqui, usaremos funções vetoriais para descrever superfícies mais gerais, chamadas *superfícies parametrizadas*, e calcularemos suas áreas. A seguir, tomaremos a fórmula para a área de superfícies gerais e veremos como se aplica a superfícies especiais.

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v. Suponhamos que

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \tag{1}$$

seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv. Então x, y e z, componentes de $\mathbf{r}$, serão funções das duas variáveis u e v com domínio D. O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v) \tag{2}$$

e (u, v) varie em D, é denominado **superfície parametrizada** S, e as Equações 2 são chamadas **equações paramétricas** de S. Cada escolha de u e v dá um ponto de S; ao fazermos todas as escolhas, obtemos todo o S. Em outras palavras, a superfície S é traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ quando (u, v) se move na região D (veja a Figura 1).

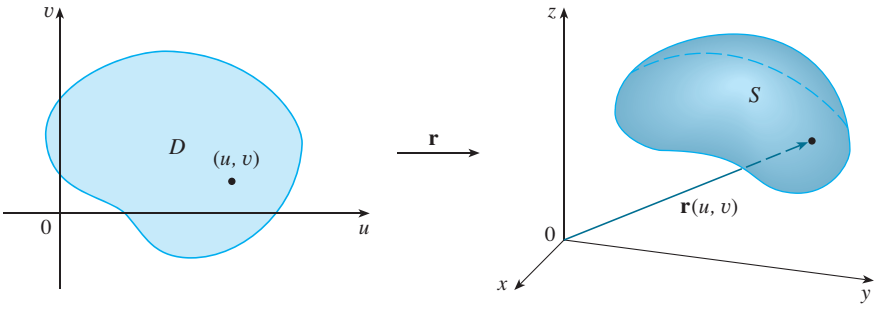


FIGURA 1
Uma superfície parametrizada

EXEMPLO 1 Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\,\text{sen}\,u$$

Para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\,\text{sen}^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2). □

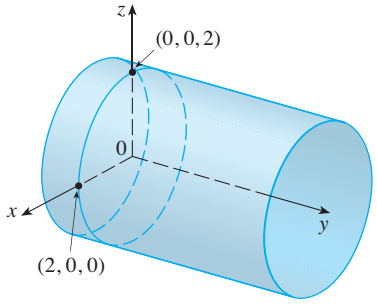


FIGURA 2

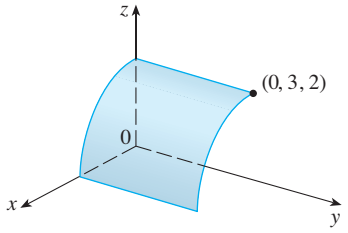


FIGURA 3

No Exemplo 1 não existiam restrições quanto aos parâmetros u e v e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v, escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

então $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

Se uma superfície parametrizada S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S, uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv. Se mantivermos u constante, impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v, que define uma curva C_1 sobre S (veja a Figura 4).

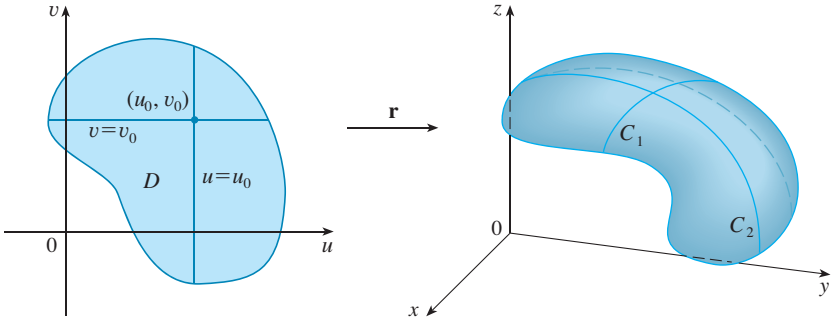


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante, tomando $v = v_0$, obteremos a curva C_2, dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$, que está em S. A essas curvas chamaremos **curvas da grade** (no Exemplo 1, as curvas da grade obtidas tomando u constante são retas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências). De fato, quando um computador traça o gráfico de uma superfície parametrizada, ele geralmente retrata a superfície traçando essas curvas da grade, como veremos no próximo exemplo.

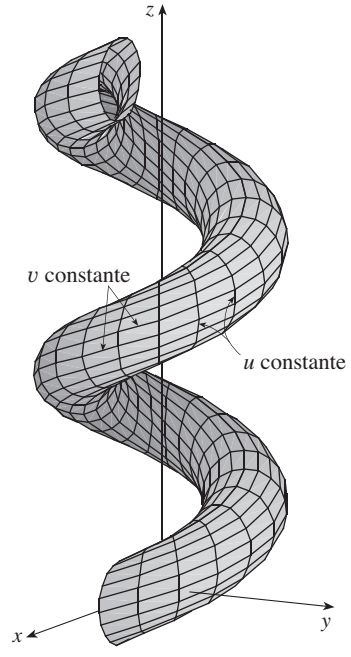


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Use um sistema de computação algébrica para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u, u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? E com v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o pedaço da superfície com os parâmetros delimitados por $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificar as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \operatorname{sen} v) \cos u \qquad y = (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u \qquad z = u + \cos v$$

Se v é constante, então sen v e cos v são constantes e as equações paramétricas lembram as da hélice do Exemplo 4 da Seção 13.1. Assim, as curvas da grade com v constante são as curvas espirais da Figura 5. Deduzimos que as curvas da grade com u constante devem ser aquelas que parecem circunferências na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u fixo, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valores de z variam de $u_0 - 1$ até $u_0 + 1$. □

Nos Exemplos 1 e 2 nos foi dada uma equação vetorial e pedido o gráfico da superfície parametrizada correspondente. Nos exemplos seguintes, entretanto, teremos o problema mais desafiador de achar a função vetorial que representa uma superfície dada. No restante deste capítulo, teremos de fazer exatamente isso muitas vezes.

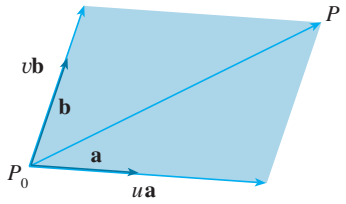


FIGURA 6

EXEMPLO 3 Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO Se P é um ponto qualquer do plano, podemos ir de P_0 até P andando uma distância orientada na direção do vetor $\mathbf{a}$ e outra distância orientada na direção do $\mathbf{b}$. Portanto, existem escalares u e v tais que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ (a Figura 6 ilustra como isso funciona, por meio da Regra do Paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 38 da Seção 12.2). Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, podemos escrever as equações paramétricas do plano pelo ponto (x_0, y_0, z_0) como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$ □

EXEMPLO 4 Determine uma representação paramétrica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos ϕ e θ das coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 15.8). Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 15.8.1), obtemos

$$x = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = a\cos\phi$$

como equações paramétricas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Temos $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os polos norte e sul. □

■ Um dos usos de superfícies parametrizadas é na computação gráfica. A Figura 7 mostra o resultado de tentar traçar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ isolando z e traçando os hemisférios de cima e de baixo separadamente. Parte da esfera parece estar faltando, por causa do sistema retangular de grades usado pelo computador. A Figura 8, muito melhor, foi produzida por um computador que usa as equações paramétricas encontradas no Exemplo 4.

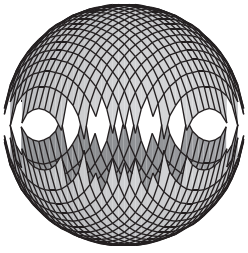


FIGURA 7



FIGURA 8

EXEMPLO 5 Determine uma representação paramétrica do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação $r = 2$ em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros θ e z das coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2\cos\theta \qquad y = 2 \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$. □

EXEMPLO 6 Determine uma função vetorial que represente o paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{k}$$ □

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y, ou seja, com equação da forma $z = f(x, y)$, pode sempre ser olhada como uma superfície parametrizada, tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Representações paramétricas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 Determine uma representação paramétrica para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha das coordenadas polares r e θ como parâmetros. Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Assim uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$$

onde $r \geqslant 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. □

■ Para alguns propósitos, as representações paramétricas das Soluções 1 e 2 são igualmente boas, mas a Solução 2 pode ser preferível em certas situações. Se estivermos interessados somente na parte do cone que está abaixo do plano $z = 1$, por exemplo, tudo que devemos fazer na Solução 2 é mudar o domínio do parâmetro para

$$0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma paramétrica e, portanto, seus gráficos podem ser traçados usando-se um computador. Por exemplo, vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x, onde $f(x) \geqslant 0$, sendo θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 9. Se (x, y, z) é um ponto de S, então

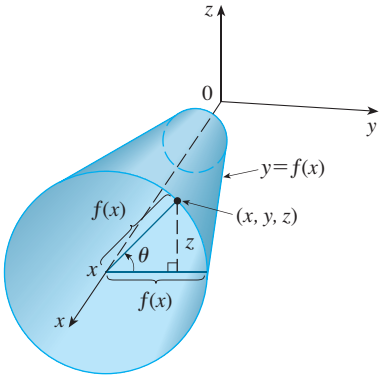


FIGURA 9

$$\boxed{3} \qquad x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta$$

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S. O domínio do parâmetro é dado por $a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

EXEMPLO 8 Determine as equações paramétricas da superfície gerada pela rotação da curva $y = \text{sen}\,x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, em torno do eixo x. Use essas equações para traçar o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = \text{sen}\,x\cos\theta \qquad z = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\theta$$

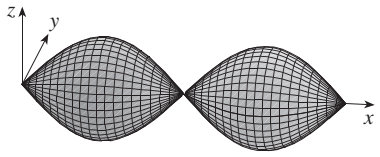


FIGURA 10

e o domínio do parâmetro é $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando um computador para traçar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 10. □

Podemos adaptar as Equações 3 para representar uma superfície obtida pela revolução em torno do eixo y ou do eixo z (veja o Exercício 30).

PLANOS TANGENTES

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada S determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante, tomando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial de um único parâmetro v e define uma curva da grade C_1 sobre S (veja a Figura 11). O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de $\mathbf{r}$ em relação a v:

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

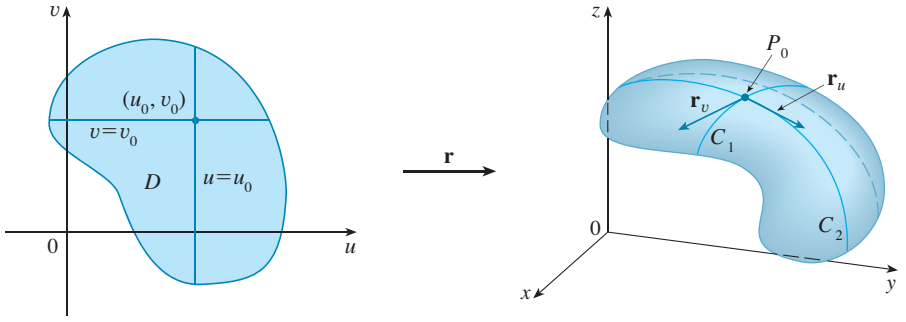


FIGURA 11

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S, e cujo vetor tangente em P_0 é

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **lisa** (sem "bicos"). Para uma superfície lisa, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é o vetor normal ao plano tangente.

EXEMPLO 9 Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

■ A Figura 12 mostra a superfície que se autointercepta no Exemplo 9 e seu plano tangente em $(1, 1, 3)$.

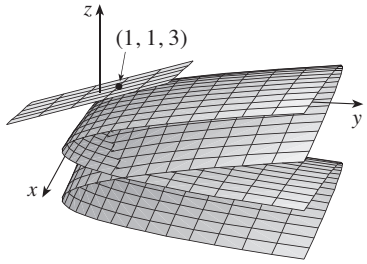


FIGURA 12

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Observe que o ponto $(1, 1, 3)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$. Assim o vetor normal ali é

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Portanto, uma equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

ou

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

□

ÁREA DE SUPERFÍCIE

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada geral dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij}. Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto inferior esquerdo do retângulo R_{ij} (veja a Figura 13). O pedaço S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamado de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Seja

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.

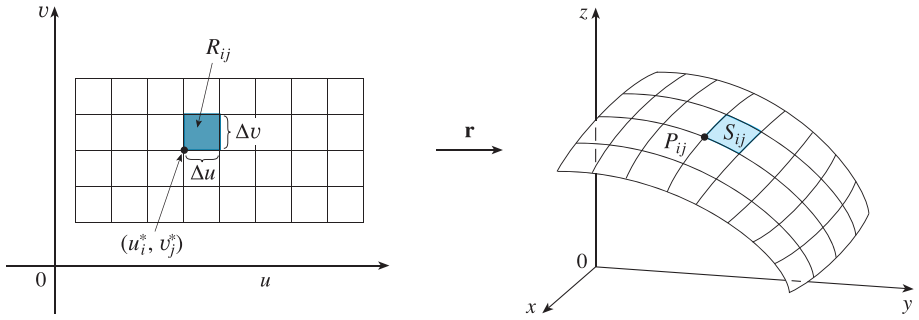


FIGURA 13
A imagem do sub-retângulo R_{ij} é o retalho S_{ij}

A Figura 14(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 14(b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij}. A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u\,\mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\,\mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\ \Delta u\,\Delta v$$

e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\ \Delta u\,\Delta v$$

A intuição nos diz que essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv$. Isso justifica a seguinte definição:

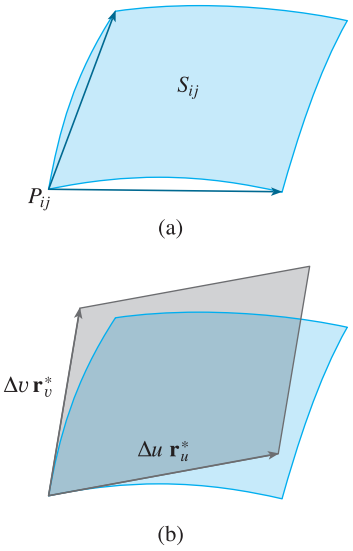


FIGURA 14
Aproximando um retalho por um paralelogramo

6 DEFINIÇÃO Se uma superfície parametrizada lisa S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$

EXEMPLO 10 Determine a área da esfera de raio a.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 encontramos a representação paramétrica

$$x = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = a\cos\phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Vamos calcular primeiro o produto vetorial dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -a\operatorname{sen}\phi \\ -a\cos\phi\operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Então,

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4\phi\cos^2\theta + a^4\operatorname{sen}^4\phi\operatorname{sen}^2\theta + a^4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4\phi + a^4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2\operatorname{sen}\phi$$

uma vez que $\operatorname{sen}\phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$

□

ÁREA DE SUPERFÍCIE DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D onde f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

logo $\qquad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

e

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{7}$$

Então, temos

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \tag{8}$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA \tag{9}$$

■ Observe a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 9 e a fórmula do comprimento do arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

da Seção 8.1, no Volume I.

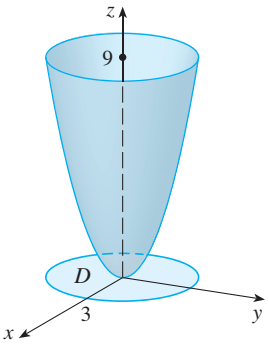


FIGURA 15

EXEMPLO 11 Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o paraboloide na circunferência $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada está acima do disco D com centro na origem e raio 3 (veja a Figura 15). Usando a Fórmula 9, temos

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1) \qquad \square$$

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície (6) é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x, onde $f(x) \geqslant 0$ e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\operatorname{sen}\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Para calcular a área da superfície S, precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -f(x)\operatorname{sen}\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

e, então, $$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

porque $f(x) \geqslant 0$. Portanto, a área de S é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\, d\theta$$
$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Isso é precisamente a fórmula que usamos para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

16.6 EXERCÍCIOS

1-2 Determine se os pontos P e Q estão na superfície dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v\rangle$
$P(7, 10, 4), Q(5, 22, 5)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2\rangle$
$P(3, -1, 5), Q(-1, 3, 4)$

3-6 Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = 2\operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + 3\cos u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}, 0 \leqslant v \leqslant 2$

5. $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$

6. $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, x\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta\rangle$

7-12 Use um computador para traçar o gráfico da superfície parametrizada. Imprima o resultado e indique sobre esta impressão quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2 + 1, v^3 + 1, u + v\rangle, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2, v^2\rangle, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^5\rangle, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v + \ln \operatorname{tg}(v/2)\rangle$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0{,}1 \leqslant v \leqslant 6{,}2$

11. $x = \operatorname{sen} v, \quad y = \cos u \operatorname{sen} 4v, \quad z = \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen} 4v,$
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, -\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$

12. $x = u \operatorname{sen} u \cos v, y = u\cos u\cos v, z = u\operatorname{sen} v$

13-18 Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por I-VI e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\,\mathbf{k}, \quad -\pi \leqslant u \leqslant \pi$

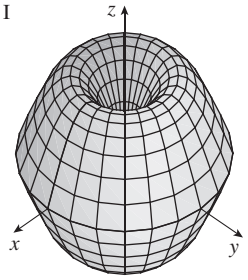
15. $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} 2v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} 2v\,\mathbf{k}$

16. $x = (1 - u)(3 + \cos v)\cos 4\pi u,$
$y = (1 - u)(3 + \cos v)\operatorname{sen} 4\pi u,$
$z = 3u + (1 - u)\operatorname{sen} v$

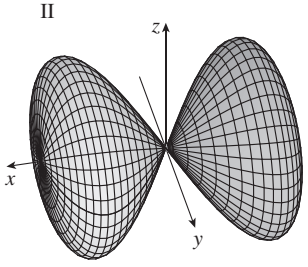
17. $x = \cos^3 u\cos^3 v, y = \operatorname{sen}^3 u\cos^3 v, z = \operatorname{sen}^3 v$

18. $x = (1 - |u|)\cos v, y = (1 - |u|)\operatorname{sen} v, z = u$

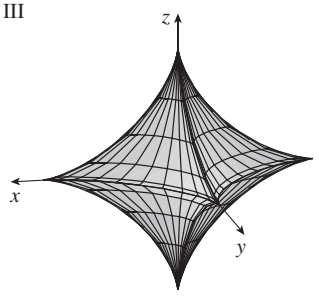
I



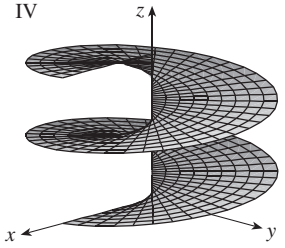
II



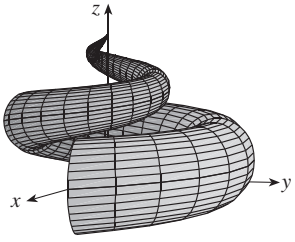
III



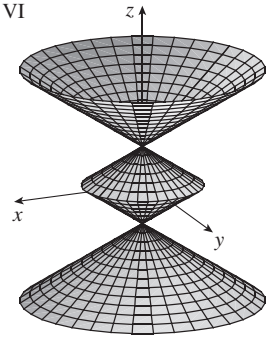
IV



V



VI



19-26 Determine uma representação paramétrica para a superfície.

19. O plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vetores $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

20. A metade inferior do elipsoide $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

21. A parte do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que está à direita do plano xz

22. A parte do paraboloide elíptico $x + y^2 + 2z^2 = 4$ que está em frente do plano $x = 0$

23. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

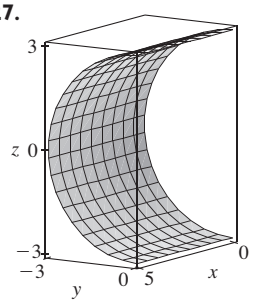
24. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $z = -2$ e $z = 2$

25. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 5$

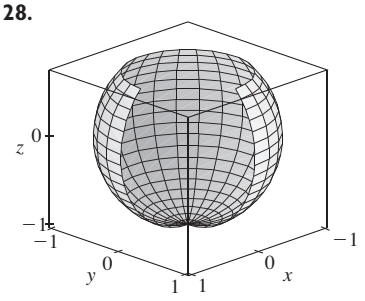
26. A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

SCA **27–28** Use um sistema de computação algébrica para produzir um gráfico semelhante ao das figuras.

27.



28.



29. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x e use-as para traçar o gráfico da superfície.

30. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leq y \leq 2$, em torno do eixo y e use-as para traçar o gráfico da superfície.

31. (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos cos u por sen u e sen u por cos u?
(b) O que acontecerá se substituirmos cos u por cos $2u$ e sen u por sen $2u$?

32. A superfície com as equações paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\,\text{sen}\,\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\,\text{sen}(\theta/2)$$

onde $-\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada **Faixa de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície sob vários pontos de vista. O que há de estranho nela?

33–36 Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado. Se você tiver um programa que trace o gráfico de superfícies parametrizadas, use-o para traçar a superfície e o plano tangente.

33. $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$; $\quad (2, 3, 0)$

34. $x = u^2$, $y = v^2, z = uv$; $\quad u = 1, v = 1$

35. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u\cos v\,\mathbf{k}$; $u = 1, v = 0$

36. $\mathbf{r}(u, v) = uv\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + v\cos u\,\mathbf{k}$; $u = 0, v = \pi$

37–47 Determine a área da superfície.

37. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante

38. A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$

39. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

40. A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + v, u - 2v, 3 - 5u + v\rangle$ que é dada por $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$

41. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

42. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$

43. A parte do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

44. A parte do paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$

45. A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que está entre os planos $x = 0, x = 1, z = 0$ e $z = 1$

46. O helicoide (ou rampa espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$

47. A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$

48–49 Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

48. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

49. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

SCA **50.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

51. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com seis quadrados para estimar a área da superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4$.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

SCA **52.** Determine a área da superfície de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \text{sen}^3 u \cos^3 v, \text{sen}^3 v\rangle, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$. Dê sua resposta com precisão de quatro casas decimais.

SCA **53.** Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2, 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$.

54. (a) Determine, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v, z = u^2, 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$.

(b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um paraboloide elíptico e escreva outra integral dupla que forneça sua área.

(c) Use as equações paramétricas da parte (a) com $a = 2$ e $b = 3$ para traçar o gráfico da superfície.

SCA (d) Para o caso $a = 2, b = 3$, use um sistema de computação algébrica para achar a área da superfície com precisão de quatro casas decimais.

55. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, z = c \cos u, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$, representam um elipsoide.

(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsoide para o caso $a = 1, b = 2, c = 3$.

(c) Determine, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsoide da parte (b).

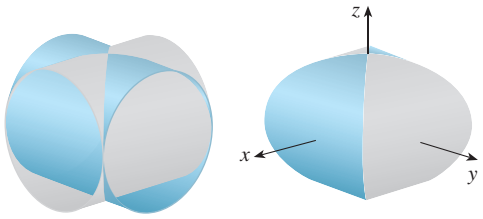
56. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v, z = c \operatorname{senh} u$, representam um hiperboloide de uma folha.

(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperboloide para o caso $a = 1, b = 2, c = 3$.

(c) Determine, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperboloide da parte (b) que está entre os planos $z = -3$ e $z = 3$.

57. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$.

58. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.

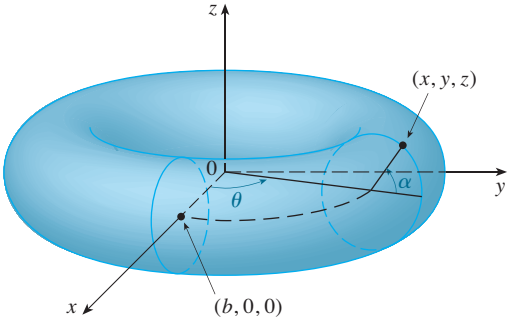


59. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

60. (a) Determine a representação paramétrica do toro obtido girando em torno do eixo z o círculo do plano xz com centro em $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [*Sugestão*: tome como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]

(b) Use as equações paramétricas encontradas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de a e b.

(c) Use a representação paramétrica da parte (a) para achar a área do toro.



16.7 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S. Definiremos a integral de superfície de f em S de modo que, nos casos em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área de superfície de S. Começamos com superfícies parametrizadas e então trataremos o caso especial em que S é o gráfico de uma função de duas variáveis.

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij}, com dimensões Δu e Δv. Então, a superfície é dividida em

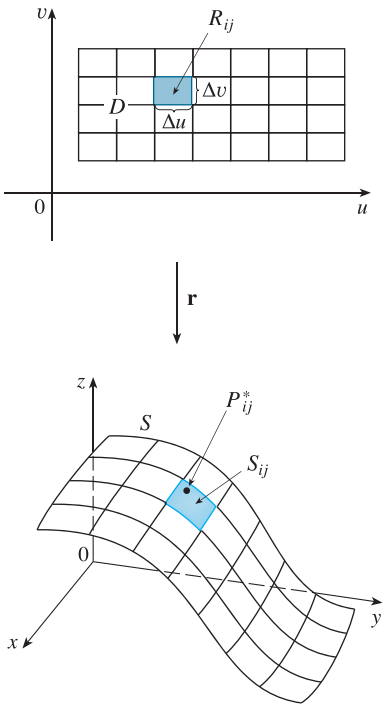


FIGURA 1

■ Supusemos que a superfície é coberta somente uma vez quando (u, v) varia em D. O valor da integral de superfície não depende da parametrização usada.

retalhos correspondentes S_{ij} como na Figura 1. Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retalho e formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

A seguir, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a **integral de superfície de f na superfície S** como

1

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

Observe a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição de integral dupla (15.1.5).

Para calcular a integral de superfície na Equação 1, aproximamos a área do retalho S_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente. Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u \Delta v$$

onde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij}. Se as componentes são contínuas e $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são não nulos e não paralelos no interior de D, pode ser mostrado, da Definição 1, mesmo quando D não é retangular, que

2

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Compare com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Observe também que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

A Fórmula 2 nos permite calcular a integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio dos parâmetros D. Quando usamos essa fórmula, precisamos lembrar que $f(\mathbf{r}(u, v))$ deve ser calculada escrevendo-se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula de $f(x, y, z)$.

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2\, dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação paramétrica

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

ou seja, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \operatorname{sen}\phi$$

Portanto, pela Fórmula 2,

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_D (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)^2\,|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\,dA$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi)\,d\phi$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$ □

■ Aqui, usamos as identidades

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$
$$\operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

Em vez disso, poderíamos usar as Fórmulas 64 e 67 da Tabela de Integrais.

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes àquelas das integrais que estudamos anteriormente. Por exemplo, se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tiver a forma de uma superfície S e se a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então, a **massa** total da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS$$

e o **centro de massa** será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)\,dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)\,dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)\,dS$$

Os momentos de inércia também podem ser definidos como antes (veja o Exercício 39).

GRÁFICOS

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser considerada uma superfície parametrizada com equações paramétricas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

e, então, temos

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

de modo que

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{3}$$

e

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Logo, neste caso, a Fórmula 2 se torna

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA \tag{4}$$

Existem fórmulas análogas para quando for mais conveniente projetar S no plano yz ou no plano xz. Por exemplo, se S for a superfície com equação $y = h(x, z)$ e D for sua projeção no plano xz, então

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\,dA$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S y\,dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ (veja a Figura 2).

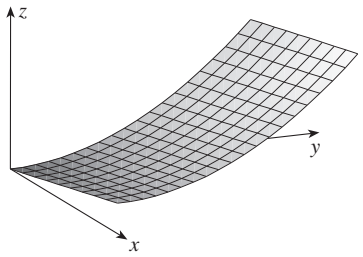


FIGURA 2

SOLUÇÃO Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

a Fórmula 4 dá

$$\begin{aligned}\iint_S y\,dS &= \iint_D y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA\\ &= \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1+1+4y^2}\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 dx\,\sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}\,dy\\ &= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1+2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

□

Se S é uma superfície lisa por partes, ou seja, uma união finita de superfícies lisas S_1, $S_2, \ldots, S_n$ que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x,y,z)\,dS$$

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_S z\,dS$, onde S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cujo fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 0$, e cujo topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2.

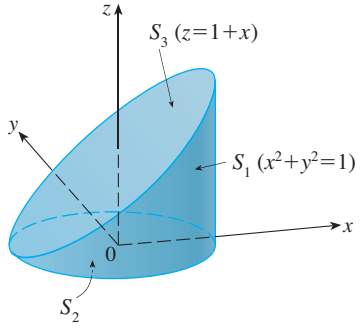


FIGURA 3

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 3 (trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S). Para S_1, usamos como parâmetros θ e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

onde $$0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \text{e} \qquad 0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos\theta$$

Portanto,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

e $$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Então, a integral de superfície em S_1 é

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z\,dS &= \iint_D z\,|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\,dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1+2\cos\theta+\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)]\,d\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Como S_2 está no plano $z = 0$, temos

$$\iint_{S_2} z\,dS = \iint_{S_3} 0\,dS = 0$$

A superfície do topo S_3 está acima do círculo D e é parte do plano $z = 1 + x$. Portanto, tomando $g(x, y) = 1 + x$ na Fórmula 4 e transformando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z\,dS &= \iint_D (1 + x)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1 + 1 + 0}\;\; r\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S z\,dS &= \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS \\ &= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi\end{aligned}$$

□

SUPERFÍCIES ORIENTADAS

Para definir integrais de superfície de campos vetoriais, precisamos excluir superfícies não orientáveis como a faixa de Möbius mostrada na Figura 4. [Seu nome é uma homenagem ao geômetra alemão August Möbius (1790-1868).] Você pode construir uma tomando uma faixa retangular longa de papel, torcendo-a por um ângulo π, e juntando as arestas curtas, como na Figura 5. Se uma formiga andasse sobre uma faixa de Möbius começando no ponto P, ela acabaria do "outro lado" da faixa (ou seja, com sua parte de cima apontando para o sentido oposto). Então, se a formiga continuasse a andar na mesma direção, ela acabaria de volta no mesmo ponto P sem ter nunca cruzado uma aresta (se você construiu uma faixa de Möbius, tente desenhar uma linha a lápis pelo meio). Portanto, na verdade, uma faixa de Möbius tem apenas um lado. Você pode traçar a faixa de Möbius usando as equações paramétricas no Exercício 32 da Seção 16.6.

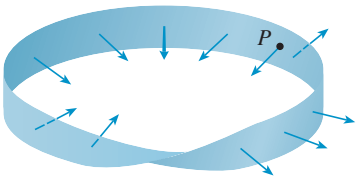


FIGURA 4
Uma faixa de Möbius

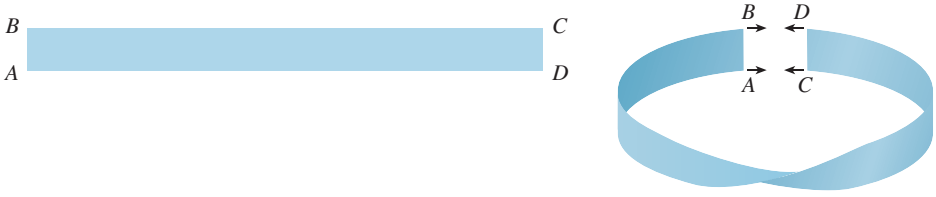


FIGURA 5
Construção de uma faixa de Möbius

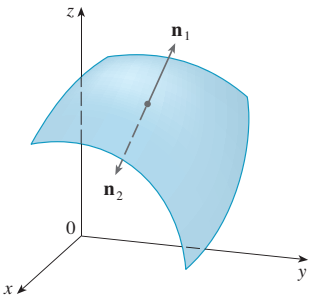


FIGURA 6

Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície S que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) sobre S (exceto nos pontos da fronteira). Em cada ponto (x, y, z) existem dois vetores normais unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ (veja a Figura 7). Se for possível escolher um vetor normal unitário $\mathbf{n}$ em cada ponto (x, y, z) de modo que $\mathbf{n}$ varie continuamente sobre S, então S é chamada **superfície orientada**, e a escolha dada de $\mathbf{n}$ fornece a S uma **orientação**. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 7).

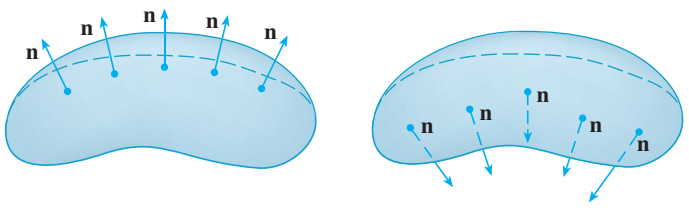


FIGURA 7 As duas orientações de uma superfície orientável

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de g, usamos a Equação 3 e vemos que a orientação induzida é dada pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \tag{5}$$

Como a componente na direção de **k** é positiva, isso fornece a orientação *para cima* da superfície.

Se S for uma superfície orientada lisa dada na forma paramétrica pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente associada à orientação do vetor normal unitário.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{6}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo, no Exemplo 4 da Seção 16.6 encontramos a representação paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a\cos\phi\,\mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Então, no Exemplo 10 da Seção 16.6, encontramos que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi\,\mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

Assim, a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que **n** aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figura 8). A orientação oposta (para dentro) poderia ser obtida (veja a Figura 9) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.

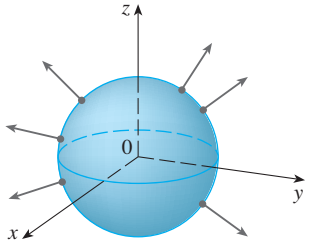


FIGURA 8
Orientação positiva

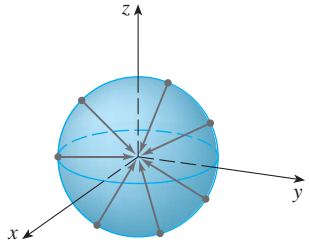


FIGURA 9
Orientação negativa

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida E, a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais *apontam para fora* de E, e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (veja as Figuras 8 e 9).

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE DE CAMPOS VETORIAIS

Suponha que S seja uma superfície orientada com vetor normal unitário **n**, imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ escoando através de S (pense em S como uma superfície imaginária que não impeça a passagem do líquido, como uma rede de pesca em uma corrente de água). Então a vazão (massa por unidade de tempo)

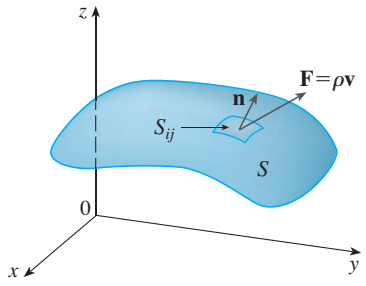


FIGURA 10

por unidade de área é $\rho\mathbf{v}$. Se dividirmos S em pequenos retalhos S_{ij}, como na Figura 10 (compare com a Figura 1), então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal $\mathbf{n}$ por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

onde ρ, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ são calculados em algum ponto de S_{ij} (lembre-se de que a componente do vetor $\rho\mathbf{v}$ na direção do vetor unitário $\mathbf{n}$ é $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$). Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral de superfície da função $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre S:

$$\boxed{7} \qquad \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

e ela é interpretada fisicamente como a vazão através de S.

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, então $\mathbf{F}$ também é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e a integral da Equação 7 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando $\mathbf{F}$ não é $\rho\mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de $\mathbf{F}$ em S.

8 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$, então a **integral de superfície de $\mathbf{F}$ em S** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de $\mathbf{F}$ através de S.

Em palavras, a Definição 8 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de sua componente normal em S (como definido anteriormente).

Se $\mathbf{r}(u, v)$ é uma função vetorial dada, então $\mathbf{n}$ é dado pela Equação 6 da Definição 8 e, da Equação 2, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Então, temos

$$\boxed{9} \qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

■ Compare a Equação 9 com a expressão análoga para o cálculo da integral de linha de campos vetoriais da Definição 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

EXEMPLO 4 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Usando a representação paramétrica

■ A Figura 11 mostra o campo vetorial **F** do Exemplo 4 em pontos da esfera unitária.

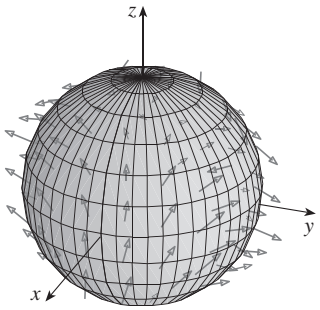


FIGURA 11

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

temos $$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Portanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta)\,d\phi\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\,d\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \\
&= 0 + \int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \qquad (\text{já que } \textstyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0) \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 1. □

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 4 é um campo de velocidade descrevendo o escoamento de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

No caso de uma superfície dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos considerar x e y como parâmetros e usar a Equação 3 para escrever

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k})\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Logo, a Fórmula 9 se torna

10
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\,\frac{\partial g}{\partial x} - Q\,\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA$$

Esta fórmula pressupõe uma orientação de S para cima. Para uma orientação para baixo, multiplicamos por -1. Fórmulas semelhantes podem ser obtidas se S for dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$ (veja os Exercícios 35 e 36).

EXEMPLO 5 Calcule $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é a fronteira da região sólida E delimitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

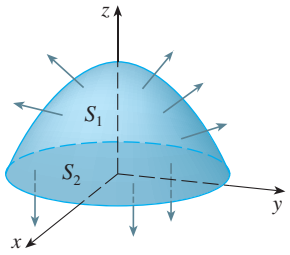


FIGURA 12

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabólica do topo, S_1, e pela superfície circular do fundo, S_2, (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que S_1 é orientada para cima e podemos usar a Equação 8 com D sendo a projeção de S_1 sobre o plano xy, ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Como

$$P(x, y, z) = y \qquad Q(x, y, z) = x \qquad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

sobre S_1 e $$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -2y$$

temos

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P\,\frac{\partial g}{\partial x} - Q\,\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA\\ &= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2]\,dA\\ &= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2)\,dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 4r^2\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta - r^2)r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3 + 4r^3\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{4} + \cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = \tfrac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

O círculo S_2 é orientado para baixo, então seu vetor normal unitário é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\,dS = \iint_D (-z)\,dA = \iint_D 0\,dA = 0$$

já que $z = 0$ sobre S_2. Finalmente, calculamos, pela definição, $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ como a soma das integrais de superfície de $\mathbf{F}$ sobre S_1 e S_2:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$ □

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo, se $\mathbf{E}$ é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

é chamada **fluxo elétrico** de $\mathbf{E}$ através da superfície S. Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície S é

11 $$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

onde ε_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$). Portanto, se o campo vetorial $\mathbf{F}$ do Exemplo 4 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = 4\pi\varepsilon_0/3$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u\cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 6 A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola quando a é menor que o raio da bola metálica.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 5, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

e, então,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas, sobre S, temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de transmissão de calor através de S é

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS \\ &= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3\end{aligned}$$

□

16.7 EXERCÍCIOS

1. Seja S a superfície que é fronteira da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0,1(x+y+z)}\, dS$ usando uma soma de Riemann, como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como os retângulos que são as faces da caixa S e os pontos P_{ij}^* como os centros destes retângulos.

2. Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, e por círculos no fundo e no topo. Suponha que você saiba que f é uma função contínua com

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3 \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z)\, dS$ usando a soma de Riemann, tomando como retalhos S_{ij} os círculos do fundo e do topo e a lateral dividida em quatro partes.

3. Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Dividindo H em quatro retalhos, estime o valor de $\iint_h f(x, y, z)\, dS$.

4. Suponha que $f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5-18 Calcule a integral de superfície.

5. $\iint_S x^2yz\, dS$, S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$.

6. $\iint_S xy\, dS$, S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

7. $\iint_S yz\, dS$, S é a parte do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante.

8. $\iint_S y\, dS$, S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

9. $\iint_S yz\, dS$, S é a superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u \cos v$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

10. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS$, S é o helicoide com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

11. $\iint_S x^2z^2\, dS$, S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$

12. $\iint_S z\, dS$, S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

13. $\iint_S y\, dS$, S é a parte do paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$

14. $\iint_S y^2\, dS$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy

15. $\iint_S (x^2z + y^2z)\, dS$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

16. $\iint_S xz\, dS$, S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$ e $x + y = 5$

17. $\iint_S (z + x^2y)\, dS$, S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante

18. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$, S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos do fundo e do topo

19–30 Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial $\mathbf{F}$ e superfície orientada S. Em outras palavras, determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S. Para superfícies fechadas, use a orientação positiva (para fora).

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação para cima.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S é o helicoide do Exercício 10 com orientação para cima.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^y\,\mathbf{i} - xze^y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, com orientação para baixo.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^4\,\mathbf{k}$, S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$, com orientação para baixo.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$, S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $y \geqslant 0$, com orientação para cima.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, S é formada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ e pelo círculo $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$.

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 4x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$, S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação para cima.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$, S é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$, S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$.

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S é a fronteira do semicilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (z - y)\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$, S é a superfície do tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

SCA **31.** Calcule $\iint_S xyz\,dS$ com precisão de quatro casas decimais, onde S é a superfície $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

SCA **32.** Determine o valor exato de $\iint_S x^2yz\,dS$, onde S é a superfície do Exercício 31.

SCA **33.** Determine o valor de $\iint_S x^2y^2z^2\,dS$ correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.

SCA **34.** Determine o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + z^2e^{x/5}\,\mathbf{k}$$

através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$, com orientação para cima. Ilustre, usando um sistema de computação algébrica para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.

35. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $y = h(x, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a esquerda.

36. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).

37. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, se ele tiver densidade constante.

38. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

39. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I_z em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S, se a função densidade é ρ.

(b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 38.

40. Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$. Se S tiver densidade constante k, encontre (a) o centro de massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z.

41. Um fluido tem densidade 870 kg/m^3 e escoa com velocidade $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, onde x, y, e z são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$ em metros por segundo. Encontre a vazão para fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

42. A água do mar tem densidade 1 025 kg/m^3 e escoa em um campo de velocidade $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, onde x, y, e z são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$ em metros por segundo. Encontre a vazão para fora do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

43. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

44. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

45. A temperatura em um ponto (x, y, z) em uma substância com condutividade $K = 6{,}5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância para dentro superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

46. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

47. Seja $\mathbf{F}$ um campo inverso do quadrado, ou seja, $\mathbf{F}(r) = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ para alguma constante c, onde $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Mostre que o fluxo de $\mathbf{F}$ por uma esfera S com centro na origem é independente do raio de S.

16.8 O TEOREMA DE STOKES

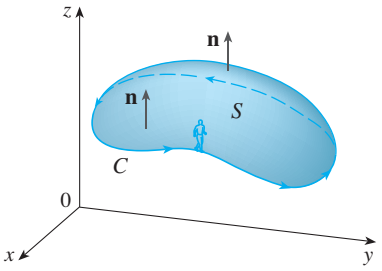


FIGURA 1

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva fronteira plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com seu vetor normal unitário $\mathbf{n}$. A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira C** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de $\mathbf{n}$, então a superfície estará sempre à sua esquerda.

TEOREMA DE STOKES Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

■ O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (ele detinha a mesma cadeira de Newton, Lucasian Professor of Mathematics) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thompson (1824-1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{e} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de $\mathbf{F}$ é igual à integral de superfície da componente normal do rotacional de $\mathbf{F}$.

A curva fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S, de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \boxed{1}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que o rot $\mathbf{F}$ é uma espécie de derivada de $\mathbf{F}$) e do lado direito, envolvendo valores de $\mathbf{F}$ calculados somente na *fronteira* de S.

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy, com orientação para cima, o vetor normal unitário é $\mathbf{k}$, a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Esta é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada pela Equação 16.5.12. Então vemos que o Teorema de Green é, na verdade, um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de demonstrar no caso geral, podemos fazer uma demonstração quando S for um gráfico e $\mathbf{F}$, S e C forem bem comportados.

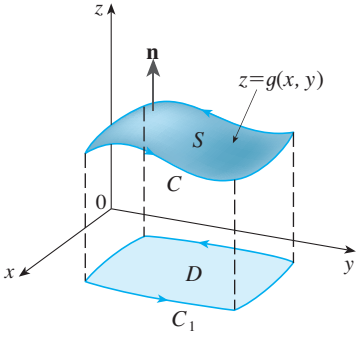


FIGURA 2

DEMONSTRAÇÃO DE UM CASO ESPECIAL DO TEOREMA DE STOKES Admitiremos que a equação de S seja $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja curva fronteira C_1 corresponde a C. Se a orientação de S for para cima, então a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 (veja a Figura 2). Foi-nos dado que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ e que as derivadas parciais de P, Q e R são contínuas.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Fórmula 16.7.10 com $\mathbf{F}$ substituído por rot $\mathbf{F}$. O resultado é

$$\boxed{2} \quad \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dA$$

onde as derivadas parciais de P, Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Se

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

é a representação paramétrica de C_1, então a representação paramétrica de C é

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_b^a \left(P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\frac{dz}{dt}\right)dt \\
&= \int_b^a \left[P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right]dt \\
&= \int_b^a \left[\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}+\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right]dt \\
&= \int_{C_1} \left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]dA
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Green no último passo. Então, utilizando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que P, Q e R são funções de x, y e z e que z é, por sua vez, função de x e y, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Bigg[&\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) \\
&-\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)\Bigg]dA
\end{aligned}$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser rearranjados para que coincidam com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

□

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando visto de cima.)

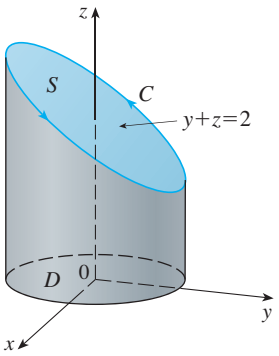


FIGURA 3

SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira C, a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é C. Se orientarmos S para cima, então a orientação induzida em C será positiva. A projeção D de S sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, e assim, usando a Equação 16.7.10 com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\,dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 2 Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy (veja a Figura 4).

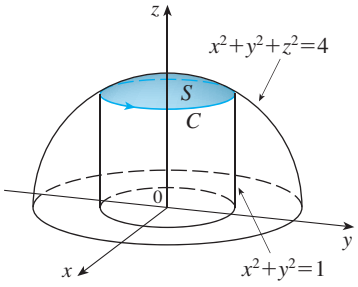


FIGURA 4

SOLUÇÃO Para achar a curva fronteira C, resolvemos as equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$. Subtraindo, obtemos $z^2 = 3$ e, assim, $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$). Então C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Temos também

$$\mathbf{F}(r(t)) = \sqrt{3} \cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3} \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

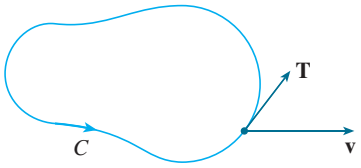
$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t \cos t)\,dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0 \end{aligned}$$

□

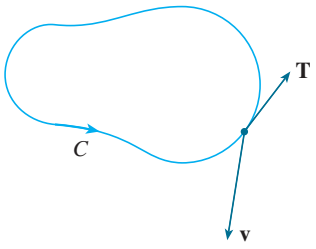
Observe que, no Exemplo 2, calculamos a integral de superfície simplesmente sabendo os valores de $\mathbf{F}$ na curva fronteira C. Isso significa que, se tivermos outra superfície orientada com a mesma curva fronteira C, obteremos o mesmo valor para a integral de superfície!

Em geral, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma curva fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

$$\boxed{3} \qquad \iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



(a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulação positiva



(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulação negativa

FIGURA 5

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e $\mathbf{v}$ represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

e lembre-se de que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente de $\mathbf{v}$ na direção do vetor tangente unitário $\mathbf{T}$. Isso significa que, quanto mais próxima a direção de $\mathbf{v}$ está da direção de $\mathbf{T}$, maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover em torno de C e é chamada **circulação** de $\mathbf{v}$ em torno de C (veja a Figura 5).

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0. Então $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos os pontos P de S_a, porque rot $\mathbf{F}$ é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação da circulação em torno do círculo fronteira C_a:

$$\begin{aligned}\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0)\, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0)\pi a^2\end{aligned}$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \to 0$ e temos

$$\boxed{4} \qquad \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

■ Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto P, como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a rot $\mathbf{v}$.

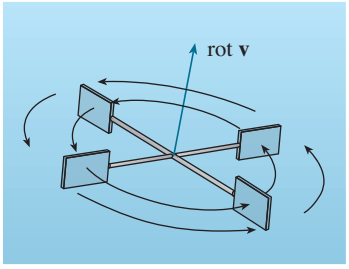


FIGURA 6

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que rot $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a medida do efeito da rotação do fluido em torno do eixo $\mathbf{n}$. O efeito de girar é maior em um eixo paralelo a rot $\mathbf{v}$.

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 16.5.4 (que afirma que, se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{F}$ é conservativo). De nosso trabalho prévio (Teoremas 16.3.3 e 16.3.4), sabemos que $\mathbf{F}$ é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C. Dado C, suponha que possamos achar uma superfície orientada S cuja fronteira seja C (isso pode ser feito, mas a demonstração requer técnicas avançadas). Então o Teorema de Stokes fornece

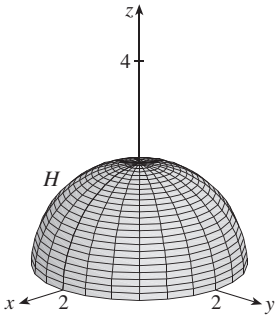
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

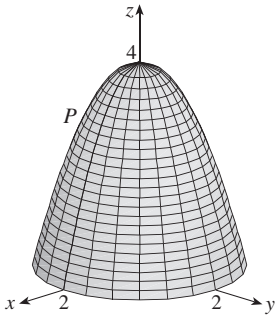
Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C.

16.8 EXERCÍCIOS

1. Dados um hemisfério H e uma parte P de um paraboloide, suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujas componentes tenham derivadas parciais contínuas. Explique por que

$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$





2-6 Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y \cos z\, \mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} z\, \mathbf{j} + xe^y\, \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, orientado para cima

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\, \mathbf{i} + y^2z^2\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado para cima

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y^3z\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}(xyz)\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$, S é a parte do cone $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 3$, orientado na direção positiva do eixo y

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\, \mathbf{i} + xy\, \mathbf{j} + x^2yz\, \mathbf{k}$, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, com orientação para fora. [*Sugestão*: use a Equação 3.]

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \cos z\, \mathbf{i} + x^2z\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ orientado na direção positiva do eixo x [*Sugestão*: use a Equação 3.]

7-10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\, \mathbf{i} + (y + z^2)\, \mathbf{j} + (z + x^2)\, \mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x}\, \mathbf{i} + e^x\, \mathbf{j} + e^z\, \mathbf{k}$, C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\, \mathbf{i} + 2xz\, \mathbf{j} + e^{xy}\, \mathbf{k}$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 16, z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + 2z\, \mathbf{j} + 3y\, \mathbf{k}$, C é a curva de intersecção do plano $x + z = 5$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\, \mathbf{i} + xy^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$$

e C é a curva da intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine as equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\, \mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do paraboloide hiperbólico e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

13-15 Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície S.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está acima do plano $z = 1$, orientado para cima.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$, S é a parte do plano $2x + y + z = 2$ que está no primeiro octante, orientada para cima.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{i} + z\, \mathbf{j} + x\, \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientado na direção positiva do eixo y.

16. Seja C uma curva fechada simples lisa que está no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z\, dx - 2x\, dy + 3y\, dz$$

depende apenas da área da região englobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

17. Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$ e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\, \mathbf{i} + 2xy\, \mathbf{j} + 4y^2\, \mathbf{k}$$

Encontre o trabalho feito.

18. Calcule

$$\int_C (y + \operatorname{sen} x)\, dx + (z^2 + \cos y)\, dy + x^3\, dz$$

onde C é a curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$. [*Sugestão*: observe que C está na superfície $z = 2xy$.]

19. Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para demonstrar o seguinte:

(a) $\int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROJETO ESCRITO

TRÊS HOMENS E DOIS TEOREMAS

■ A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.



Cortesia de Masters and Fellows of Gonville e Caius Colleg, University of Cambridge, England

Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e predizer fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos. Os fatos básicos da história são dados nas páginas 1056 e 1193.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e as relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em torná-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram de pesquisas em eletricidade e magnetismo e foram depois usados no estudo de diversos outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes e o livro de Thomson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem uma descrição da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

1. CANNELL, D. M. *George Green, Mathematician and Physicist 1793-1841: The Background to His Life and Work*. Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
2. GILLISPIE, C. C. (ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York, Scribner's, 1974. Ver artigo sobre Green em P. J. Wallis, v. XV, artigo sobre Thompson em Jed Buchwald, e sobre Stokes em E. M. Parkinson, no v. XIII.
3. GRATTAN-GUINNESS, I. *Why did George Green write his essay of 1828 on electricity and magnetism*? Amer. Math. Monthly: v. 102 (1995), p. 387-96.
4. GRAY, J. *There was a jolly miller*. The New Scientist, v. 139 (1993), p. 24-7.
5. HUTCHINSON, G. E. *The Enchanted Voyage and Other Studies*. Westport Conn.: Greenwood Press, 1978.
6. KATZ,V. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 678-80.
7. KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Time*s. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 683-85.
8. THOMSON, S. P. *The Life of Lord Kelvin*. Nova York: Chelsea, 1976.

16.9 O TEOREMA DO DIVERGENTE

Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

onde C é a curva fronteira da região do plano D, orientada positivamente. Se quisermos estender esse teorema para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$, podemos conjecturar que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV \qquad 1$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E. A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas e é chamada Teorema do Divergente. Observe sua semelhança com

os Teoremas de Green e de Stokes, pois ele relaciona a integral da derivada de uma função (div **F**, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original **F** sobre a fronteira da região.

Nesse estágio, você pode fazer uma revisão dos vários tipos de regiões sobre os quais calculamos integrais triplas na Seção 15.6. Enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Divergente para as regiões E que são simultaneamente dos tipos 1, 2 e 3, às quais chamaremos **regiões sólidas simples** (por exemplo: regiões limitadas por elipsoides ou caixas retangulares são regiões sólidas simples). A fronteira de **F** é uma superfície fechada e usaremos a convenção, introduzida na Seção 16.7, de que a orientação positiva é para fora, ou seja, o vetor normal unitário **n** apontará para fora de E.

■ O Teorema do Divergente é às vezes chamado Teorema de Gauss, em homenagem ao grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que descobriu esse teorema durante suas pesquisas sobre eletrostática. Em muitos países da Europa, o Teorema do Divergente é conhecido como Teorema de Ostrogradsky, em homenagem ao matemático russo Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), que publicou esse resultado em 1826.

TEOREMA DO DIVERGENTE Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja **F** um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de **F** pela superfície fronteira de E é igual à integral tripla do divergente de **F** em E.

DEMONSTRAÇÃO Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

logo
$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Se **n** é o vetor normal unitário para fora de S, então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema do Divergente é

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS\end{aligned}$$

Portanto, para demonstrar o Teorema do Divergente, é suficiente demonstrar as três seguintes equações:

$$\boxed{2} \qquad \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV$$

$$\boxed{3} \qquad \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV$$

$$\boxed{4} \qquad \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Para demonstrar a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy. Pela Equação 15.6.6, temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\boxed{5} \qquad \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))]\, dA$$

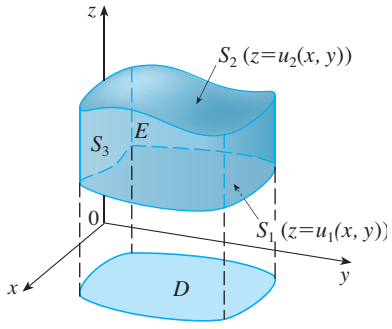


FIGURA 1

A superfície fronteira S é formada por três partes: a superfície do fundo S_1, a superfície do topo S_2 e, possivelmente, uma superfície vertical S_3, que está acima da curva fronteira de D (veja a Figura 1. Pode acontecer de S_3 não existir, como no caso da esfera). Observe que sobre S_3 temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, porque $\mathbf{k}$ é vertical e $\mathbf{n}$ é horizontal, e assim

$$\iint_{S_3} R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_3} 0\, dS = 0$$

Logo, independentemente da existência de uma superfície vertical, podemos escrever

$$\boxed{6} \qquad \iint_S R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

A equação de S_2 é $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e o vetor normal que sai de $\mathbf{n}$ aponta para cima. Da Equação 16.7.10 (com $\mathbf{F}$ substituído por $R\,\mathbf{k}$), temos

$$\iint_{S_2} R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\, dA$$

Sobre S_1 temos $z = u_1(x, y)$, mas aqui a normal $\mathbf{n}$ aponta para baixo, então multiplicamos por -1:

$$\iint_{S_1} R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y))\, dA$$

Portanto, a Equação 6 fica

$$\iint_S R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))]\, dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

$$\iint_S R\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

■ Observe que o método de demonstração do Teorema do Divergente é muito semelhante ao do Teorema de Green.

As Equações 2 e 3 são demonstradas de modo análogo, usando as expressões para E como uma região do tipo 2 ou do tipo 3. □

EXEMPLO 1 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos o divergente de $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_B 1\, dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

□

■ A solução do Exemplo 1 deve ser comparada com a solução do Exemplo 4 na Seção 16.7.

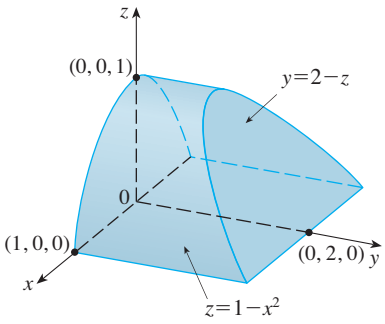


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\,\mathbf{k}$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$ (veja a Figura 2).

SOLUÇÃO Seria extremamente difícil calcular a integral da superfície dada diretamente (teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S). Além disso, o divergente de $\mathbf{F}$ é muito menos complicado que o próprio $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = y + 2y = 3y$$

Portanto, usamos o Teorema do Divergente para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y\, dV \\
&= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} y\, dy\, dz\, dx = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\, dz\, dx \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}[(x^2+1)^3 - 8]\, dx \\
&= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\, dx = \tfrac{184}{35}
\end{aligned}$$

□

Apesar de termos demonstrado o Teorema do Divergente somente para o caso de regiões sólidas simples, ele pode ser demonstrado para regiões que são a união finita de regiões sólidas simples (o procedimento é semelhante ao usado na Seção 16.4 para estender o Teorema de Green).

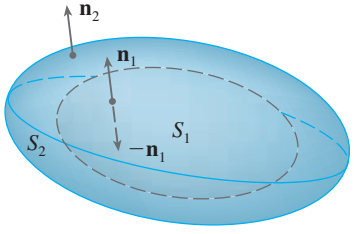


FIGURA 3

Por exemplo, vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas S_1 e S_2, onde S_1 está dentro de S_2. Sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ as normais apontando para fora de S_1 e S_2. Então, a superfície fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e sua normal $\mathbf{n}$ é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ sobre S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ sobre S_2 (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema do Divergente a S, obtemos

$$\begin{aligned}
\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS \\
&= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{7}$$

Vamos aplicar isso ao campo elétrico (veja o Exemplo 5 na Seção 16.1):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

onde S_1 é uma pequena esfera com raio a e centro na origem. Você pode verificar que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (veja o Exercício 23). Portanto, da Equação 7 vem

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em $\mathbf{x}$ é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto,

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

já que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Assim, temos

$$\iint_{S_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS$$

$$= \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\,4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de $\mathbf{E}$ é $4\pi\varepsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.11) para uma única carga. A relação entre ε e ε_0 é $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ. Então, a vazão do fluido por unidade de área é $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a, então div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos de B_a, uma vez que div $\mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a}\text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_{B_a}\text{div}\,\mathbf{F}(P_0)\,dV = \text{div}\,\mathbf{F}(P_0)V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \to 0$ e sugere que

$$\text{div}\,\mathbf{F}(P_0) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{8}$$

A Equação 8 nos diz que div $\mathbf{F}(P_0)$ é a vazão total por unidade de volume que sai de P_0 (essa é a razão para o nome *divergente*). Se div $\mathbf{F}(P) > 0$, o escoamento total perto de P é para fora e P é chamado **fonte**. Se div $\mathbf{F}(P) < 0$, o escoamento total perto de P é para dentro e P é denominado **sorvedouro**.

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1. Então, o fluxo total é para fora perto de P_1 e, assim, div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2, os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo total é para dentro, assim, div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar essa impressão. Como $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, temos div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim os pontos acima da reta $y = -x$ são fontes e os pontos abaixo da reta são sorvedouros.

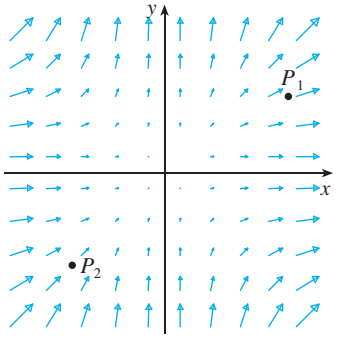


FIGURA 4
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

16.9 EXERCÍCIOS

1-4 Verifique que o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e $z = 1$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$e pelo plano xy
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$, E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

5-15 Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$, S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e $z = 2$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + xz^4\,\mathbf{k}$, S é a superfície da caixa de vértices $(\pm1, \pm2, \pm3)$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y\,\mathbf{i} - x^2y^2\,\mathbf{j} - x^2yz\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + \cos(xz)\,\mathbf{j} + y \cos z\,\mathbf{k}$, S é o elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$, S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x + 2y + z = 2$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2z)\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x^3z\,\mathbf{i} + 4y^3z\,\mathbf{j} + 3z^4\,\mathbf{k}$, S é a esfera com centro na origem e raio R

14. $\mathbf{F} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, onde $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, S consiste do hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano xy

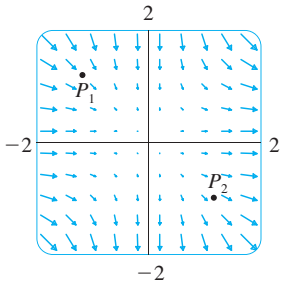
SCA **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \operatorname{tg} z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$, S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

SCA **16.** Use um sistema de computação algébrica para traçar o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$ no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ e $z = \pi/2$. Em seguida, calcule o fluxo através da superfície do cubo.

17. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$ e S é a metade de cima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Sugestão*: observe que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2, onde S_1 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

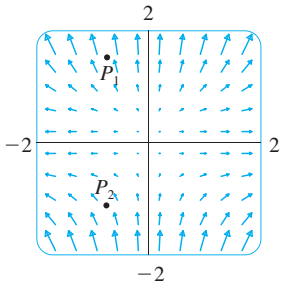
18. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \operatorname{tg}^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para baixo.

19. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$. Use a interpretação do divergente deduzida nesta seção para determinar se div $\mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2.



20. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros no campo vetorial $\mathbf{F}$ mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.

(b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use a definição de divergente para verificar sua resposta da parte (a).



SCA **21–22** Trace o campo vetorial e conjecture onde div $\mathbf{F} > 0$ e onde div $\mathbf{F} < 0$. A seguir, calcule div $\mathbf{F}$ para verificar sua conjectura.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$

22. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

23. Verifique que div $\mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$.

24. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2)\,dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25–30 Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

28. $\iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS = \iiint_E \nabla^2 f\,dV$

29. $\iint_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f \nabla^2 g + \nabla f + \nabla g)\,dV$

30. $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f)\,dV$

31. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Demonstre que

$$\iint_S f\,\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

Estas integrais de superfície e triplas de funções vetoriais são vetores definidos integrando cada função componente. [*Sugestão*: comece aplicando o Teorema do Divergente a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.]

32. Um sólido ocupa a região E com superfície S e está imerso em um líquido com densidade constante ρ. Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo, adentrando o líquido. Então, a pressão na profundidade z é $p = \rho gz$, onde g é a aceleração da gravidade (veja a Seção 6.5). A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\mathbf{n}\, dS$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Use o resultado do Exercício 31 para mostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Observe que $\mathbf{F}$ é orientado para cima porque z está orientado para baixo.) O resultado é o *Princípio de Arquimedes*: a força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

16.10 RESUMO DOS TEOREMAS

Os principais resultados deste capítulo são versões em dimensão maior do Teorema Fundamental do Cálculo. Para facilitar a memorização, reunimos os teoremas (sem suas hipóteses) para que você possa visualizar mais facilmente suas semelhanças essenciais. Observe que em cada caso temos uma integral de uma "derivada" sobre uma região do lado esquerdo e do lado direito temos os valores da função original somente na *fronteira* da região.

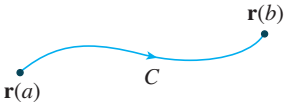
Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$



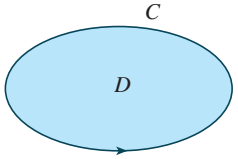
Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



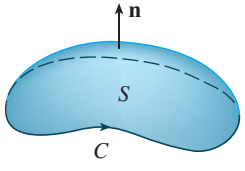
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\, dx + Q\, dy$$



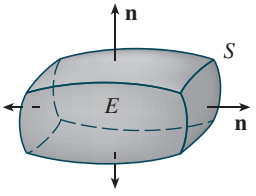
Teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema do Divergente

$$\iiint_E \text{div}\, \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



16 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. O que é um campo vetorial? Dê três exemplos com significado físico.
2. (a) O que é um campo vetorial conservativo?
   (b) O que é uma função potencial?
3. (a) Escreva a definição da integral de linha para uma função escalar f ao longo de uma curva lisa C em relação ao comprimento de arco.
   (b) Como calcular tal integral?
   (c) Escreva expressões para a massa e para o centro de massa de um arame fino com o formato da curva C se o arame tiver função densidade linear $\rho(x, y)$.
   (d) Escreva as definições das integrais de linha sobre C de uma função escalar f com relação a x, y e z.
   (e) Como calcular essas integrais de linha?
4. (a) Defina a integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F}$ ao longo da curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
   (b) Se $\mathbf{F}$ é um campo de força, o que essa integral de linha representa?
   (c) Se $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$, qual a relação entre a integral de linha de $\mathbf{F}$ e as integrais de linha das componentes P, Q e R?
5. Enuncie o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.
6. (a) O que significa dizer que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho?
   (b) Se você souber que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, o que poderá dizer sobre $\mathbf{F}$?
7. Enuncie o Teorema de Green.
8. Escreva expressões para a área delimitada pela curva C em termos da integral de linha em torno de C.
9. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$.
   (a) Defina rot $\mathbf{F}$.
   (b) Defina div $\mathbf{F}$.
   (c) Se $\mathbf{F}$ for um campo de velocidade em um fluido, qual a interpretação física de rot $\mathbf{F}$ e de div $\mathbf{F}$?
10. Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, como determinar se $\mathbf{F}$ é conservativo? E se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$?
11. (a) O que é uma superfície parametrizada? O que são suas curvas de grade?
    (b) Escreva uma expressão para a área de uma superfície parametrizada.
    (c) Qual é a área da superfície dada pela equação $z = g(x, y)$?
12. (a) Escreva a definição da integral de superfície de uma função escalar f sobre uma superfície S.
    (b) Como calcular tal integral se S for uma superfície parametrizada dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (c) E se S for dada pela equação $z = g(x, y)$?
    (d) Se uma folha fina tem o formato de uma superfície S e a densidade em (x, y, z) é $\rho(x, y, z)$, escreva expressões para a massa e o centro de massa da folha.
13. (a) O que é uma superfície orientada? Dê um exemplo de superfície não orientável.
    (b) Defina a integral de superfície (ou fluxo) de um campo vetorial $\mathbf{F}$ sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$.
    (c) Como calcular tal integral se S for uma superfície parametrizada dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (d) E se S for dada por uma equação $z = g(x, y)$?
14. Enuncie o Teorema de Stokes.
15. Enuncie o Teorema do Divergente.
16. Quais as semelhanças entre o Teorema Fundamental das Integrais de Linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente?

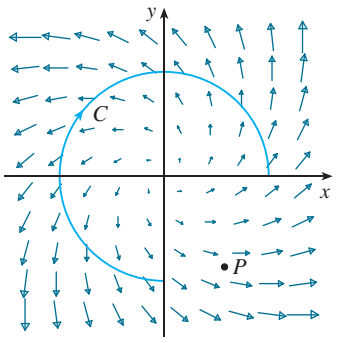
TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial, então div $\mathbf{F}$ é um campo vetorial.
2. Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial, então rot $\mathbf{F}$ é um campo vetorial.
3. Se f tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas sobre $\mathbb{R}^3$, então div(rot ∇f) $= 0$.
4. Se f tem derivadas parciais contínuas sobre $\mathbb{R}^3$ e C for um círculo qualquer, então $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.
5. Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ e $P_y = Q_x$ em uma região aberta D, então $\mathbf{F}$ é conservativo.
6. $\int_{-C} f(x, y)\, ds = -\int_C f(x, y)\, ds$
7. Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ um campo vetorial constante, então $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
8. Existe um campo vetorial $\mathbf{F}$ tal que rot $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

EXERCÍCIOS

1. São mostrados um campo vetorial $\mathbf{F}$, uma curva C e um ponto P.
(a) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero? Explique.
(b) div $\mathbf{F}(P)$ é positivo, negativo ou zero? Explique.



2-9 Calcule a integral de linha.

2. $\int_C x\,ds$, C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

3. $\int_C yz \cos x\,ds$, C: $x = t, y = 3\cos t, z = 3 \operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$

4. $\int_C y\,dx + (x + y^2)\,dy$, C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ com a orientação anti-horária

5. $\int_C y^3\,dx + x^2\,dy$, C é o arco de parábola $x = 1 - y^2$ de $(0, -1)$ a $(0, 1)$

6. $\int_C \sqrt{xy}\,dx + e^y\,dy + xz\,dz$, C é dada por $\mathbf{r}(t) = t^4\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

7. $\int_C xy\,dx + y^2\,dy + yz\,dz$, C é o segmento de reta de $(1, 0, -1)$ até $(3, 4, 2)$

8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$ e C é dada por $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$

9. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$ e C é dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}, 0 \leqslant t \leqslant 1$

10. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ ao mover uma partícula do ponto $(3, 0, 0)$ para o ponto $(0, \pi/2, 3)$
(a) por uma reta
(b) pela hélice $x = 3\cos t, y = t, z = 3 \operatorname{sen} t$

11-12 Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo. Então, encontre a função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + (e^y + x^2e^{xy})\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$

13-14 Mostre que $\mathbf{F}$ é conservativo e use esse fato para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da curva dada.

13. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^2 - 2xy^3)\,\mathbf{i} + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)\,\mathbf{j}$, C: $\mathbf{r}(t) = (t + \operatorname{sen} \pi t)\,\mathbf{i} + (2t + \cos \pi t)\,\mathbf{j}, 0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + (xe^y + e^z)\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$, C é o segmento de reta de $(0, 2, 0)$ a $(4, 0, 3)$

15. Verifique que o Teorema de Green é verdadeiro para a integral de linha $\int_C xy^2\,dx - x^2y\,dy$, onde C consiste na parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ e no segmento de reta de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

16. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \sqrt{1 + x^3}\,dx + 2xy\,dy$, onde C é o triângulo com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 3)$.

17. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C x^2y\,dx - xy^2\,dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado no sentido anti-horário.

18. Determine rot $\mathbf{F}$ e div $\mathbf{F}$ se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^{-y} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + e^{-z} \operatorname{sen} x\,\mathbf{k}$$

19. Mostre que não existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ tal que rot $\mathbf{G} = 2x\,\mathbf{i} + 3yz\,\mathbf{j} - xz^2\,\mathbf{k}$

20. Mostre que, sob algumas condições a serem enunciadas sobre campos vetoriais $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

21. Se C é uma curva fechada simples lisa por partes e f e g são funções diferenciáveis, mostre que

$$\int_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

22. Se f e g são funções com derivadas de segunda ordem, mostre que

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

23. Se f é uma função harmônica, ou seja, $\nabla^2 f = 0$, mostre que a integral de linha $\int f_y\,dx - f_x\,dy$ é independente do caminho em qualquer região simples D.

24. (a) Esboce a curva C com equações paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(b) Determine

$$\int_C 2xe^{2y}\,dx + (2x^2e^{2y} + 2y \operatorname{cotg} z)\,dy - y^2 \operatorname{cossec}^2 z\,dz$$

25. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 2)$.

26. (a) Determine uma equação do plano tangente no ponto $(4, -2, 1)$ à superfície parametrizada S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2\,\mathbf{i} - uv\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}, 0 \leqslant u \leqslant 3, -3 \leqslant v \leqslant 3$$

(b) Use um computador para traçar o gráfico da superfície S e do plano tangente encontrado na parte (a).
(c) Escreva, mas não calcule, uma integral que dê a área da superfície S.

SCA (d) Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2}\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2}\,\mathbf{k}$$

encontre $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ correta até a quarta casa decimal.

27-30 Calcule a integral de superfície.

27. $\iint_S z\, dS$, onde S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 4$

28. $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$, onde S é a parte do plano $z = 4 + x + y$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

29. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com orientação para fora

30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$ com orientação para cima

31. Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, onde S é a parte do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy e S está orientado para cima.

32. Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + z^3e^{xy}\,\mathbf{k}$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que está acima do plano $z = 1$ e S tem orientação para cima.

33. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

34. Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.

35. Verifique que o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

36. Calcule o fluxo para fora de

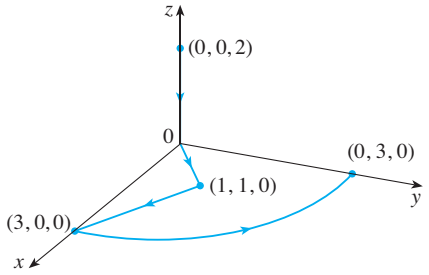
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

pelo elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\,\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\,\mathbf{j} + (x^3y + 2z)\,\mathbf{k}$$

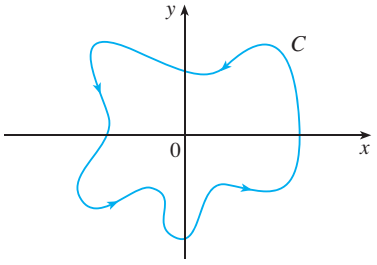
Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva com início em $(0, 0, 2)$ e término em $(0, 3, 0)$, como mostrado na figura.



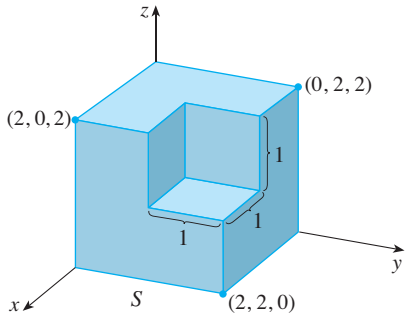
38. Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\,\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C está representado na figura.



39. Determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a superfície mostrada na figura, com orientação para fora (a fronteira do cubo com um cubo unitário removido).



40. Se as componentes de $\mathbf{F}$ têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e S é a superfície fronteira de uma região sólida simples, mostre que $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

41. Se $\mathbf{a}$ é um vetor constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é uma superfície orientada lisa com uma curva fronteira C fechada simples, lisa e positivamente orientada, mostre que

$$\iint_S 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

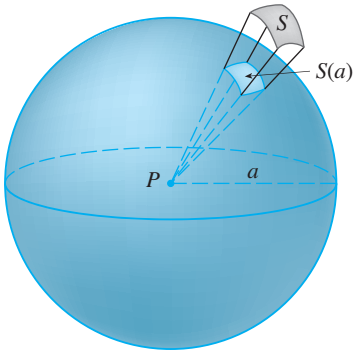


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. Seja S uma superfície parametrizada lisa e seja P um ponto tal que cada reta que comece em P intercepte S no máximo uma vez. O **ângulo sólido** $\Omega(S)$ subtendido por S em P é o conjunto das retas que começam em P e passam por S. Seja $S(a)$ a intersecção de $\Omega(S)$ com a superfície da esfera com centro em P e raio a. Então a medida do ângulo sólido (em *estereo-radianos*) é definida como

$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique o Teorema do Divergente para a parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ e S e mostre que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor radial de P a um ponto qualquer sobre S, $r = |\mathbf{r}|$ e o sentido do vetor normal unitário $\mathbf{n}$ se afasta de P.

Isso mostra que a definição de medida de um ângulo sólido independe do raio a da esfera. Assim, a medida do ângulo sólido é igual à área subtendida sobre uma esfera *unitária* (observe a analogia com a definição da medida em radianos). O ângulo sólido total subtendido por uma esfera em seu centro é, portanto, 4π estereo-radianos.

2. Encontre uma curva fechada simples C para a qual o valor da integral de linha $\int_C (y^3 - y)\, dx - 2x^3\, dy$ é máximo.

3. Seja C uma curva espacial simples fechada lisa por partes que esteja contida em um plano com vetor unitário normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ e orientada positivamente em relação a $\mathbf{n}$. Mostre que a área do plano delimitada por C é

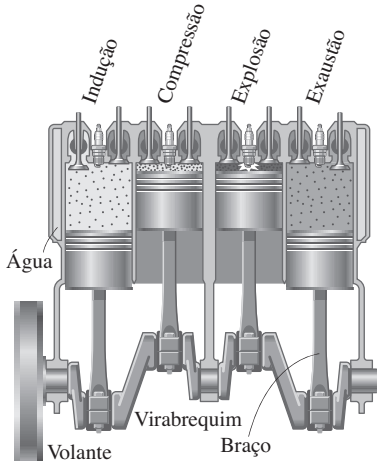
$$\tfrac{1}{2} \int_C (bz - cy)\, dx + (cx - az)\, dy + (ay - bx)\, dz$$

4. Investigue a forma da superfície com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen}(u + v)$. Comece traçando a superfície sob diversos pontos de vista. Explique a aparência dos gráficos determinando os cortes nos planos horizontais $z = 0$, $z = \pm 1$ e $z = \pm \frac{1}{2}$.

5. Demonstre a seguinte identidade:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

6. A figura retrata a sequência de eventos em cada cilindro de um motor de quatro cilindros de combustão interna. Cada pistão se move para cima e para baixo e está ligado por um braço-pivô ao virabrequim. Sejam $P(t)$ e $V(t)$ a pressão e o volume dentro de um cilindro no instante t, onde $a \leq t \leq b$ é o tempo necessário para um ciclo completo. O gráfico mostra como P e V variam durante um ciclo em um motor de quatro tempos. Durante o estágio de indução (de ① a ②), a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Então, o pistão comprime rapidamente a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de ② a ③) durante o qual a pressão aumenta e o volume diminui. Em ③, uma faísca proveniente da vela de ignição provoca a combustão da mistura, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até ④. Em seguida, com a válvula fechada, uma rápida expansão do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de ④ a ⑤). A válvula se abre, a temperatura e a pressão caem e a energia mecânica armazenada no volante em rotação impulsiona o pistão para cima, forçando a saída dos gases que se formaram no interior pela válvula, no estágio de exaustão. A válvula de exaustão se fecha e a válvula de entrada se abre. Estamos de volta a ① e o ciclo se reinicia.



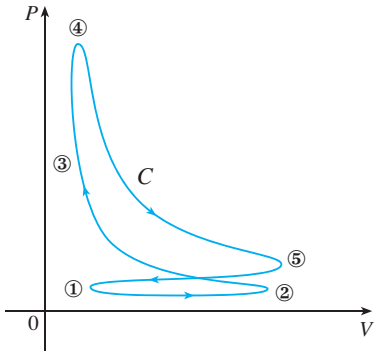


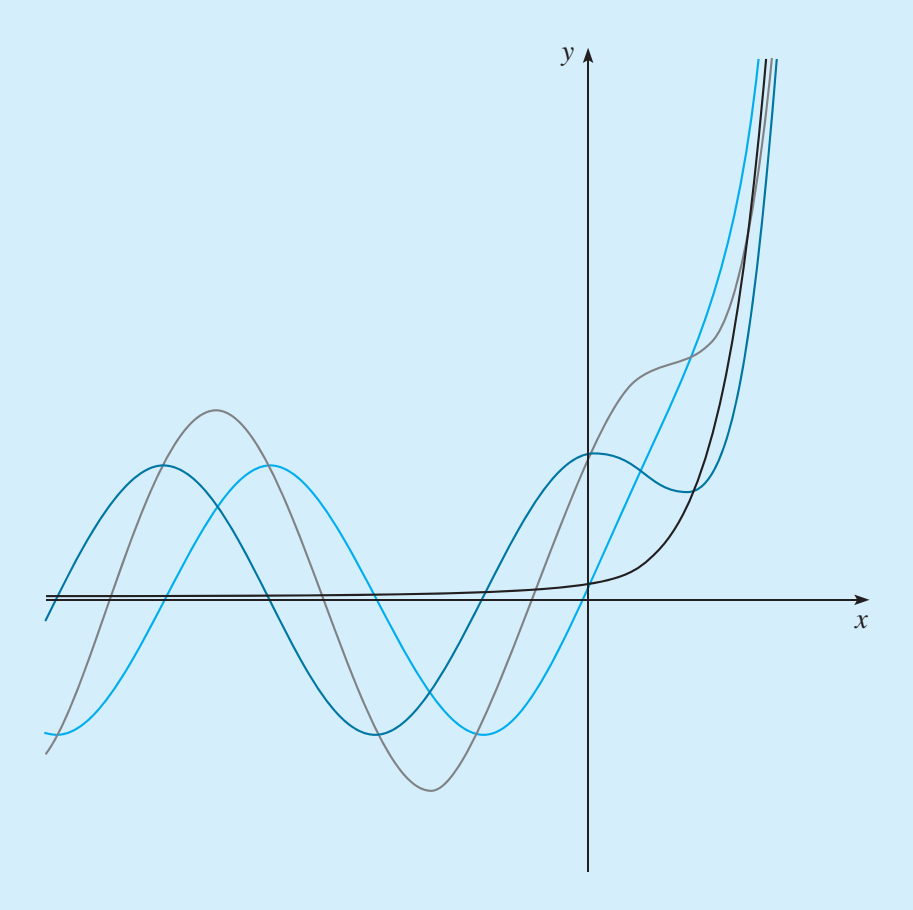
FIGURA PARA O PROBLEMA 6

(a) Mostre que o trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo de um motor de quatro tempos é $W = \int_C P\, dV$, onde C é a curva no plano PV mostrada na figura. [*Sugestão*: seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro e observe que a força sobre o pistão é $\mathbf{F} = AP(t)\,\mathbf{i}$, onde A é a área do topo do pistão. Então, $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 é dado por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$, $a \leq t \leq b$. Um modo alternativo é trabalhar diretamente com as somas de Riemann.]

(b) Use a Fórmula 16.4.5 para mostrar que o trabalho é a diferença das áreas englobadas pelos dois laços de C.

17

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM



A maioria das soluções da equação diferencial $y'' + 4y = e^{3x}$ lembra as funções seno quando x é negativo, mas todas elas se parecem com funções exponenciais quando x é grande.

A ideia central das equações diferenciais está explicada no Capítulo 9, onde nos concentramos em equações de primeira ordem. Neste capítulo, estudaremos as equações diferenciais lineares de segunda ordem e aprenderemos como aplicá-las na resolução de problemas de vibrações de mola e circuitos elétricos. Veremos também como séries infinitas podem ser usadas para resolver equações diferenciais.

Uma **equação diferencial linear de segunda ordem** tem a forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \quad \boxed{1}$$

onde P, Q, R e G são funções contínuas. Vimos na Seção 9.1 que equações desse tipo surgem no estudo do movimento de uma mola. Na Seção 17.3 aprofundaremos essa aplicação, bem como sua aplicação aos circuitos elétricos.

Nesta seção, estudaremos o caso onde $G(x) = 0$, para todo x, na Equação 1. Tais equações são chamadas equações lineares **homogêneas**. Assim, a forma de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem é

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad \boxed{2}$$

Se $G(x) \neq 0$ para algum x, a Equação 1 é **não homogênea** e será discutida na Seção 17.2.

Dois fatos básicos permitem-nos resolver equações lineares homogêneas. O primeiro é que, se conhecermos duas soluções y_1 e y_2 de tal equação, então a **combinação linear** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também será uma solução.

3 TEOREMA Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem ambas soluções da equação linear homogênea (2) e se c_1 e c_2 forem constantes quaisquer, então a função

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

também será uma solução da Equação 2.

DEMONSTRAÇÃO Uma vez que y_1 e y_2 são soluções da Equação 2, temos

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

e

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Portanto, usando as regras básicas para derivação, temos

$$\begin{aligned} &P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\ &\quad = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\quad = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\quad = c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\ &\quad = c_1(0) + c_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é uma solução da Equação 2. □

O outro fato de que precisamos é dado pelo seguinte teorema, demonstrado em cursos mais avançados. Ele diz que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções **linearmente independentes** y_1 e y_2. Isso significa que nem y_1 nem y_2 são múltiplos por constantes um do outro. Por exemplo: as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes, mas $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

4 TEOREMA Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da Equação 2, e $P(x)$ nunca for 0, então a solução geral será dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O Teorema 4 é muito útil, pois diz que, se conhecermos *duas* soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos *todas* as soluções.

Em geral, não é fácil descobrir soluções particulares de uma equação linear de segunda ordem. Mas é sempre possível fazer isso se as funções coeficientes P, Q e R forem funções constantes, isto é, se a equação diferencial tiver a forma

$$\textbf{5} \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.

Não é difícil pensar em alguns prováveis candidatos para as soluções particulares da Equação 5 se a enunciarmos verbalmente. Estamos procurando uma função y tal que uma constante vezes sua segunda derivada y'' mais outra constante vezes y' mais uma terceira constante vezes y é igual a 0. Sabemos que a função exponencial $y = e^{rx}$ (onde r é uma constante) tem a propriedade de que sua derivada é um múltiplo por constante dela mesma: $y' = re^{rx}$. Além disso, $y'' = r^2e^{rx}$. Se substituirmos essas expressões na Equação 5 veremos que $y = e^{rx}$ é uma solução se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

ou

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Mas e^{rx} é diferente de zero. Assim, $y = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5 se r é uma raiz da equação

$$\textbf{6} \qquad ar^2 + br + c = 0$$

A Equação 6 é denominada **equação auxiliar** (ou **equação característica**) da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Observe que ela é uma equação algébrica que pode ser obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por r^2, y' por r e y por 1.

Algumas vezes as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar podem ser determinadas por fatoração. Em outros casos, elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática:

$$\textbf{7} \qquad r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Separamos em três casos, de acordo com o sinal do discriminante $b^2 - 4ac$.

CASO I $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são reais e distintas, logo $y_1 = e^{r_1x}$ e $y_2 = e^{r_2x}$ são duas soluções linearmente independentes da Equação 5. (Observe que e^{r_2x} não é um múltiplo por constante de e^{r_1x}.) Portanto, pelo Teorema 4, temos o seguinte fato:

8 Se as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem reais e distintas, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

■ Na Figura 1, o gráfico das soluções básicas $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-3x}$ da equação diferencial do Exemplo 1 está em destaque. Algumas das outras soluções, combinações lineares de f e g, também são mostradas.

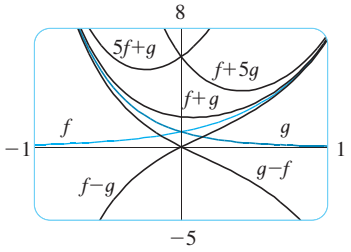


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Resolva a equação $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cujas raízes são $r = 2, -3$. Portanto, por (8), a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Poderíamos verificar que isso é de fato uma solução derivando e substituindo na equação diferencial. □

EXEMPLO 2 Resolva $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

SOLUÇÃO Para resolver a equação auxiliar $3r^2 + r - 1 = 0$, usamos a fórmula quadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Uma vez que as raízes são reais e distintas, a solução geral é

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2 e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$ □

■ CASO II $b^2 - 4ac = 0$

Nesse caso, $r_1 = r_2$, isto é, as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Vamos denotar por r o valor comum de r_1 e r_2. Então, da Equação 7 temos,

9 $$r = -\frac{b}{2a} \qquad \text{logo} \quad 2ar + b = 0$$

Sabemos que $y_1 = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5. Agora verifiquemos que $y_2 = xe^{rx}$ também é uma solução:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

O primeiro termo é 0, pela Equação 9; o segundo termo é 0, pois r é uma raiz da equação auxiliar. Uma vez que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são soluções linearmente independentes, o Teorema 4 nos fornece a solução geral.

10 Se a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem apenas uma raiz real r, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

■ A Figura 2 apresenta as soluções básicas $f(x) = e^{-3x/2}$ e $g(x) = xe^{-3x/2}$ do Exemplo 3 e alguns outros membros da família de soluções. Observe que todas elas tendem a 0 quando $x \to \infty$.

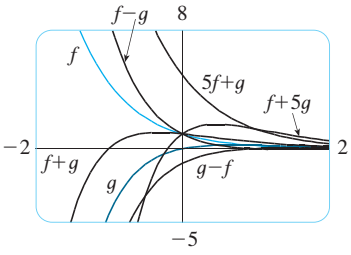


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar $4r^2 + 12r + 9 = 0$ pode ser fatorada como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

de modo que a única raiz é $r = -\frac{3}{2}$. Por (10), a solução geral é

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 xe^{-3x/2}$$ □

■ CASO III $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são números complexos. (Veja o Apêndice H para informações sobre números complexos.) Podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

onde α e β são números reais. [De fato, $\alpha = -b/(2a), \beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Então, usando a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

do Apêndice H, escrevemos a solução da equação diferencial como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

onde $c_1 = C_1 + C_2, c_2 = i(C_1 - C_2)$. Isso nos dá todas as soluções (reais ou complexas) da equação diferencial. As soluções serão reais quando as constantes c_1 e c_2 forem reais. Resumiremos a discussão da seguinte forma:

11 Se as raízes da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ será

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

■ A Figura 3 apresenta os gráficos das soluções do Exemplo 4, $f(x) = e^{3x}\cos 2x$ e $g(x) = e^{3x}\operatorname{sen} 2x$, com algumas combinações lineares. Todas as soluções tendem a 0 quando $x \longrightarrow -\infty$.

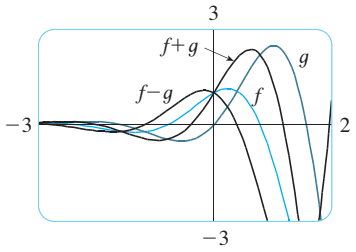


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Resolva a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 - 6r + 13 = 0$. Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por (11), a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$ □

PROBLEMAS DE VALORES INICIAIS E DE CONTORNO

Um **problema de valor inicial** para a Equação 1 ou 2 de segunda ordem consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que satisfaça às condições iniciais da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

onde y_0 e y_1 são constantes. Se P, Q, R e G forem contínuas em um intervalo onde $P(x) \neq 0$, então um teorema encontrado em livros mais avançados garante a existência e a unicidade de uma solução para esse problema de valor inicial. Os Exemplos 5 e 6 mostram como resolver tal problema.

■ A Figura 4 apresenta o gráfico da solução do problema de valor inicial do Exemplo 5. Compare com a Figura 1.

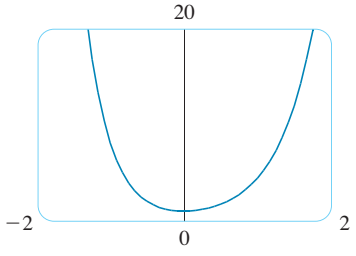


FIGURA 4

EXEMPLO 5 Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Derivando essa solução, obtemos

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

Para satisfazer às condições iniciais exigimos que

12 $$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0 \quad (13)$$

De (13), temos $c_2 = \frac{2}{3}c_1$; logo, (12) resulta em

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Assim, a solução pedida do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$ □

EXEMPLO 6 Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ ou $r^2 = -1$, cujas raízes são $\pm i$. Assim, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e, uma vez que $e^{0x} = 1$, a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Uma vez que $$y'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

as condições iniciais tornam-se

$$y(0) = c_1 = 2 \qquad y'(0) = c_2 = 3$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 2 \cos x + 3\operatorname{sen} x$$ □

■ A solução do Exemplo 6 tem seu gráfico na Figura 5. Ela parece ser uma senoide deslocada. Realmente, você pode verificar que outra maneira de escrever a solução é

$$y = \sqrt{13}\,\operatorname{sen}(x + \phi) \quad \text{onde} \quad \operatorname{tg}\phi = \tfrac{2}{3}$$

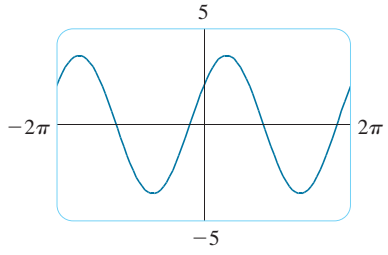


FIGURA 5

Um **problema de contorno** para a Equação 1 ou 2 consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que também satisfaça às condições de contorno da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de contorno nem sempre tem uma solução. O método está ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Resolva o problema de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuja única raiz é $r = -1$. Além disso, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

As condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

A primeira condição resulta em $c_1 = 1$, de modo que a segunda condição torna-se

$$e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

Isolando c_2 nessa equação, primeiro multiplicando ambos os membros por e, obtém-se

$$1 + c_2 = 3e \qquad \text{ou seja} \qquad c_2 = 3e - 1$$

Assim, a solução do problema de contorno é

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$ □

■ A Figura 6 mostra o gráfico da solução do problema de contorno no Exemplo 7.

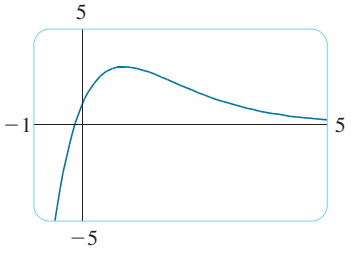


FIGURA 6

RESUMO: SOLUÇÕES DE $ay'' + by' + c = 0$

Raízes de $ar^2 + br + c = 0$	Solução geral
r_1, r_2 reais e distintas	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$
r_1, r_2 complexas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

17.1 EXERCÍCIOS

1-13 Resolva a equação diferencial.

1. $y'' - y' - 6y = 0$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$

3. $4y'' + y = 0$

4. $y'' - 8y' + 12y = 0$

5. $9y'' - 12y' + 4y = 0$

6. $25y'' + 9y = 0$

7. $y' = 2y''$

8. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$

9. $y'' - 4y' + 13y = 0$

10. $y'' + 3y' = 0$

11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

12. $8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

13. $100\dfrac{d^2P}{dt^2} + 200\dfrac{dP}{dt} + 101P = 0$

14-16 Faça o gráfico das duas soluções básicas da equação diferencial e de várias outras soluções. Que aspecto as soluções têm em comum?

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 20y = 0$

15. $5\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

16. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

17-24 Resolva o problema de valor inicial.

17. $2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$

18. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

19. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1{,}5$

20. $2y'' + 5y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$

21. $y'' + 16y = 0, \quad y(\pi/4) = -3, \quad y'(\pi/4) = 4$

22. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2$

23. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

24. $y'' + 12y' + 36y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

25-32 Resolva o problema de contorno, se possível.

25. $4y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = -4$

26. $y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

27. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(3) = 0$

28. $y'' + 100y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi) = 5$

29. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$

30. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

31. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi/2) = 1$

32. $9y'' - 18y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$

33. Seja L um número real não nulo.

(a) Mostre que o problema de contorno $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0, y(L) = 0$ tem apenas a solução trivial $y = 0$ para os casos $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

(b) Para o caso $\lambda > 0$, determine os valores de λ para os quais este problema tenha uma solução não trivial e dê a solução correspondente.

34. Se a, b e c são todas constantes positivas e $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, mostre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

17.2 EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

Nesta seção, aprenderemos como resolver equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

1 $$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde a, b e c são constantes e G é uma função contínua. A equação homogênea correspondente

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

é chamada **equação complementar** e desempenha um papel importante na solução da equação não homogênea original (1).

3 TEOREMA A solução geral da equação diferencial não homogênea (1) pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde y_p é uma solução particular da Equação 1 e y_c é a solução geral da Equação complementar 2.

DEMONSTRAÇÃO Tudo que temos de fazer é verificar que, se y for qualquer solução da Equação 1, então $y - yp$ será uma solução da Equação complementar 2. De fato,

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Sabemos, da Seção 17.1, como resolver a equação complementar (lembre-se de que a solução é $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da Equação 2). Além disso, o Teorema 3 nos diz que conheceremos a solução geral da equação não homogênea assim que conhecermos uma solução particular y_p. Há dois métodos para determinar uma solução particular: o método dos coeficientes indeterminados é simples, mas funciona apenas para uma classe restrita de funções G; o método de variação de parâmetros funciona para toda função G, mas em geral é mais difícil aplicá-lo.

O MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Vamos primeiro ilustrar o método dos coeficientes indeterminados para a equação

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde $G(x)$ é um polinômio. É razoável prever que exista uma solução particular y_p que seja um polinômio de mesmo grau de G, pois, se y for um polinômio, então $ay'' + by' + cy$ também será um polinômio. Portanto, substituímos $y_p(x)$ = um polinômio (de mesmo grau de G) na equação diferencial e determinamos os coeficientes.

EXEMPLO 1 Resolva a equação $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ é

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

com as raízes $r = 1, -2$. Logo, a solução da equação complementar é

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

Uma vez que $G(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Então $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$. Assim, substituindo na equação diferencial dada, temos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ou

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais. Assim,

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

A solução desse sistema de equações é

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Uma solução particular é, portanto,

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

e, pelo Teorema 3, a solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$ □

■ A Figura 1 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 1 em termos da solução particular y_p e das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-2x}$.

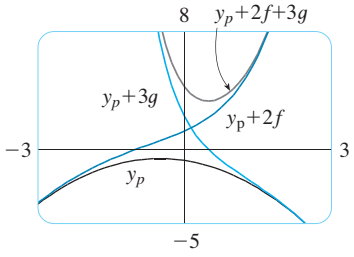


FIGURA 1

Se $G(x)$ (lado direito da Equação 1) é da forma Ce^{kx}, onde C e k são constantes, então tomamos como uma tentativa de solução uma função de mesma forma, $y_p(x) = Ae^{kx}$, pois as derivadas de e^{kx} são múltiplas por constantes de e^{kx}.

EXEMPLO 2 Resolva $y'' + 4y = e^{3x}$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 4 = 0$ com raízes $\pm 2i$, logo, a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

Para uma solução particular tentemos $y_p(x) = Ae^{3x}$. Então $y_p' = 3Ae^{3x}$ e $y_p'' = 9Ae^{3x}$. Substituindo na equação diferencial, temos

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

logo, $13Ae^{3x} = e^{3x}$ e $A = \frac{1}{13}$. Assim, uma solução particular é

$$y_p(x) = \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{13}e^{3x}$$ □

■ A Figura 2 mostra as soluções da equação diferencial do Exemplo 2 em termos de y_p e das funções $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2x$. Observe que todas as soluções tendem a ∞ quando $x \to \infty$ e todas as soluções parecem com funções seno quando x é negativo.

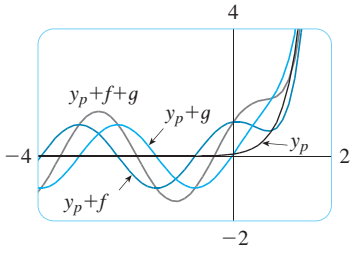


FIGURA 2

Se $G(x)$ é $C \cos kx$ ou $C \operatorname{sen} kx$, então, por causa das regras de derivação para as funções seno e cosseno, tentamos, como solução particular, uma função da forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

EXEMPLO 3 Resolva $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Tentemos uma solução particular

$$y_p(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

Então

$$y_p' = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \qquad y_p'' = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$$

logo, substituindo na equação diferencial, temos

$$(-A \cos x - B \operatorname{sen} x) + (-A \operatorname{sen} x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

ou

$$(-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Isso acontece se

$$-3A + B = 0 \qquad \text{e} \qquad -A - 3B = 1$$

A solução desse sistema é

$$A = -\tfrac{1}{10} \qquad B = -\tfrac{3}{10}$$

logo, uma solução particular é

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{10}\cos x - \tfrac{3}{10}\operatorname{sen} x$$

No Exemplo 1, determinamos que a solução da equação complementar é $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen} x)$$ □

Se $G(x)$ for um produto de funções dos tipos precedentes, então tentamos a solução como um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo, ao resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x\cos 3x$$

tentamos

$$y_p(x) = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\operatorname{sen} 3x$$

Se $G(x)$ for uma soma de funções desses tipos, usamos o *princípio da superposição*, que é facilmente verificável e nos diz que, se y_{p_1} e y_{p_2} forem soluções de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, então $y_{p_1} + y_{p_2}$ é uma solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

EXEMPLO 4 Resolva $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 - 4 = 0$ com as raízes ± 2, logo, a solução da equação complementar é $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Para a equação $y'' - 4y = xe^x$ tentamos

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

Então $y'_{p_1} = (Ax + A + B)e^x$, $y''_{p_1} = (Ax + 2A + B)e^x$. Logo, substituindo na equação dada,

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

ou

$$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$

Assim, $-3A = 1$ e $2A - 3B = 0$. Logo $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$ e

$$y_{p_1}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)e^x$$

Para a equação $y'' - 4y = \cos 2x$, tentamos

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x$$

Substituindo, temos

$$-4C\cos 2x - 4D\operatorname{sen} 2x - 4(C\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x) = \cos 2x$$

ou

$$-8C\cos 2x - 8D\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$$

Portanto, $-8C = 1$, $-8D = 0$, e

$$y_{p_2}(x) = -\tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral é

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}\right)e^x - \tfrac{1}{8}\cos 2x$$ □

■ A Figura 3 apresenta a solução particular $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ da equação diferencial do Exemplo 4. As outras soluções são dadas em termos de $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-2x}$

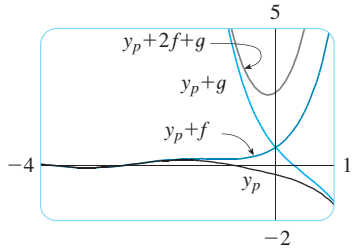


FIGURA 3

Finalmente, observamos que a solução tentativa recomendada y_p algumas vezes resulta em uma solução da equação complementar e, portanto, não pode ser uma solução de uma equação não homogênea. Em tais casos, multiplicamos a solução tentativa recomendada por x (ou por x^2 se necessário) de modo que nenhum termo em $y_p(x)$ seja uma solução da equação complementar.

EXEMPLO 5 Resolva $y'' + y = \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com raízes $\pm i$, logo, a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Geralmente, teríamos usado a solução tentativa

$$y_p(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

mas observe que ela é uma solução da equação complementar. Então, em vez disso, tentemos

$$y_p(x) = Ax \cos x + Bx \operatorname{sen} x$$

Então,
$$y_p'(x) = A \cos x - Ax \operatorname{sen} x + B \operatorname{sen} x + Bx \cos x$$

$$y_p''(x) = -2A \operatorname{sen} x - Ax \cos x + 2B \cos x - Bx \operatorname{sen} x$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$y_p'' + y_p = -2A \operatorname{sen} x + 2B \cos x = \operatorname{sen} x$$

de modo que $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, e

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2} x \cos x$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2} x \cos x$$ □

■ Os gráficos de quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 5 estão apresentados na Figura 4.

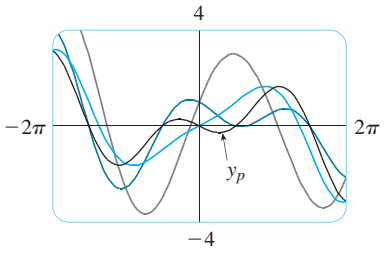


FIGURA 4

Resumimos o método dos coeficientes indeterminados como segue:

RESUMO DO MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

1. Se $G(x) = e^{kx}P(x)$, onde P é um polinômio de grau n, então tente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de grau n (cujos coeficientes são determinados por substituição na equação diferencial.)
2. Se $G(x) = e^{kx}P(x) \cos mx$ ou $G(x) = e^{kx}P(x) \operatorname{sen} mx$, onde P é um polinômio de grau n, então tente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x) \cos mx + e^{kx}R(x) \operatorname{sen} mx$$

onde Q e R são polinômios de grau n.

Modificação: Se algum termo de y_p for uma solução da equação complementar, multiplique y_p por x (ou por x^2, se necessário).

EXEMPLO 6 Determine a forma da solução tentativa para a equação diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$.

SOLUÇÃO Aqui $G(x)$ tem a forma encontrada na parte 2 do resumo, onde $k = 2$, $m = 3$ e $P(x) = 1$. Assim, à primeira vista, a forma da solução tentativa deveria ser

$$y_p(x) = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$

Mas a equação auxiliar é $r^2 - 4r + 13 = 0$, com raízes $r = 2 \pm 3i$, portanto a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$$

Isso significa que temos de multiplicar a solução tentativa sugerida por x. Assim, em seu lugar, usamos

$$y_p(x) = xe^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$ □

O MÉTODO DAS VARIAÇÕES DOS PARÂMETROS

Suponha que, após resolver a equação homogênea $ay'' + by' + cy = 0$, escrevamos a solução como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \textbf{4}$$

onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 da Equação 4 pelas funções arbitrárias $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Procuramos uma solução particular da equação não homogênea $ay'' + by' + cy = G(x)$ da forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad \textbf{5}$$

(Esse método é chamado **variação dos parâmetros**, pois variamos os parâmetros c_1 e c_2, tornando-os funções.) Derivando a Equação 5, obtemos

$$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2') \quad \textbf{6}$$

Uma vez que u_1 e u_2 são funções arbitrárias, podemos impor duas condições sobre eles. Uma condição é que y_p é uma solução da equação diferencial e podemos escolher a outra condição de modo a simplificar nossos cálculos. Considerando a expressão da Equação 6, vamos impor a condição que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \quad \textbf{7}$$

Então,

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

ou

$$u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G \quad \textbf{8}$$

Mas y_1 e y_2 são soluções da equação complementar, logo

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

e a Equação 8 simplifica para

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G \quad \textbf{9}$$

As Equações 7 e 9 formam um sistema de duas equações nas funções desconhecidas u_1 e u_2. Após resolver esse sistema, podemos integrar para encontrar u_1 e u_2, e então a solução particular é dada pela Equação 5.

EXEMPLO 7 Resolva a equação $y'' + y = \operatorname{tg} x, 0 < x < \pi/2$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com as raízes $\pm i$, logo a solução de $y'' + y = 0$ é $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$. Usando a variação dos parâmetros, buscamos uma solução da forma

$$y_p(x) = u_1(x) \operatorname{sen} x + u_2(x) \cos x$$

Então
$$y_p' = (u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x)$$

Faça

$$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0 \tag{10}$$

Então
$$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Para y_p ser uma solução, devemos ter

$$y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \tag{11}$$

Resolvendo as Equações 10 e 11, obtemos

$$u_1' (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \operatorname{tg} x$$

$$u_1' = \operatorname{sen} x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

(Procuramos uma solução particular, logo não precisaremos de uma constante de integração aqui.) Então, da Equação 10, obtemos

$$u_2' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} u_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

Logo,
$$u_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

(Observe que $\sec x + \operatorname{tg} x > 0$ para $0 < x < \pi/2$.) Portanto

$$y_p(x) = -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] \cos x$$
$$= -\cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$ □

■ A Figura 5 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 7.

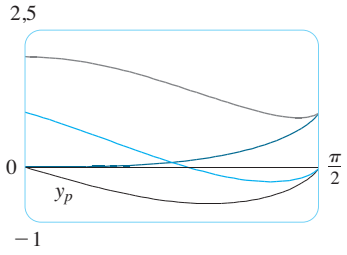


FIGURA 5

17.2 EXERCÍCIOS

1-10 Resolva a equação diferencial ou problema de valor inicial usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = x^2$

2. $y'' + 9y = e^{3x}$

3. $y'' - 2y = \operatorname{sen} 4x$

4. $y'' + 6y' + 9y = 1 + x$

5. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

6. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

7. $y'' + y = e^x + x^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' - 4y = e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

9. $y'' - y' = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' + y' - 2y = x + \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11-12 Faça o gráfico da solução particular e de várias outras soluções. Que características essas soluções têm em comum?

11. $4y'' + 5y' + y = e^x$

12. $2y'' + 3y' + y = 1 + \cos 2x$

13-18 Escreva uma solução tentativa para o método dos coeficientes indeterminados. Não determine os coeficientes.

13. $y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \operatorname{sen} x$

14. $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$

15. $y'' + 9y' = 1 + xe^{9x}$

16. $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$

17. $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

18. $y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$

19-22 Resolva a equação diferencial usando (a) coeficientes indeterminados e (b) variação dos parâmetros.

19. $4y'' + y = \cos x$

20. $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

21. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

22. $y'' - y' = e^x$

23-28 Resolva a equação diferencial usando o método da variação dos parâmetros.

23. $y'' + y = \sec^2 x, \quad 0 < x < \pi/2$

24. $y'' + y = \sec^3 x, \quad 0 < x < \pi/2$

25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

26. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

27. $y'' - 2y' + 2 = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

28. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

17.3 APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

As equações diferenciais lineares de segunda ordem têm diversas aplicações na ciência e na engenharia. Nesta seção, exploraremos duas de suas aplicações: na vibração de molas e nos circuitos elétricos.

VIBRAÇÃO DE MOLAS

Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola que está na vertical (como na Figura 1) ou na horizontal sobre uma superfície plana (como na Figura 2).

Na Seção 6.4, no Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que nos diz que, se a mola estiver esticada (ou comprimida) x unidades a partir do comprimento natural, então ela exerce uma força proporcional a x:

$$\text{força restauradora} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante da mola**). Se ignorarmos qualquer força de resistência externa (devido à resistência do ar ou ao atrito), então, pela Segunda Lei de Newton (força é igual a massa vezes aceleração), teremos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{ou} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

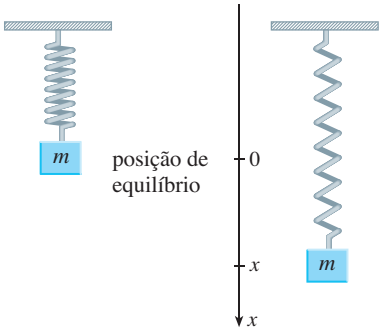


FIGURA 1

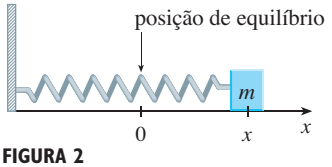


FIGURA 2

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Sua equação auxiliar é $mr^2 + k = 0$ com as raízes $r = \pm\omega i$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$. Assim, a solução geral é

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

que pode também ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

onde

$$\omega = \sqrt{k/m} \qquad \text{(frequência)}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \text{(amplitude)}$$

$$\cos\delta = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen}\delta = -\frac{c_2}{A} \qquad (\delta \text{ é o ângulo de fase})$$

(veja o Exercício 17). Esse tipo de movimento é chamado **movimento harmônico simples**.

EXEMPLO 1 Uma mola presa a uma massa de 2 kg tem um comprimento natural de 0,5 m. Uma força de 25,6 N é necessária para mantê-la esticada em um comprimento de 0,7 m. Se a mola for esticada para um comprimento de 0,7 m e então for solta com velocidade inicial 0, determine a posição da massa em qualquer instante t.

SOLUÇÃO Pela Lei de Hooke, a força necessária para estender a mola é

$$k(0,2) = 25,6$$

logo, $k = 25,6/0,2 = 128$. Usando esse valor da constante da mola k, junto com $m = 2$ na Equação 1, temos

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como na discussão anterior, a solução dessa equação é

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t \tag{2}$$

Estamos dando a condição inicial que $x(0) = 0,2$. Mas, da Equação 2, $x(0) = c_1$. Assim, $c_1 = 0,2$. Derivando a Equação 2, temos

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Uma vez que a velocidade inicial é dada como $x'(0) = 0$, temos $c_2 = 0$, e a solução é

$$x(t) = \tfrac{1}{5} \cos 8t$$ □

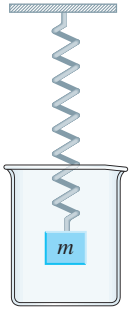


FIGURA 3

VIBRAÇÕES AMORTECIDAS

A seguir, estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola que está sujeita a uma força de atrito (no caso da mola horizontal da Figura 2) ou a uma força de amortecimento (no caso de uma mola vertical que se movimenta em meio a um fluido, como na Figura 3). Um exemplo é a força de amortecimento fornecida pelo amortecedor em um carro ou uma bicicleta.

Vamos supor que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa e atue na direção oposta ao movimento. (Isso foi confirmado, pelo menos aproximadamente, por algunas experiências físicas.) Assim,

$$\text{força de amortecimento} = -c\,\frac{dx}{dt}$$

onde c é uma constante positiva, chamada **constante de amortecimento**. Assim, nesse caso, a Segunda Lei de Newton fornece

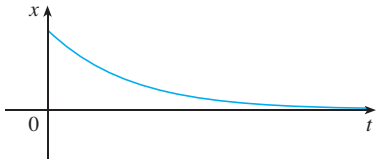
$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} = -kx - c\,\frac{dx}{dt}$$

ou

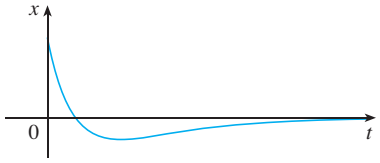
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + kx = 0} \tag{3}$$

A Equação 3 é uma equação diferencial linear de segunda ordem, e sua equação auxiliar é $mr^2 + cr + k = 0$. As raízes são

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{4}$$



(a) Superamortecimento



(b) Amortecimento crítico

FIGURA 4

De acordo com a Seção 17.1, precisamos discutir três casos.

■ **CASO I** $c^2 - 4mk > 0$ **(superamortecimento)**

Nesse caso, r_1 e r_2 são raízes reais distintas e

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Uma vez que c, m e k são todas positivas, temos $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, logo as raízes r_1 e r_2 dadas pela Equação 4 devem ser ambas negativas. Isso mostra que $x \to 0$ quando $t \to \infty$. Os gráficos característicos de x como função de t estão mostrados na Figura 4(a). Observe que as oscilações não ocorrem (é possível que a massa passe pela posição equilíbrio uma vez, mas apenas uma vez). Isso porque $c^2 > 4mk$ significa que há uma forte força de amortecimento (óleo de alta viscosidade ou graxa) comparada com uma mola fraca ou com uma massa pequena.

■ **CASO II** $c^2 - 4mk = 0$ **(amortecimento crítico)**

Esse caso corresponde a raízes iguais

$$r_1 = r_1 = -\frac{c}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-(c/2m)t}$$

e um gráfico característico é mostrado na Figura 4(b). É análogo ao Caso I, mas o amortecimento é só o suficiente para suprimir as vibrações. Qualquer decréscimo na viscosidade do fluido gera as vibrações do caso seguinte.

■ **CASO III** $c^2 - 4mk < 0$ **(subamortecimento)**

Aqui, as raízes são complexas:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

onde

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Vemos que há oscilações amortecidas pelo fator $e^{-(c/2m)t}$. Uma vez que $c > 0$ e $m > 0$, temos $-(c/2m) < 0$, logo $e^{-(c/2m)t} \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso implica que $x \to 0$ quando $t \to \infty$; isto é, o movimento decai a 0 à medida que o tempo cresce. Um gráfico característico é mostrado na Figura 5.

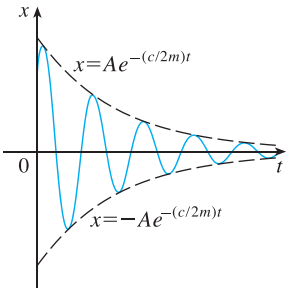


FIGURA 5
Subamortecimento

EXEMPLO 2 Suponha que a massa do Exemplo 1 esteja imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 40$. Determine a posição da massa em qualquer instante t, se ele iniciar da posição de equilíbrio e for dado um empurrão para que a velocidade inicial seja de 0,6 m/s.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, a massa é $m = 2$ e a constante da mola é $k = 128$, logo a equação diferencial (3) torna-se

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

■ A Figura 6 mostra o gráfico da função posição para o movimento superamortecido do Exemplo 2.

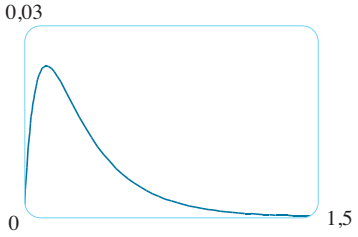


FIGURA 6

A equação auxiliar é $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$ com raízes -4 e -16, logo o movimento é superamortecido e a solução é

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$$

Temos que $x(0) = 0$, logo $c_1 + c_2 = 0$. Derivando, obtemos

$$x'(t) = -4c_1 e^{-4t} - 16c_2 e^{-16t}$$

logo,

$$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0{,}6$$

Uma vez que $c_2 = -c_1$, isso nos fornece $12c_1 = 0{,}6$ ou $c_1 = 0{,}05$. Portanto,

$$x = 0{,}05(e^{-4t} - e^{-16t})$$ □

VIBRAÇÕES FORÇADAS

Suponha que, em adição à força restauradora e à força de amortecimento, o movimento da massa presa a mola seja afetado pela força externa $F(t)$. Então, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} + \text{força externa}$$

$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Assim, em lugar da equação homogênea (3), o movimento da massa é agora governado pela seguinte equação diferencial não homogênea:

$$\boxed{5} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

O movimento da massa pode ser determinado pelos métodos da Seção 17.2.

Uma força externa que ocorre comumente é uma função força periódica

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{onde} \qquad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

Nesse caso, e na falta de uma força de amortecimento ($c = 0$), será pedido no Exercício 9 que você use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que

$$\boxed{6} \qquad x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

Se $\omega_0 = \omega$, então a frequência aplicada reforça a frequência natural e o resultado são vibrações de grande amplitude. Esse é o fenômeno da **ressonância** (veja o Exercício 10).

CIRCUITO ELÉTRICO

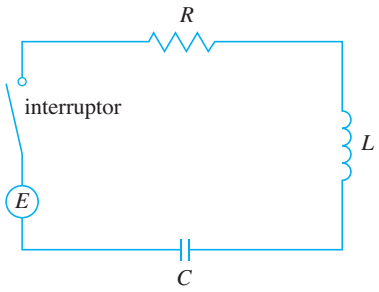


FIGURA 7

Nas Seções 9.3 e 9.5, usamos equações lineares e separáveis de primeira ordem para analisar circuitos elétricos que contêm resistor e indutor (veja a Figura 5 na página 552 e a Figura 4 na página 573) ou um resistor e um capacitor (veja o Exercício 29 na página 575). Agora que sabemos como resolver equações lineares de segunda ordem, estamos em posição de analisar o circuito mostrado na Figura 7, que contém uma força eletromotriz E (proporcionada pela pilha ou gerador), um resistor R, um indutor L e um capacitor C, em série. Se a carga no capacitor no instante t for $Q = Q(t)$, então a corrente é a taxa de variação de Q em relação a t: $I = dQ/dt$. Como na Seção 9.5, é sabido da física que as quedas de voltagem no resistor, indutor e capacitor são dadas por

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. A lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma destas quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Uma vez que $I = dQ/dt$, essa equação se torna

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)} \quad \boxed{7}$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Se a carga Q_0 e a corrente I_0 forem conhecidas no instante 0, então temos as condições iniciais

$$Q(0) = Q_0 \qquad Q'(0) = I(0) = I_0$$

e o problema de valor inicial pode ser resolvido pelos métodos da Seção 17.2.

Uma equação diferencial para a corrente pode ser obtida derivando-se a Equação 7 em relação a t e lembrando que $I = dQ/dt$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

EXEMPLO 3 Determine a carga e a corrente no instante t no circuito da Figura 7 se $R = 40\Omega$, $L = 1$ H, $C = 16 \times 10^{-4}$ F, $E(t) = 100 \cos 10t$, e a carga e a corrente inicial forem ambas 0.

SOLUÇÃO Com os valores dados de L, R, C e $E(t)$, a Equação 7 torna-se

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100 \cos 10t \quad \boxed{8}$$

A equação auxiliar é $r^2 + 40r + 625 = 0$ com raízes

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

de modo que a solução da equação complementar é

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \operatorname{sen} 15t)$$

Para o método dos coeficientes indeterminados, tentamos a solução particular

$$Q_p(t) = A \cos 10t + B \operatorname{sen} 10t$$

Então,

$$Q_p'(t) = -10A \operatorname{sen} 10t + 10B \cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A \cos 10t - 100B \operatorname{sen} 10t$$

Substituindo na Equação 8, temos

$$(-100A \cos 10t - 100B \operatorname{sen} 10t) + 40(-10A \operatorname{sen} 10t + 10B \cos 10t)$$
$$+ 625(A \cos 10t + B \operatorname{sen} 10t) = 100 \cos 10t$$

ou

$$(525A + 400B) \cos 10t + (-400A + 525B) \operatorname{sen} 10t = 100 \cos 10t$$

Igualando os coeficientes, temos

$$525A + 400B = 100 \qquad \text{ou} \qquad 21A + 16B = 4$$
$$-400A + 525B = 0 \qquad\qquad -16A + 21B = 0$$

A solução desse sistema é $A = \frac{84}{697}$ e $B = \frac{64}{697}$. Logo, uma solução particular é

$$Q_p(t) = \frac{1}{697}(84\cos 10t + 64\operatorname{sen} 10t)$$

e a solução geral é

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_c(t) + Q_p(t) \\ &= e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2\operatorname{sen} 15t) + \frac{4}{697}(21\cos 10t + 16\operatorname{sen} 10t) \end{aligned}$$

Impondo a condição inicial $Q(0) = 0$, obtemos

$$Q(0) = c_1 + \frac{84}{697} = 0 \qquad c_1 = -\frac{84}{697}$$

Para impor a outra condição inicial, primeiro vamos derivar para determinar a corrente:

$$\begin{aligned} I = \frac{dQ}{dt} &= e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)\cos 15t + (-15c_1 - 20c_2)\operatorname{sen} 15t] \\ &\quad + \frac{40}{697}(-21\operatorname{sen} 10t + 16\cos 10t) \end{aligned}$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \frac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\frac{464}{2\,091}$$

Assim, a fórmula para a carga é

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63\cos 15t - 116\operatorname{sen} 15t) + (21\cos 10t + 16\operatorname{sen} 10t)\right]$$

e a expressão para a corrente é

$$I(t) = \frac{1}{2\,091}[e^{-20t}(-1\,920\cos 15t + 13\,060\operatorname{sen} 15t) + 120(-21\operatorname{sen} 10t + 16\cos 10t)]$$

□

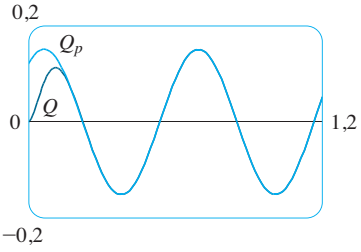


FIGURA 8

OBS. 1 No Exemplo 3 a solução para $Q(t)$ consiste em duas partes. Uma vez que $e^{-20t} \to 0$ quando $t \to \infty$ e cos 15t e sen 15t são funções limitadas,

$$Q_c(t) = \frac{4}{2\,091}e^{-20t}(-63\cos 15t - 116\operatorname{sen} 15t) \to 0 \qquad \text{quando} \qquad t \to \infty$$

Logo, para valores grandes de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \frac{4}{697}(21\cos 10t + 16\operatorname{sen} 10t)$$

e, por essa razão, $Q_p(t)$ é denominada **solução estacionária**. A Figura 8 mostra uma comparação entre o gráfico de Q nesse caso e a solução estacionária.

OBS. 2 Comparando as Equações 5 e 7, vemos que matematicamente elas são idênticas. Isso sugere a analogia dada na tabela a seguir entre situações físicas que, à primeira vista, são muito diferentes.

5 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

7 $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Sistema de Massa-Mola		Circuito Elétrico	
x	deslocamento	Q	carga
dx/dt	velocidade	$I = dQ/dt$	corrente
m	massa	L	indutância
c	constante de amortecimento	R	resistência
k	constante da mola	I/C	elastância
$F(t)$	força externa	$E(t)$	força eletromotriz

Podemos também transferir outras ideias de uma situação para outra. Por exemplo, a solução estacionária discutida na Obs. 1 faz sentido no sistema de massa-mola. E o fenômeno da ressonância no sistema de massa-mola pode ser proveitosamente transportado para circuitos elétricos como ressonância elétrica.

17.3 EXERCÍCIOS

1. Uma mola tem comprimento natural 0,75 m e uma massa de 5 kg está presa a ela. Uma força de 25 N é necessária para manter a mola esticada até o comprimento de 1 m. Se a mola for esticada para um comprimento de 1,1 m e então solta com velocidade 0, encontre a posição da massa após t segundos.

2. Uma mola com uma massa de 8 kg presa a ela é mantida esticada 0,4 m além de seu comprimento natural por uma força de 32 N. A mola começa em sua posição de equilíbrio com velocidade inicial de 1 m/s. Encontre a posição da massa em qualquer instante t.

3. Uma mola presa a uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento $c = 14$ e uma força de 6 N é necessária para manter a mola esticada 0,5 m além de seu comprimento natural. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então solta com velocidade 0. Determine a posição da massa em qualquer instante t.

4. Uma força de 13 N é necessária para manter uma mola presa a uma massa de 2kg esticada 0,25 m além de seu comprimento natural. A constante de amortecimento da mola é $c = 8$.

(a) Se a massa começa na posição de equilíbrio com velocidade de 0,5 m/s, encontre a posição no instante t.

(b) Faça o gráfico da função posição da massa.

5. Para a mola do Exercício 3, determine a massa que produziria amortecimento crítico.

6. Para a mola do Exercício 4, determine a constante de amortecimento que produziria amortecimento crítico.

7. Uma mola tem uma massa de 1 kg presa a ela e sua constante da mola é $k = 100$. A mola é solta em um ponto 0,1 m acima de sua posição de equilíbrio. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante de amortecimento c: 10, 15, 20, 25, 30. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?

8. Uma mola tem uma massa de 1 kg presa a ela e sua constante de amortecimento é $c = 10$. A mola começa de sua posição de equilíbrio com velocidade de 1 m/s. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante da mola k: 10, 20, 25, 30, 40. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?

9. Suponha que uma mola tenha uma massa m presa a ela e constante da mola k e seja $\omega = \sqrt{k/m}$. Suponha uma constante de amortecimento tão pequena que a força de amortecimento seja desprezível. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ for aplicada, onde $\omega_0 \neq \omega$ use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é descrito pela Equação 6.

10. Como no Exercício 9, considere uma mola com uma massa m presa a ela, constante da mola k e constante de amortecimento $c = 0$, e seja $\omega = \sqrt{k/m}$. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ for aplicada (a frequência aplicada é igual à frequência natural), use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é dado por $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + (F_0/(2m\omega))t \operatorname{sen} \omega t$.

11. Mostre que se $\omega_0 \neq \omega$, mas ω/ω_0 é um número racional, então o movimento descrito pela Equação 6 é periódico.

12. Considere uma massa presa a uma mola sujeita a uma força de atrito ou de amortecimento.

(a) No caso de amortecimento crítico, o movimento é dado por $x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Mostre que o gráfico de x cruza o eixo t sempre que c_1 e c_2 tiverem sinais opostos.

(b) No caso de superamortecimento, o movimento é dado por $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, onde $r_1 > r_2$. Determine uma condição sobre os módulos relativos de c_1 e c_2 sob a qual o gráfico de x cruza o eixo t para um valor positivo de t.

13. Um circuito em série consiste em um resistor com $R = 20\ \Omega$, um indutor com $L = 1$ H, um capacitor com $C = 0{,}002$ F e uma pilha de 12 V. Se a carga inicial e a corrente forem 0, encontre a carga e a corrente no instante t.

14. Um circuito em série contém um resistor com $R = 24\ \Omega$, um indutor com $L = 2$ H, um capacitor com $C = 0{,}005$ F e uma pilha de 12 V. A carga inicial é $Q = 0{,}001$ C e a corrente inicial é 0.

(a) Determine a carga e a corrente no instante t.

(b) Faça o gráfico das funções carga e corrente.

15. A pilha no Exercício 13 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$. Determine a carga no instante t.

16. A pilha no Exercício 14 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$.

(a) Determine a carga no instante t.

(b) Faça o gráfico da função carga.

17. Verifique que a solução para a Equação 1 pode ser escrita na forma $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$.

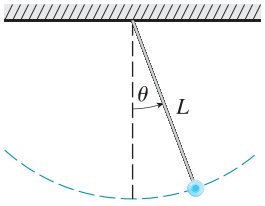
18. A figura mostra um pêndulo com comprimento L e o ângulo θ a partir da vertical do pêndulo. Pode ser mostrado que θ, como uma função do tempo, satisfaz a equação diferencial não linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0$$

onde g é a aceleração da gravidade. Para valores pequenos de θ, podemos usar a aproximação linear $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$, e então a equação diferencial se torna linear.

(a) Determine a equação do movimento de um pêndulo com comprimento 1 m se inicialmente θ for 0,2 rad e a velocidade angular for $d\theta/dt = 1$ rad/s.

(b) Qual o ângulo máximo a partir da vertical?
(c) Qual o período do pêndulo (isto é, o tempo necessário para uma oscilação completa)?
(d) Quando o pêndulo estará pela primeira vez na vertical?
(e) Qual a velocidade angular do pêndulo quando ele está na vertical?



17.4 SOLUÇÕES EM SÉRIE

Muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas explicitamente em termos de combinações finitas de funções usuais simples. Isso é verdade mesmo para uma equação com aparência bem simples, como

$$y'' - 2xy' + y = 0 \tag{1}$$

Todavia, é importante poder resolver equações como a que foi dada acima, pois elas surgem de problemas físicos, especialmente em conexão com a equação de Schrödinger na mecânica quântica. Em tais casos, vamos usar o método das séries de potência, isto é, procuraremos por uma solução da forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

O método é substituir essa expressão na equação diferencial e determinar os valores dos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Essa técnica assemelha-se ao método dos coeficientes indeterminados, discutido na Seção 17.2.

Antes de usar as séries de potências para resolver a Equação 1, ilustraremos o método com uma equação mais simples, $y'' + y = 0$, no Exemplo 1. Realmente já sabemos como resolver essa equação pelas técnicas da Seção 17.1, contudo é mais fácil entender o método das séries de potências quando ele é aplicado a essa equação mais simples.

EXEMPLO 1 Use séries de potências para resolver a equação $y'' + y = 0$.

SOLUÇÃO Vamos supor que haja uma solução da forma

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2}$$

Podemos derivar a série de potências termo a termo. Assim

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \tag{3}$$

A fim de comparar as expressões de y e y'' mais facilmente, reescrevemos y'' como segue:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n \tag{4}$$

■ Escrevendo os primeiros termos de (4) você verá que são iguais a (3). Para obter (4) substituímos n por $n + 2$ e começamos a somatória em 0 em vez de 2.

Substituindo as expressões nas Equações 2 e 4 na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0 \tag{5}$$

Se duas séries de potências são iguais, então os coeficientes correspondentes devem ser iguais. Portanto, os coeficientes de x^n da Equação 5 devem ser 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

A Equação 6 é chamada *relação de recorrência*. Se c_0 e c_1 forem conhecidos, essa equação nos permite determinar os coeficientes restantes recursivamente, usando $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ em sucessão.

Usando $n = 0$: $\quad c_2 = -\dfrac{c_0}{1 \cdot 2}$

Usando $n = 1$: $\quad c_3 = -\dfrac{c_1}{2 \cdot 3}$

Usando $n = 2$: $\quad c_4 = -\dfrac{c_2}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{4!}$

Usando $n = 3$: $\quad c_5 = -\dfrac{c_3}{4 \cdot 5} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{5!}$

Usando $n = 4$: $\quad c_6 = -\dfrac{c_4}{5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{4!\,5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{6!}$

Usando $n = 5$: $\quad c_7 = -\dfrac{c_5}{6 \cdot 7} = -\dfrac{c_0}{5!\,6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{7!}$

Agora, já percebemos o seguinte padrão:

$$\text{para os coeficientes pares, } c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$$

$$\text{para os coeficientes ímpares, } c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}$$

Pondo esses valores na Equação 2, escrevemos a solução como

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$+ c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Observe que há duas constantes arbitrárias, c_0 e c_1. □

OBS. 1 Reconhecemos as séries obtidas no Exemplo 1 como as séries de Maclaurin para cos x e sen x. (Veja as Equações 11.10.16 e 11.10.15.) Portanto, podemos escrever a solução como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$$

Entretanto, em geral não somos capazes de expressar soluções das equações diferenciais em séries de potências em termos de funções conhecidas.

EXEMPLO 2 Resolva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUÇÃO Vamos supor que haja uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Então,
$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

e
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

como no Exemplo 1. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n] x^n = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n$

Essa equação estará satisfeita se o coeficiente de x^n for 0:

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n = 0$$

$$\boxed{7} \qquad c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Resolvemos essa relação de recursão usando $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sucessivamente na Equação 7:

Usando $n = 0$: $\quad c_2 = \dfrac{-1}{1 \cdot 2} c_0$

Usando $n = 1$: $\quad c_3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} c_1$

Usando $n = 2$: $\quad c_4 = \dfrac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\dfrac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\dfrac{3}{4!} c_0$

$$\text{Usando } n = 3: \qquad c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$$

$$\text{Usando } n = 4: \qquad c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4!\, 5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$$

$$\text{Usando } n = 5: \qquad c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\, 6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$$

$$\text{Usando } n = 6: \qquad c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$$

$$\text{Usando } n = 7: \qquad c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$$

Em geral, os coeficientes pares são dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} c_0$$

e os coeficientes ímpares são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} c_1$$

A solução é

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

$$= c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!} x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} x^8 - \cdots\right)$$

$$+ c_1 \left(x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!} x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} x^9 + \cdots\right)$$

ou

$$\boxed{8} \qquad y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}\right)$$

$$+ c_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right) \qquad \square$$

OBS. 2 No Exemplo 2, supusemos que a equação diferencial tivesse uma solução em série. Mas agora podemos verificar diretamente que a função dada pela Equação 8 é de fato uma solução.

OBS. 3 Ao contrário da situação do Exemplo 1, as séries de potências que surgem na solução do Exemplo 2 não definem funções elementares. As funções

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$

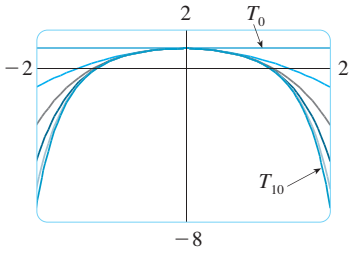


FIGURA 1

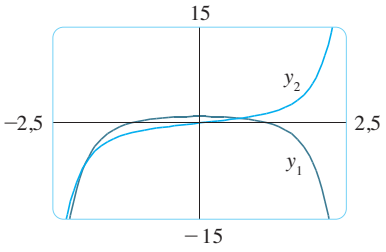


FIGURA 2

e $$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

são perfeitamente boas, entretanto não podem ser expressas em termos de funções familiares. Podemos usar essas expressões em série de potência de y_1 e y_2 para calcular os valores aproximados das funções e até mesmo seus gráficos. A Figura 1 mostra as primeiras somas parciais $T_0, T_2, T_4, \ldots$ (polinômios de Taylor) para $y_1(x)$, e vemos como eles convergem para y_1. Dessa maneira, podemos fazer ambos os gráficos de y_1 e y_2 na Figura 2.

OBS. 4 Se nos pedirem para resolver o problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

devemos observar, do Teorema 11.10.5, que

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad c_1 = y'(0) = 1$$

Isso simplificaria os cálculos no Exemplo 2, uma vez que todos os coeficientes pares seriam 0. A solução para o problema de valor inicial é

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

17.4 EXERCÍCIOS

1–11 Use séries de potências para resolver a equação diferencial.

1. $y' - y = 0$

2. $y' = xy$

3. $y' = x^2 y$

4. $(x-3)y' + 2y = 0$

5. $y'' + xy' + y = 0$

6. $y'' = y$

7. $(x-1)y'' + y' = 0$

8. $y'' = xy$

9. $y' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11. $y'' + x^2 y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

12. A solução do problema de valor inicial

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

é chamada função de Bessel de ordem 0.

(a) Resolva o problema de valor inicial para determinar uma expansão em série de potências da função de Bessel.

(b) Faça o gráfico de vários polinômios de Taylor até atingir um que pareça uma boa aproximação para a função de Bessel no intervalo $[-5, 5]$.

17 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.
(b) Escreva a equação auxiliar.
(c) Como você usaria as raízes da equação auxiliar para resolver a equação diferencial? Escreva a forma da solução para cada um dos três casos que podem ocorrer.

2. (a) O que é um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem?
(b) O que é o problema de contorno para tal equação?

3. (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes.
(b) O que é a equação complementar? Como ela pode ajudar a resolver a equação diferencial original?
(c) Explique o funcionamento do método dos coeficientes indeterminados.
(d) Explique o funcionamento do método da variação dos parâmetros.

4. Discuta duas aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem.

5. Como você usaria as séries de potência para resolver uma equação diferencial?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se y_1 e y_2 forem soluções de $y'' + y = 0$, então $y_1 + y_2$ também é uma solução da equação.

2. Se y_1 e y_2 forem soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é uma solução da equação.

3. A solução geral de $y'' - y = 0$ pode ser escrita como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$$

4. A equação $y'' - y = e^x$ tem uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x$$

EXERCÍCIOS

1-10 Resolva a equação diferencial.

1. $y'' - 2y' - 15y = 0$

2. $y'' + 4y' + 13y = 0$

3. $y'' + 3y = 0$

4. $4y'' + 4y' + y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x \cos x$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \operatorname{sen} 2x$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cossec} x, \; 0 < x < \pi/2$

11-14 Resolva o problema de valor inicial.

11. $y'' + 6y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 12$

12. $y'' - 6y' + 25y = 0 \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

13. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

14. $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

15. Use séries de potências para resolver o problema de valor inicial.

$$y'' + xy' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

16. Use a série de potência para resolver a equação

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

17. Um circuito em série contém um resistor com $R = 40\ \Omega$, um indutor com $L = 2$ H, um capacitor com $C = 0{,}0025$ F e uma pilha de 12 V. A carga inicial é $Q = 0{,}01$ C e a corrente inicial é 0. Determine a carga no instante t.

18. Uma mola com uma massa de 2 kg presa a ela tem uma constante de amortecimento 16 e uma força de 12,8 N mantém a mola esticada 0,2 m além de seu comprimento original. Determine a posição da massa no instante t se ela iniciar na posição de equilíbrio com velocidade de 2,4 m/s.

19. Suponha que a Terra seja uma esfera sólida de densidade uniforme com massa M e raio $R = 6\,370$ km. Para uma partícula de massa m a uma distância r a partir do centro da Terra e, dentro dela, a força gravitacional que atrai a partícula para o centro é

$$F_r = \frac{-GM_r m}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e M_r é a massa de Terra dentro de uma esfera de raio r.

(a) Mostre que $F_r = \dfrac{-GMm}{R^3} r$.

(b) Suponha que um buraco seja perfurado na Terra ao longo de um diâmetro. Mostre que, se uma partícula de massa m cair a partir do repouso da superfície para dentro do buraco, então a distância $y = y(t)$ da partícula a partir do centro da Terra no instante t é dada por

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

onde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Conclua, a partir da parte (b), que a partícula está submetida a um movimento harmônico simples. Encontre o período T.

(d) Com que velocidade a partícula passa pelo centro da Terra?

APÊNDICES

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos

B Geometria Analítica e Retas

C Gráficos das Equações de Segundo Grau

D Trigonometria

E Notação Sigma

F Demonstrações dos Teoremas

G O Logaritmo Definido como uma Integral

H Números Complexos

I Respostas dos Exercícios de Números Ímpares

A NÚMEROS, DESIGUALDADES E VALORES ABSOLUTOS

O cálculo baseia-se no sistema de números reais. Começamos com os **inteiros**:

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$$

Então, construímos os **números racionais**, que são as razões de inteiros. Assim, qualquer número racional r pode ser expresso como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{em que } m \text{ e } n \text{ são inteiros e } n \neq 0$$

Exemplos:

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{3}{7} \qquad 46 = \frac{46}{1} \qquad 0{,}17 = \frac{17}{100}$$

(Lembre-se de que a divisão por 0 está sempre excluída; logo, as expressões como $\frac{3}{0}$ e $\frac{0}{0}$ não são definidas.) Alguns números reais, como $\sqrt{2}$, não podem ser expressos como a razão de números inteiros e são, portanto, chamados **números irracionais**. Pode ser mostrado, com variado grau de dificuldade, que os números a seguir são irracionais:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \operatorname{sen} 1^{\circ} \qquad \log_{10} 2$$

O conjunto de todos os números reais é geralmente denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Quando usarmos a palavra *número* sem qualificativo, estaremos nos referindo a um "número real".

Todo número tem uma representação decimal. Se o número for racional, então a dízima correspondente é repetida indefinidamente (periódica). Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5\overline{0} \qquad \frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\frac{157}{495} = 0{,}317171717\ldots = 0{,}3\overline{17} \qquad \frac{9}{7} = 1{,}285714285714\ldots = 1{,}\overline{285714}$$

(A barra indica que a sequência de dígitos se repete indefinidamente.) Caso contrário, se o número for irracional, a dízima não será repetitiva:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots \qquad \pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

Ao pararmos a expansão decimal de qualquer número em uma certa casa decimal, obtemos uma aproximação dele. Por exemplo, podemos escrever

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

onde o símbolo $\approx$ deve ser lido como "é aproximadamente igual a". Quanto mais casas decimais forem mantidas, melhor será a aproximação obtida.

Os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, como na Figura 1. A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha. Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem**, que corresponde ao número real 0. Dada qualquer unidade conveniente de medida, cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância, à direita, da origem e cada número negativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está x unidades de distância, à esquerda, da origem. Assim, todo número real é representado por um ponto sobre a reta, e todo ponto P sobre a reta corresponde a um único número real. O número real associado ao ponto P é chamado **coordenada** de P, e a reta é dita então **reta coordenada**, ou **reta dos números reais**, ou simplesmente **reta real**. Frequentemente, identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos em um número como um ponto na reta real.

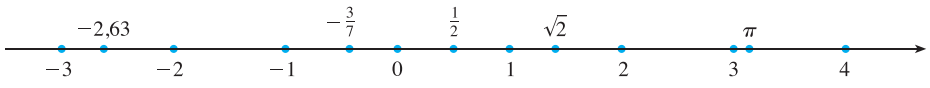


FIGURA 1

Os números reais são ordenados. Dizemos que a *é menor que* b e escrevemos $a < b$ se $b - a$ for um número positivo. Geometricamente, isso significa que a está à esquerda de b sobre a reta real. (De maneira equivalente, dizemos que b *é maior que* a e escrevemos $b > a$.) O símbolo $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) significa que $a < b$ ou $a = b$ e deve ser lido como "a é menor ou igual a b". Por exemplo, são verdadeiras as seguintes desigualdades:

$$7 < 7{,}4 < 7{,}5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

A seguir, vamos precisar usar a *notação de conjunto*. Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados **elementos** do conjunto. Se S for um conjunto, a notação $a \in S$ significa que a é um elemento de S, e $a \notin S$ significa que a não é um elemento de S. Por exemplo, se Z representa o conjunto dos inteiros, então $-3 \in Z$ mas $\pi \notin Z$. Se S e T forem conjuntos, então sua **união**, $S \cup T$, é o conjunto que consiste em todos os elementos que estão em S ou T (ou ambos S e T). A **intersecção** de S e T é o conjunto $S \cap T$, que consiste em todos os elementos que estão em S e em T. Em outras palavras, $S \cap T$ é a parte comum a S e a T. O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é aquele que não contém nenhum elemento.

Alguns conjuntos podem ser descritos fazendo-se uma lista de seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto A consistindo em todos os inteiros positivos menores que 7 pode ser escrito como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Podemos também descrever A na *notação construtiva* de conjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 7\}$$

que deve ser lido como "A é o conjunto dos x tal que x é um inteiro e $0 < x < 7$".

INTERVALOS

Certos conjuntos de números reais, denominados **intervalos**, ocorrem frequentemente no cálculo e correspondem geometricamente a segmentos de reta. Por exemplo, se $a < b$, o **intervalo aberto** de a até b consiste em todos os números entre a e b e é denotado pelo símbolo (a, b). Usando a notação construtiva de conjuntos, podemos escrever

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$



FIGURA 2
Intervalo aberto (a, b)

Observe que as extremidades do intervalo — isto é, a e b — estão excluídas. Isso é indicado pelos parênteses ( ) e pelas bolinhas vazias na Figura 2. O **intervalo fechado** de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

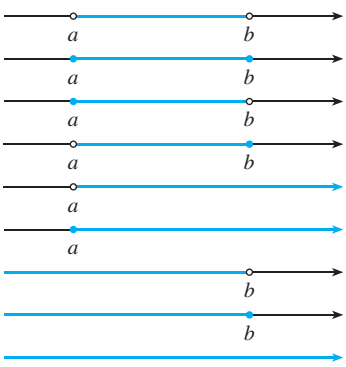


FIGURA 3
Intervalo fechado $[a, b]$

Aqui, as extremidades do intervalo estão incluídas, e isso é indicado pelos colchetes [ ] e pelas bolinhas cheias na Figura 3. Também é possível incluir somente uma extremidade em um intervalo, conforme mostrado na Tabela 1.

1 TABELA DE INTERVALOS

■ A Tabela 1 dá uma lista dos nove tipos possíveis de intervalos. Em todos os casos, supomos $a < b$.

Notação	Descrição do conjunto	Ilustração
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)	

É necessário também considerar intervalos infinitos, como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

Isso não significa que ∞ ("infinito") seja um número. A notação (a, ∞) representa o conjunto de todos os números maiores que a; dessa forma, o símbolo ∞ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção positiva.

DESIGUALDADES

Quando trabalhar com desigualdades, observe as seguintes regras:

2 REGRAS PARA DESIGUALDADES

1. Se $a < b$, então $a + c < b + c$.
2. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
5. Se $0 < a < b$, então $1/a > 1/b$.

A Regra 1 diz que podemos adicionar qualquer número a ambos os lados de uma desigualdade e a Regra 2 diz que duas desigualdades podem ser adicionadas. Porém, devemos ter cuidado com a multiplicação. A Regra 3 diz que podemos multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um número *positivo*, mas a Regra 4 diz que se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, então inverteremos o sentido da desigualdade. Por exemplo, se considerarmos a desigualdade $3 < 5$ e a multiplicarmos por 2, obteremos $6 < 10$, mas se a multiplicarmos por -2, obteremos $-6 > -10$. Finalmente, a Regra 5 diz que se tomarmos recíprocos, então inverteremos o sentido de uma desigualdade (desde que os números sejam positivos).

EXEMPLO 1 Resolva a inequação $1 + x < 7x + 5$.

SOLUÇÃO A desigualdade dada é satisfeita por alguns valores de x, mas não por outros. *Resolver* uma inequação significa determinar o conjunto dos números x para os quais a desigualdade é verdadeira. Isto é conhecido como *conjunto solução*.

Primeiro, subtraímos 1 de cada lado da desigualdade (usando a Regra 1 com $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Então subtraímos $7x$ de ambos os lados (Regra 1 com $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Vamos dividir agora ambos os lados por -6 (Regra 4 com $c = -\frac{1}{6}$):

$$x > -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Esses passos podem ser todos invertidos; dessa forma, o conjunto solução consiste em todos os números maiores que $-\frac{2}{3}$. Em outras palavras, a solução da inequação é o intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. □

EXEMPLO 2 Resolva as inequações $4 \leqslant 3x - 2 < 13$.

SOLUÇÃO Aqui o conjunto solução consiste em todos os valores de x que satisfazem a ambas as desigualdades. Usando as regras dadas em (2), vemos que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$4 \leqslant 3x - 2 < 13$$

$$6 \leqslant 3x < 15 \qquad \text{(adicionando 2)}$$

$$2 \leqslant x < 5 \qquad \text{(dividindo por 3)}$$

Portanto, o conjunto solução é $[2, 5)$. □

EXEMPLO 3 Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos fatorar o lado esquerdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Sabemos que a equação correspondente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tem as soluções 2 e 3. Os números 2 e 3 dividem o eixo real em três intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

Em cada um desses intervalos, determinamos os sinais dos fatores. Por exemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Vamos então registrar esses sinais na seguinte tabela:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Outro método para obter a informação da tabela é usar *valores-teste*. Por exemplo, se usarmos o valor-teste $x = 1$ para o intervalo $(-\infty, 2)$ então, substituindo em $x^2 - 5x + 6$, obteremos

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

O polinômio $x^2 - 5x + 6$ não muda de sinal dentro de cada um dos três intervalos; logo, concluímos que é positivo em $(-\infty, 2)$.

Então, concluímos da tabela que $(x - 2)(x - 3)$ é negativo quando $2 < x < 3$. Logo, a solução da inequação $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ é

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

■ O método visual de se resolver o Exemplo 3 é usar uma ferramenta gráfica para esboçar a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como na Figura 4) e observar se a curva está sobre ou abaixo do eixo x quando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

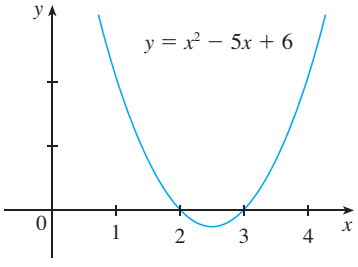


FIGURA 4



FIGURA 5

Observe que incluímos as extremidades 2 e 3, pois estávamos procurando os valores de x tais que o produto fosse negativo ou zero. A solução está ilustrada na Figura 5. □

EXEMPLO 4 Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUÇÃO Primeiro deixamos todos os termos não nulos de um lado do sinal de desigualdade e então fatoramos a expressão resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x-1)(x+4) > 0$$

Como no Exemplo 3, vamos resolver a equação correspondente $x(x-1)(x+4) = 0$ e usar as soluções $x = -4, x = 0$ e $x = 1$ para dividir o eixo real em quatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$, e $(1, \infty)$. Em cada intervalo o produto mantém um sinal constante, conforme mostra a tabela:

Intervalo	x	$x-1$	$x+4$	$x(x-1)(x+4)$
$x < -4$	−	−	−	−
$-4 < x < 0$	−	−	+	+
$0 < x < 1$	+	−	+	−
$x > 1$	+	+	+	+

Vemos a partir da tabela que o conjunto solução é

$$\{x \mid -4 < x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$



FIGURA 6

A solução está ilustrada na Figura 6. □

VALOR ABSOLUTO

O **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 na reta real. Como as distâncias são sempre positivas ou 0, então temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

3

$$\begin{array}{ll} |a| = a & \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{se } a < 0 \end{array}$$

■ Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ é positivo.

EXEMPLO 5 Expresse $|3x - 2|$ sem usar o símbolo de valor absoluto.

SOLUÇÃO

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x-2) & \text{se } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

□

Lembre-se de que o símbolo $\sqrt{\ }$ significa "raiz quadrada positiva de". Logo, $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ e $s \geqslant 0$. Portanto, a equação $\sqrt{a^2} = a$ não é sempre verdadeira. Só é verdadeira quando $a \geqslant 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$; portanto, temos $\sqrt{a^2} = -a$. Em vista de (3), temos então a equação

4

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

que é verdadeira para todos os valores a.

As sugestões para as demonstrações das propriedades a seguir serão dadas nos exercícios.

5 PROPRIEDADES DOS VALORES ABSOLUTOS Suponhamos que a e b sejam números reais quaisquer e n um inteiro. Então

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver as equações e as inequações envolvendo valores absolutos, é frequentemente muito útil usar as seguintes afirmações.

6 Suponhamos $a > 0$. Então:

4. $|x| = a$ se e somente se $x = \pm a$

5. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$

6. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$

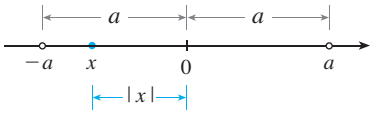


FIGURA 7

Por exemplo, a desigualdade $|x| < a$ diz que a distância de x à origem é menor que a, e você pode ver a partir da Figura 7 que isso é verdadeiro se e somente se x estiver entre $-a$ e a.

Se a e b forem números reais quaisquer, então a distância entre a e b é o valor absoluto da diferença, isto é, $|a - b|$, que também é igual a $|b - a|$ (veja a Figura 8).

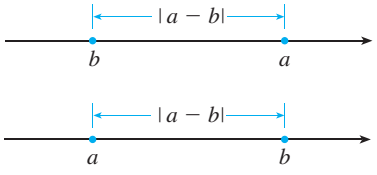


FIGURA 8
Comprimento de um segmento de reta $= |a - b|$

EXEMPLO 6 Resolva $|2x - 5| = 3$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 4 de (6), $|2x - 5| = 3$ é equivalente a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = -3$$

Logo, $2x = 8$ ou $2x = 2$. Portanto, $x = 4$ ou $x = 1$. □

EXEMPLO 7 Resolva $|x - 5| < 2$.

SOLUÇÃO 1 Pela Propriedade 5 de (6), $|x - 5| < 2$ é equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Assim, adicionando 5 a cada lado, temos

$$3 < x < 7$$

e o conjunto solução é o intervalo $(3, 7)$.

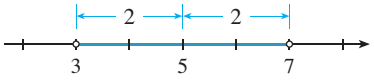


FIGURA 9

SOLUÇÃO 2 Geometricamente, o conjunto solução consiste em todos os números x cuja distância de 5 é menor que 2. Da Figura 9 vemos que esse intervalo é $(3, 7)$. □

EXEMPLO 8 Resolva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUÇÃO Pelas Propriedades 4 e 6 de (6), $|3x + 2| \geqslant 4$ é equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

No primeiro caso $3x \geqslant 2$, o que resulta em $x \geqslant \frac{2}{3}$. No segundo caso $3x \leqslant -6$, o que resulta em $x \leqslant -2$. Logo, o conjunto solução é

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$ □

Outra propriedade importante do valor absoluto, denominada Desigualdade Triangular, é frequentemente usada não apenas no cálculo, mas em geral em toda a matemática.

7 A DESIGUALDADE TRIANGULAR Se a e b forem quaisquer números reais, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que se os números a e b forem ambos positivos ou negativos, então os dois lados na Desigualdade Triangular serão realmente iguais. Mas se a e b tiverem sinais opostos, o lado esquerdo envolve uma subtração, ao passo que o lado direito, não. Isso faz com que a Desigualdade Triangular pareça razoável, mas podemos demonstrá-la da forma a seguir.

Observe que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

é sempre verdadeira, pois a é igual a $|a|$ ou $-|a|$. A afirmação correspondente a b é

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Somando-se essas desigualdades obtemos

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Se aplicarmos agora as Propriedades 4 e 5 (com x substituído por $a + b$ e a por $|a| + |b|$), obteremos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que é o que queríamos mostrar.

EXEMPLO 9 Se $|x - 4| < 0{,}1$ e $|y - 7| < 0{,}2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUÇÃO A fim de usar a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo, $$|(x + y) - 11| < 0{,}3$$ □

A EXERCÍCIOS

1-12 Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|5| - |-23|$

3. $|-\pi|$

4. $|\pi - 2|$

5. $|\sqrt{5} - 5|$

6. $||-2| - |-3||$

7. $|x - 2|$ se $x < 2$

8. $|x - 2|$ se $x > 2$

9. $|x + 1|$

10. $|2x - 1|$

11. $|x^2 + 1|$

12. $|1 - 2x^2|$

13-38 Resolva a inequação em termos de intervalos e represente o conjunto solução na reta real.

13. $2x + 7 > 3$

14. $3x - 11 < 4$

15. $1 - x \leqslant 2$

16. $4 - 3x \geqslant 6$

17. $2x + 1 < 5x - 8$

18. $1 + 5x > 5 - 3x$

19. $-1 < 2x - 5 < 7$

20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

21. $0 \leqslant 1 - x < 1$

22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$

24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

25. $(x - 1)(x - 2) > 0$

26. $(2x + 3)(x - 1) \leqslant 0$

27. $2x^2 + x \leqslant 1$

28. $x^2 < 2x + 8$

29. $x^2 + x + 1 > 0$

30. $x^2 + x > 1$

31. $x^2 < 3$

32. $x^2 \geqslant 5$

33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

35. $x^3 > x$

36. $x^3 + 3x < 4x^2$

37. $\dfrac{1}{x} < 4$

38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual é o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use a relação entre C e F dada no Exercício 39 para determinar o intervalo na escala Fahrenheit correspondente à temperatura no intervalo $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de 1 °C para cada 100 m de subida, até cerca de 12 km.

(a) Se a temperatura do solo for de 20 °C, escreva uma fórmula para a temperatura a uma altura h.

(b) Que variação de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge uma altura máxima de 5 km?

42. Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com 30 m de altura com velocidade inicial de 10 m/s, então a altura h acima do solo t segundos mais tarde será

$$h = 30 + 10t - 5t^2$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a 15 m acima do solo?

43-46 Resolva a equação para x.

43. $|2x| = 3$

44. $|3x + 5| = 1$

45. $|x + 3| = |2x + 1|$

46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47-56 Resolva a inequação.

47. $|x| < 3$

48. $|x| \geqslant 3$

49. $|x - 4| < 1$

50. $|x - 6| < 0{,}1$

51. $|x + 5| \geqslant 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0{,}4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$

56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57-58 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59-60 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponha que $|x - 2| < 0{,}01$ e $|y - 3| < 0{,}04$. Use a Desigualdade Triangular para mostrar que $|(x + y) - 5| < 0{,}05$.

62. Mostre que se $|x + 3| < \frac{1}{2}$, então $|4x + 13| < 3$.

63. Mostre que se $a < b$, então $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use a Regra 3 para demonstrar a Regra 5 de (2).

65. Demonstre que $|ab| = |a||b|$. (*Sugestão*: Use a Equação 4.)

66. Demonstre que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

68. Demonstre que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. (*Sugestão*: Use a Desigualdade Triangular com $a = x - y$ e $b = y$.)

69. Mostre que a soma, a diferença e o produto de números racionais resultam em um número racional.

70. (a) A soma de dois números irracionais é sempre irracional?

(b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional?

B GEOMETRIA ANALÍTICA E RETAS

Da mesma forma que os pontos sobre uma reta podem ser identificados com números reais, atribuindo-se a eles coordenadas, conforme descrito no Apêndice A, também os pontos no plano podem ser identificados com pares ordenados de números reais. Vamos começar desenhando duas retas coordenadas perpendiculares que se interceptam na origem O de cada reta. Geralmente uma reta é horizontal com direção positiva para a direita e é chamada reta x; a outra reta é vertical com direção positiva para cima e é denominada reta y.

Qualquer ponto P no plano pode ser localizado por um único par ordenado de números, traçando pelo ponto P as retas perpendiculares aos eixos x e y. Essas retas interceptam os eixos em pontos com as coordenadas a e b, conforme mostra a Figura 1. Então, ao ponto P é atribuído o par ordenado (a, b). O primeiro número a é chamado **coordenada *x*** (ou **abscissa**) de P; o segundo número b é conhecido como **coordenada *y*** (ou **ordenada**) de P. Dizemos que P é um ponto com coordenadas (a, b) e denotamos o ponto pelo símbolo $P(a, b)$. Na Figura 2 estão vários pontos com suas coordenadas.

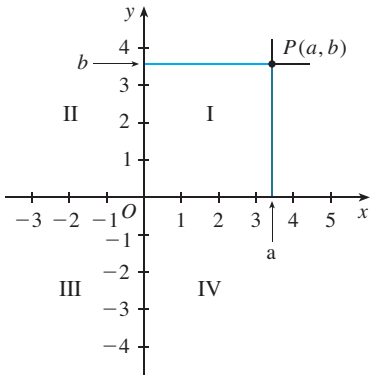


FIGURA 1

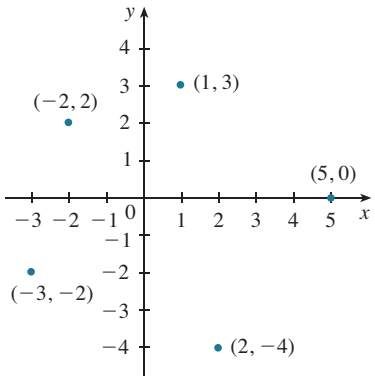


FIGURA 2

Revertendo o processo anterior, podemos começar por um par ordenado (a, b) e chegar até o ponto P correspondente. Frequentemente, identificamos o ponto P com o par ordenado (a, b) e nos referimos a ele como "ponto (a, b)". [Embora a notação usada para um intervalo aberto (a, b) seja a mesma usada para o ponto (a, b), você será capaz de distinguir pelo contexto qual o significado desejado.]

Esse sistema de coordenadas é dito **sistema coordenado retangular** ou **sistema de coordenadas cartesianas**, em homenagem ao matemático René Descartes (1596-1650), embora outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), tenha inventado os princípios da geometria analítica ao mesmo tempo que Descartes. O plano fornecido por esse sistema de coordenadas, denominado **plano coordenado** ou **cartesiano**, é denotado por $\mathbb{R}^2$.

Os eixos x e y são chamados **eixos coordenados** e dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes, denotados por I, II, III e IV na Figura 1. Observe que o primeiro quadrante consiste nos pontos com coordenadas x e y positivas.

EXEMPLO 1 Descreva e esboce as regiões dadas pelos seguintes conjuntos:

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUÇÃO

(a) Os pontos cujas coordenadas x são 0 ou são positivas estão situados no eixo y ou à direita dele, como indicado pela região sombreada da Figura 3(a).

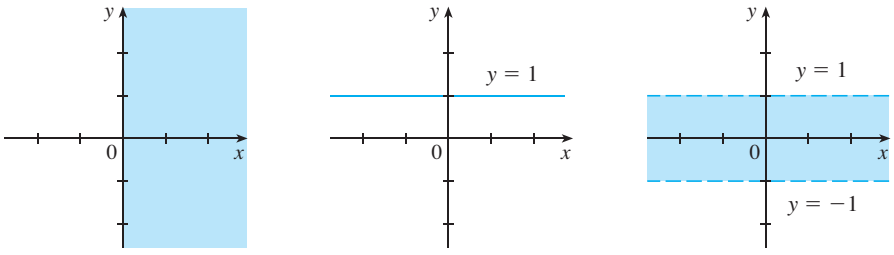


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) O conjunto de todos os pontos com coordenada y igual a 1 é uma reta horizontal uma unidade acima do eixo x [veja a Figura 3(b)].
(c) Lembre-se do Apêndice A que

$$|y| < 1 \qquad \text{se e somente se} \qquad -1 < y < 1$$

A região dada consiste naqueles pontos do plano cuja coordenada y está entre -1 e 1. Assim, a região consiste em todos os pontos que estão entre (mas não sobre) as retas horizontais $y = 1$ e $y = -1$. [Essas retas estão mostradas como retas tracejadas na Figura 3(c) para indicar que os pontos sobre essas retas não estão no conjunto.] □

Lembre-se, a partir do Apêndice A, que a distância entre os pontos a e b sobre o eixo real é $|a - b| = |b - a|$. Assim, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma reta horizontal deve ser $|x_2 - x_1|$ e a distância entre $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma reta vertical deve ser $|y_2 - y_1|$ (veja a Figura 4).

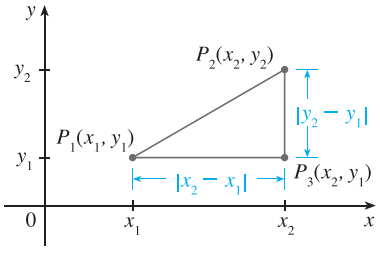


FIGURA 4

Para encontrar a distância $|P_1P_2|$ entre dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, observamos que o triângulo $P_1P_2P_3$ na Figura 4 é retângulo e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1 FÓRMULA DA DISTÂNCIA A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXEMPLO 2 A distância entre $(1, -2)$ e $(5, 3)$ é

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$ □

RETAS

Queremos encontrar uma equação para uma dada reta L; essa equação é satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre L e por nenhum outro ponto. Para encontrar a equação de L usamos sua *inclinação*, que é uma medida do grau de declividade da reta.

2 DEFINIÇÃO A **inclinação** (ou coeficiente angular) de uma reta não vertical que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A inclinação de uma reta vertical não está definida.

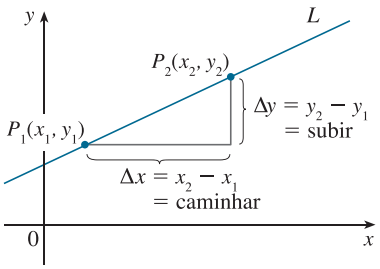


FIGURA 5

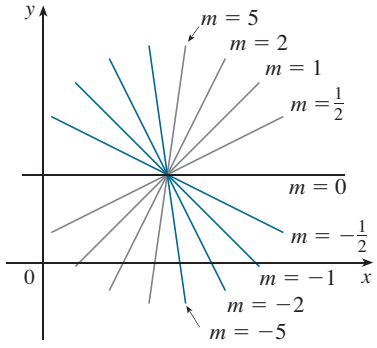


FIGURA 6

Assim, a inclinação de uma reta é a razão da variação em y, Δy, e da variação em x, Δx (veja a Figura 5). A inclinação é, portanto, a taxa de variação de y em relação a x: o fato de tratar-se de uma reta significa que a taxa de variação é constante.

A Figura 6 mostra várias retas acompanhadas de suas inclinações. Observe que as retas com inclinação positiva inclinam-se para cima à direita, enquanto as retas com inclinação negativa inclinam-se para baixo à direita. Observe também que as retas mais íngremes são aquelas para as quais o valor absoluto da inclinação é maior, e que uma reta horizontal tem inclinação zero.

Vamos encontrar agora uma equação da reta que passa por um ponto dado $P_1(x_1, y_1)$ e tem inclinação m. Um ponto $P(x, y)$ com $x \neq x_1$ está sobre essa reta se e somente se a inclinação da reta que passa por P_1 e P é igual a m; isto é,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

e observamos que essa equação também é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$. Portanto, ela é uma equação da reta dada.

3 EQUAÇÃO DE UMA RETA NA FORMA PONTO-INCLINAÇÃO Uma equação da reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ com inclinação m é

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EXEMPLO 3 Ache uma equação da reta por $(1, -7)$ com inclinação $-\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Usando (3) com $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ e $y_1 = -7$, obtemos uma equação da reta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

que pode ser reescrita como

$$2y + 14 = -x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x + 2y + 13 = 0$$ □

EXEMPLO 4 Encontre uma equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -4)$.

SOLUÇÃO Pela Definição 2 a inclinação da reta é

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando a forma ponto-inclinação com $x_1 = -1$ e $y_1 = 2$, obteremos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que pode ser simplificada para $\qquad 3x + 2y = 1$ □

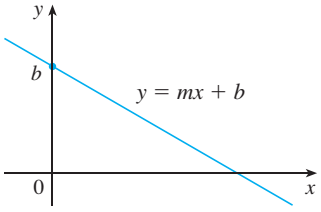


FIGURA 7

Suponha que uma reta não vertical tenha inclinação m e intersecção com o eixo y igual a b (veja a Figura 7). Isso significa que ela intercepta o eixo y em um ponto $(0, b)$, logo a equação da reta na forma ponto-inclinação, com $x_1 = 0$ e $y_1 = b$, torna-se

$$y - b = m(x - 0)$$

Isso pode ser simplificado como a seguir.

4 EQUAÇÃO DE UMA RETA NA FORMA INCLINAÇÃO–INTERSECÇÃO COM O EIXO Uma equação da reta com inclinação m e intersecção com o eixo y igual a b é

$$y = mx + b$$

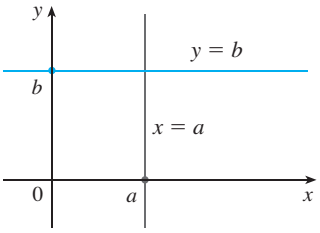


FIGURA 8

Em particular, se a reta for horizontal, sua inclinação é $m = 0$, logo sua equação é $y = b$, onde b é a intersecção com o eixo y (veja a Figura 8). Uma reta vertical não tem uma inclinação, mas podemos escrever sua equação como $x = a$, onde a é a intersecção com o eixo x, pois a coordenada x de todo ponto sobre a reta é a.

Observe que a equação de toda reta pode ser escrita na forma

5
$$Ax + By + C = 0$$

porque a reta vertical tem a equação da forma $x = a$ ou $x - a = 0$ ($A = 1, B = 0, C = -a$) e uma reta não vertical tem a equação $y = mx + b$ ou $-mx + y - b = 0$ ($A = -m, B = 1$, $C = -b$). Reciprocamente, se começarmos com uma equação geral de primeiro grau, isto é, uma equação da forma (5), onde A, B e C são constantes e A e B não são ambos 0, então podemos mostrar que ela é a equação de uma reta. Se $B = 0$, isso torna-se $Ax + C = 0$ ou $x = -C/A$, que representa uma reta vertical com intersecção com o eixo x igual a $-C/A$. Se $B \neq 0$, a equação pode ser reescrita isolando-se y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

e reconhecemos isso como a equação de uma reta na forma inclinação–intersecção com o eixo ($m = -A/B, b = -C/B$). Portanto, uma equação da forma (5) é chamada **equação linear** ou **equação geral de uma reta**. Resumindo, nos referimos frequentemente à "reta $Ax + By + C = 0$" em lugar de à "reta cuja equação é $Ax + By + C = 0$".

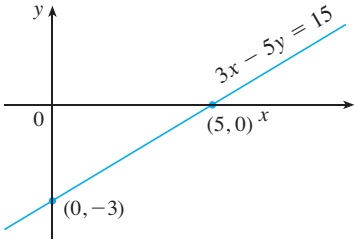


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da equação $3x - 5y = 15$.

SOLUÇÃO Uma vez que a equação é linear, seu gráfico é uma reta. Para desenhar o gráfico, podemos simplesmente determinar dois pontos sobre a reta. É fácil determinar as intersecções com os eixos. Substituindo $y = 0$ (equação do eixo x) na equação dada, obtemos $3x = 15$, logo $x = 5$ é a intersecção com o eixo x. Substituindo $x = 0$ na equação, vemos que a intersecção com o eixo y é -3. Isso permite-nos esboçar o gráfico como na Figura 9. □

EXEMPLO 6 Represente graficamente a inequação $x + 2y > 5$.

SOLUÇÃO Para esboçar o gráfico do conjunto $\{(x, y) | x + 2y > 5\}$ isolaremos y na desigualdade:

$$x + 2y > 5$$
$$2y > -x + 5$$
$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

Compare essa desigualdade com a equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa uma reta com inclinação $-\frac{1}{2}$ e intersecção com o eixo y igual a $\frac{5}{2}$. Vemos que o gráfico dado consiste nos pontos com coordenada y *maior* que aquela sobre a reta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Assim, o gráfico é a região que se situa *acima* da reta, conforme ilustrado na Figura 10. □

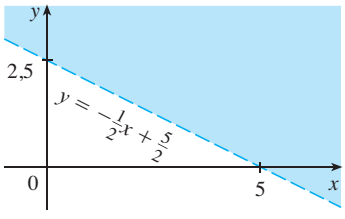


FIGURA 10

RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES

As inclinações podem ser usadas para mostrar que as retas são paralelas ou perpendiculares. Os seguintes fatos são demonstrados, por exemplo, em *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 5. ed., de Stewart, Redlin e Watson. Brooks Thomson/Cole Publishing Co.: Belmont, CA, 2006.

6 RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES

1. Duas retas não verticais são paralelas se e somente se tiverem a mesma inclinação.
2. Duas retas com inclinação m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1m_2 = -1$; isto é, suas inclinações são recíprocas opostas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO 7 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $(5, 2)$ e que é paralela à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUÇÃO A reta dada pode ser escrita na forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que está na forma inclinação-intersecção com o eixo com $m = -\frac{2}{3}$. As retas paralelas têm a mesma inclinação, logo a reta pedida tem a inclinação $-\frac{2}{3}$, e sua equação na forma ponto-inclinação é

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos escrever essa equação como $2x + 3y = 16$. □

EXEMPLO 8 Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y - 1 = 0$ são perpendiculares.

SOLUÇÃO As equações podem ser escritas como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de onde vemos que as inclinações são

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1m_2 = -1$, as retas são perpendiculares. □

B EXERCÍCIOS

1-6 Determine a distância entre os dois pontos.

1. $(1, 1)$, $(4, 5)$
2. $(1, -3)$, $(5, 7)$
3. $(6, -2)$, $(-1, 3)$
4. $(1, -6)$, $(-1, -3)$
5. $(2, 5)$, $(4, -7)$
6. (a, b), (b, a)

7-10 Determine a inclinação da reta que passa por P e Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$
8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$
9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$
10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.

12. (a) Mostre que o triângulo com vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ e $C(2, -2)$ é um triângulo retângulo usando a recíproca do Teorema de Pitágoras.
(b) Use as inclinações para mostrar que ABC é um triângulo retângulo.
(c) Determine a área do triângulo.

13. Mostre que os pontos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ e $(-5, 3)$ são os vértices de um quadrado.

14. (a) Mostre que os pontos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ e $C(5, 15)$ são colineares (pertencem à mesma reta) mostrando que

$$|AB| + |BC| = |AC|.$$

(b) Use as inclinações para mostrar que A, B e C são colineares.

15. Mostre que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ e $D(-1, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

16. Mostre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ e $D(0, 6)$ são vértices de um retângulo.

17-20 Esboce o gráfico da equação.

17. $x = 3$ **18.** $y = -2$

19. $xy = 0$ **20.** $|y| = 1$

21-36 Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas.

21. Que passa pelo ponto $(2, -3)$, inclinação 6

22. Que passa pelo ponto $(-1, 4)$, inclinação -3

23. Que passa pelo ponto $(1, 7)$, inclinação $\frac{2}{3}$

24. Que passa pelo ponto $(-3, -5)$, inclinação $-\frac{7}{2}$

25. Por $(2, 1)$ e $(1, 6)$

26. Por $(-1, -2)$ e $(4, 3)$

27. Inclinação 3, e intersecção com o eixo y igual a -2

28. Inclinação $\frac{2}{5}$, e intersecção com o eixo y igual a 4

29. Intersecção com o eixo x igual a 1, e intersecção com o eixo y igual a -3

30. Intersecção com o eixo x igual a -8, e intersecção com o eixo y igual a 6

31. Que passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x

32. Que passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo y

33. Que passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$

34. Com intercepto y igual a 6, paralela à reta $2x + 3y + 4 = 0$

35. Que passa pelo ponto $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$

37-42 Ache a inclinação e a intersecção com o eixo y da reta e faça o esboço de seu gráfico.

37. $x + 3y = 0$ **38.** $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$ **40.** $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$ **42.** $4x + 5y = 10$

43-52 Esboce a região no plano xy.

43. $\{(x, y) | x < 0\}$ **44.** $\{(x, y) | y > 0\}$

45. $\{(x, y) | xy < 0\}$ **46.** $\{(x, y) | x \geqslant 1 \text{ e } y < 3\}$

47. $\{(x, y) | |x| \leqslant 2\}$

48. $\{(x, y) | |x| < 3 \text{ e } |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ e } x \leqslant 2\}$

50. $\{(x, y) | y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) | 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\left\{(x, y) | -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\right\}$

53. Ache um ponto sobre o eixo y que seja equidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.

54. Mostre que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ até $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Encontre o ponto médio do segmento de reta que une os pontos dados.

(a) $(1, 3)$ e $(7, 15)$ (b) $(-1, 6)$ e $(8, -12)$

56. Ache os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ e $C(8, 2)$. (A mediana é um segmento de reta de um vértice até o ponto médio do lado oposto.)

57. Mostre que as retas $2x - y = 4$ e $6x - 2y = 10$ não são paralelas e ache a sua intersecção.

58. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e ache sua intersecção.

59. Ache uma equação da mediatriz do segmento de reta com extremidades nos pontos $A(1, 4)$ e $B(7, -2)$.

60. (a) Encontre as equações dos lados do triângulo com vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ e $R(-1, 6)$.

(b) Ache equações para as medianas desse triângulo. Onde elas se interceptam?

61. (a) Mostre que se as intersecções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b diferentes de zero, e então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

Essa equação é chamada **forma a partir das duas intersecções** da equação da reta.

(b) Use a parte (a) para encontrar a equação da reta cuja intersecção com o eixo x é 6 e cuja intersecção com o eixo y é -8.

62. Kelly parte de Winnipeg as 14 h e dirige a velocidade constante pela autoestrada Trans-Canada. Ela passa por Brandon a, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.

(a) Expresse a distância percorrida em termos de tempo decorrido.

(b) Trace o gráfico da equação na parte (a).

(c) Qual a inclinação desta reta? O que ela representa?

C CÔNICAS: GRÁFICOS DAS EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

No Apêndice B vimos que uma equação $Ax + By + C = 0$, de primeiro grau ou linear representa uma reta. Nesta seção vamos discutir as equações do segundo grau, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representam um círculo, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

O gráfico de tais equações em x e y é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem aquela equação; ele dá uma representação visual da equação. Reciprocamente, dada uma curva no plano xy, podemos encontrar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre a curva e por nenhum outro ponto. Esta é a outra metade dos princípios básicos da geometria analítica conforme formulada por Descartes e Fermat. A ideia é que se uma curva geométrica pode ser representada por uma equação algébrica, então as regras da álgebra podem ser usadas para analisar o problema geométrico.

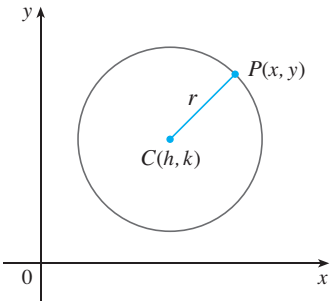


FIGURA 1

CÍRCULOS

Como um exemplo desse tipo de problema, vamos determinar uma equação do círculo com raio r e centro (h, k). Pela definição, o círculo é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ cuja distância ao centro $C(h, k)$ é r (veja a Figura 1). Assim, P está sobre o círculo se e somente se $|PC| = r$. Da fórmula da distância, temos

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

ou, de maneira equivalente, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Esta é a equação desejada.

1 Equação do Círculo Uma equação do círculo com centro (h, k) e raio r é

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro for a origem $(0, 0)$, a equação será

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação do círculo com raio 3 e centro $(2, -5)$.

SOLUÇÃO Da Equação 1 com $r = 3$, $h = 2$ e $k = -5$, obtemos

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$ □

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ mostrando primeiro que ela representa um círculo e então encontrando seu centro e raio.

SOLUÇÃO Vamos agrupar primeiro os termos em x e y da seguinte forma:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

Então, completando o quadrado dentro de cada parêntese e somando as constantes apropriadas a ambos os lados da equação, temos:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

ou
$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3$$

Comparando essa equação com a equação-padrão do círculo (1), vemos que $h = -1$, $k = 3$ e $r = \sqrt{3}$; assim, a equação dada representa um círculo com centro $(-1, 3)$ e raio $\sqrt{3}$. Ele está esboçado na Figura 2.

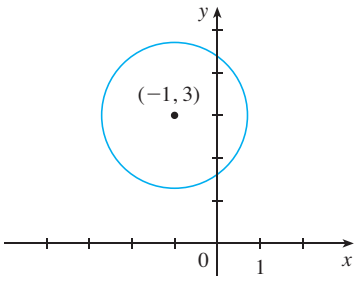


FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

PARÁBOLAS

As propriedades geométricas das parábolas serão revisadas na Seção 10.5, no Volume II. Aqui, consideraremos uma parábola como um gráfico de uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$.

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico da parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO Vamos fazer uma tabela de valores, marcar os pontos e depois juntá-los por uma curva suave, de modo a obter o gráfico da Figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

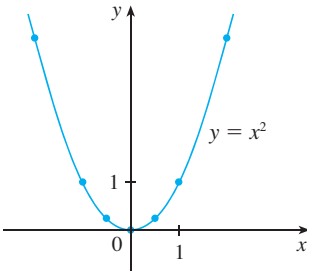


FIGURA 3 □

A Figura 4 mostra o gráfico de várias parábolas com as equações da forma $y = ax^2$ para diversos valores do número a. Em cada caso o *vértice*, o ponto onde a parábola muda de direção, é a origem. Vemos que a parábola $y = ax^2$ abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$ (como na Figura 5).

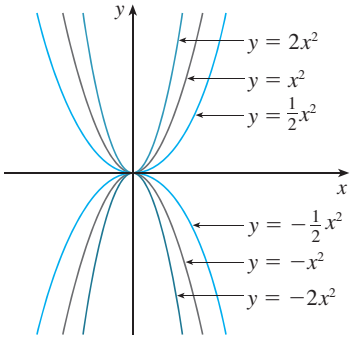
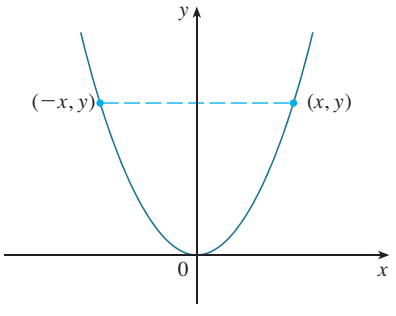
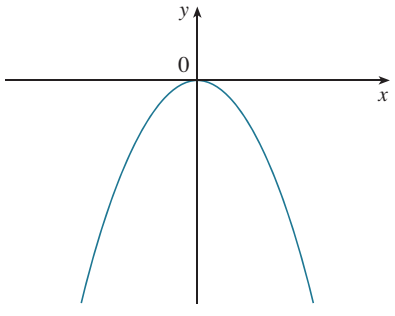


FIGURA 4



(a) $y = ax^2$, $a > 0$



(b) $y = ax^2$, $a < 0$

FIGURA 5

Observe que se (x, y) satisfizer a equação $y = ax^2$, então o mesmo acontece com $(-x, y)$. Isso corresponde ao fato geométrico de que, se a metade direita do gráfico for refletida em torno do eixo y, obteremos a metade esquerda do gráfico. Dizemos que o gráfico é **simétrico em relação ao eixo *y***.

O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo y se a equação ficar invariante quando substituirmos x por $-x$.

Se trocarmos x e y na equação $y = ax^2$, teremos $x = ay^2$, que também representa uma parábola. (Trocar x e y significa fazer uma reflexão em torno da reta bissetriz $y = x$.) A parábola $x = ay^2$ se abre para a direita se $a > 0$ e para esquerda se $a < 0$. (Veja a Figura 6.) Dessa vez a parábola é simétrica em relação ao eixo x, pois se (x, y) satisfizer a equação $x = ay^2$, então o mesmo acontece com $(x, -y)$.

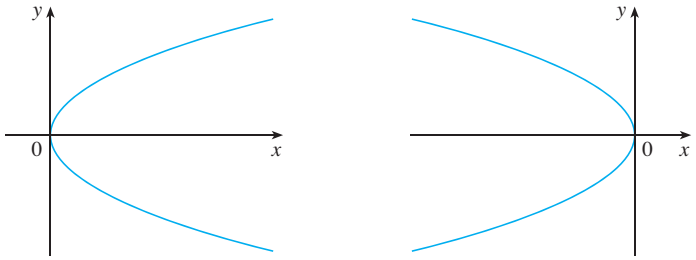


FIGURA 6 (a) $x = ay^2,\ a > 0$ (b) $x = ay^2,\ a < 0$

O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo x se a equação ficar invariante quando trocarmos y por $-y$.

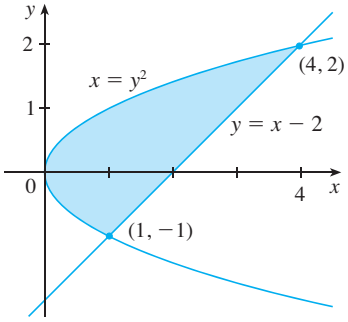


FIGURA 7

EXEMPLO 4 Esboce a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$.

SOLUÇÃO Vamos encontrar primeiro os pontos de intersecção resolvendo as duas equações. Substituindo $x = y + 2$ na equação $x = y^2$, vamos obter $y + 2 = y^2$, o que resulta em

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

de modo que $y = 2$ ou -1. Assim, os pontos de intersecção são $(4, 2)$ e $(1, -1)$ e, passando por esses dois pontos, traçamos a reta $y = x - 2$. Esboçamos então a parábola $x = y^2$ lembrando-nos da Figura 6(a) e fazendo com que a parábola passe pelos pontos $(4, 2)$ e $(1, -1)$. A região delimitada por $x = y^2$ e $y = x - 2$ significa a região finita cuja fronteira é formada por essas curvas. Ela está esboçada na Figura 7. □

ELIPSES

A curva com a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

onde a e b são números positivos é chamada **elipse** na posição-padrão. (As propriedades geométricas das elipses serão discutidas na Seção 10.5, no Volume II.) Observe que a Equação 2 fica invariante se x for substituído por $-x$ ou y por $-y$; dessa forma, a elipse é simétrica em relação aos eixos. Como uma ajuda no esboço da elipse, vamos determinar suas intersecções com os eixos.

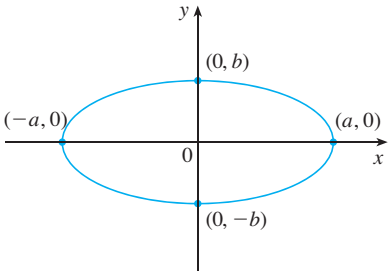


FIGURA 8

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

As **intersecções com o eixo *x*** de um gráfico são as coordenadas x dos pontos onde ele intercepta o eixo x. Eles são encontrados fazendo-se $y = 0$ na equação do gráfico.

Os **intersecções com o eixo *y*** de um gráfico são as coordenadas y dos pontos onde ele intercepta o eixo y. Eles são encontrados fazendo-se $x = 0$ na equação do gráfico.

Se fizermos $y = 0$ na Equação 2, obteremos $x^2 = a^2$ e, dessa forma, as intersecções com o eixo x são $\pm a$. Fazendo $x = 0$, obteremos $y^2 = b^2$; assim, as intersecções com o eixo y são $\pm b$. Usando essa informação, junto com a simetria, fazemos o esboço da elipse na Figura 8. Se $a = b$, a elipse é um círculo com raio a.

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144 obtemos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma-padrão de uma equação da elipse (2); assim, temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. As intersecções com o eixo x são ± 4; as intersecções com o eixo y são ± 3. O gráfico está esboçado na Figura 9.

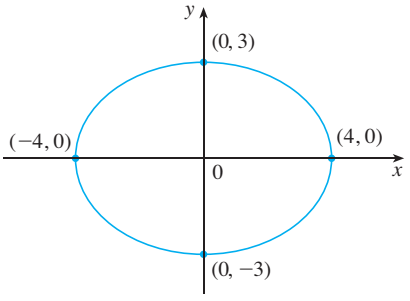


FIGURA 9

$9x^2 + 16y^2 = 144$

□

HIPÉRBOLES

A curva com a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \boxed{3}$$

é denominada **hipérbole** na posição-padrão. Novamente, a Equação 3 fica invariante quando x é substituído por $-x$ ou y é substituído por $-y$, dessa forma, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos. Para encontrar as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e obtemos $x^2 = a^2$ e $x = \pm a$. Porém, se fizermos $x = 0$ na Equação 3, obteremos $y^2 = -b^2$, o que é impossível; assim, não há intersecção com o eixo y. De fato, da Equação 3 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

o que mostra que $x^2 \geqslant a^2$ e, portanto, $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Assim, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, cada uma delas chamada *ramo*. Ela está esboçada na Figura 10.

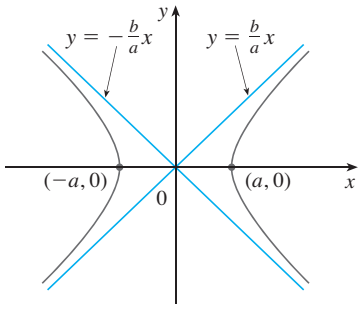


FIGURA 10

A hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Para esboçar uma hipérbole é útil primeiro traçar suas *assíntotas*, que são as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 10. Ambos os ramos da hipérbole tendem para

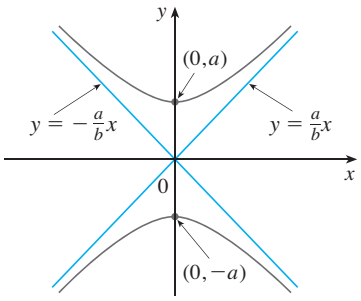


FIGURA 11
A hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

as assíntotas; isto é, ficam arbitrariamente próximos das assíntotas. Isso envolve a ideia de limite, como discutido no Capítulo 2 (veja também o Exercício 67 na Seção 4.5).

Trocando os papéis de x e y, obtemos uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

que também representa uma hipérbole e está esboçada na Figura 11.

EXEMPLO 6 Esboce a curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole na forma padrão (Equação 3). Visto que $a^2 = 4$, as intersecções com o eixo x são ± 2. Uma vez que $b^2 = 9$, temos $b = 3$, e as assíntotas são $y = \pm\left(\frac{3}{2}\right)x$. A hipérbole está esboçada na Figura 12.

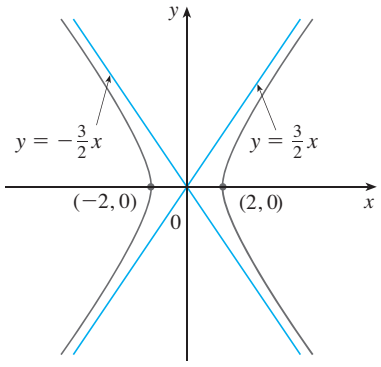
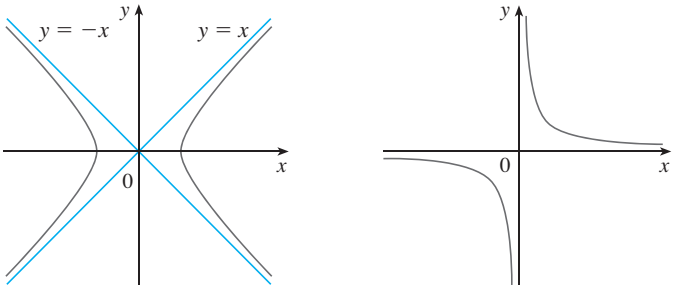


FIGURA 12
A hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$

□

Se $b = a$, a hipérbole tem a equação $x^2 - y^2 = a^2$ (ou $y^2 - x^2 = a^2$) e é chamada *hipérbole equilátera* [veja a Figura 13(a)]. Suas assíntotas são $y = \pm x$, que são perpendiculares. Girando-se uma hipérbole equilátera em 45°, as assíntotas tornam-se os eixos x e y, e pode-se mostrar que a nova equação da hipérbole é $xy = k$, onde k é uma constante [veja a Figura 13(b)].



(a) $x^2 - y^2 = a^2$ (b) $xy = k \ \ (k > 0)$

FIGURA 13
Hipérboles equiláteras

CÔNICAS DESLOCADAS

Lembre-se de que uma equação do círculo com centro na origem e raio r é $x^2 + y^2 = r^2$, mas se o centro for o ponto (h, k), então a equação do círculo fica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Analogamente, se tomarmos a elipse com a equação

4

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e a transladarmos de forma que se seu centro esteja no ponto (h, k), então sua equação fica

5

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

(Veja a Figura 14.)

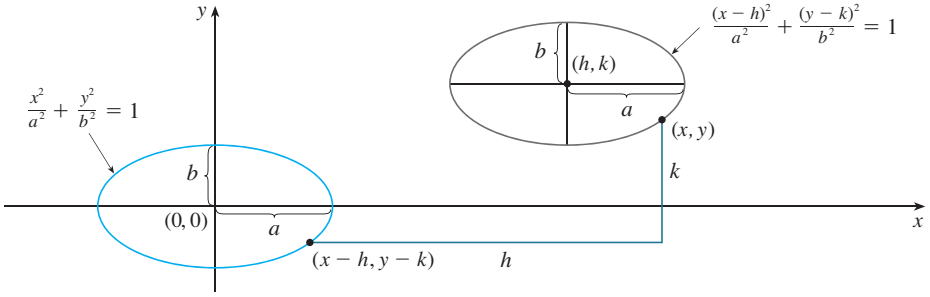


FIGURA 14

Observe que ao transladarmos a elipse, substituímos x por $x - h$ e y por $y - k$ na Equação 4 para obter a Equação 5. Usando o mesmo procedimento, deslocamos a parábola $y = ax^2$ de forma que seu vértice (a origem) torna-se o ponto (h, k), como na Figura 15. Substituindo x por $x - h$ e y por $y - k$, vemos que a nova equação é

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

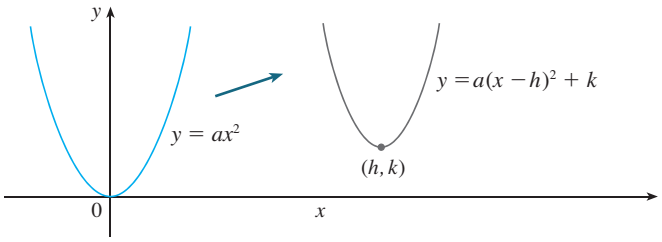


FIGURA 15

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da equação $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos completar os quadrados:

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

Nessa forma vemos que a equação representa a parábola obtida deslocando-se $y = 2x^2$ tal que seu vértice seja o ponto $(1, -1)$. O gráfico está esboçado na Figura 16.

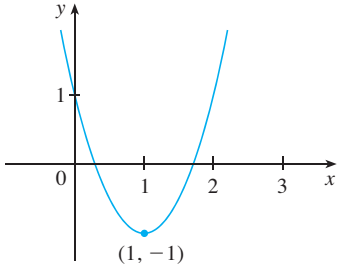
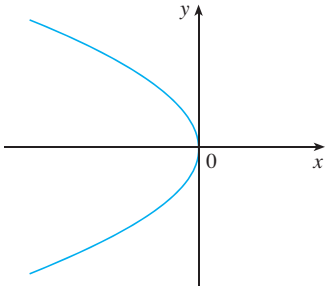


FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

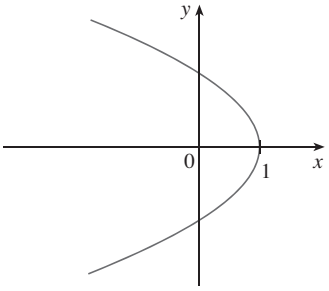
□

EXEMPLO 8 Esboce a curva $x = 1 - y^2$.

SOLUÇÃO Dessa vez começamos com a parábola $x = -y^2$ (como na Figura 6 com $a = -1$) e deslocamos uma unidade para a direita para obter o gráfico de $x = 1 - y^2$ (veja a Figura 17).



(a) $x = -y^2$



(b) $x = 1 - y^2$

□

C EXERCÍCIOS

1-4 Determine uma equação de um círculo que satisfaça as condições dadas.

1. Centro $(3, -1)$, raio 5

2. Centro $(-2, -8)$, raio 10

3. Centro na origem, passa em $(4, 7)$

4. Centro $(-1, 5)$, passa em $(-4, -6)$

5-9 Mostre que a equação representa um círculo e determine o centro e o raio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

7. $x^2 + y^2 + x = 0$

8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. Que condições nos coeficientes a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente um círculo? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio do círculo.

11-32 Identifique o tipo de curva e esboce o gráfico. Não marque os pontos. Somente use os gráficos-padrão dados nas Figuras 5, 6, 8, 10 e 11 e desloque se for necessário.

11. $y = -x^2$

12. $y^2 - x^2 = 1$

13. $x^2 + 4y^2 = 16$

14. $x = -2y^2$

15. $16x^2 - 25y^2 = 400$

16. $25x^2 + 4y^2 = 100$

17. $4x^2 + y^2 = 1$

18. $y = x^2 + 2$

19. $x = y^2 - 1$

20. $9x^2 - 25y^2 = 225$

21. $9y^2 - x^2 = 9$

22. $2x^2 + 5y^2 = 10$

23. $xy = 4$

24. $y = x^2 + 2x$

25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$

26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$

27. $y = x^2 - 6x + 13$

28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$

29. $x = 4 - y^2$

30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33-34 Esboce a região limitada pelas curvas.

33. $y = 3x$, $y = x^2$

34. $y = 4 - x^2$, $x - 2y = 2$

35. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passe pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

36. Determine uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $(1, -10\sqrt{2}/3)$ e $(-2, 5\sqrt{5}/3)$.

37-40 Esboce o gráfico do conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

39. $\{(x, y) \mid y \geq x^2 - 1\}$

40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

D TRIGONOMETRIA

ÂNGULOS

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360°, que é o mesmo que 2π rad. Portanto,

1 $$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

e

2 $$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0{,}017 \text{ rad}$$

EXEMPLO 1

(a) Determine a medida em radianos de 60°. (b) Expresse $5\pi/4$ em graus.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação 1 ou 2 vemos que, para converter de graus para radianos, multiplicamos por $\pi/180$. Portanto,

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}\text{rad}$$

(b) Para converter de radianos para graus multiplicamos por $180/\pi$. Assim

$$\frac{5\pi}{4}\text{rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ$$ □

Em cálculo, usamos o radiano como medida dos ângulos, exceto quando explicitamente indicado. A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas em graus e em radianos de alguns ângulos comuns.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

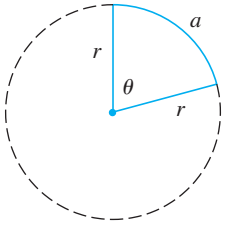


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um setor de um círculo com ângulo central θ e raio r subtendendo um arco com comprimento a. Visto que o comprimento de arco é proporcional ao tamanho do ângulo, e uma vez que o círculo inteiro tem uma circunferência $2\pi r$ e ângulo central 2π, temos

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Isolando θ e a nesta equação, obtemos

3 $$\theta = \frac{a}{r} \qquad a = r\theta$$

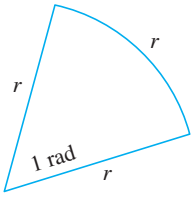


FIGURA 2

Lembre-se de que a Equação 3 é válida apenas quando θ for medido em radianos.

Em particular, fazendo $a = r$ na Equação 3, vemos que um ângulo de 1 rad é um ângulo subtendido no centro de um círculo por um arco com comprimento igual ao raio do círculo (veja a Figura 2).

EXEMPLO 2

(a) Se o raio de um círculo for 5 cm, qual o ângulo subtendido por um arco de 6 cm?
(b) Se um círculo tem raio 3 cm, qual é o comprimento de um arco subtendido por um ângulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUÇÃO

(a) Usando a Equação 3 com $a = 6$ e $r = 5$, vemos que o ângulo é

$$\theta = \frac{6}{5} = 1{,}2 \text{ rad}$$

(b) Com $r = 3$ cm e $\theta = 3\pi/8$ rad, o comprimento de arco é

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8}\text{cm}$$

□

A **posição-padrão** de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo, como na Figura 3. Um ângulo **positivo** é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final; da mesma forma, ângulos **negativos** são obtidos girando-se no sentido horário, como na Figura 4.

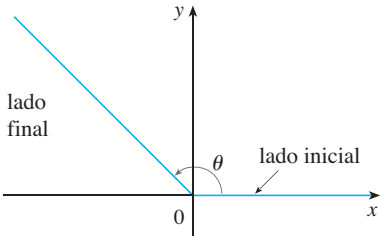


FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

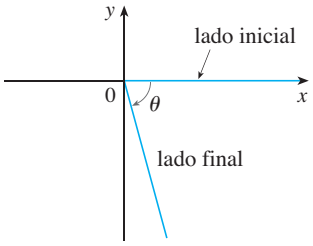


FIGURA 4 $\theta < 0$

A Figura 5 mostra vários exemplos de ângulos em posição-padrão. Observe que ângulos diferentes podem ter o mesmo lado final. Por exemplo, os ângulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ e $11\pi/4$ têm os mesmos lados inicial e final, pois

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

e 2π rad representa uma revolução completa.

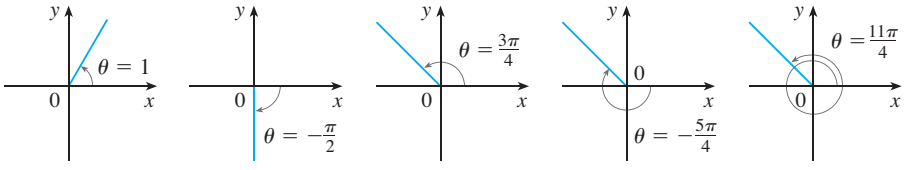


FIGURA 5
Ângulos na posição-padrão

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para um ângulo agudo θ as seis funções trigonométricas são definidas como razões entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo como a seguir (veja a Figura 6).

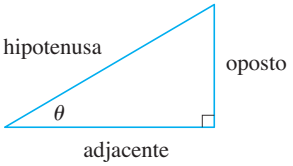


FIGURA 6

4

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}}$$

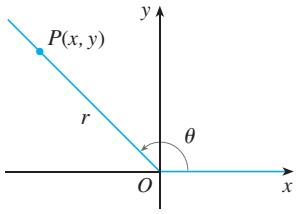


FIGURA 7

Essa definição não se aplica aos ângulos obtusos ou negativos, de modo que, para um ângulo geral θ na posição-padrão, tomamos $P(x, y)$ como um ponto qualquer sobre o lado final de θ e r como a distância $|OP|$, como na Figura 7. Então, definimos

5

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$

Como divisão por 0 não está definida, tg θ e sec θ não estão definidas quando $x = 0$, e cossec θ e cotg θ não estão definidas quando $y = 0$. Observe que as definições em (4) e (5) são consistentes quando θ é um ângulo agudo.

Se θ for um número, a convenção é que sen θ significa o seno do ângulo, cuja medida em *radianos* é θ. Por exemplo, a expressão sen 3 implica que estamos tratando com um ângulo de 3 rad. Ao determinar uma aproximação na calculadora para esse número, devemos nos lembrar de colocar a calculadora no modo radiano, e então obteremos

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0{,}14112$$

Para conhecer o seno do ângulo 3°, escrevemos sen 3° e, com nossa calculadora no modo grau, encontramos que

$$\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0{,}05234$$

As razões trigonométricas exatas para certos ângulos podem ser lidas dos triângulos da Figura 8. Por exemplo,

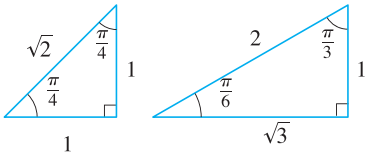


FIGURA 8

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

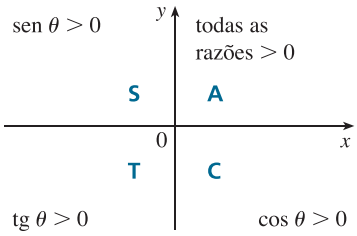


FIGURA 9

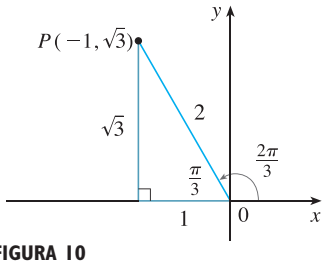


FIGURA 10

Os sinais das funções trigonométricas para ângulos em cada um dos quatro quadrantes podem ser lembrados pela regra mostrada na Figura 9 "**A**ll **S**tudents **T**ake **C**alculus".

EXEMPLO 3 Determine as razões trigonométricas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUÇÃO Da Figura 10 vemos que um ponto sobre a reta final para $\theta = 2\pi/3$ é $P(-1, \sqrt{3})$. Portanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

nas definições das razões trigonométricas, temos

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cossec} \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec \frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$ □

A tabela a seguir fornece alguns valores de sen θ e cos θ encontrados pelo método do Exemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

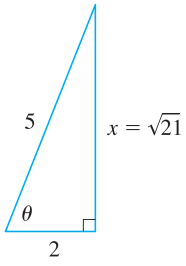


FIGURA 11

EXEMPLO 4 Se $\cos \theta = \frac{2}{5}$ e $0 < \theta < \pi/2$, determine as outras cinco funções trigonométricas de θ.

SOLUÇÃO Uma vez que $\cos \theta = \frac{2}{5}$, podemos tomar a hipotenusa como tendo o comprimento igual a 5 e o lado adjacente, o comprimento igual a 2 na Figura 11. Se o lado oposto tem comprimento x, então o Teorema de Pitágoras fornece $x^2 + 4 = 25$; logo, $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Podemos agora usar o diagrama para escrever as outras cinco funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\operatorname{cossec} \theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec \theta = \frac{5}{2} \qquad \operatorname{cotg} \theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$ □

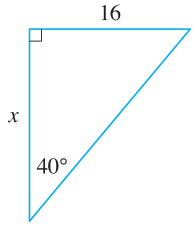


FIGURA 12

EXEMPLO 5 Use uma calculadora para aproximar o valor de x da Figura 12.

SOLUÇÃO Do diagrama vemos que

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{16}{x}$$

Portanto,

$$x = \frac{16}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 19{,}07$$ □

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elementares são dadas a seguir, e são consequências imediatas das definições das funções trigonométricas.

6
$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para a próxima identidade, voltemos à Figura 7. A fórmula da distância (ou, de maneira equivalente, o Teorema de Pitágoras) nos diz que $x^2 + y^2 = r^2$. Portanto

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Demonstramos, portanto, uma das mais úteis identidades da trigonometria:

7
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Se agora dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\cos^2\theta$ e usarmos a Equação 6, obteremos

8
$$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Analogamente, se dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\operatorname{sen}^2\theta$, obteremos

9
$$1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$$

As identidades

10a
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

indicam que sen e cos são funções, respectivamente, ímpar e par. Elas são facilmente demonstradas desenhando um diagrama mostrando θ e $-\theta$ na posição-padrão (veja o Exercício 39).

Uma vez que os ângulos θ e $\theta + 2\pi$ têm o mesmo lado final, temos

11
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Essas identidades revelam que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π.

As identidades trigonométricas restantes são todas consequências de duas identidades básicas chamadas **fórmulas da adição**:

12a
$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$$

12b
$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

As demonstrações dessas fórmulas de adição estão resumidas nos Exercícios 85, 86 e 87.

Substituindo y por $-y$ nas Equações 12a e 12b e usando as Equações 10a e 10b, obtemos as seguintes **fórmulas de subtração**:

13a $$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

13b $$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Então, dividindo as fórmulas nas Equações 12 ou 13, obtemos as fórmulas correspondentes para $\operatorname{tg}(x \pm y)$:

14a $$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

14b $$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Se fizermos $y = x$ nas fórmulas de adição (12), obteremos as **fórmulas dos ângulos duplos**:

15a $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Então, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos a seguinte forma alternativa das fórmulas dos ângulos duplos para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

Se agora isolarmos $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$ nestas equações, obteremos as seguintes **fórmulas do ângulo-metade**, que são úteis em cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Finalmente, enunciamos as **fórmulas do produto**, que podem ser deduzidas das Equações 12 e 13:

18a $$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

18b $$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

18c $$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

Há muitas outras identidades trigonométricas, mas as aqui enunciadas são algumas das mais usadas no cálculo. Se você se esquecer de qualquer uma delas, lembre-se de que elas podem ser deduzidas das Equações 12a e 12b.

EXEMPLO 6 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula do ângulo duplo (15a), reescrevemos a equação dada como

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

Portanto, há duas possibilidades:

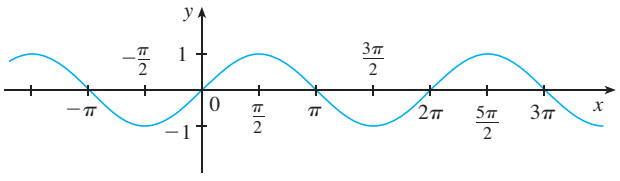
$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2\cos x = 0$$
$$x = 0, \pi, 2\pi \qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

A equação dada tem cinco soluções: 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ e 2π. □

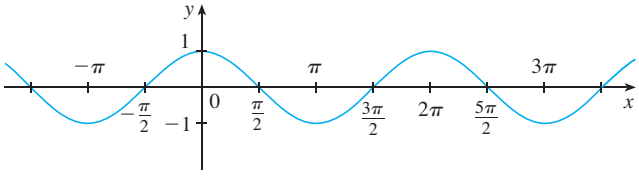
GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, mostrado na Figura 13(a), é obtido desenhando-se os pontos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então usando-se a periodicidade da função (da Equação 11) para completar o gráfico. Observe que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π, isto é,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{sempre que } x = n\pi, \qquad n \text{ um inteiro}$$



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



(b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 13

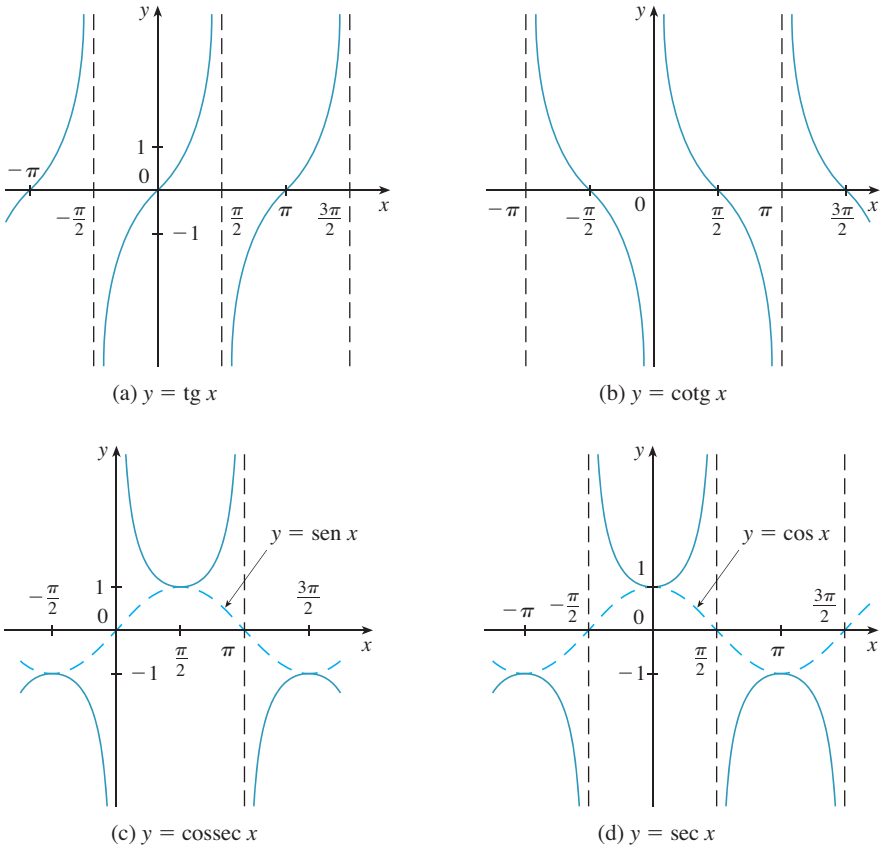
Em virtude da identidade

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(que pode ser verificada usando-se a Equação 12a), o gráfico do cosseno é obtido deslocando-se em $\pi/2$ para a esquerda o gráfico do seno [veja a Figura 13(b)]. Observe que para ambas as funções, seno e cosseno, o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o conjunto fechado $[-1, 1]$. Assim, para todos os valores de x, temos

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

Os gráficos das quatro funções trigonométricas restantes estão mostrados na Figura 14, e seus domínios estão indicados lá. Observe que a tangente e a cotangente têm a mesma imagem $(-\infty, \infty)$, enquanto a cossecante e a secante têm a imagem $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Todas as quatro funções são periódicas: tangente e cotangente têm período π, ao passo que cossecante e secante possuem período 2π.



(a) $y = \operatorname{tg} x$ (b) $y = \operatorname{cotg} x$

(c) $y = \operatorname{cossec} x$ (d) $y = \sec x$

FIGURA 14

D EXERCÍCIOS

1-6 Converta de graus para radianos.

1. 210° **2.** 300° **3.** 9°

4. -315° **5.** 900° **6.** 36°

7-12 Converta de radianos para graus.

7. 4π **8.** $-\dfrac{7\pi}{2}$ **9.** $\dfrac{5\pi}{12}$

10. $\dfrac{8\pi}{3}$ **11.** $-\dfrac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Determine o comprimento de um arco circular subtendido pelo ângulo de $\pi/12$ rad se o raio do círculo for de 36 cm.

14. Se um círculo tem raio de 10 cm, qual é o comprimento de arco subtendido pelo ângulo central de 72°?

15. Um círculo tem raio de 1,5 m. Qual o ângulo subtendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

16. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

17-22 Desenhe, na posição-padrão, o ângulo cuja medida é dada.

17. 315° **18.** -150° **19.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

20. $\dfrac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23-28 Determine as razões trigonométricas exatas para o ângulo cuja medida em radianos é dada.

23. $\dfrac{3\pi}{4}$ **24.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **25.** $\dfrac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\frac{5\pi}{6}$ **28.** $\frac{11\pi}{4}$

29-34 Determine as razões trigonométricas restantes.

29. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

30. $\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1{,}5, \quad \frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

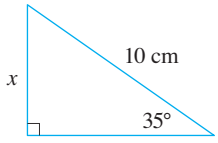
32. $\cos x = -\frac{1}{3}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

33. $\operatorname{cotg}\beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

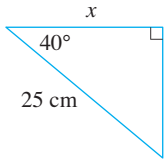
34. $\operatorname{cossec}\theta = -\frac{4}{3}, \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35-38 Determine, com cinco casas decimais corretas, o comprimento do lado chamado de x.

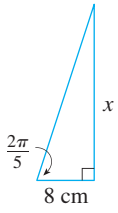
35.



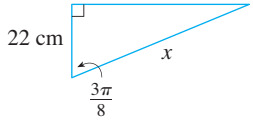
36.



37.



38.



39-41 Demonstre cada equação.

39. (a) Equação 10a (b) Equação 10b

40. (a) Equação 14a (b) Equação 14b

41. (a) Equação 18a (b) Equação 18b
(c) Equação 18c

42-58 Demonstre a identidade.

42. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta$ **46.** $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \operatorname{tg} y \operatorname{sen} y$

48. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\operatorname{cotg}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{cossec}^2\theta$

50. $2 \operatorname{cossec} 2t = \sec t \operatorname{cossec} t$

51. $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

52. $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y) \operatorname{sen}(x - y)$

55. $\frac{\operatorname{sen}\phi}{1 - \cos\phi} = \operatorname{cossec}\phi + \operatorname{cotg}\phi$

56. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta$

58. $\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3\cos\theta$

59-64 Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule a expressão.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$ **62.** $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$ **64.** $\cos 2y$

65-72 Encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação.

65. $2 \cos x - 1 = 0$ **66.** $3 \operatorname{cotg}^2 x = 1$

67. $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$ **68.** $|\operatorname{tg} x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ **70.** $2 \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ **72.** $2 + \cos 2x = 3 \cos x$

73-76 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade.

73. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$ **74.** $2 \cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ **76.** $\operatorname{sen} x > \cos x$

77-82 Faça o gráfico da função começando com o gráfico das Figuras 13 e 14 e aplicando as transformações da Seção 1.3 quando apropriado.

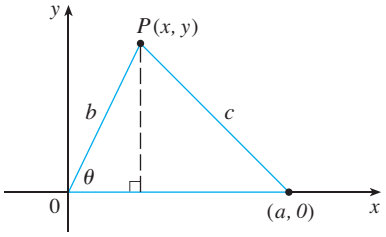
77. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **78.** $y = \operatorname{tg} 2x$

79. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **80.** $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\operatorname{sen} x|$ **82.** $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

83. Demonstre a **Lei dos Cossenos**: se um triângulo tiver lados com comprimentos a, b e c, e θ for um ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

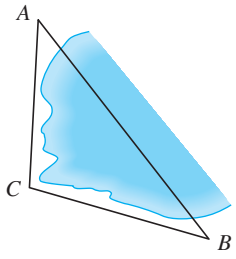


[*Sugestão*: introduza um sistema de coordenadas tal que θ esteja na posição-padrão, como na figura. Expresse x e y em termos de θ e use a fórmula da distância para calcular c.]

84. Para determinar a distância $|AB|$ sobre uma pequena enseada, um ponto C é colocado como na figura, e as seguintes medidas são registradas:

$$\angle C = 103^\circ \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

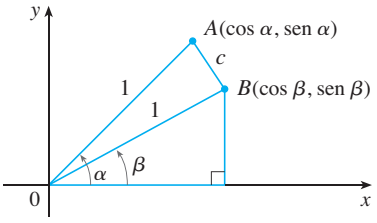
Use a Lei dos Cossenos do Exercício 83 para determinar a distância pedida.



85. Use a figura para demonstrar a fórmula da subtração.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

[*Sugestão*: Calcule c^2 de duas maneiras (usando a Lei dos Cossenos do Exercício 83 e também a fórmula da distância) e compare as duas expressões.]



86. Use a fórmula do Exercício 85 para demonstrar a fórmula da subtração para cosseno (12b).

87. Use a fórmula da adição para cosseno e as identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demonstrar a fórmula da subtração para a função seno.

88. Mostre que a área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e com o ângulo entre eles sendo θ é

$$A = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

89. Determine a área do triângulo ABC, correta até cinco casas decimais, se

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107^\circ$$

E NOTAÇÃO DE SOMATÓRIA (OU NOTAÇÃO SIGMA)

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega $\sum$ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação sigma**, ou de **notação de somatória**.

Isso nos diz para terminar em $i = n$.
Isso nos diz para somar.
Isso nos diz para iniciar em $i = m$.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

1 DEFINIÇÃO Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n, inteiros tal que $m \leq n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Com a notação de função, a Definição 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Assim, o símbolo $\sum_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, m, $m+1, \ldots, n$. Outras letras também podem ser usadas como índice da somatória.

EXEMPLO 1

(a) $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ □

EXEMPLO 2 Escreva a soma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ na notação de somatória.

SOLUÇÃO Não há uma maneira única de se escrever uma soma na notação de somatória. Poderíamos escrever

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n} (j+1)^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$ □

O teorema a seguir apresenta três regras simples para se trabalhar com a notação sigma.

2 TEOREMA Se c for uma constante qualquer (isto é, não depender de i), então

(a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$

(b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

DEMONSTRAÇÃO Para ver por que essas regras são verdadeiras, devemos escrever ambos os lados na forma expandida. A regra (a) é tão-somente a propriedade distributiva dos números reais:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

A regra (b) segue das propriedades associativa e comutativa:

$$(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)$$

A regra (c) é demonstrada de modo análogo. □

EXEMPLO 3 Determine $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUÇÃO

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termos}} = n$$

□

EXEMPLO 4 Demonstre a fórmula para a soma dos n primeiros inteiros positivos.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO Essa fórmula pode ser demonstrada por indução matemática (veja a página 81, no Volume I) ou pelo método a seguir, usado pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) quando ele tinha 10 anos de idade, para escrever a soma S duas vezes, uma na ordem usual e a outra na ordem invertida:

$$S = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + \quad 2 \quad + 1$$

Somando-se verticalmente todas as colunas, obtemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Do lado direito existem n termos, cada um dos quais é $n + 1$; portanto,

$$2S = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$ □

EXEMPLO 5 Demonstre a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUÇÃO 1 Seja S a soma desejada. Começamos com a *soma telescópica*:

A maioria dos termos se cancela em pares

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + [(n+1)^3 - n^3]$$

$$= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^3 + 3n$$

Por outro lado, usando o Teorema 2 e os Exemplos 3 e 4, temos

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Assim, temos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Isolando S nessa equação, obtemos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

ou

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

■ PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA
Seja S_n uma afirmativa envolvendo o inteiro positivo n. Suponha que

1. S_1 é verdadeira.
2. Se S_k for verdadeira, então S_{k+1} é verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todo inteiro positivo n.

■ Veja as páginas 66 e 68, no Volume I, para uma discussão mais completa da indução matemática.

SOLUÇÃO 2 Seja S_n a fórmula dada.

1. S_1 é verdadeira, pois $\qquad 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

2. Suponha que S_k seja verdadeira; isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Então,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$$

$$= (k+1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Logo S_{k+1} é verdadeira.
Pelo Princípio da Indução Matemática, S_n é verdadeira para todo n. □

Vamos agrupar os resultados dos Exemplos 3, 4 e 5 com um resultado similar para cubos (veja os Exercícios 37-40) como o Teorema 3. Essas fórmulas são necessárias para encontrar áreas e calcular integrais no Capítulo 5.

3 TEOREMA Seja c uma constante e n um inteiro positivo. Então,

(a) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(b) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EXEMPLO 6 Calcule $\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUÇÃO Usando os Teoremas 2 e 3, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) = \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}$$

□

■ O tipo de cálculo do Exemplo 7 ocorre no Capítulo 5, no Volume I, quando calculamos áreas.

EXEMPLO 7 Ache $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n^3} i^2 + \frac{3}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n} \cdot n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 = 4$$ □

E EXERCÍCIOS

1-10 Escreva a soma na forma expandida.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11-20 Escreva a soma na notação sigma.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21-35 Determine o valor da soma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i - 2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i+2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2 - 5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3 + 2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i+1)(i+2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

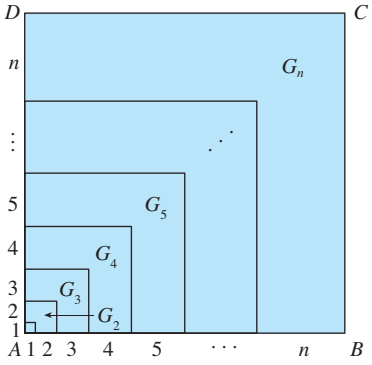
36. Determine o número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Demonstre a fórmula (b) do Teorema 3.

38. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando indução matemática.

39. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando um método similar àquele do Exemplo 5, Solução 1 [comece com $(1+i)^4 - i^4$].

40. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando o método a seguir, publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi por volta do ano 1010. A figura mostra um quadrado $ABCD$ nos quais os lados AB e AD foram divididos em segmentos de comprimento $1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, o lado do quadrado tem comprimento $n(n+1)/2$; logo, a área é $[n(n+1)/2]^2$. Mas a área é também a soma das áreas dos n "gnomons" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mostrados na figura. Demonstre que a área de G_i é i^3 e conclua que a fórmula (e) é verdadeira.



41. Calcule cada soma telescópica.

(a) $\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i-1)^4]$ (b) $\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

(c) $\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$ (d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Demonstre a desigualdade triangular generalizada.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43-46 Determine cada limite.

43. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2$

44. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{i}{n} \right)^3 + 1 \right]$

45. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \left[\left(\frac{2i}{n} \right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n} \right) \right]$

46. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \left[\left(1 + \frac{3i}{n} \right)^3 - 2\left(1 + \frac{3i}{n} \right) \right]$

47. Demonstre a fórmula para a soma de uma série geométrica finita com o primeiro termo a e razão $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Calcule $\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Calcule $\sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Calcule $\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} (i + j) \right]$.

F DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS

Neste apêndice apresentamos as demonstrações de vários teoremas que estão enunciados na parte principal do texto. As seções nas quais eles ocorrem estão indicadas na margem.

SEÇÃO 2.3

PROPRIEDADES DOS LIMITES Suponha que c seja uma constante e que os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existam. Então

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = cL$
4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 4 Dado $\varepsilon > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$$

A fim de obter termos que contenham $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$, adicionamos e subtraímos $Lg(x)$ como segue:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\ &\leqslant |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(Desigualdade Triangular)} \\ &= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \end{aligned}$$

Queremos fazer cada um desses termos menores que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}$$

Também, há um número $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1$$

e, portanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leqslant |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, há um número $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então temos $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$ e $0 < |x - a| < \delta_3$; logo, podemos combinar as desigualdades para obter

$$|f(x)g(x) - LM| \leqslant |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L| \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isso mostra que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$. □

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 3 Se tomarmos $g(x) = c$ na Propriedade 4, obteremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [cf(x)] &= \lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= c \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{(pela Propriedade 7)} \end{aligned}$$

□

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 2 Usando as Propriedades 1 e 3 com $c = -1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a}(-1)g(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \end{aligned}$$

□

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 5 Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$$

Para fazer isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon>0$, existe um $\delta>0$ tal que

$$\text{se}\qquad 0<|x-a|<\delta\qquad\text{então}\qquad\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|<\varepsilon$$

Observe que

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|=\frac{|M-g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Mas também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x está próximo de a. Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x)=M$, existe um número $\delta_1>0$ tal que, se $0<|x-a|<\delta_1$, teremos

$$|g(x)-M|<\frac{|M|}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}|M|&=|M-g(x)+g(x)|\leq|M-g(x)|+|g(x)|\\&<\frac{|M|}{2}+|g(x)|\end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\text{se}\qquad 0<|x-a|<\delta_1\qquad\text{então}\qquad|g(x)|>\frac{|M|}{2}$$

Então, para esses valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|}=\frac{1}{|M||g(x)|}<\frac{1}{|M|}\cdot\frac{2}{|M|}=\frac{2}{M^2}$$

Além disso, há $\delta_2>0$ tal que

$$\text{se}\qquad 0<|x-a|<\delta_2\qquad\text{então}\qquad|g(x)-M|<\frac{M^2}{2}\varepsilon$$

Seja $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Então, para $0<|x-a|<\delta$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|=\frac{|M-g(x)|}{|Mg(x)|}<\frac{2}{M^2}\frac{M^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

Segue que $\lim_{x\to a} 1/g(x)=1/M$. Finalmente, usando a Propriedade 4, obtemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=L\cdot\frac{1}{M}=\frac{L}{M}$$

□

2 TEOREMA Se $f(x)\leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a}f(x)=L\qquad\text{e}\qquad\lim_{x\to a}g(x)=M$$

então $L\leq M$.

DEMONSTRAÇÃO Usamos o método de demonstração por contradição. Suponha, se possível, que $L > M$. A Propriedade 2 dos limites nos diz que

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] = M - L$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon$$

Em particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (observando que $L - M > 0$ por hipótese), temos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M$$

Uma vez que $a \leqslant |a|$ para qualquer número a, temos

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad [g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M$$

que se simplifica para

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad g(x) < f(x)$$

Mas isso contradiz o fato de que $f(x) \leqslant g(x)$. Assim, a desigualdade $L > M$ deve ser falsa. Portanto, $L \leqslant M$. □

3 O TEOREMA DO CONFRONTO Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x que esteja em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $\varepsilon > 0$ dado. Uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} h(x) = L$, há um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |h(x) - L| < \varepsilon$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

Em particular,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

de modo que $|g(x) - L| < \varepsilon$. Assim, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. □

SEÇÃO 2.5

TEOREMA Se f for uma função contínua injetora definida em um intervalo (a, b), então sua função inversa f^{-1} também é contínua.

DEMONSTRAÇÃO Primeiro, mostramos que se f for tanto injetora quanto contínua em (a, b), então ela precisa ser ou crescente ou decrescente em (a, b). Se ela não fosse nem crescente nem decrescente, então existiriam números x_1, x_2, e x_3 em (a, b) com $x_1 < x_2 < x_3$ tal que $f(x_2)$ não está entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Existem duas possibilidades: (1) $f(x_3)$ está entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ ou (2) $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$. (Desenhe uma figura.) No caso (1), aplicamos o Teorema do Valor Intermediário à função contínua f para obter um número c entre x_1 e x_2 tal que $f(c) = f(x_3)$. No caso (2), o Teorema do Valor Intermediário dá um número c entre x_2 e x_3 tal que $f(c) = f(x_1)$. Em ambos os casos, contradissemos o fato de f ser injetora.

Vamos supor, para fixarmos uma situação, que f seja crescente em (a, b). Tomamos qualquer número y_0 no domínio de f^{-1} e fazemos $f^{-1}(y_0) = x_0$; ou seja, x_0 é o número em (a, b) tal que $f(x_0) = y_0$. Para mostrar que f^{-1} é contínua em y_0 tomamos qualquer $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esteja contido no intervalo (a, b). Como f é crescente, ela leva os números no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nos números no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e f^{-1} inverte a correspondência. Se denotarmos por δ o menor dos números $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ e $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$, então o intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contido no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e assim é levado no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ por f^{-1}. (Veja o diagrama de flechas na Figura 1.) Portanto, encontramos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad |y - y_0| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

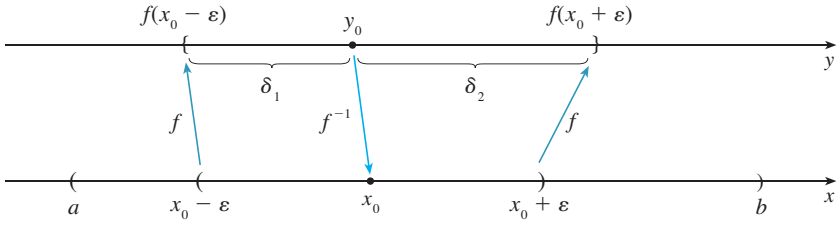


FIGURA 1

Isto mostra que $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ e assim f^{-1} é contínua em seu domínio. □

8 TEOREMA Se f for contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $\varepsilon > 0$ dado. Queremos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que f é contínua em b, temos

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

logo existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |y - b| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = b$, há $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |g(x) - b| < \delta_1$$

Combinando essas duas afirmações, vemos que sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos $|g(x) - b| < \delta_1$, que implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Desta forma, demonstramos que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. □

SEÇÃO 3.3

A demonstração do resultado a seguir foi prometida ao demonstrarmos que $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$.

TEOREMA Se $0 < \theta < \pi/2$, então $\theta \leqslant \operatorname{tg} \theta$.

DEMONSTRAÇÃO A Figura 2 mostra um setor de um círculo com centro O, ângulo central θ e raio $r = 1$. Então,

$$|AD| = |OA| \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta$$

Aproximamos o arco AB por um polígono inscrito que consiste em n segmentos de reta iguais e tomamos um segmento típico PQ. Prolongamos os segmentos OP e OQ para encontrar sobre a reta AD os pontos R e S. Traçamos, então, $RT \| PQ$ como na Figura 2. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90^\circ$$

e, dessa forma, $\angle RTS > 90^\circ$. Portanto, temos

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

Se adicionarmos as n desigualdades semelhantes a essa, obteremos

$$L_n < |AD| = \operatorname{tg} \theta$$

onde L_n é o comprimento do polígono inscrito. Assim, pelo Teorema 2.3.2, temos

$$\lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \operatorname{tg} \theta$$

Mas o comprimento do arco foi definido na Equação 8.1.1 como o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos, de modo que

$$\theta = \lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \operatorname{tg} \theta$$

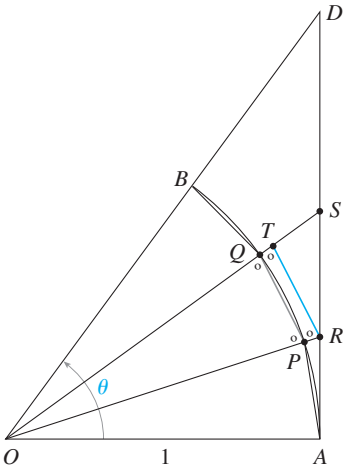


FIGURA 2

SEÇÃO 4.3

TESTE DA CONCAVIDADE

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.
(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

DEMONSTRAÇÃO (a) Seja a um número qualquer em I. Precisamos mostrar que a curva $y = f(x)$ fica acima da reta tangente no ponto $(a, f(a))$. A equação dessa tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim, devemos mostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

qualquer que seja $x \in I$ $(x \neq a)$ (veja a Figura 3).

Vamos considerar primeiro o caso onde $x > a$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a, x]$, obteremos um número c onde $a < c < x$, tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Uma vez que $f'' > 0$ em I sabemos do Teste Crescente/Decrescente que f' é crescente em I. Assim, uma vez que $a < c$, temos

$$f'(a) < f'(c)$$

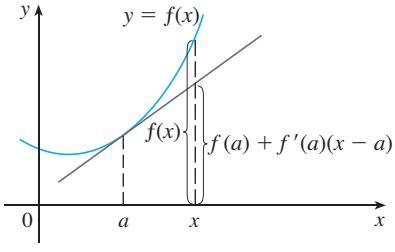


FIGURA 3

de modo que, multiplicando essa desigualdade pelo número positivo $x - a$, obtemos

$$f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a) \quad \boxed{2}$$

Somando agora $f(a)$ a ambos os lados dessa desigualdade, obtemos:

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Mas, da Equação 1, temos $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. Dessa forma, essa desigualdade fica

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \boxed{3}$$

que é o que queríamos demonstrar.

Para o caso onde $x < a$, temos $f'(c) < f'(a)$, mas a multiplicação pelo número negativo $x - a$ inverte o sinal da desigualdade; assim, obtemos (2) e (3) como anteriormente. □

SEÇÃO 4.4

A fim de dar a demonstração da Regra de L'Hôspital prometida precisamos, primeiro, de uma generalização do Teorema do Valor Médio. O nome do teorema a seguir é uma homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

1 TEOREMA DE VALOR MÉDIO DE CAUCHY Suponhamos que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b). Então existe um número c em (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observe que se considerarmos o caso especial no qual $g(x) = x$, então $g'(c) = 1$ e o Teorema 1 é exatamente o Teorema do Valor Médio Comum. Além disso, o Teorema 1 pode ser demonstrado de forma similar. Perceba que tudo o que devemos fazer é mudar a função h dada pela Equação 4.2.4 para a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,[g(x) - g(a)]$$

e então aplicar o Teorema de Rolle como anteriormente.

REGRA DE L'HÔSPITAL Suponhamos que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞, ou $-\infty$).

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE L'HÔSPITAL Estamos supondo que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Seja

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \mid x \neq a\}$ e

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Da mesma maneira, G é contínua em I. Seja $x \in I$ e $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x), e $G' \neq 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que $a < y < x$ e

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se fizermos $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$). Portanto

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Logo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso demonstra a Regra de L'Hôspital quando a é finito.

Se a for infinito, vamos fazer $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$; assim temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \qquad \text{(pela Regra de L'Hôspital para } a \text{ finito)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Para demonstrar o Teorema 11.8.3, precisamos primeiro dos seguintes resultados.

TEOREMA

1. Se uma série de potências $\sum c_n x^n$ converge quando $x = b$ (onde $b \neq 0$), então ela converge sempre que $|x| < |b|$.

2. Se uma série de potências $\sum c_n x^n$ diverge quando $x = d$ (onde $d \neq 0$), então ela diverge sempre que $|x| > |d|$.

DEMONSTRAÇÃO DE 1 Suponha que $\sum c_n b^n$ convirja. Então, pelo Teorema 11.2.6, temos $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acordo com a Definição 11.2.2 com $\varepsilon = 1$, existe um inteiro positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ sempre que $n \geqslant N$. Assim, para $n \geqslant N$, temos

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Se $|x| < |b|$, então $|x/b| < 1$, de modo que $\sum |x/b|^n$ é uma série geométrica convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ é convergente. Assim, a série $\sum c_n x^n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. □

DEMONSTRAÇÃO DE 2 Suponha que $\sum c_n d^n$ divirja. Se x for qualquer número real tal que $|x| > |d|$, então $\sum c_n x^n$ não pode convergir, pois, pela parte 1, a convergência de $\sum c_n x^n$ implicaria a convergência de $\sum c_n d^n$. Portanto, $\sum c_n x^n$ diverge sempre que $|x| > |d|$. □

TEOREMA Para uma série de potências $\sum c_n x^n$ ocorre uma das três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = 0$.
2. A série converge para todo x.
3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que nem o caso 1 nem o caso 2 sejam verdade. Então, existem números b e d tais que $\sum c_n x^n$ converge para $x = b$ e diverge para $x = d$. Portanto, o conjunto $S = \{x \mid \sum c_n x^n \text{ converge}\}$ não é vazio. Pelo teorema precedente, a série diverge se $|x| > |d|$, de modo que $|x| \leq |d|$ para todo $x \in S$. Isto quer dizer que $|d|$ é um limitante superior para o conjunto S. Logo, pelo Axioma da Completude (veja a Seção 11.1), S tem um menor limitante superior R. Se $|x| > R$, então $x \notin S$, de modo que $\sum c_n x^n$ diverge. Se $|x| < R$, então $|x|$não é um limitante superior de S e assim existe $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\sum c_n b^n$ converge, de modo que pelo teorema precedente $\sum c_n x^n$ converge. □

3 TEOREMA Para uma série de potências $\sum c_n (x - a)^n$, ocorre uma das três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$.
2. A série converge para todo x.
3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Se fizermos a mudança de variáveis $u = x - a$, então a série de potências se torna $\sum c_n u^n$ e podemos aplicar o teorema anterior a esta série. No caso 3, temos a convergência para $|u| < R$ e a divergência para $|u| > R$. Assim, temos convergência para $|x - a| < R$ e divergência para $|x - a| > R$. □

SEÇÃO 14.3

TEOREMA DE CLAIRAUT Suponha que f esteja definida em um disco D que contém o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO Para pequenos valores de h, $h \neq 0$, considere a diferença

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Observe que se fizermos $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$, então

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre a e $a + h$ tal que

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio de novo, desta vez para f_x, obtemos um número d entre b e $b + h$ tal que

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando estas equações, obtemos

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Se $h \to 0$, então $(c, d) \to (a, b)$, de modo que a continuidade de f_{xy} em (a, b) dá

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c,d) \to (a,b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Analogamente, escrevendo

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

e usando o Teorema do Valor Médio duas vezes e a continuidade de f_{yx} em (a, b), obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Segue que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. □

8 TEOREMA Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto de (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é derivável em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO Seja

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acordo com (14.4.7), para demonstrar que f é derivável em (a, b) devemos mostrar que podemos escrever Δz na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Observando a Figura 4, escrevemos

I $$\Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

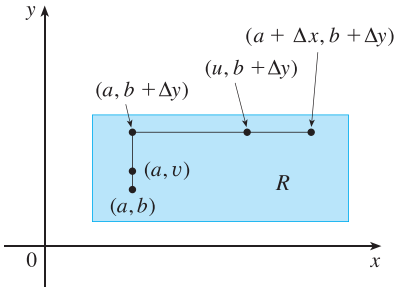


FIGURA 4

Observe que a função de uma única variável

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida no intervalo $[a, a + \Delta x]$ e $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio a g, obtemos

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\,\Delta x$$

onde u é algum número entre a e $a + \Delta x$. Em termos de f, esta equação se torna

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Isto nos dá uma expressão para a primeira parte do lado direito da Equação 1. Para a segunda parte, tomamos $h(y) = f(a, y)$. Então h é uma função de uma única variável definida no intervalo $[b, b + \Delta y)$ e $h'(y) = f_y(a, y)$. Uma segunda aplicação do Teorema do Valor Médio então dá

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

em que v é algum número entre b e $b + \Delta y$. Em termos de f, isto se torna

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v)\,\Delta y$$

Agora, substituímos esta expressão na Equação 1 e obtemos

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y \\ &\quad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ e $(a, v) \to (a, b)$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ e como f_x e f_y são contínuas em (a, b), vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Portanto, f é derivável em (a, b). □

G O LOGARITMO DEFINIDO COMO UMA INTEGRAL

Nosso tratamento das funções exponencial e logarítmica até agora fundamentou-se em nossa intuição, que é baseada na evidência numérica e visual. (Veja as Seções 1.5, 1.6 e 3.1.) Aqui, usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo para dar um tratamento alternativo que fornece uma fundamentação mais sólida para estas funções.

Em vez de começar com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, desta vez começamos pela definição de $\ln x$ como uma integral e então definimos a função exponencial como sua inversa. Você deve ter em mente que não usamos nenhuma de nossas definições e resultados prévios relativos a funções exponencial e logarítmica.

O LOGARITMO NATURAL

Primeiro, definimos $\ln x$ como uma integral.

I DEFINIÇÃO A **função logaritmo natural** é a função definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

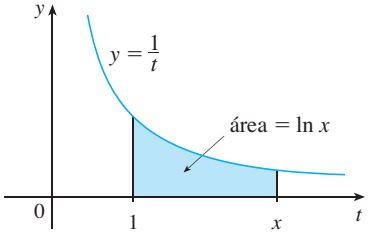


FIGURA 1

A existência desta função depende do fato de a integral de uma função contínua sempre existir. Se $x > 1$, então $\ln x$ pode ser interpretado geometricamente como a área sob a hipérbole $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$. (Veja a Figura 1.) Para $x = 1$, temos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

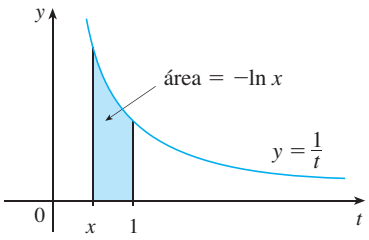


FIGURA 2

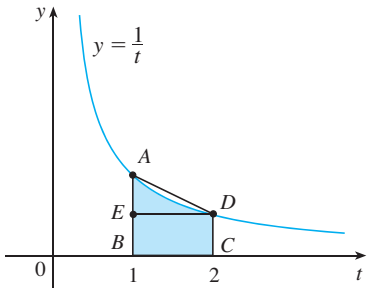


FIGURA 3

Para $0 < x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$

e assim $\ln x$ é o oposto da área mostrada na Figura 2.

EXEMPLO 1

(a) Comparando áreas, mostre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar o valor de $\ln 2$.

SOLUÇÃO

(a) Podemos interpretar $\ln 2$ como a área sob a curva $y = 1/t$ de 1 a 2. Da Figura 3, vemos que esta área é maior do que a área do retângulo $BCDE$ e menor do que a área do trapézio $ABCD$. Assim, temos

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

(b) Se usarmos a Regra do Ponto Médio com $f(t) = 1/t$, $n = 10$, e $\Delta t = 0{,}1$, obtemos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0{,}1)[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}95)]$$

$$= (0{,}1)\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots + \frac{1}{1{,}95}\right) \approx 0{,}693$$ □

Observe que a integral que define $\ln x$ é exatamente o tipo de integral discutida na parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3). De fato, usando aquele teorema, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

e assim,

2

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Agora, usamos esta regra de derivação para demonstrar as seguintes propriedades sobre a função logaritmo.

3 PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r \ln x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Então, usando a Equação 2 e a regra da cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ tem a mesma derivada e devem então diferir por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Colocando $x = 1$ nesta equação, obtemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Então,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Se agora substituirmos a constante a por qualquer número y, temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Usando a Propriedade 1 com $x = 1/y$, temos

$$\ln \frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

e, portanto,

$$\ln \frac{1}{y} = -\ln y$$

Usando a Propriedade 1 novamente, temos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

A demonstração da Propriedade 3 será deixada como exercício. □

Para traçar o gráfico de $y = \ln x$, primeiro determinamos seus limites:

4 (a) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Usando a Propriedade 3 com $x = 2$ e $r = n$ (em que n é qualquer inteiro positivo), temos $\ln(2^n) = n \ln 2$. Agora $\ln 2 > 0$, de modo que isto mostra que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mas $\ln x$ é uma função crescente, já que sua derivada $1/x > 0$. Portanto, $\ln x \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(b) Se tomarmos $t = 1/x$, então $t \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Portanto, usando (a), temos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty$$ □

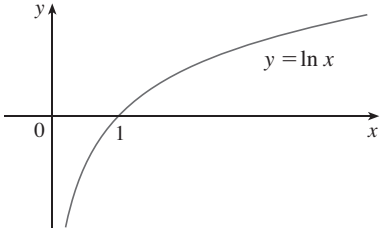


FIGURA 4

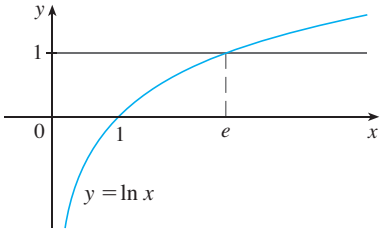


FIGURA 5

Se $y = \ln x, x > 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

o que mostra que $\ln x$ é crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$. Juntando esta informação com (4), traçamos o gráfico de $y = \ln x$ na Figura 4.

Como $\ln 1 = 0$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente que assume valores arbitrariamente grandes, o Teorema do Valor Intermediário mostra que existe um número no qual $\ln x$ assume o valor 1. (Veja a Figura 5.) Este importante número é denotado por e.

5 DEFINIÇÃO e é o número tal que $\ln e = 1$.

Mostraremos (no Teorema 19) que esta definição é consistente com nossa definição prévia de e.

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Como ln é uma função crescente, ela é injetora e, portanto, tem uma função inversa, que denotaremos por exp. Assim, de acordo com nossa definição de função inversa,

$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$

6 $$\exp(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

e as equações de cancelamento são

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

7 $$\exp(\ln x) = x \quad \text{e} \quad \ln(\exp x) = x$$

Em particular, temos

$$\exp(0) = 1 \quad \text{já que } \ln 1 = 0$$

$$\exp(1) = e \quad \text{já que } \ln e = 1$$

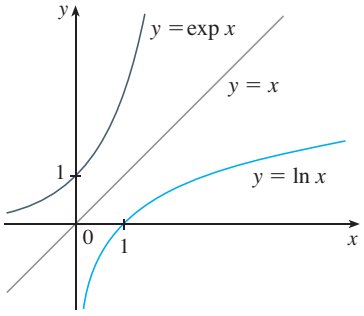


FIGURA 6

Obtemos o gráfico de $y = \exp x$ refletindo o gráfico de $y = \ln x$ em torno da reta $y = x$ (veja a Figura 6). O domínio da exp é a imagem de ln, ou seja, $(-\infty, \infty)$; a imagem de exp é o domínio de ln, ou seja, $(0, \infty)$.

Se r for qualquer número racional, então a terceira propriedade dos logaritmos dá

$$\ln(e^r) = r \ln e = r$$

Portanto, por (6), $$\exp(r) = e^r$$

Logo, $\exp(x) = e^x$ sempre que x for um número racional. Isto nos leva a definir e^x, mesmo para valores irracionais de x, pela equação

$$e^x = \exp(x)$$

Em outras palavras, pelas razões apresentadas, definimos e^x como a função inversa de $\ln x$. Nesta notação, (6) se torna

8 $$e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

e as equações de cancelamento tornam-se

9 $$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

10 $$\ln(e^x) = x \qquad \text{para todo } x$$

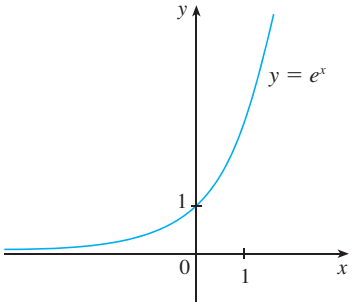


FIGURA 7
A função exponencial natural

A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é uma das mais frequentes funções no cálculo e em suas aplicações, então é importante estar familiarizado com seu gráfico (Figura 7) e suas propriedades (que decorrem do fato de que ela é a inversa da função logarítmica natural).

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL A função exponencial $f(x) = e^x$ é uma função contínua crescente com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(0, \infty)$. Portanto, $e^x > 0$ para todo x. Além disso,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

Verificamos agora que f tem as outras propriedades esperadas de uma função exponencial.

11 PROPRIEDADE DOS EXPOENTES Se x e y forem números naturais e r for um racional, então

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 1 Usando a primeira propriedade dos logaritmos e a Equação 10, temos

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Como ln é uma função injetora, segue que $e^x e^y = e^{x+y}$.

As Propriedades 2 e 3 são demonstradas de modo análogo (veja os Exercícios 6 e 7). Como veremos em breve, a Propriedade 3 na realidade vale quando r é qualquer número real. □

Demonstraremos agora a fórmula de derivação para e^x.

12
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

DEMONSTRAÇÃO A função $y = e^x$ é derivável porque ela é a inversa da função $y = \ln x$, que sabemos ser derivável, com derivada não nula. Para encontrar sua derivada, usamos o método da função inversa. Seja $y = e^x$. Então $\ln y = x$ e, derivando esta última equação implicitamente com relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$ □

FUNÇÕES EXPONENCIAIS GERAIS

Se $a > 0$ e r for qualquer número racional, então por (9) e (11),

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Portanto, mesmo para um número irracional x, definimos

13
$$a^x = e^{x \ln a}$$

Assim, por exemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$$

A função $f(x) = a^x$ é chamada **função exponencial de base *a***. Observe que a^x é positivo para todo x, pois e^x é positivo para todo x.

A Definição 13 nos permite estender uma das propriedades de logaritmos. Já sabemos que $\ln(a^r) = r \ln a$ quando r é racional. Mas se agora permitimos que r seja *qualquer* número real, temos, pela Definição 13, que

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Portanto,

14 $\ln a^r = r \ln a$ para todo número real r

As propriedades gerais dos expoentes seguem da Definição 13 com as propriedades dos expoentes para e^x.

15 PROPRIEDADES DOS EXPOENTES Se x e y forem números reais e $a, b > 0$, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x / a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Usando a Definição 13 e as propriedades dos expoentes para e^x, temos

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a}$$

$$= e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y$$

2. Usando a Equação 14, obtemos

$$(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{yx\ln a} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$$

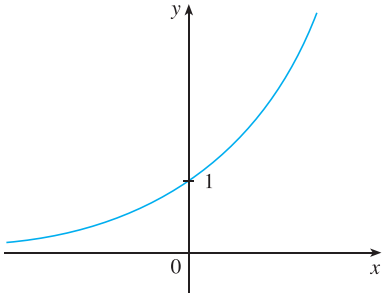
As demonstrações restantes são deixadas como exercícios. □

A fórmula de derivação para as funções exponenciais também é uma consequência da Definição 13:

16
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

DEMONSTRAÇÃO

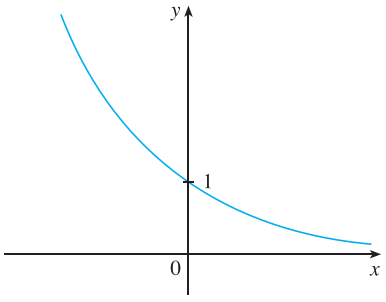
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = a^x \ln a$$ □



$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

FIGURA 8 $y = a^x$, $a > 1$

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, de modo que $(d/dx)\, a^x = a^x \ln a > 0$, o que mostra que $y = a^x$ é crescente (veja a Figura 8). Se $0 < a < 1$, então $\ln a < 0$ e assim $y = a^x$ é decrescente (veja a Figura 9).



$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$

FIGURA 9 $y = a^x$, $0 < a < 1$

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS GERAIS

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função injetora. Sua função inversa é chamada **função logarítmica de base *a*** e é denotada por $\log_a$. Assim,

17
$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Em particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

As propriedades dos logaritmos são parecidas com as do logaritmo natural e podem ser deduzidas das propriedades dos expoentes (veja o Exercício 10).

Para derivar $y = \log_a x$, escrevemos a equação $a^y = x$. Da Equação 14, temos $y \ln a = \ln x$, de modo que

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Como $\ln a$ is é constante, podemos derivar da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x\ln a}$$

18
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

O NÚMERO *e* EXPRESSO COMO UM LIMITE

Nesta seção definimos e como o número tal que $\ln e = 1$. O próximo teorema mostra que isto é o mesmo que o número e definido na Seção 3.1 (veja a Equação 3.6.5).

19
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $f(x) = \ln x$. Então, $f'(x) = 1/x$, de modo que $f'(1) = 1$. Mas, pela definição de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

Como $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Então, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1 + x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

□

G EXERCÍCIOS

1. (a) Pela comparação de áreas, mostre que
$$\tfrac{1}{3} < \ln 1{,}5 < \tfrac{5}{12}$$
(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar $\ln 1{,}5$.

2. Com referência ao Exemplo 1
(a) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 1/t$ que seja paralela à reta secante AD.
(b) Use a parte (a) para mostrar que $\ln 2 > 0{,}66$.

3. Pela comparação de áreas, mostre que
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

4. (a) Pela comparação de áreas, mostre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.
(b) Deduza que $2 < e < 3$.

5. Demonstre a terceira propriedade dos logaritmos. (*Sugestão*: comece mostrando que ambos os lados da equação têm a mesma derivada.)

6. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes para e^x [veja (11)].

7. Demonstre a terceira propriedade dos expoentes para e^x [veja (11)].

8. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes [veja (15)].

9. Demonstre a quarta propriedade dos expoentes [veja (15)].

10. Deduza as seguintes propriedades dos logaritmos a partir de (15):
(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
(b) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
(c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

H NÚMEROS COMPLEXOS

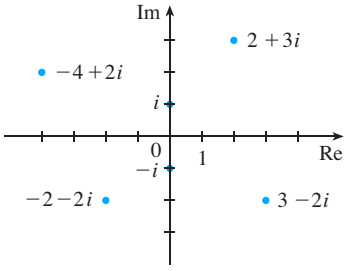


FIGURA 1
Números complexos como pontos no plano Argand

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma $a + bi$, em que a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$. O número complexo $a + bi$ pode também ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como um ponto em um plano (chamado plano de Argand), como na Figura 1. Assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ está identificado como o ponto $(0, 1)$.

A **parte real** do número complexo $a + bi$ é o número real a, e a **parte imaginária** é o número real b. Dessa forma, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária, -3. Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais e imaginárias forem iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais sejam válidas:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso fica

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) \\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$ □

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a + bi$, definimos seu **complexo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Para encontrar o quociente de dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

EXEMPLO 2 Expresse o número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ na forma $a + bi$.

SOLUÇÃO Multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de $2 + 5i$, isto é, $2 - 5i$, e levamos em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^5 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}\,i$$ □

A interpretação geométrica do complexo conjugado encontra-se na Figura 2: $\bar{z}$ é a reflexão z em torno do eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentada a seguir. As demonstrações seguem da definição e serão pedidas no Exercício 18.

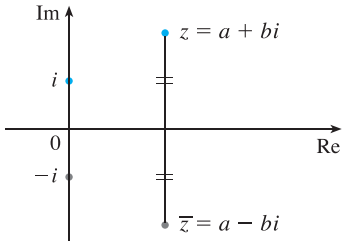


FIGURA 2

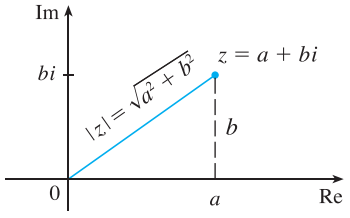


FIGURA 3

PROPRIEDADES DOS CONJUGADOS

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

O **módulo**, ou **valor absoluto**, $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se $z = a + bi$, então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

e, portanto,

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, podemos pensar em i como a raiz quadrada de -1. Note, porém, que também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, $-i$ também é uma raiz quadrada de -1. Dizemos que i é a **raiz quadrada principal** de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se c for um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Com essa convenção, a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são válidas mesmo que $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3 Encontre as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$ □

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são complexas conjugadas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b e c são sempre complexas conjugadas. (Se z for real, $z = \overline{z}$, logo z é a própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi demonstrado por Gauss.

FORMA POLAR

Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$. De fato,

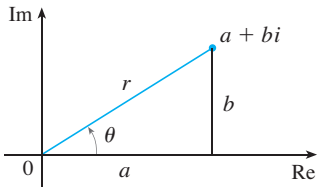


FIGURA 4

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\operatorname{sen}\theta$$

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$$

onde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$

O ângulo θ é chamado **argumento** de z, e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Observe que $\arg(z)$ não é único; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

EXEMPLO 4 Escreva os números a seguir na forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUÇÃO

(a) Temos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}\theta = 1$; assim, podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por conseguinte, a forma polar é

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aqui temos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\operatorname{tg}\theta = -1/\sqrt{3}$. Uma vez que está w no quarto quadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ e

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Os números z e w estão na Figura 5. □

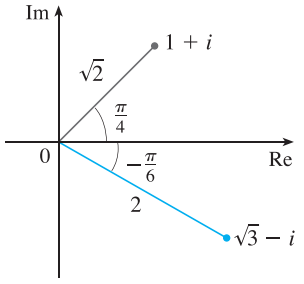


FIGURA 5

A forma polar dos números complexos nos dá uma nova perspectiva da multiplicação e da divisão. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos(\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

I $$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

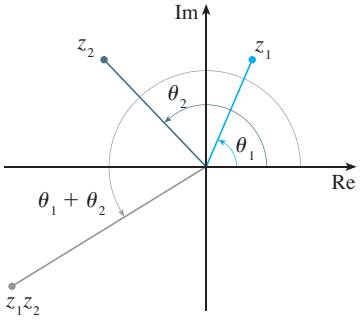


FIGURA 6

Essa fórmula nos diz que *para multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos* (veja a Figura 6).

Um argumento similar usando as fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que *para dividir dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos*.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z$, (e, portanto, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$), temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 7.

$$\boxed{\text{Se} \quad z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \quad \text{então} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta).}$$

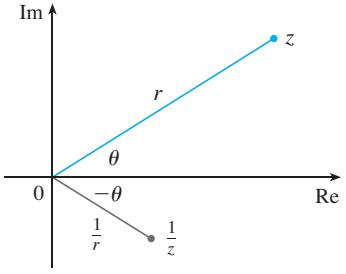


FIGURA 7

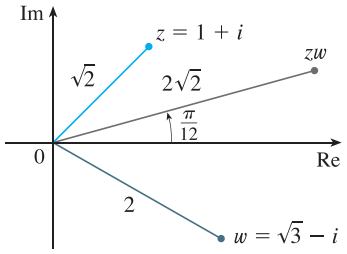


FIGURA 8

EXEMPLO 5 Ache o produto dos números complexos $1 + i$ e $\sqrt{3} - i$ na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

e

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Assim, pela Equação 1,

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

Isso está ilustrado na Figura 8. □

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como calcular as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

então

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

e

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$

Em geral, obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

2 TEOREMA DE DE MOIVRE Se $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e n for um inteiro positivo, então

$$z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Isso nos diz que *para elevar um número complexo à n-ésima potência, elevamos à n-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n*.

EXEMPLO 6 Ache $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, segue do Exemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, pelo Teorema de De Moivre:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}\,i$$

□

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para encontrar as raízes n-ésimas de números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar como

$$w = s(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \qquad \text{e} \qquad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

e

$$\cos n\phi = \cos \theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen} \theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Assim,

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Uma vez que essa expressão resulta em valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, temos o seguinte:

3 RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada uma das raízes n-ésimas de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as raízes n-ésimas de z estão sobre o círculo de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n-ésimas excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as raízes n-ésimas de z são igualmente espaçadas sobre esse círculo.

EXEMPLO 7 Encontre as seis raízes sextas de $z = -8$ e faça um gráfico dessas raízes no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma trigonométrica, $z = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Aplicando a Equação 3 com $n = 6$, obtemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtemos as seis raízes sextas de -8 fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

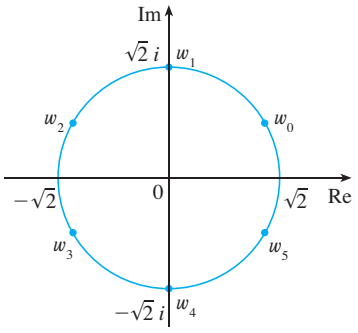


FIGURA 9
As seis raízes sextas de $z = -8$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

Todos esses pontos estão sobre o círculo de raio $\sqrt{2}$, como na Figura 9. □

EXPONENCIAL COMPLEXA

Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11, no Volume II, pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para e^x (11.10.11) como guia, definimos

4
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

5
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obteremos

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos y + i\,\text{sen}\,y$$

Usamos aqui as séries de Taylor para seno e cosseno (Equações 11.10.15 e 11.10.16, no Volume II). O resultado é a famosa fórmula denominada **fórmula de Euler**:

6 $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EXEMPLO 8 Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler (6), temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

■ Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a mátematica: $0, 1, e, i$ e π.

(b) Usando a Equação (7), obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}\,[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ □

Finalmente, observamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de demonstrar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

H EXERCÍCIOS

1-14 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15-17 Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}\,i$

17. $-4i$

18. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, onde n é um inteiro positivo

[*Sugestão:* escreva $z = a + bi, w = c + di$.]

19-24 Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 Escreva o número na forma polar com o argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}\,i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29-32 Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\,i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4\left(\sqrt{3} + i\right), \quad w = -3 - 3i$

33-36 Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^5$

35. $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^5$

36. $(1 - i)^8$

37-40 Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1

38. As raízes quintas de 32

39. As raízes cúbicas de i

40. As raízes cúbicas de $1 + i$

41-46 Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$ **42.** $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$ **44.** $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$ **46.** $e^{\pi+i}$

47. Use o Teorema de De Moivre com $n = 3$ para expressar $\cos 3\theta$ e $\operatorname{sen} 3\theta$ em termos de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função com valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções deriváveis de x, então a derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Associe isso à Equação 7 para demonstrar que se $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

50. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma primitiva de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando a parte real e a imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \quad \text{e} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.

I RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE NÚMEROS ÍMPARES

CAPÍTULO 9

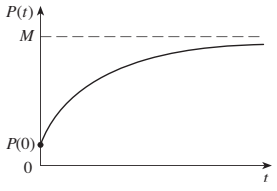
EXERCÍCIOS 9.1 ■ PÁGINA 541

3. (a) $\frac{1}{2}, -1$ **5.** (b) e (c)

7. (a) Ela deve ou ser zero ou decrescente
(c) $y = 0$ (d) $y = 1/(x + 2)$

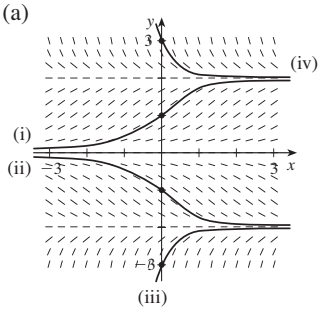
9. (a) $0 < P < 4200$ (b) $P > 4200$
(c) $P = 0, P = 4\,200$

13. (a) No começo; permanece positivo, mas decresce
(c)



EXERCÍCIOS 9.2 ■ PÁGINA 547

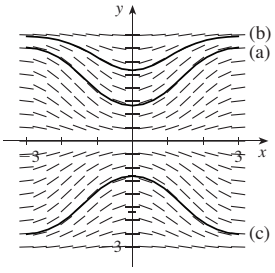
1. (a)



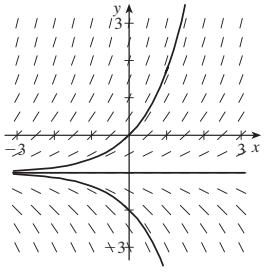
(b) $y = 0$, $y = 2$, $y = -2$

3. III **5.** IV

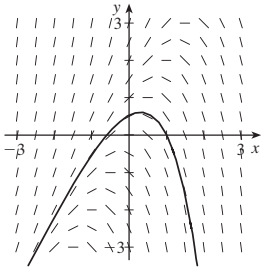
7.



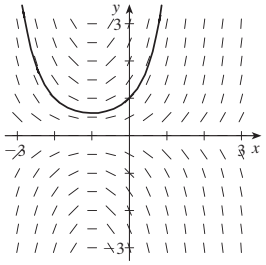
9.



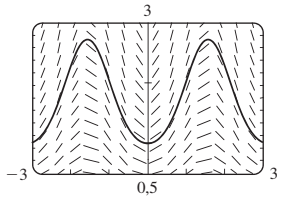
11.



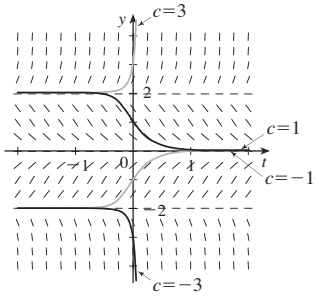
13.



15.

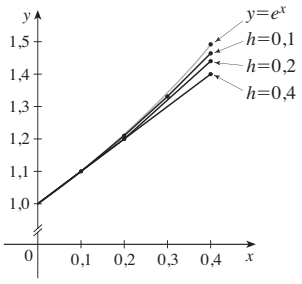


17. $-2 \leq c \leq 2;\ -2, 0, 2$



19. (a) (i) 1,4 (ii) 1,44 (iii) 1,4641

(b)



Subestima

(c) (i) 0,0918 (ii) 0,0518 (iii) 0,0277

Parece que o erro também fica dividido por dois (aproximadamente).

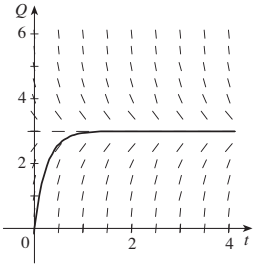
21. $-1, -3, -6{,}5, -12{,}25$ **23.** 1,7616

25. (a) (i) 3 (ii) 2,3928 (iii) 2,3701 (iv) 2,3681

(c) (i) 0,6321 (ii) 0,0249 (iii) 0,0022 (iv) 0,0002

Parece que o erro também fica dividido por 10 (aproximadamente).

27. (a), (d)



(b) 3

(c) Sim; $Q = 3$

(e) 2,77 C

EXERCÍCIOS 9.3 ■ PÁGINA 555

1. $y = 1/(x + C)$ ou $y = 0$ **3.** $y = K\sqrt{x^2 + 1}$

5. $y \ln|\sec y| = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

7. $y = \pm\sqrt{[3(te^t - e^t + C)]^{2/3} - 1}$ **9.** $u = Ae^{2t+t^2/2} - 1$

11. $y = \operatorname{tg}(x - 1)$

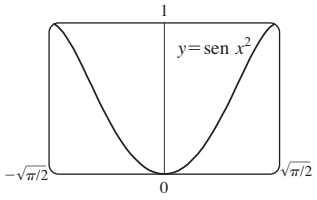
13. $\cos x + x \operatorname{sen} x = y^2 + \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{2}{3}$

15. $u = -\sqrt{t^2 + \operatorname{tg} t + 25}$ **17.** $y = \frac{4a}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} x - a$

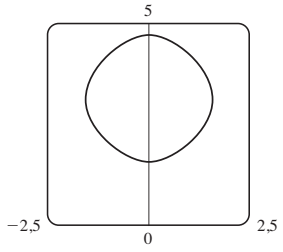
19. $y = e^{x^2/2}$ **21.** $y = Ke^x - x - 1$

23. (a) $\operatorname{sen}^{-1} y = x^2 + C$

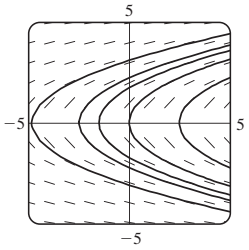
(b) $y = \operatorname{sen}(x^2),\ -\sqrt{\pi/2} \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$ (c) Não



25. $\cos y = \cos x - 1$

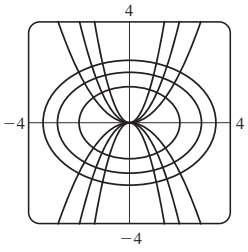


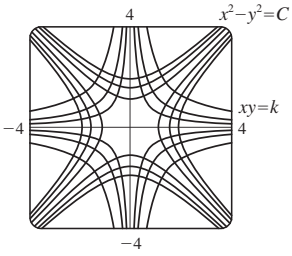
27. (a), (c)



(b) $y = \pm\sqrt{2(x + C)}$

29. $y = Cx^2$ **31.** $x^2 - y^2 = C$





33. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **35.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

37. (a) $x = a - \dfrac{4}{(kt + 2/\sqrt{a})^2}$

(b) $t = \dfrac{2}{k\sqrt{a-b}}\left(\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a-b}} - \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\dfrac{b-x}{a-b}}\right)$

39. (a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$

(b) r/k; a concentração tende a r/k independentemente do valor de C_0

41. (a) $15e^{-t/100}$ kg (b) $15e^{-0,2} \approx 12{,}3$ kg

43 Cerca de 4,9% **45.** g/k

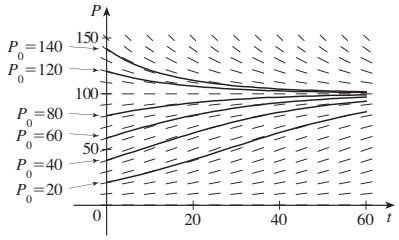
47. (a) $dA/dt = k\sqrt{A}/(M - A)$ (b) $A(t) = \left(\dfrac{Ce^{\sqrt{M}kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}kt} + 1}\right)^2$, onde $C = \dfrac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$ e $A_0 = A(0)$

EXERCÍCIOS 9.4 ■ PÁGINA 566

1. (a) 100; 0,05

(b) Onde P estiver próximo de 0 ou de 100; na reta $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$

(c)



As soluções tendem a 100; algumas crescem e algumas decrescem, algumas têm um ponto de inflexão mas outras não; as soluções com $P_0 = 20$ e $P_0 = 40$ têm pontos de inflexão em $P = 50$

(d) $P = 0$, $P = 100$; as outras soluções se afastam de $P = 0$ e se aproximam de $P = 100$

3. (a) $3{,}23 \times 10^7$ kg (b) $\approx 1{,}55$ anos

5. (a) $dP/dt = \frac{1}{265} P(1 - P/100)$, P em bilhões

(b) 5,49 bilhões (c) Em bilhões: 7,81, 27,72

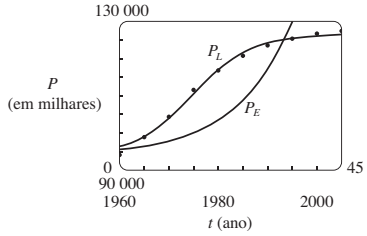
(d) Em bilhões: 5,48, 7,61, 22,41

7. (a) $dy/dt = ky(1 - y)$ (b) $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}}$

(c) 3:36 da tarde

11. $P_E(t) = 1\,578{,}3(1{,}0933)^t + 94\,000$;

$P_L(t) = \dfrac{32\,658{,}5}{1 + 12{,}75e^{-0{,}1706t}} + 94\,000$



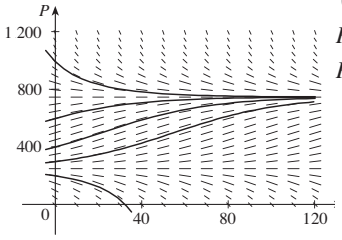
13. (a) $P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$ (b) $m < kP_0$

(c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ (d) Diminuindo

15. (a) Os peixes são pegos a uma taxa de 15 por semana.

(b) Veja a parte (d) (c) $P = 250$, $P = 750$

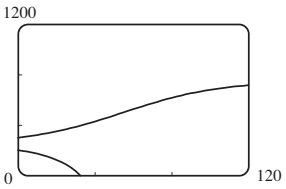
(d)



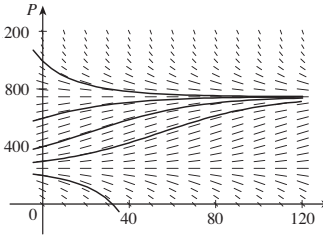
$0 < P_0 < 250$: $P \to 0$;
$P_0 = 250$: $P \to 250$;
$P_0 > 250$: $P \to 750$

(e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - kt^{t/25}}$

onde $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$



17. (b)



$0 < P_0 < 200$: $P \to 0$;
$P_0 = 200$: $P \to 200$;
$P_0 > 200$: $P \to 1000$

(c) $P(t) = \dfrac{m(K - P_0) + K(P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}{K - P_0 + (P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}$

19. (a) $P(t) = P_0 e^{(k/r)[\operatorname{sen}(rt - \phi) + \operatorname{sen}\phi]}$ (b) Não existe

EXERCÍCIOS 9.5 ■ PÁGINA 575

1. Não **3.** Sim **5.** $y = \frac{2}{3}e + Ce^{-2x}$

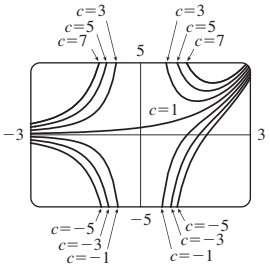
7. $y = x^2 \ln|x| + Cx^2$ **9.** $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C/x$

11. $y = \dfrac{\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx + C}{\operatorname{sen} x}$ **13.** $u = \dfrac{t^2 + 2t + 2C}{2(t + 1)}$

15. $y = x - 1 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = x - 1 + \cosh x$

17. $v = t^3e^{t^2} + 5e^{t^2}$ **19.** $y = -x\cos x - x$

21. $y = \dfrac{(x - 1)e^x + C}{x^2}$

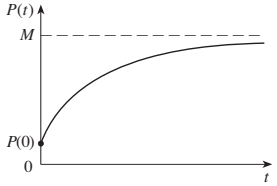


25. $y = \pm\left(Cx^4 + \dfrac{2}{5x}\right)^{-1/2}$

27. (a) $I(t) = 4 - 4e^{-5t}$ (b) $4 - 4e^{-1/2} \approx 1{,}57$ A

29. $Q(t) = 3(1 - e^{-4t})$, $I(t) = 12e^{-4t}$

31. $P(t) = M + Ce^{-kt}$



33. $y = \frac{2}{5}(100 + 2t) - 40\,000(100 + 2t)^{-3/2}$; 0,2275 kg/L

35. (b) mg/c (c) $(mg/c)[t + (m/c)e^{-ct/m}] - m^2g/c^2$

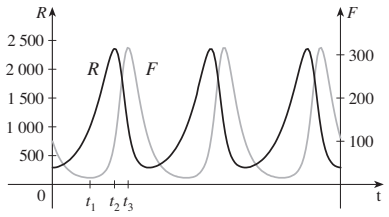
EXERCÍCIOS 9.6 ■ PÁGINA 581

1. (a) x = predadores, y = presa; o crescimento é restrito apenas pelos predadores, que se alimentam apenas da presa.

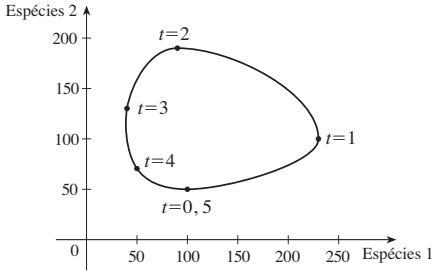
(b) x = presa, y = predadores; o crescimento é restrito pela capacidade de suporte e pelos predadores, que se alimentam apenas da presa.

3. (a) A população de coelhos começa em cerca de 300, aumenta até 2 400, e então decresce de novo para 300. A população de raposas começa em 100, decresce para cerca de 20, aumenta para cerca de 315, decresce para 100 e o ciclo começa novamente.

(b)



5.



9. (a) A população se estabiliza em 5 000.

(b) (i) $W = 0, R = 0$: populações zero

(ii) $W = 0, R = 5000$: na ausência de lobos, a população de coelhos é sempre 5 000.

(iii) $W = 64, R = 1\,000$: ambas as populações são estáveis.

(c) As populações se estabilizam em 1 000 coelhos e 64 lobos.

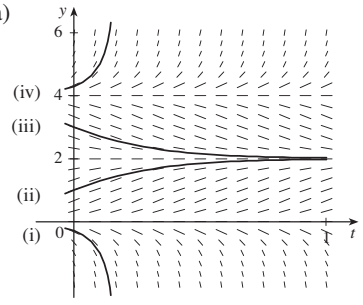
CAPÍTULO 9 REVISÃO ■ PÁGINA 583

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro

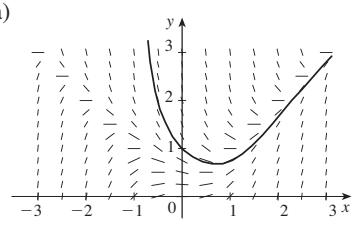
Exercícios

1. (a)



(b) $0 \leqslant c \leqslant 4$; $y = 0, y = 2, y = 4$

3. (a)



$y\,(0{,}3) \approx 0{,}8$

(b) 0,75676

(c) $y = x$ e $y = -x$; existe um máximo ou um mínimo local

5. $y = (\frac{1}{2}x^2\ C)e^{-\operatorname{sen} x}$ **7.** $y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$

9. $r(t) = 5e^{t-t^2}$ **11.** $y = \frac{1}{2}x\,(\ln x)^2 + 2x$ **13.** $x = C - \frac{1}{2}y^2$

15. (a) $P(t) = \dfrac{2\,000}{1 + 19e^{-0{,}1t}}$; ≈ 560 (b) $t = 10 \ln \frac{2}{57} \approx 33.5$

17. (a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ (b) $L(t) = 53 - 43e^{-0{,}2t}$

19. 15 dias **21.** $k \ln h + h = (-R/V)t + C$

23. (a) Estabiliza em 200 000

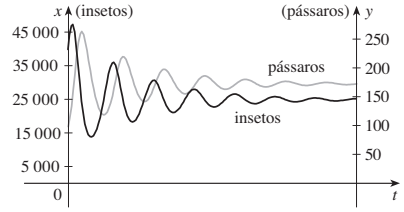
(b) (i) $x = 0, y = 0$: populações zero

(ii) $x = 200\,000, y = 0$: na ausência de pássaros, a população de insetos é sempre 200 000.

(iii) $x = 25{,}000, y = 175$: ambas as populações são estáveis.

(c) As populações se estabilizam em 25 000 insetos e 175 pássaros.

(d)



25. (a) $y = (1/k)\cosh kx + a - 1/k$ ou $y = (1/k)\cosh kx - (1/k)\cosh kb + h$ (b) $(2/k)$ senh kb

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 586

1. $f(x) = \pm 10e^x$ **5.** $y = x^{1/n}$ **7.** 20 °C

9. (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - L^2}{4L} - \frac{1}{2}L \ln\left(\dfrac{x}{L}\right)$ (c) Não

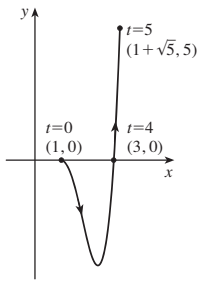
11. (a) 9,5 h (b) $2\,700\pi \approx 8\,482$ m^2; 471 m^2/h (c) 5,5 h

13. $x^2 + (y - 6)^2 = 25$

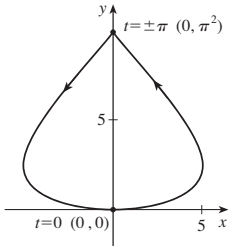
CAPÍTULO 10

EXERCÍCIOS 10.1 ■ PÁGINA 594

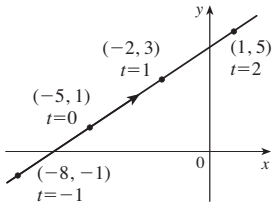
1.



3.

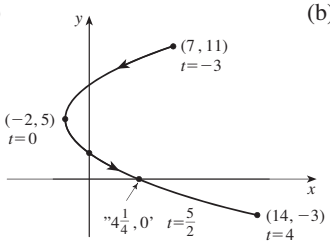


5. (a)



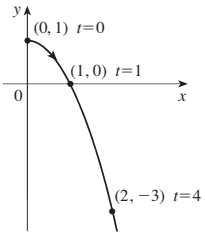
(b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

7. (a)



(b) $x = \frac{1}{4}(y-5)^2 - 2$, $-3 \leqslant y \leqslant 11$

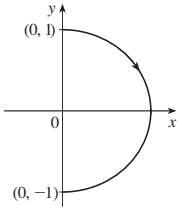
9. (a)



(b) $y = 1 - x^2, x \geqslant 0$

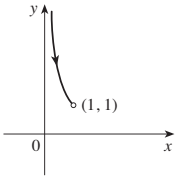
11. (a) $x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0$

(b)



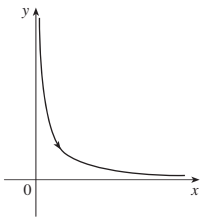
13. (a) $y = 1/x, y > 1$

(b)



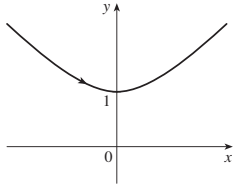
15. (a) $y = 1/x, x > 0$

(b)



17. (a) $y^2 - x^2 = 1, y \geqslant 1$

(b)

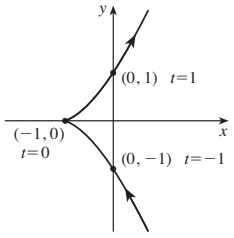


19. Se move no sentido anti-horário ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$

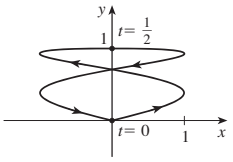
21. Se move três vezes no sentido horário em torno da elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, começando e terminando em $(0, -2)$

23. Está contida no retângulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ e $2 \leqslant y \leqslant 3$.

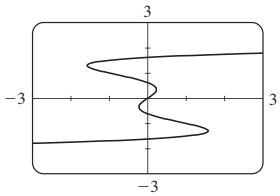
25.



27.



29.



31. (b) $x = -2 + 5t, y = 7 - 8t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

33. (a) $x = 2\cos t, y = 1 - 2\operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

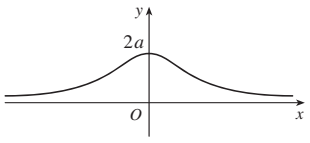
(b) $x = 2\cos t, y = 1 + 2\operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

(c) $x = 2\cos t, y = 1 + 2\operatorname{sen} t, \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

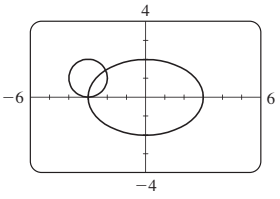
37. A curva $y = x^{2/3}$ é gerada em (a). Em (b) é gerada apenas a parte com $x \geqslant 0$ e em (c) obtemos apenas a parte com $x > 0$.

41. $x = a\cos\theta, y = b\operatorname{sen}\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

43.



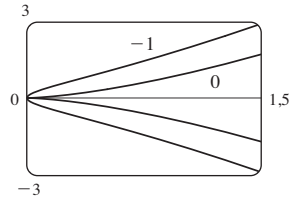
45. (a) Dois pontos de intersecção

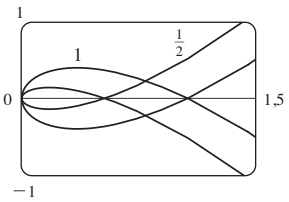


(b) Um ponto de colisão em $(-3, 0)$ quando $t = 3\pi/2$

(c) Ainda existem dois pontos de intersecção, mas nenhum ponto de colisão.

47. Para $c = 0$, existe uma cúspide; para $c > 0$, existe um laço cujo tamanho aumenta à medida que c aumenta.





49. Quando n aumenta, o número de oscilações aumenta; a e b determinam a largura e a altura.

EXERCÍCIOS 10.2 ■ PÁGINA 603

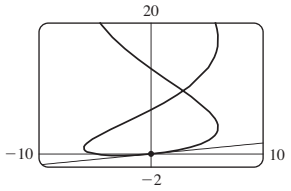
1. $5/(3t^2 - 1)$

3. $(2\operatorname{sen} t\cos t)/(\ln t + 1)$

5. $y = -x$

7. $y = 2x + 1$

9. $y = \frac{1}{6}x$



11. $1 + \frac{3}{2}t, 3/(4t), t > 0$

13. $-e^{-t}, e^{-t}/(1 - e^t), t < 0$

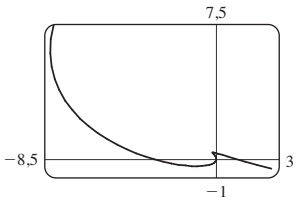
15. $-\frac{3}{2}\operatorname{tg} t, -\frac{3}{4}\sec^3 t, \pi/2 < t < 3\pi/2$

17. Horizontal em $(6, \pm 16)$, vertical em $(10, 0)$

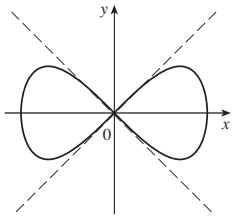
19. Horizontal em $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ (quatro pontos), vertical em $(\pm 2, 0)$

21. $(0{,}6, 2)$; $(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}})$

23.



25. $y = x$, $y = -x$



27. (a) $d \operatorname{sen}\theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $\left(\frac{16}{27}, \frac{29}{9}\right), (-2, -4)$

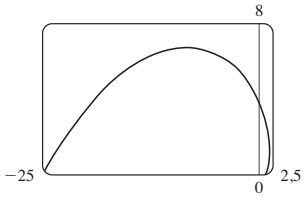
31. πab **33.** $3 - e$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$

37. $\int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \approx 3{,}1678$

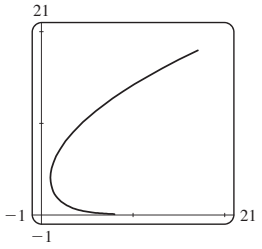
39. $\int_1^{2\pi} \sqrt{3 - 2\operatorname{sen} t - 2\cos t}\, dt \approx 10{,}0367$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $-\sqrt{10}/3 + \ln(3 + \sqrt{10}) + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

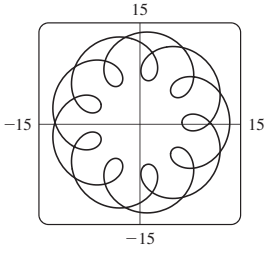


47. $e^3 + 11 - e^{-8}$



49. 612,3053 **51.** $6\sqrt{2}, \sqrt{2}$

55. (a)



$t \in [0, 4\pi]$

(b) ≈ 294

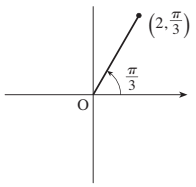
57. $\int_0^1 2\pi(t^2 + 1)e^t \sqrt{e^{2t}(t + 1)^2(t^2 + 2t + 2)}\, dt \approx 103{,}5999$

59. $\frac{2}{1215}\pi(247\sqrt{13} + 64)$ **61.** $\frac{6}{5}\pi a^2$ **63.** 59,101

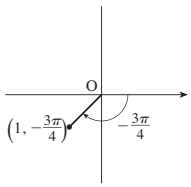
65. $\frac{24}{5}\pi(949\sqrt{26} + 1)$ **71.** $\frac{1}{4}$

EXERCÍCIOS 10.3 ■ PÁGINA 614

1. (a)

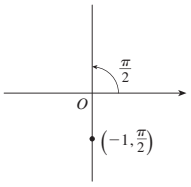


(b)



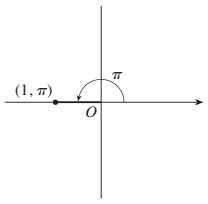
$(2, 7\pi/3), (-2, 4\pi/3)$ $(1, 5\pi/4), (-1, \pi/4)$

(c)

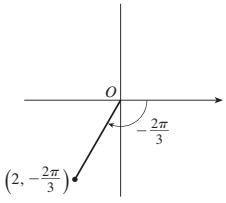


$(1, 3\pi/2), (-1, 5\pi/2)$

3. (a)

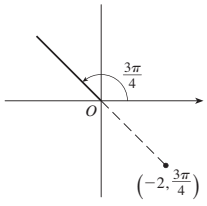


(b)



$(-1, 0)$ $(-1, \sqrt{3})$

(c)

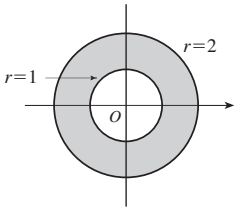


$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

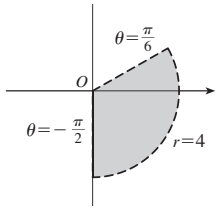
5. (a) (i) $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ (ii) $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$

(b) (i) $(2, 2\pi/3)$ (ii) $(-2, 5\pi/3)$

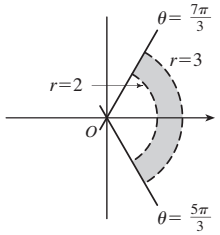
7.



9.



11.



13. $2\sqrt{3}$ **15.** Círculo, centro O, raio 2

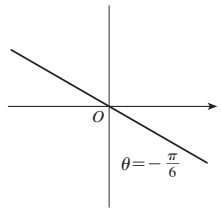
17. Círculo, centro $(0, \frac{3}{2})$, raio $\frac{3}{2}$

19. Reta horizontal, 1 unidade acima do eixo x

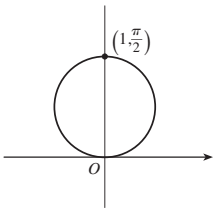
21. $r \operatorname{sen} \theta = 5$ **23.** $r = -\operatorname{cotg} \theta \operatorname{cossec} \theta$ **25.** $r = 2c \cos \theta$

27. (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

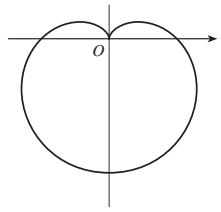
29.



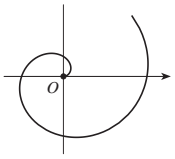
31.



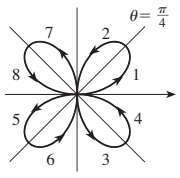
33.



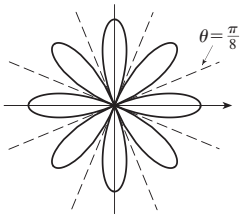
35.



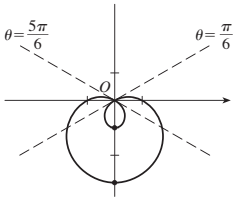
37.



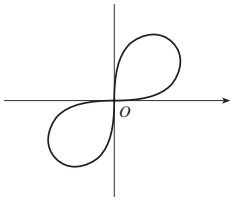
39.



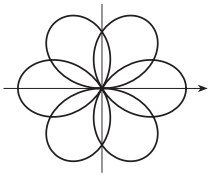
41.



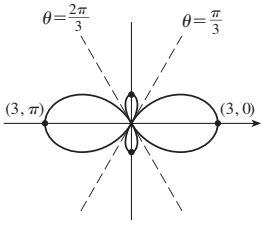
43.



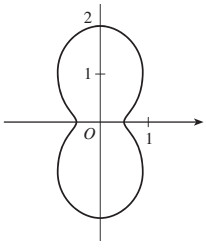
45.



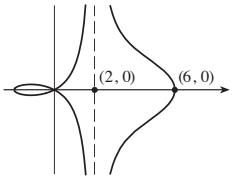
47.



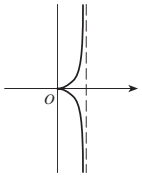
49.



51.



53.



55. (a) Para $c < -1$, o laço interno começa em $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, ele começa em $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$

57. $\sqrt{3}$ **59.** $-\pi$ **61.** 1

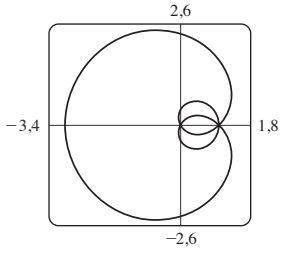
63. Horizontal em $(3/\sqrt{2}, \pi/4), (-3/\sqrt{2}, 3\pi/4)$; vertical em $(3, 0), (0, \pi/2)$

65. Horizontal em $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right), (0, \pi)$ [o polo], e $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical em $(2, 0), \left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right), \left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$

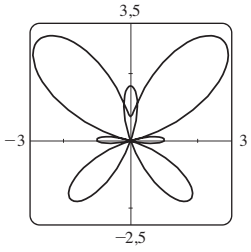
67. Horizontal em $(3, \pi/2), (1, 3\pi/2)$; vertical em $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \alpha\right)$, $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi - \alpha\right)$ onde $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

69. Centro $(b/2, a/2)$, raio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

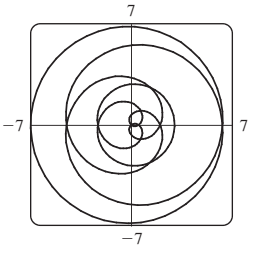
71.



73.



75.



77. Por rotação anti-horária de um ângulo $\pi/6$, $\pi/3$, ou α em torno da origem.

79. (a) Uma rosácea com n laços se n for ímpar e $2n$ laços se n for par

(b) O número de laços é sempre $2n$

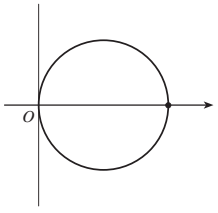
81. Para $0 < a < 1$,a curva é oval e ela desenvolve uma covinha quando $a \longrightarrow 1^-$. Quando $a > 1$, a curva se divide em duas partes, uma das quais tem um laço.

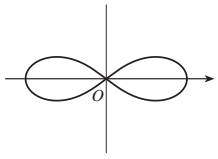
EXERCÍCIOS 10.4 ■ PÁGINA 620

1. $\pi^5/10\,240$ **3.** $\pi/12 + \frac{1}{8}\sqrt{3}$ **5.** $\pi^3/6$ **7.** $\frac{41}{4}$

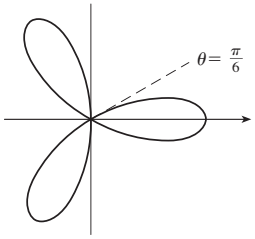
9. $\frac{9}{4}\pi$

11. 4

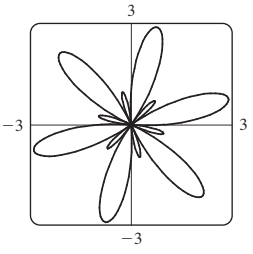




13. π



15. 3π



17. $\frac{1}{8}\pi$ **19.** $\frac{9}{20}\pi$ **21.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

25. $(4\pi/3) + 2\sqrt{3}$ **27.** π **29.** $\frac{5}{24}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

31. $\frac{1}{2}\pi - 1$ **33.** $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **35.** $\frac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

37. $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right), \left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$, e o polo

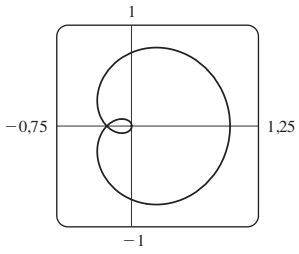
39. $(1, \theta)$ onde $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$ e $(-1, \theta)$ onde $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$

41. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3\right)$, e o polo

43. Intersecção em $\theta \approx 0{,}89, 2{,}25$; área $\approx 3{,}46$ **45.** π

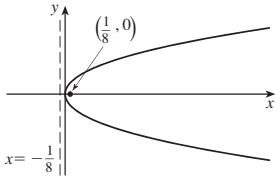
47. $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **49.** 29,0653 **51.** 9,6884

53. $\frac{16}{3}$ **55.** (b) $2\pi(2 - \sqrt{2})$

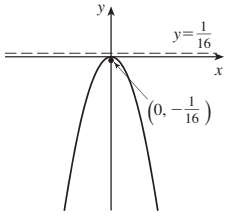


EXERCÍCIOS 10.5 ■ PÁGINA 626

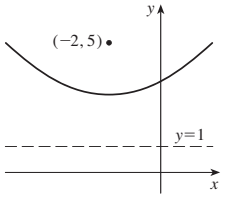
1. $(0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), x = -\frac{1}{8}$



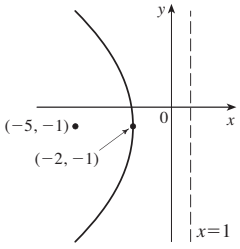
3. $(0, 0), \left(0, -\frac{1}{16}\right), y = \frac{1}{16}$



5. $(-2, 3), (-2, 5), y = 1$

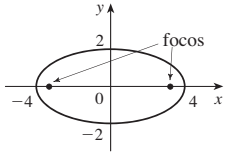


7. $(-2, -1), (-5, -1), x = 1$

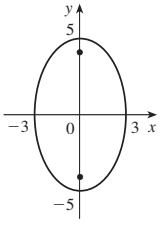


9. $x = -y^2$, foco $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, diretriz $x = \frac{1}{4}$

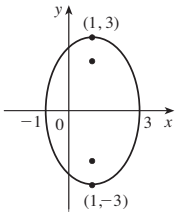
11. $(\pm 4, 0), (\pm 2\sqrt{3}, 0)$



13. $(0, \pm 5), (0, \pm 4)$

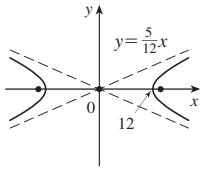


15. $(1, \pm 3), (1, \pm\sqrt{5})$

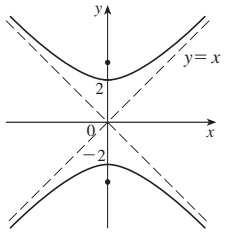


17. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, focos $(0, \pm\sqrt{5})$

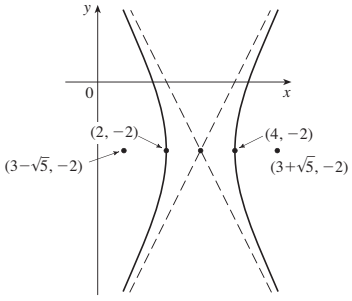
19. $(\pm 12, 0), (\pm 13, 0)$, $y = \pm\frac{5}{12}x$



21. $(0, \pm 2), (0, \pm 2\sqrt{2})$, $y = \pm x$



23. $(4, -2), (2, -2)$; $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$; $y + 2 = \pm 2(x - 3)$



25. Parábola, $(0, -1), (0, -4^3)$

27. Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1), (\pm 1, 1)$

29. Hipérbole, $(0, 1), (0, -3)$; $(0, -1 \pm \sqrt{5})$ **31.** $x^2 = -8y$

33 $y^2 = -12(x + 1)$ **35.** $y^2 = 16x$

37. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

41. $\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ **43.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

45. $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{39} = 1$ **47.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

49. $\frac{x^2}{3\,763\,600} + \frac{y^2}{3\,753\,196} = 1$

51. (a) $\frac{x^2}{32\,400} - \frac{y^2}{57\,600} = 1$ (b) ≈ 320 km

55. (a) Elipse (b) Hipérbole (c) Nenhuma curva

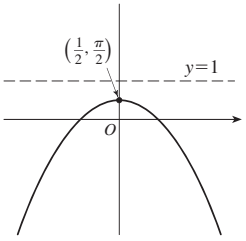
59. 9,69 **61.** $\frac{b^2c}{a} + ab\ln\left(\frac{a}{b+c}\right)$ onde $c^2 = a^2 + b^2$

EXERCÍCIOS 10.6 ■ PÁGINA 634

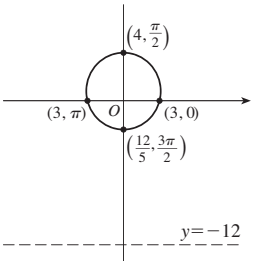
1. $r = \frac{42}{4 + 7\operatorname{sen}\theta}$ **3.** $r = \frac{15}{4 - 3\cos\theta}$

5. $r = \frac{8}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **7.** $r = \frac{4}{2 + \cos\theta}$

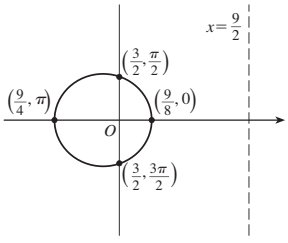
9. (a) 1 (b) Parábola (c) $y = 1$
(d) (g) $\frac{3}{2}$



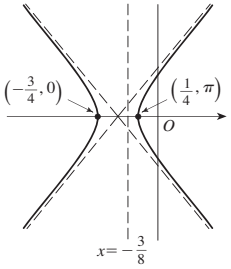
11. (a) $\frac{1}{4}$ (b) Elipse (c) $y = -12$
(d)



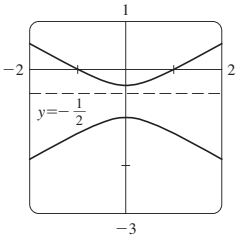
13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) Elipse (c) $x = \frac{9}{2}$
(d)



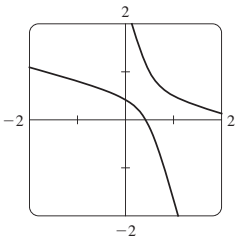
15. (a) 2 (b) Hipérbole (c) $x = -\frac{3}{8}$
(d)



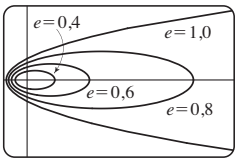
17. (a) 2, $y = -\frac{1}{2}$



(b) $r = \frac{1}{1 - 2\operatorname{sen}(\theta - 3\pi/4)}$



19. A elipse é quase circular quando e está próximo de 0 e se torna mais alongada quando $e \to 1^-$. Em $e = 1$, a curva se torna uma parábola.



25. $r = \frac{2{,}26 \times 10^8}{1 + 0{,}093\cos\theta}$

27. 35,64 AU **29.** $7{,}0 \times 10^7$ km **31.** $3{,}6 \times 10^8$ km

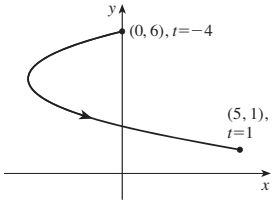
CAPÍTULO 10 REVISÃO ■ PÁGINA 635

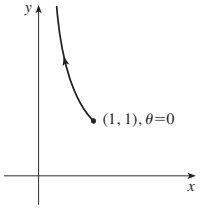
Testes Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Falso **9.** Verdadeiro

Exercícios

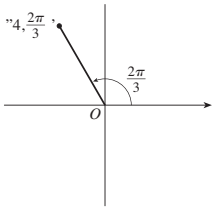
1. $x = y^2 - 8y + 12$ **3.** $y = 1/x$





5. $x = t, y = \sqrt{t}$; $x = t^4, y = t^2$;
$x = \operatorname{tg}^2 t, y = \operatorname{tg} t, 0 \leq t < \pi/2$

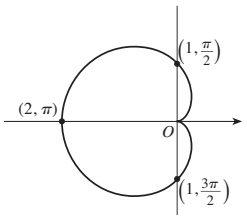
7. (a)



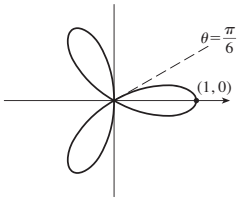
$(-2, 2\sqrt{3})$

(b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, 7\pi/4)$

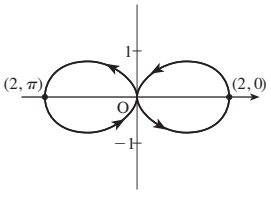
9.



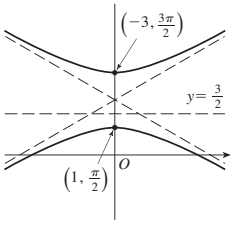
11.



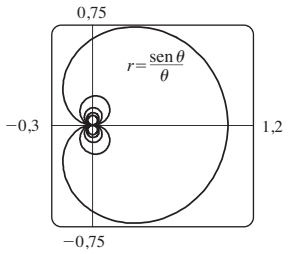
13.



15.



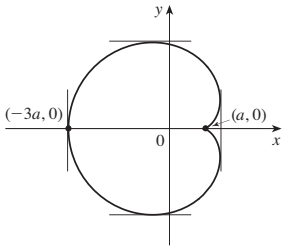
17. $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ **19.**



21. 2 **23.** -1

25. $\dfrac{1+\operatorname{sen} t}{1+\cos t}, \dfrac{1+\cos t+\operatorname{sen} t}{(1+\cos t)^3}$ **27.** $\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}\right)$

29. Tangente vertical em $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right), (-3a, 0)$; tangente horizontal em $(a, 0), \left(-\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a\right)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

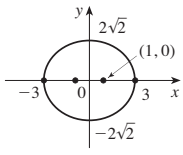
37. $2(5\sqrt{5} - 1)$

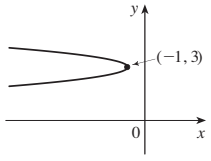
39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2+1} - \sqrt{4\pi^2+1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}}{\pi + \sqrt{\pi^2+1}}\right)$

41. $471\,295\pi/1\,024$

43. Todas as curvas têm a assíntota vertical $x = 1$. Para $c < -1$, a curva se curva para a direita. Em $c = -1$, a curva é a reta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, ela se curva para a esquerda. Em $c = 0$ há uma cúspide em $(0, 0)$. Para $c > 0$, existe um laço.

45. $(\pm1, 0), (\pm3, 0)$ **47.** $(-\frac{25}{24}, 3), (-1, 3)$





49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y-399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos\theta}$

57. $x = a(\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta), y = a(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 638

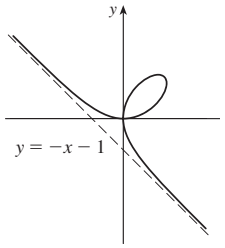
1. $\ln(\pi/2)$

3. $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

5. (a) Em $(0, 0)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(b) Tangentes horizontais em $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$; tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$

(d)



(g) $\frac{3}{2}$

CAPÍTULO 11

EXERCÍCIOS 11.1 ■ PÁGINA 649

Abreviações: C, convergente; D, divergente

1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números. Ela também pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

(b) Os termos a_n tendem a 8 quando n se torna grande.

(c) Os termos a_n se tornam grandes quando n se torna grande.

3. 0,8, 0,96, 0,992, 0,9984, 0,99968 **5.** $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$

7. 3, 5, 9, 17, 33 **9.** $a_n = 1/2^n$ **11.** $a_n = 5n - 3$

13. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **15.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}$; yes; $\frac{1}{2}$

17. 1 **19.** 5 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 0 **27.** D

29. 0 **31.** 0 **33.** 0 **35.** 0 **37.** 1 **39.** e^2

41. $\ln 2$ **43.** D **45.** D **47.** 1 **49.** $\frac{1}{2}$

51. D **53.** 0

55. (a) 1 060, 1 123,60, 1 191,02, 126 248, 1 338,23 (b) D

57. $-1 < r < 1$

59. Convergente pelo Teorema da Sequência Monótona; $5 \leqslant L < 8$

61. Decrescente; sim **63.** Não monótona; não

65. Decrescente; sim **67.** 2 **69.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$

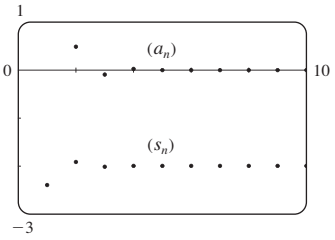
71. (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ **73.** (a) 0 (b) 9, 11

EXERCÍCIOS 11.2 ■ PÁGINA 658

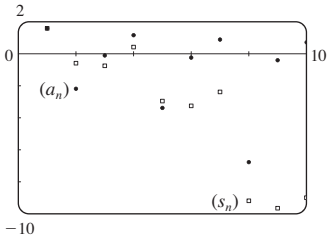
1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números enquanto uma série é a *soma* de uma lista de números.

(b) Uma série é convergente se a sequência das somas parciais for uma sequência convergente. A série é divergente se ela não for convergente.

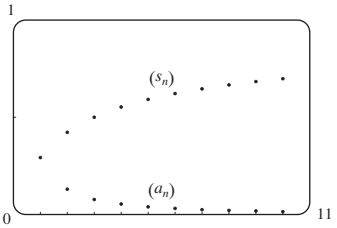
3. $-2{,}40000, -1{,}92000, -2{,}01600, -1{,}99680, -2{,}00064, -1{,}99987, -2{,}00003, -1{,}99999, -2{,}00000, -2{,}00000$; convergente, soma = 2



5. 1,55741, −0,62763, −0,77018, 0,38764, −2,99287, −3,28388, −2,41243, −9,21214, −9,66446, −9,01610; divergente



7. 0,29289, 0,42265, 0,50000, 0,55279, 0,59175, 0,62204, 0,64645, 0,66667, 0,68377, 0,69849; convergente, soma = 1



9. (a)C (b)D **11.** 9 **13.** D **15.** 60 **17.** $\frac{1}{7}$

19. D **21.** D **23.** D **25.** $\frac{3}{2}$ **27.** D **29.** D

31. D **33.** $e/(e-1)$ **35.** $\frac{3}{2}$ **37.** $\frac{11}{6}$ **39.** $e-1$

41. $\frac{2}{9}$ **43.** 1 138/333 **45.** 41 111/333 000

47. $-3 < x < 3$; $\dfrac{x}{3-x}$ **49.** $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; $\dfrac{1}{1-4x}$

51. Todo x; $\dfrac{2}{2-\cos x}$ **53.** 1

55. $a_1 = 0, a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ para $n > 1$, soma = 1

57. (a) $S_n = \dfrac{D(1-c^n)}{1-c}$ (b) 5 **59.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

63. $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **65.** A série é divergente.

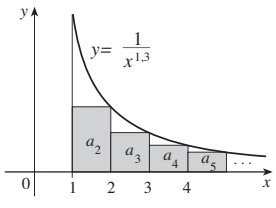
71. $\{s_n\}$ é limitada e crescente.

73. (a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$

75. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ (c) 1

EXERCÍCIOS 11.3 ■ PÁGINA 667

1. C



3. C **5.** C **7.** C **9.** D **11.** C **13.** D **15.** C

17. C **19.** C **21.** D **23.** C **25.** C **27.** $p > 1$

29. $p < -1$ **31.** $(1, \infty)$

33. (a) 1,54977, erro $\leq 0{,}1$ (b) 1,64522, erro $< 0{,}005$ (c) $n > 1\,000$ **35.** 0,00145 **41.** $b < 1/e$

EXERCÍCIOS 11.4 ■ PÁGINA 672

1. (a) Nada (b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** C

11. C **13.** C **15.** C **17.** D **19.** D **21.** C

23. C **25.** D **27.** C **29.** C **31.** D

33. 1,249, erro $< 0{,}1$ **35.** 0,76352, erro $< 0{,}001$

45. Sim

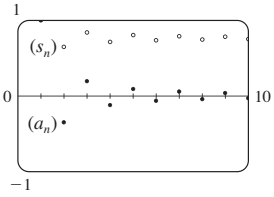
EXERCÍCIOS 11.5 ■ PÁGINA 677

1. (a) Uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos (b) $0 < b_{n+1} \leq b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, onde $b_n = |a_n|$ (c) $|R_n| \leq b_{n+1}$

3. C **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** D

15. C **17.** C **19.** D

21. 1,0000, 0,6464, 0,8389, 0,7139, 0,8033, 0,7353, 0,7893, 0,7451, 0,782 0,7505; erro $< 0{,}0275$



23. 5 **25.** 4 **27.** 0,9721 **29.** 0,0676

31. Uma subestimativa **33.** p não é um inteiro negativo

35. $\{b_n\}$ não é decrescente

EXERCÍCIOS 11.6 ■ PÁGINA 683

Abreviações: AC, absolutamente convergente; CC, condicionalmente convergente

1. (a) D (b) C (c) Pode convergir ou divergir

3. AC **5.** CC **7.** AC **9.** D **11.** AC **13.** AC

15. AC **17.** CC **19.** AC **21.** AC **23.** D

25. AC **27.** D **29.** D **31.** (a) e (d)

35. (a) $\frac{661}{960} \approx 0{,}68854$, erro $< 0{,}00521$
(b) $n \geq 11$, 0,693109

EXERCÍCIOS 11.7 ■ PÁGINA 686

1. C **3.** D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** C

15. C **17.** D **19.** C **21.** C **23.** D **25.** C

27. C **29.** C **31.** D **33.** C **35.** C **37.** C

EXERCÍCIOS 11.8 ■ PÁGINA 691

1. Uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, onde x é uma variável e a e c_n são constantes

3. $1, [-1, 1]$ **5.** $1, [-1, 1]$ **7.** $\infty, (-\infty, \infty)$

9. $\frac{1}{4}, \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ **11.** $\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **13.** $4, (-4, 4]$

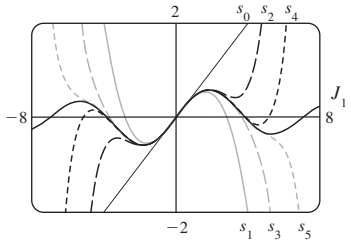
15. $1, [1, 3]$ **17.** $\frac{1}{3}, \left[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ **19.** $\infty, (-\infty, \infty)$

21. $b, (a-b, a+b)$ **23.** $0, \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **25.** $\frac{1}{4}, \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

27. $\infty, (-\infty, \infty)$ **29.** (a) Sim (b) Não **31.** k^k **33.** Não

35. (a) $(-\infty, \infty)$

(b), (c)



37. $(-1, 1), f(x) = (1 + 2x)/(1 - x^2)$ **41.** 2

EXERCÍCIOS 11.9 ■ PÁGINA 697

1. 10 **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, (-1, 1)$ **5.** $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n, (-3, 3)$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}, (-3, 3)$ **9.** $1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n, (-1, 1)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n, (-1, 1)$

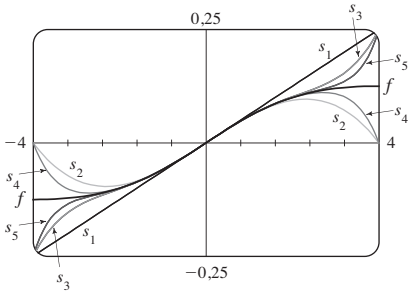
13. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) x^n, R = 1$

(b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 2)(n + 1) x^n, R = 1$

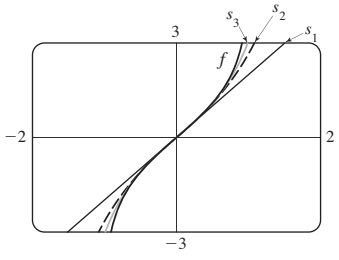
(c) $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n - 1) x^n, R = 1$

15. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}, R = 5$ **17.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n - 2}{2^{n-1}} x^n, R = 2$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{16^{n+1}} x^{2n+1}, R = 4$



21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n + 1}, R = 1$



23. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n + 2}, R = 1$

25. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{4n^2 - 1}, R = 1$

27. 0,199989 **29.** 0,000065 **31.** 0,09531

33. (b) 0,920 **37.** $[-1, 1], [-1, 1), (-1, 1)$

EXERCÍCIOS 11.10 ■ PÁGINA 709

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) x^n, R = 1$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) x^n, R = 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, R = \infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n, R = \infty$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}, R = \infty$

13. $7 + 5(x - 2) + (x - 2)^2, R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!}(x - 3)^n, R = \infty$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}, R = \infty$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!} (x - 9)^n, R = 9$

25. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 3)}{2^n n!} x^n, R = 1$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n + 1)(n + 2)}{2^{n+4}!} x^n, R = 2$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, R = \infty$

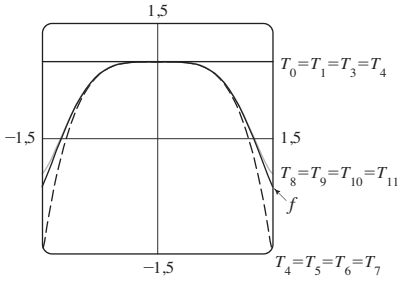
31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n, R = \infty$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2n}(2n)!} x^{4n+1}, R = \infty$

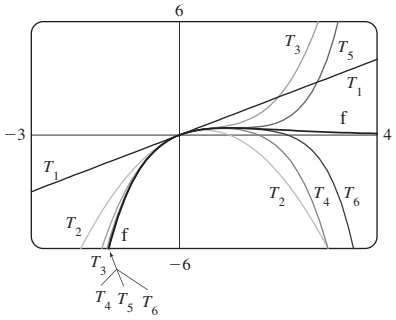
35. $\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n! 2^{3n+1}} x^{2n+1} R = 2$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, R = \infty$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}, R = \infty$



41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^n, R = \infty$



43. 0,81873

45. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

47. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}, R = \infty$

49. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n(2n)!}x^{2n}, R = \infty$ **51.** 0,440

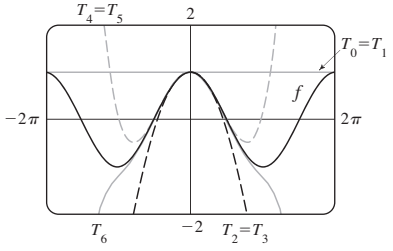
53. 0,40102 **55.** $\frac{1}{2}$ **57.** $\frac{1}{120}$ **59.** $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$

61. $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$ **63.** e^{-x^4}

65. $1/\sqrt{2}$ **67.** $e^3 - 1$

EXERCÍCIOS 11.11 ■ PÁGINA 718

1. (a) $T_0(x) = 1 = T_1(x), T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$

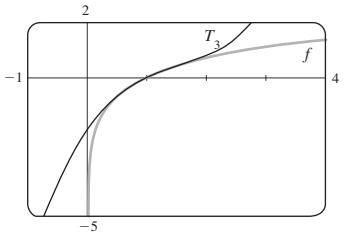


(b)

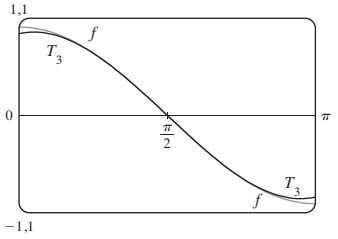
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0,7071	1	0,6916	0,7074	0,7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0,2337	0,0200	−0,0009
π	−1	1	−3,9348	0,1239	−1,2114

(c) À medida que n aumenta, $T_n(x)$ passa a ser uma boa aproximação para $f(x)$ em intervalos cada vez maiores.

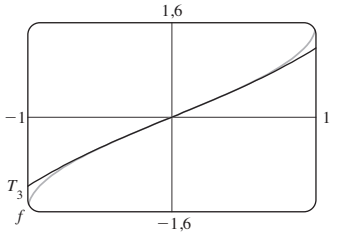
3. $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$



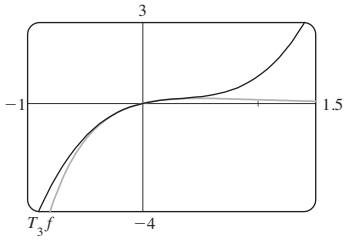
5. $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$



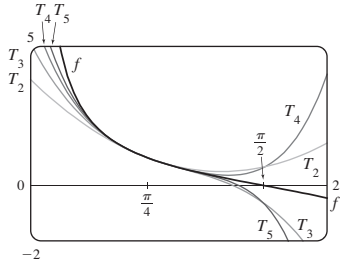
7. $x + \frac{1}{6}x^3$



9. $x - 2x^2 + 2x^3$



11. $T_5(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{64}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$



13. (a) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$ (b) $1{,}5625 \times 10^5$

15. (a) $1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$ (b) 0,000097

17. (a) $1 + \frac{1}{2}x^2$ (b) 0,0015 **19.** (a) $1 + x^2$ (b) 0,00006

21. (a) $x^2 - \frac{1}{6}x^4$ (b) 0,042 **23.** 0,17365 **25.** Quatro

27. $-1{,}037 < x < 1{,}037$ **29.** $-0{,}86 < x < 0{,}86$

31. 21 m, não **37.** (c) Eles diferem por cerca de 8×10^{-9} km.

CAPÍTULO 11 REVISÃO ■ PÁGINA 721

Testes Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Falso

9. Falso **11.** Verdadeiro **13.** Verdadeiro **15.** Falso

17. Verdadeiro **19.** Verdadeiro

Exercícios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C

13. C **15.** D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC

25. AC **27.** $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0,9721

37. 0,18976224,erro $< 6{,}4 \times 10^{-7}$

41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0,5, [2,5, 3,5)

45. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

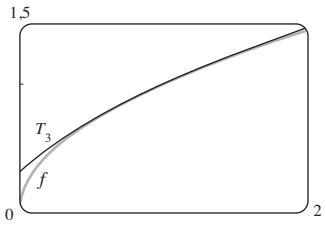
47. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}, R = 1$ **49.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, R = 1$

51. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}, R = \infty$

53. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{n!2^{6n+1}}x^n, R = 16$

55. $C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n \cdot n!}$

57. (a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$ (b)



(c) 0,000006

59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 725

1. 15!/5! = 10,897,286,400

3. (b) 0 se $x = 0$, $(1/x) - \operatorname{cotg} x$ se $x \neq k\pi$, k inteiro

5. (a) $s_n = 3 \cdot 4^n, l_n = 1/3^n, p_n = 4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

9. $(-1, 1), \dfrac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$ **11.** $\ln\frac{1}{2}$

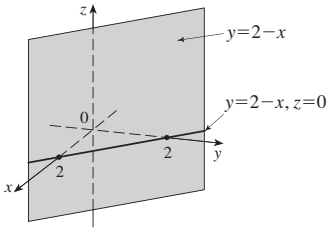
13. (a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)p/5} - e^{-n\pi/5})$ (b) $\frac{250}{101}\pi$

CAPÍTULO 12

EXERCÍCIOS 12.1 ■ PÁGINA 732

1. (4, 0, −3) **3.** Q; R

5. Um plano vertical que intercepta o plano xy na reta $y = 2 - x, z = 0$ (veja o gráfico à direita)



7. $|PQ| = 6, |QR| = 2s10, |RP| = 6$; triângulo isósceles

9. (a) Não (b) Sim

11. $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16$;
$(y-1)^2 + (z+1)^2 = 16, x = 0$

13. $(x-3)^2(y-8)^2 + (z-1)^2 = 30$

15. (3, −2, 1),5

17. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \sqrt{3}/2$ **19.** (b) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{94}, \frac{1}{2}\sqrt{85}$

21. (a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 36$
(b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$
(c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 9$

23. Um plano paralelo ao plano xz e quatro unidades à esquerda dele

25. Um semiespaço consistindo em todos os pontos à frente do plano $x = 3$

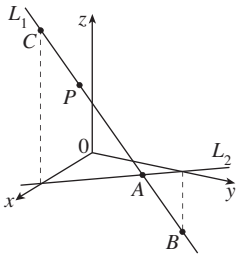
27. Todos os pontos sobre ou entre os planos horizontais $z = 0$ e $z = 6$

29. Todos os pontos sobre ou dentro da esfera com raio $\sqrt{3}$ e centro O

31. Todos os pontos sobre ou dentro do cilindro circular de raio 3 e eixo no eixo y

33. $0 < x < 5$ **35.** $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

37. (a) (2, 1, 4) (b)



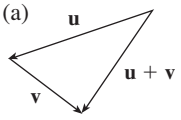
39. $14x - 6y - 10z = 9$, um plano perpendicular a AB

EXERCÍCIOS 12.2 ■ PÁGINA 740

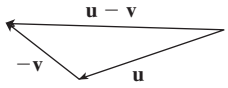
1. (a) Escalar (b) Vetor (c) Vetor (d) Escalar

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$

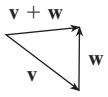
5. (a)



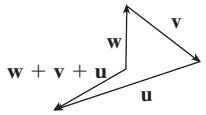
(b)



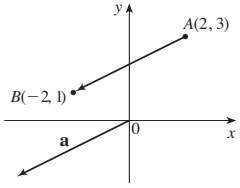
(c)



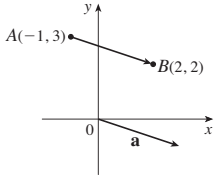
(d)



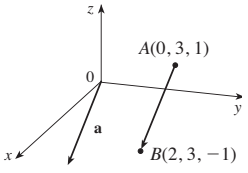
7. $\mathbf{a} = \langle -4, -2 \rangle$



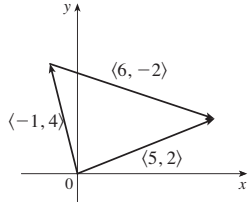
9. $\mathbf{a} = \langle 3, -1 \rangle$



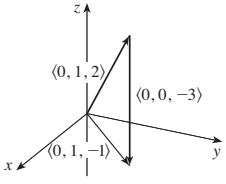
11. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2 \rangle$



13. $\langle 5, 2 \rangle$



15. $\langle 0, 1, -1 \rangle$



17. $\langle 2, -18 \rangle, \langle 1, -42 \rangle$, 13, 10

19. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \sqrt{14}, \sqrt{82}$

21. $-\dfrac{3}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \dfrac{7}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$ **23.** $\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$

25. $\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ **27.** ≈15,32 m/s, ≈12,86 m/s

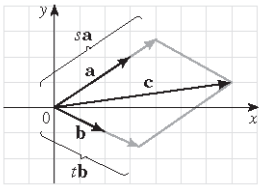
29. $100\sqrt{7} \approx 264{,}6$ N, ≈139,1°

31. $\sqrt{1\,250} \approx 35{,}4$ km/h, N8°W

33. $\mathbf{T}_1 \approx -196\,\mathbf{i} + 3{,}92\,\mathbf{j}, \mathbf{T}_2 \approx 196\,\mathbf{i} + 3{,}92\,\mathbf{j}$

35. $\pm(\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j})/\sqrt{17}$ **37.** 0

39. (a), (b) (d) $s = \frac{9}{7}, t = \frac{11}{7}$



41. Uma esfera com raio 1, centrada em (x_0, y_0, z_0)

EXERCÍCIOS 12.3 ■ PÁGINA 747

1. (b), (c), (d) têm significado

3. 14 **5.** −5 **7.** 32 **9.** −15

11. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{2}$

15. $\cos^{-1}\left(\dfrac{9 - 4\sqrt{7}}{20}\right) \approx 95°$ **17.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{1\,015}}\right) \approx 81°$

19. $\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{7}}\right) \approx 101°$ **21.** 45°, 45°, 90°

23. (a) Nenhum dos dois (b) Ortogonais
(c) Ortogonais (d) Paralelos

25. Sim **27.** $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$ [ou $(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$]

29. $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{4}{5\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 65°, 56°, 45°

31. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$; 73°, 65°, 149°

33. $1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$; 55°, 55°, 55°

35. $3, \langle \frac{9}{5}, -\frac{12}{5} \rangle$ **37.** $\frac{9}{7}, \langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \rangle$

39. $1/\sqrt{21}, \frac{2}{21}\mathbf{i} - \frac{1}{21}\mathbf{j} + \frac{4}{21}\mathbf{k}$

43. $\langle 0, 0, -2\sqrt{10} \rangle$ ou qualquer vetor da forma $\langle s, t, 3s - 2\sqrt{10} \rangle$, $s, t \in \mathbb{R}$

45. 144 J **47.** 560 cos 20° ≈ 526 J **49.** $\frac{13}{5}$

51. $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

EXERCÍCIOS 12.4 ■ PÁGINA 754

1. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ **3.** $15\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **5.** $\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$

7. $t^4\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ **9.** 0 **11.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. (a) Escalar (b) Sem significado (c) Vetor
(d) Sem significado (e) Sem significado (f) Escalar

15. 24; entrando na página **17.** $\langle 5, -3, 1 \rangle, \langle -5, 3, -1 \rangle$

19. $\langle -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6} \rangle, \langle 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6} \rangle$

27. 16 **29.** (a) $\langle 6, 3, 2 \rangle$ (b) $\frac{7}{2}$

31. (a) $\langle 13, -14, 5 \rangle$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$

33. 82 **35.** 3 **39.** 10,8 sen 80° ≈ 10,6 N · m

41. ≈ 417 N **43.** (b) $\sqrt{97/3}$

49. (a) Não (b) Não (c) Sim

EXERCÍCIOS 12.5 ■ PÁGINA 763

1. (a) Verdadeiro (b) Falso (c) Verdadeiro (d) Falso
(e) Falso (f) Verdadeiro (g) Falso (h) Verdadeiro
(i) Verdadeiro (j) Falso (k) Verdadeiro

3. $\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\,\mathbf{k})$;
$x = -2 + 3t, y = 4 + t, z = 10 - 8t$

5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t$

7. $x = 1 - 5t, y = 3, z = 2 - 2t$; $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{z-2}{-2}, y = 3$

9. $x = 2 + 2t, y = 1 + \frac{1}{2}t, z = 3 - 4t$;
$(x-2)/2 = 2y - 2 = (z+3)/(-4)$

11. $x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 1 + t$; $x - 1 = (y+1)/2 = z - 1$

13. Sim

15. (a) $(x-1)/(-1) = (y+5)/2 = (z-6)/(-3)$
(b) $(-1,-1,0), (-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}), (0,-3,3)$

17. $\mathbf{r}(t) = (2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}) + t(2\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}), 0 \leqslant t \leqslant 1$

19. Paralelas **21.** Reversas

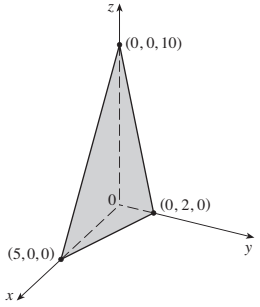
23. $-2x + y + 5z = 1$ **25.** $x + y - z = -1$

27. $2x - y + 3z = 0$ **29.** $3x - 7z = -9$

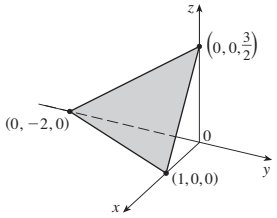
31. $x + y + z = 2$ **33.** $-13x + 17y + 7z = -42$

35. $33x + 10y + 4z = 190$ **37.** $x - 2y + 4z = -1$

39.



41.



43. $(1,0,0)$ **45.** $(2,3,1)$ **47.** $1, 0, -1$

49. Perpendiculares **51.** Nenhum dos dois, $\approx 70{,}5^\circ$

53. Paralelos

55. (a) $x = 1, y = -t, z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15{,}8^\circ$

57. $x = 1, y - 2 = -z$

59. $x + 2y + z = 5$ **61.** $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$

63. $x = 3t, y = 1 - t, z = 2 - 2t$

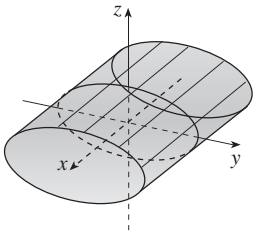
65. P_1 e P_3 são paralelos, P_2 e P_4 são idênticos

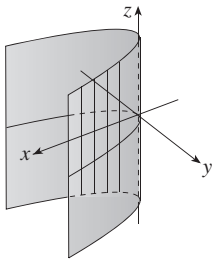
67. $\sqrt{61/14}$ **69.** $\frac{18}{7}$ **71.** $5/(2\sqrt{14})$ **75.** $1/\sqrt{6}$

EXERCÍCIOS 12.6 ■ PÁGINA 771

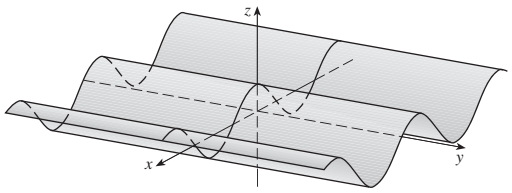
1. (a) Parábola
(b) Cilindro parabólico com geratriz paralela ao eixo z
(c) Cilindro parabólico com a geratriz paralela ao eixo x

3. Cilindro elíptico **5.** Cilindro parabólico



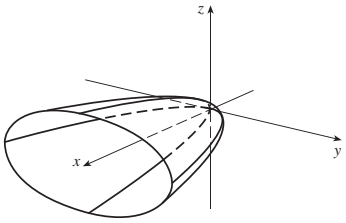


7. Superfície cilíndrica

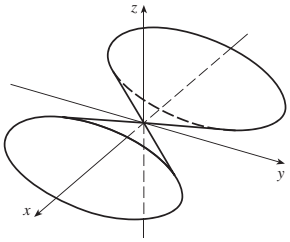


9. (a) $x = k, y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole $(k \neq \pm 1)$;
$y = k, x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole $(k \neq \pm 1)$;
$z = k, x^2 + z^2 = 1 + k^2$, círculo
(b) O hiperboloide é girado de modo que ele tenha eixo no eixo y
(c) O hiperboloide é transladado uma unidade na direção do eixo y negativo

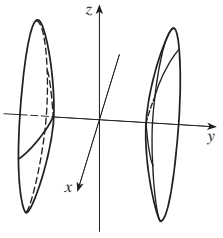
11. Paraboloide elíptico com eixo no eixo x



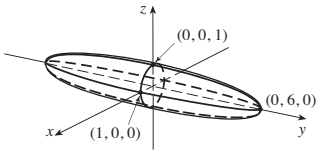
13. Cone elíptico com eixo no eixo x



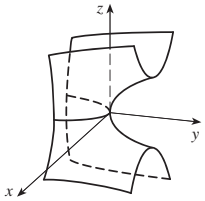
15. Hiperboloide de duas folhas



17. Elipsoide



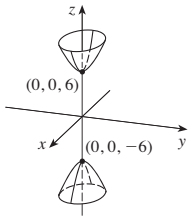
19. Paraboloide hiperbolico



21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

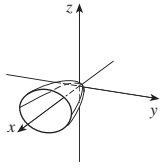
29. $-\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$

Hiperboloide de duas folhas com eixo no eixo z



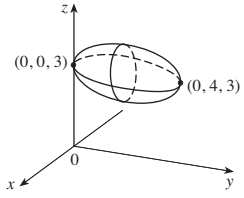
31. $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{2}$

Paraboloide elíptico com vértice $(0, 0, 0)$ e eixo no eixo x



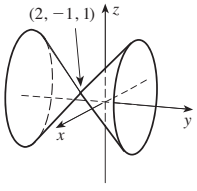
33. $x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} + (z-3)^2 = 1$

Elipsoide com centro $(0, 2, 3)$

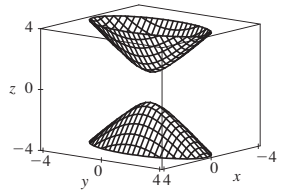


35. $(y+1)^2 = (x-2)^2 + (z-1)^2$

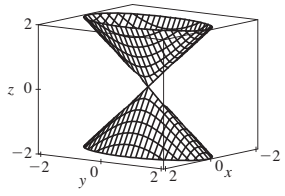
Cone circular com vértice $(2, -1, 1)$ e eixo paralelo ao eixo y



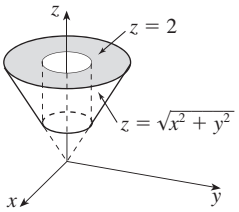
37.



39.



41.

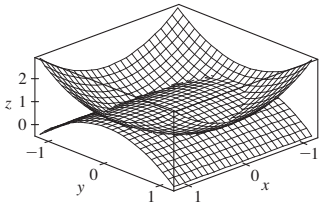


43. $y = x^2 + z^2$ **45.** $-4x = y^2 + z^2$, paraboloide

47. (a) $\dfrac{x^2}{(6\,378{,}137)^2} + \dfrac{y^2}{(6\,378{,}137)^2} + \dfrac{z^2}{(6\,356{,}523)^2} = 1$

(b) Círculo (c) Elipse

51.



CAPÍTULO 12 REVISÃO ■ PÁGINA 773

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro
9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Falso **15.** Falso
17. Verdadeiro

Exercícios

1. (a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 69$
(b) $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 68, x = 0$
(c) Centro $(4, -1, -3)$, raio 5

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$; para fora da página

5. $-2, -4$ **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4\rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. 166 N, 114 N

15. $x = 4 - 3t, y = -1 + 2t, z = 2 + 3t$

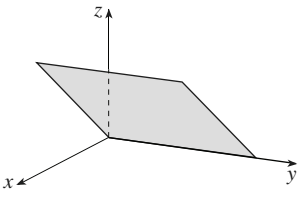
17. $x = -2 + 2t, y = 2 - t, z = 4 + 5t$

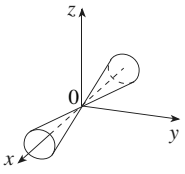
19. $-4x + 3y + z = -14$ **21.** $(1, 4, 4)$

23. Reversas **25.** $x + y + z = 4$

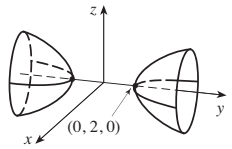
27. $22/\sqrt{26}$

29. Plano **31.** Cone

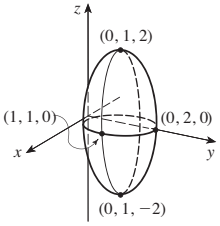




33. Hiperboloide de duas folhas



35. Elipsoide



37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 776

1. $(\sqrt{3} - 1, 5)$ m

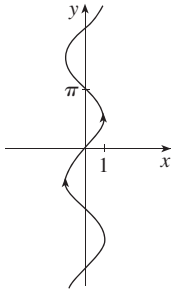
3. (a) $(x + 1)/(-2c) = (y - c)/(c^2 - 1) = (z - c)/(c^2 + 1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1, z = t$ (c) $4\pi/3$

CAPÍTULO 13

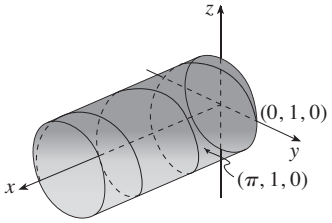
EXERCÍCIOS 13.1 ■ PÁGINA 784

1. $[1, 5]$ **3.** $\langle 1, 0, 0 \rangle$ **5.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

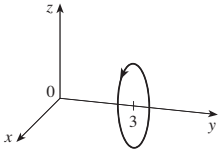
7.



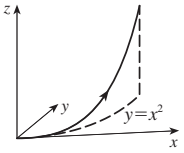
9.



11.



13.

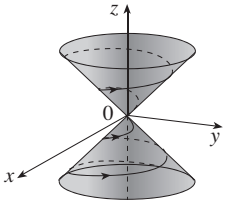


15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1; x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 3t + 1, 2t - 1, 5t + 2 \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1;$
$x = 3t + 1, y = 2t - 1, z = 5t + 2, 0 \leqslant t \leqslant 1$

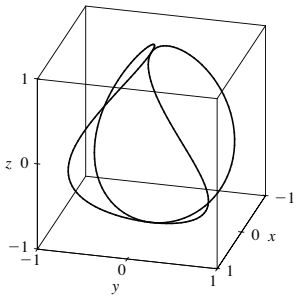
19. VI **21.** IV **23.** V

25.

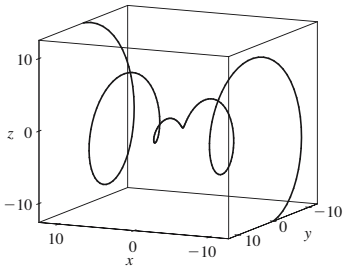


27. $(0, 0, 0), (1, 0, 1)$

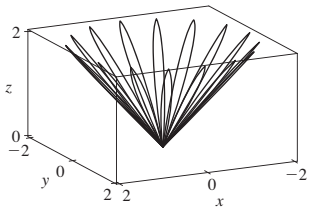
29.



31.



33.

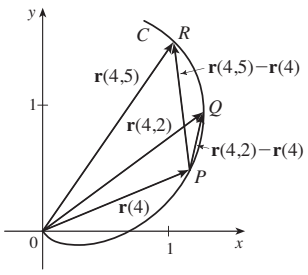


37. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

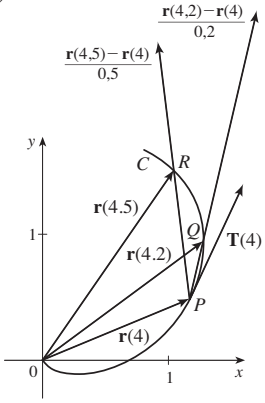
39. $x = 2\cos t, y = 2\,\text{sen}\,t, z = 4\cos^2 t$ **41.** Sim

EXERCÍCIOS 13.2 ■ PÁGINA 789

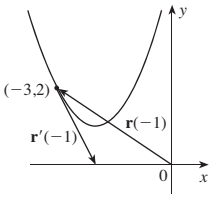
1. (a)



(b), (d)

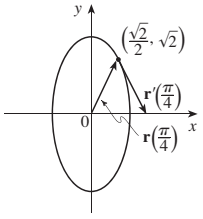


(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. 

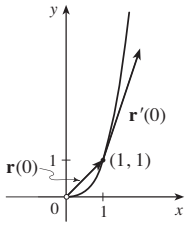
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t\rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = e^t\,\mathbf{i} + 3e^{3t}\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \operatorname{sen} t, 2t, \cos 2t - 2t \operatorname{sen} 2t\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$ **13.** $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\,\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ **17.** $\langle 15/\sqrt{262}, 6/\sqrt{262}, 1/\sqrt{262}\rangle$

19. $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle, \langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}\rangle, \langle 0, 2, 6t\rangle, \langle 6t^2, -6t, 2\rangle$

23. $x = 1 + 5t, y = 1 + 4t, z = 1 + 3t$

25. $x = 1 - t, y = t, z = 1 - t$

27. $x = t, y = 1 - t, z = 2t$

29. $x = -\pi - t, y = \pi + t, z = -\pi t$

31. 66° **33.** $4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$ **35.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $e^t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + (t\ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

39. $t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k}$

45. $2t\cos t + 2 \operatorname{sen} t - 2\cos t \operatorname{sen} t$

EXERCÍCIOS 13.3 ■ PÁGINA 797

1. $20\sqrt{29}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15 3841

9. 1 2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3 \operatorname{sen} 1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle (2/\sqrt{29})\cos t, 5/\sqrt{29}, (2/\sqrt{29}) \operatorname{sen} t\rangle$, $\langle -\operatorname{sen} t, 0, -\cos t\rangle$ (b) $\frac{2}{29}$

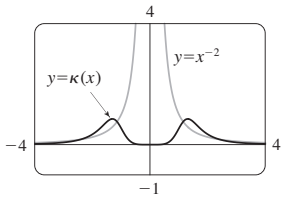
19. (a) $\langle t^2, 2t, 2\rangle/(t^2+2), \langle 2t, 2-t^2, -2t\rangle/(t^2+2)$ (b) $2/(t^2+2)^2$

21. $2/(4t^2+1)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

27. $2/(4x^2 - 8 + 5)^{3/2}$ **29.** $15\sqrt{x}/(1 + 100x^3)^{3/2}$

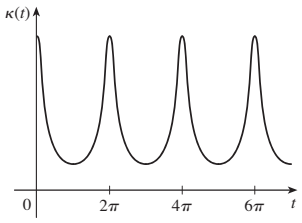
31. $(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2})$; tende a 0 **33.** (a) P (b) 1,3, 0,7

35.



37. a é $y = f(x)$, b é $y = \kappa(x)$

39. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$

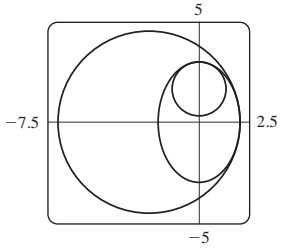


múltiplos inteiros de 2π

41. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **43.** $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\rangle, \langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\rangle, \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$

45. $y = 6x + \pi, x + 6y = 6\pi$

47. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y = \frac{81}{4}, x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



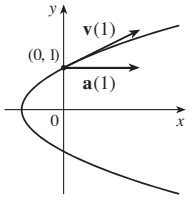
49. $(-1, -3, 1)$ **57.** $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$

59. $2{,}07 \times 10^{10}$ Å ≈ 2 m

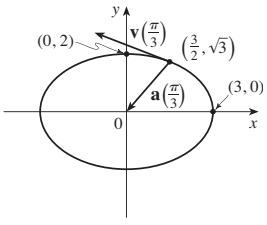
EXERCÍCIOS 13.4 ■ PÁGINA 805

1. (a) $1{,}8\mathbf{i} - 3{,}8\,\mathbf{j} - 0{,}7\mathbf{k}, 2{,}0\mathbf{i} - 2{,}4\,\mathbf{j} - 0{,}6\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 1{,}8\mathbf{j} - 0{,}3\,\mathbf{k}, 2{,}8\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}4\,\mathbf{k}$
(b) $2{,}4\,\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}5\,\mathbf{k}, 2{,}58$

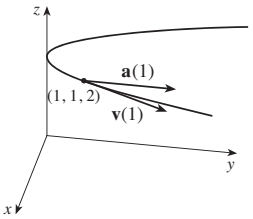
3. $\mathbf{v}(t) = \langle 2t, 1\rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle 2, 0\rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + 1}$



5. $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3\cos t\,\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$



7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$



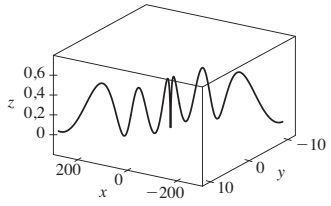
9. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle, \langle 0, 2, 6t\rangle, \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

11. $\sqrt{2}\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}, e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, e^t + e^{-t}$

13. $e^t[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\,\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$,
$e^t[-2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}], e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$

15. $\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

17. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t - \operatorname{sen} t + 1)\,\mathbf{j} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\right)\mathbf{k}$
(b)



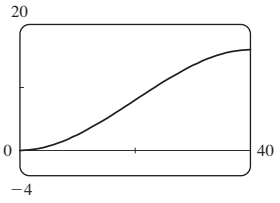
19. $t = 4$ **21.** $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + \frac{5}{2}t^2\mathbf{k}, |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$

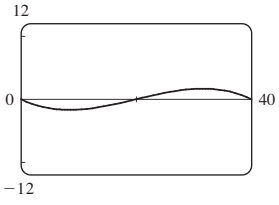
23. (a) ≈ 22 km (b) ≈ 3,2 km (c) 500 m/s

25. 30 m/s **27.** ≈ 10,2, ≈ 79,8

29. $13{,}0^\circ < \theta < 36{,}0^\circ, 55{,}4^\circ < \theta < 85{,}5^\circ$

31. (a) 16 m (b) ≈ 23,6° rio acima





33. $6t, 6$ **35.** $0, 1$ **37.** $e^t - e^{-t}, \sqrt{2}$

39. 4,5 cm/s², 9,0 cm/s² **41.** $t = 1$

CAPÍTULO 13 REVISÃO ■ PÁGINA 809

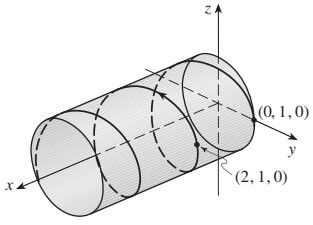
Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso

7. Verdadeiro **9.** Falso **11.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi\operatorname{sen}\pi t\,\mathbf{j} + \pi\cos\pi t\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2\cos\pi t\,\mathbf{j} - \pi^2\operatorname{sen}\pi t\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (5 - 4\cos t)\mathbf{k}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - (2/\pi^2)\,\mathbf{j} + (2/\pi)\,\mathbf{k}$ **7.** 86,631 **9.** $\pi/2$

11. (a) $\langle t^2, t, 1\rangle/\sqrt{t^4 + t^2 + 1}$
(b) $\langle 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t\rangle/\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}$
(c) $\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}/(t^4 + t^2 + 1)^2$

13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$

17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\,\mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2\ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}, \mathbf{a}(t) = (1/t)\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

19. (a) Cerca de 0,8 m acima do solo, 18,4 m do atleta
(b) ≈ 6,3 m (c) ≈19,1 m do atleta

21. (c) $-2e^{-t}\mathbf{v}_d + e^{-t}\mathbf{R}$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 812

1. (a) $\mathbf{v} = \omega R(-\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \cos\omega t\,\mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = \omega^2\mathbf{r}$

3. (a) 90°, $v_0^2/(2g)$

5. (a) ≈ 0,25 m para a direita do lado da mesa, ≈ 4,9 m/s
(b) ≈ 5,9° (c) ≈ 0,56 m para a direita do lado da mesa

7. 56°

CAPÍTULO 14

EXERCÍCIOS 14.1 ■ PÁGINA 825

1. (a) −27; uma temperatura de −15 °C com vento soprando a 40 km/h dá uma sensação equivalente a cerca de −27 °C sem vento.
(b) Quando a temperatura é −20 °C, qual velocidade do vento dá uma sensação térmica de −30 °C? 20 km/h
(c) Com uma velocidade do vento de 20 km/h, qual temperatura dá uma sensação térmica de −49 °C? −35 °C
(d) Uma função da velocidade do vento que dá os valores da sensação térmica quando a temperatura é −5 °C
(e) Uma função da temperatura que dá os valores da sensação térmica quando a velocidade do vento é 50 km/h

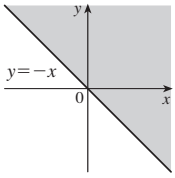
3. Sim

5. (a) 7,7; um vento de 80 km/h soprando em mar aberto por 15 h criará ondas de cerca de 7,7 m de altura.
(b) $f(60, t)$ é uma função de t que dá a altura das ondas produzidas por ventos de 60 km/h soprando por t horas.
(c) $f(v, 30)$ é uma função de v que dá a altura das ondas produzidas por ventos de velocidade v soprando por 30 horas.

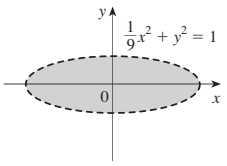
7. (a) 4 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[0, \infty)$

9. (a) e (b) $\{(x, y, z) \mid z \geqslant x^2 + y^2\}$ (c) $[1, \infty)$

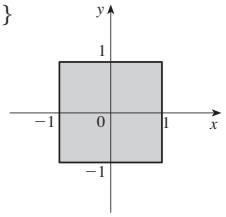
11. $\{(x, y) \mid y \geqslant -x\}$



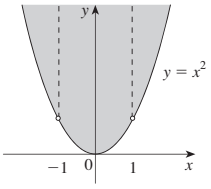
13. $\{(x, y) | \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



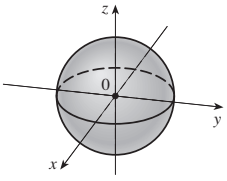
15. $\{(x, y) | -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$



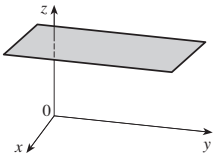
17. $\{(x, y) | y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



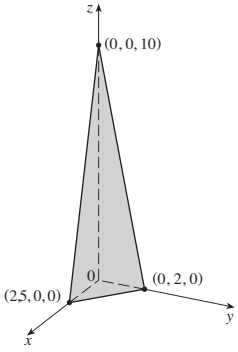
19. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$



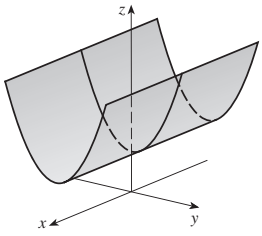
21. $z = 3$, plano horizontal



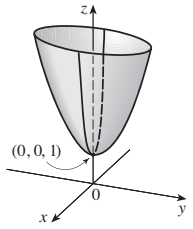
23. $4x + 5y + z = 10$, plano



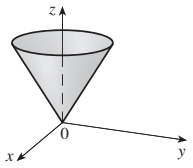
25. $z = y^2 + 1$, cilindro parabólico



27. $z = 4x^2 + y^2 + 1$
paraboloide elíptico



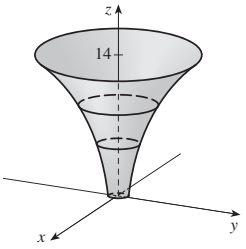
29. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
metade de cima do cone



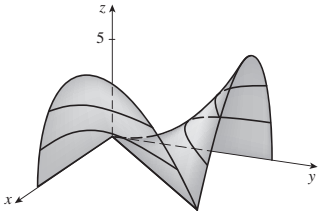
31. ≈56, ≈35

33. Íngreme; quase plano

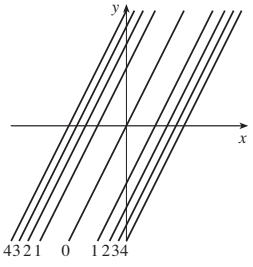
35.



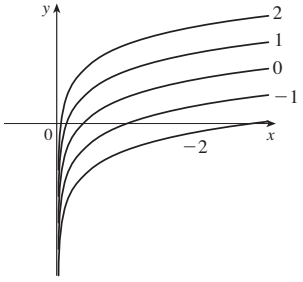
37.



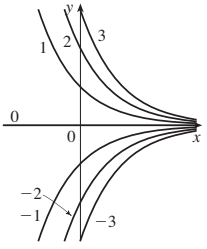
39. $(y - 2x)^2 = k$



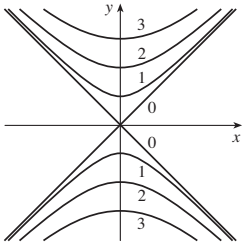
41. $y = \ln x + k$



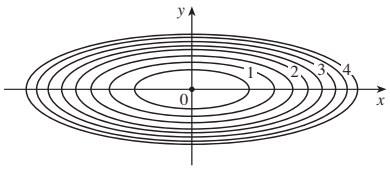
43. $y = ke^{-x}$

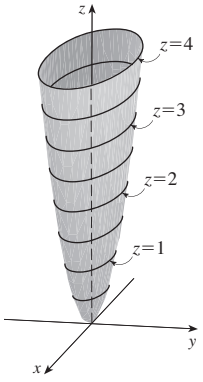


45. $y^2 - x^2 = k^2$

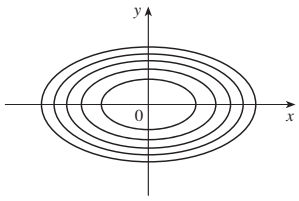


47. $x^2 + 9y^2 = k$

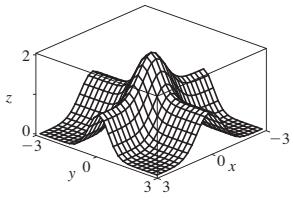




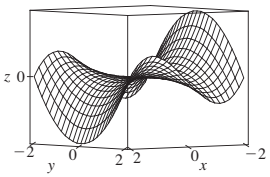
49.



51.



53.



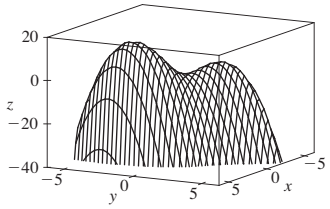
55. (a) C (b) II **57.** (a) F (b) I **59.** (a) B (b) VI

61. Família de planos paralelos

63. Família de hiperboloides de uma ou duas folhas com eixo no eixo y

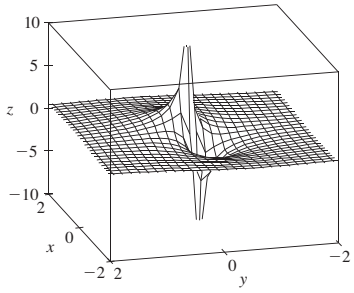
65. (a) Translada o gráfico de f duas unidades para cima
(b) Amplia o gráfico de f verticalmente por um fator 2
(c) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy
(d) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy e a seguir translada-o 2 unidades para cima

67.



f parece ter um valor máximo de cerca de 15. Existem dois pontos de máximo locais, mas nenhum ponto de mínimo local.

69.



Os valores da função tendem a 0 quando x, y se torna grande; quando (x, y) se aproxima da origem, f tende a $\pm\infty$ ou 0, dependendo da direção de aproximação.

71. Se $c = 0$, o gráfico é uma superfície cilíndrica. Para $c > 0$, as curvas de nível são elipses. O gráfico se curva para cima à medida que nos afastamos da origem e a inclinação aumenta quando c aumenta. Para $c < 0$, as curvas de nível são hipérboles. O gráfico se curva para cima na direção y e para baixo, tendendo ao plano xy, na direção x produzindo uma aparência de sela próximo a $(0, 0, 1)$.

73. $c = -2, 0, 2$ **75.** (b) $y = 0{,}75x + 0{,}01$

EXERCÍCIOS 14.2 ■ PÁGINA 835

1. Nada; se f for contínua, $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$

5. 2 025 **7.** $\frac{2}{7}$ **9.** Não existe **11.** Não existe

13. 0 **15.** Não existe **17.** 2 **19.** 1

21. Não existe

23. O gráfico mostra que a função tende a números diferentes ao longo de retas diferentes.

25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$;
$\{(x, y) \mid 2x + 3y \geq 6\}$

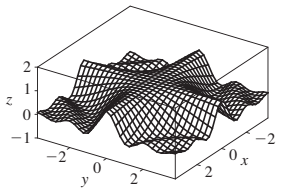
27. Ao longo da reta $y = x$ **29.** $\{(x, y) \mid y \neq x^2\}$

31. $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$ **33.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

35. $\{(x, y, z) \mid y \geq 0, y \neq \sqrt{x^2 + z^2}\}$

37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** -1

43.



f é contínua em $\mathbb{R}^2$

EXERCÍCIOS 14.3 ■ PÁGINA 845

1. (a) A taxa de variação da temperatura quando a longitude varia, com a latitude e o tempo fixados; a taxa de variação quando apenas a latitude varia; a taxa de variação quando apenas o tempo varia.
(b) Positiva, negativa, positiva

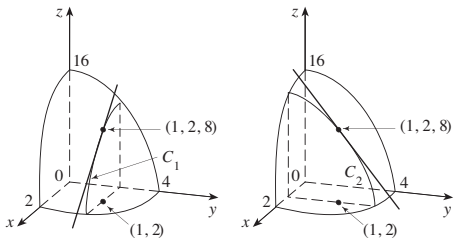
3. (a) $f_T(-15, 30) \approx 1{,}3$; para uma temperatura de -15 °C e velocidade do vento de 30 km/h, o índice de sensação térmica aumenta de 1,3 °C para cada grau que a temperatura aumenta. $f_v(-15, 30) \approx -0{,}15$; para uma temperatura de -15 °C e velocidade do vento de 30 km/h, o índice de sensação térmica diminui de 0,15 °C para cada km/h de aumento na velocidade do vento.
(b) Positiva, negativa (c) 0

5. (a) Positivo (b) Negativo

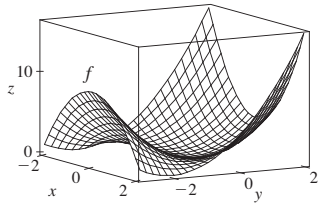
7. (a) Positivo (b) Negativo

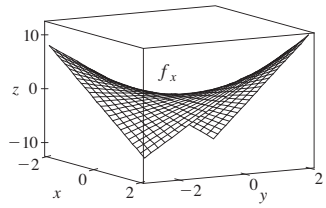
9. $c = f, b = f_x, a = f_y$

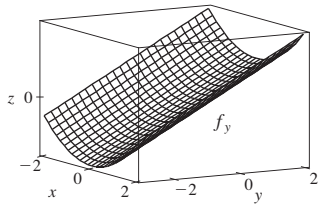
11. $f_x(1, 2) = -8 =$ inclinação de C_1, $f_y(1, 2) = -4 =$ inclinação de C_2



13. $f_x = 2x + 2xy, f_y = 2y + x^2$







15. $f_x(x, y) = 3, f_y(x, y) = 8y^3$

17. $\partial z/\partial x = e^{3y}, \partial z/\partial y = 3xe^{3y}$

19. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9, \partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$

21. $f_x(x, y) = 2y/(x + y)^2, f_y(x, y) = -2x/(x + y)^2$

23. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta, \partial w/\partial \beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

25. $f_r(r, s) = \dfrac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2), f_s(r, s) = \dfrac{2rs}{r^2 + s^2}$

27. $\partial u/\partial t = e^{w/t}(1 - w/t), \partial u/\partial w = e^{w/t}$

29. $f_x = z - 10xy^3z^4, f_y = -15x^2y^2z^4, f_z = x - 20x^2y^3z^3$

31. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z), \partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z),$
$\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$

33. $\partial u/\partial x = y \operatorname{sen}^{-1}(yz), \partial u/\partial y = x \operatorname{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2},$
$\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$

35. $f_x = yz^2 \operatorname{tg}(yt), f_y = xyz^2t \sec^2(yt) + xz^2 \operatorname{tg}(yt),$
$f_z = 2xyz \operatorname{tg}(yt), f_t = xy^2z^2 \sec^2(yt)$

37. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

39. $\frac{1}{5}$ **41.** $\frac{1}{4}$

43. $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y, f_y(x, y) = 2xy - x^3$

45. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{1 + y + y^2z^2}$

49. (a) $f'(x), g'(y)$ (b) $f'(x + y), f'(x + y)$

51. $f_{xx} = 6xy^5 + 24x^2y, f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}, f_{yy} = 20x^3y^3$

53. $w_{uu} = v^2/(u^2 + v^2)^{3/2}, w_{uv} = -uv/(u^2 + v^2)^{3/2} = w_{vu},$
$w_{vv} = u^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$

55. $z_{xx} = -2x/(1 + x^2)^2, z_{xy} = 0 = z_{yx}, z_{yy} = -2y/(1 + y^2)^2$

61. $12xy, 72xy$

63. $24 \operatorname{sen}(4x + 3y + 2z), 12 \operatorname{sen}(4x + 3y + 2z)$

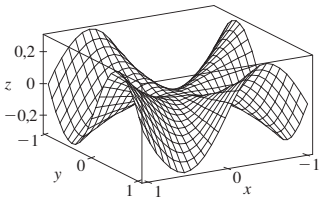
65. $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen} \theta + \theta \cos \theta + r\theta \operatorname{sen} \theta)$ **67.** $4/(y + 2z)^3, 0$

69. $\approx 12{,}2, \approx 16{,}8, \approx 23{,}25$ **81.** R^2/R_1^2

87. Não **89.** $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$

93. 2

95. (a)



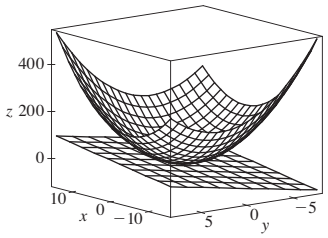
(b) $f_x(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, f_y(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

(c) 0, 0 (e) Não, já que f_{xy} e f_{yx} não são contínuas.

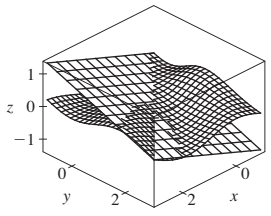
EXERCÍCIOS 14.4 ■ PÁGINA 855

1. $z = 8x - 2y$ **3.** $x + y - 2z = 0$ **5.** $z = y$

7.



9.



11. $2x + \frac{1}{4}y - 1$ **13.** $\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{3}$ **15.** $1 - \pi y$

19. $-\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{20}{3}$; 2,846 **21.** $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$; 6,9914

23. $2T + 0{,}3H - 40{,}5$; 44,4°C

25. $dz = 3x^2 \ln(y^2)dx + (2x^3/y)dy$

27. $dm = 5p^4q^3dp + 3p^5q^2dq$

29. $dR = \beta^2 \cos \gamma \, d\alpha + 2\alpha\beta \cos \gamma d\beta - \alpha\beta^2 \operatorname{sen} \gamma \, d\gamma$

31. $\Delta z = 0{,}9225, dz = 0{,}9$ **33.** 5,4 cm^2 **35.** 16 cm^3

37. 7,2 m^2 **39.** $\frac{1}{17} \approx 0{,}059$ **41.** 2,3%

43. $\varepsilon_1 = \Delta x, \varepsilon_2 = \Delta y$

EXERCÍCIOS 14.5 ■ PÁGINA 863

1. $4(2xy + y^2)t^3 - 3(x^2\ 2xy)t^2$

3. $\pi \cos x \cos y - (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)/(2\sqrt{t})$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \operatorname{sen} t,$
$\partial z/\partial t = -2sxy^3 \operatorname{sen} t + 3sx^2y^2 \cos t$

9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos\theta \cos\phi - 2st \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$,
$\partial z/\partial t = 2st \cos\theta \cos\phi - s^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t},$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x},$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

21. 85, 178, 54 **23.** $\frac{9}{7}$, $\frac{9}{7}$ **25.** 36, 24, 30

27. $\dfrac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$ **29.** $\dfrac{\operatorname{sen}(x-y) + e^y}{\operatorname{sen}(x-y) - xe^y}$

31. $\dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$, z

33. $\dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, -\dfrac{z}{1 + y + y^2z^2}$

35. 2°C/s **37.** ≈ 0,33 m/s por minuto

39. (a) 6 m³/s (b) 10 m²/s (c) 0 m/s

41. ≈ 0,27 L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\operatorname{sen}\theta$,
$\partial z/\partial\theta = -(\partial z/\partial x)r\operatorname{sen}\theta + (\partial z/\partial y)r\cos\theta$

51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$

EXERCÍCIOS 14.6 ■ PÁGINA 874

1. ≈ 0,008 hPa/km **3.** ≈ 0,778 **5.** $2 + \sqrt{3}/2$

7. (a) $\nabla f(x,y) = \langle 5y^2 - 12x^2y, 10xy - 4x^3\rangle$ (b) $\langle -4, 16\rangle$
(c) 172/13

9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$

11. 23/10 **13.** $-8/\sqrt{10}$ **15.** $4/\sqrt{30}$ **17.** $9/(2\sqrt{5})$

19. 2/5 **21.** $4\sqrt{2}, \langle -1, 1\rangle$ **23.** $1, \langle 0, 1\rangle$

25. $1, \langle 3, 6, -2\rangle$ **27.** (b) $\langle -12, 92\rangle$

29. Todos os pontos na reta $y = x + 1$ **31.** (a) $40/(3\sqrt{3})$

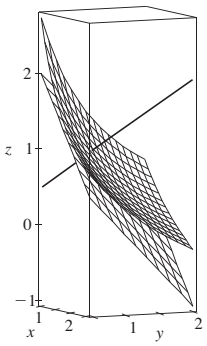
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$ **35.** $\frac{327}{13}$

39. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$

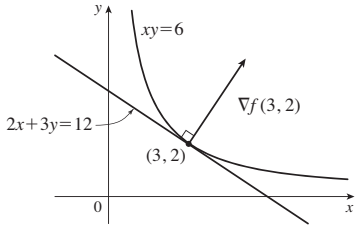
41. (a) $4x - 5y - z = 4$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+1}{-1}$

43. (a) $x + y - z = 1$ (b) $x - 1 = y = -z$

45.



47. $\langle 2, 3\rangle, 2x + 3y = 12$



53. Não **59.** $x = -1 - 10t, y = 1 - 16t, z = 2 - 12t$

63. Se $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, então $af_x + bf_y$ e $cf_x + df_y$ são conhecidos, de modo que podemos resolver as equações lineares para f_x e f_y.

EXERCÍCIOS 14.7 ■ PÁGINA 884

1. (a) f tem um mínimo local em (1, 1).
(b) f tem um ponto de sela em (1, 1).

3. Mínimo local em (1, 1), ponto de sela em (0, 0)

5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$

7. Mínimo $f(0,0) = 4$, pontos de sela em $(\pm\sqrt{2}, -1)$

9. Ponto de sela em (1, 2)

11. Mínimo $f(2, 1) = -8$, ponto de sela em (0, 0)

13. Nenhum **15.** Mínimo $f(0,0) = 0$, ponto de sela em $(\pm 1, 0)$

17. Mínimo $f(0,1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, ponto de sela em $(\pi/2, 0), (3\pi/2, 0)$

21. Mínimos $f(1, \pm 1) = 3, f(-1, \pm 1) = 3$

23. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, ponto de sela em (π, π)

25. Mínimos $f(-1{,}714, 0) \approx -9{,}200, f(1{,}402, 0) \approx 0{,}242$,
ponto de sela (0,312, 0), ponto mais baixo
(−1,714, 0, −9,200)

27. Máximos $f(-1{,}267, 0) \approx 1{,}310, f(1{,}629, \pm 1{,}063) \approx 8{,}105$,
pontos de sela em (−0,259, 0), (1,526, 0),
pontos mais altos (1,629, ±1,063, 8,105)

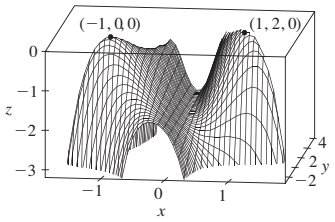
29. Máximo $f(2, 0) = 9$, mínimo $f(0, 3) = -14$

31. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0,0) = 4$

33. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$

35. Máximo $f(1, 0) = 2$, mínimo $f(-1, 0) = -2$

37.



39. $\sqrt{3}$ **41.** $(2, 1, \sqrt{5}), (2, 1, -\sqrt{5})$ **43.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$

45. $8r^3/(3\sqrt{3})$ **47.** $\frac{4}{3}$ **49.** Cubo, comprimento da aresta $c/12$

51. Base quadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **53.** $L^3/(3\sqrt{3})$

EXERCÍCIOS 14.8 ■ PÁGINA 893

1. $\approx 59, 30$

3. Nenhum máximo, mínimos $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

5. Máximos $f(\pm 2, 1) = 4$, mínimos $f(\pm 2, -1) = -4$

7. Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$

9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$

11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1

13. Máximo $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$, mínimo $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2$

15. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$

17. Máximo $\frac{3}{2}$, mínimo $\frac{1}{2}$

19. Máximos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$,
mínimos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$

27-37. Veja os Exercícios 39-49 na Seção 14.7.

39. $L^3/(3\sqrt{3})$

41. Mais próximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, mais longe $(-1, -1, 2)$

43. Máximo $\approx 9{,}7938$, mínimo $\approx -5{,}3506$

45. (a) c/n (b) Quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

CAPÍTULO 14 REVISÃO ■ PÁGINA 897

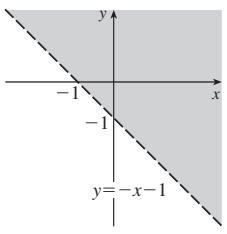
Testes Verdadeiro-Falso

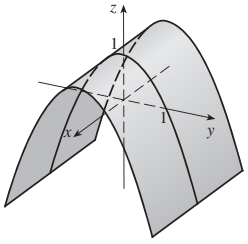
1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso
7. Verdadeiro **9.** Falso **11.** Verdadeiro

Exercícios

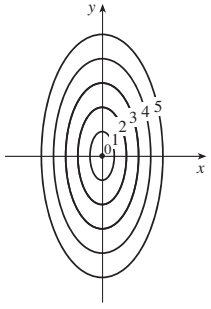
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$

3.

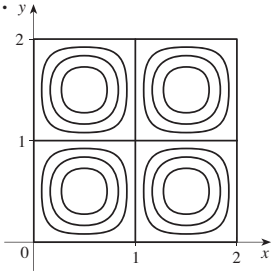




5.



7.



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) $\approx 3{,}5$°C/m, $-3{,}0$°C/m
(b) $\approx 0{,}35$°C/m pela Equação 14.6.9 (a Definição 14.6.2 dá $\approx 1{,}1$°C/m.) (c) $-0{,}25$

13. $f_x = 1/\sqrt{2x + y^2}, f_y = y/\sqrt{2x + y^2}$

15. $g_u = \text{tg}^{-1} v, g_v = u/(1 + v^2)$

17. $T_p = \ln(q + e^r), T_q = p/(q + e^r), T_r = pe^r/(q + e^r)$

19. $f_{xx} = 24x, f_{xy} = -2y = f_{yx}, f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^l z^m, f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^l z^{m-1} = f_{zx}, f_{yy} = l(l-1)x^k y^{l-2} z^m$,
$f_{yz} = lmx^k y^{l-1} z^{m-1} = f_{zy}, f_{zz} = m(m-1)x^k y^l z^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{4} = 1 - z$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$

29. (a) $4x - y - 2z = 6$
(b) $x = 3 + 8t, y = 4 - 2t, z = 1 - 4t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1), (-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38,656

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p \cos p + \text{sen } p)$

37. $-47, 108$ **43.** $ze^{x\sqrt{y}}\langle z\sqrt{y}, xz/(2\sqrt{y}), 2\rangle$ **45.** $\frac{43}{5}$

47. $\sqrt{145}/2, \langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nós/mi

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; pontos de sela $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimo $f(1, \pm 1) = -3$, pontos de sela $(-1, \pm 1), (1, 0)$

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$,
mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4}), (\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3}), P(3 - \sqrt{3})/6, P(2\sqrt{3} - 3)/3$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 902

1. $L^2W^2, \frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sim

7. $\sqrt{6}/2, 3\sqrt{2}/2$

CAPÍTULO 15

EXERCÍCIOS 15.1 ■ PÁGINA 912

1. (a) 288 (b) 144

3. (a) $\pi^2/2 \approx 4{,}935$ (b) 0

5. (a) -6 (b) 3,5

7. $U < V < L$

9. (a) ≈ 248 (b) 15,5

11. 60 **13.** 3

15. 1,141606, 1,143191, 1,143535, 1,143617, 1,143637, 1,143642

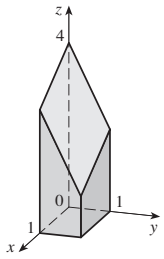
EXERCÍCIOS 15.2 ■ PÁGINA 917

1. $500y^3, 3x^2$ **3.** 10 **5.** 1 **7.** 261,632/45 **9.** $\frac{21}{2}\ln 2$

11. 0 **13.** π **15.** $\frac{21}{2}$ **17.** $9 \ln 2$

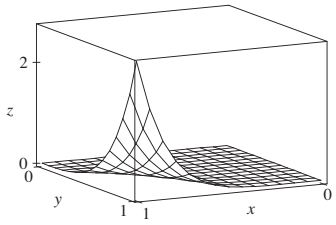
19. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}(e^2 - 3)$

23.



25. 47,5 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

33. $21e - 57$



35. $\frac{5}{6}$

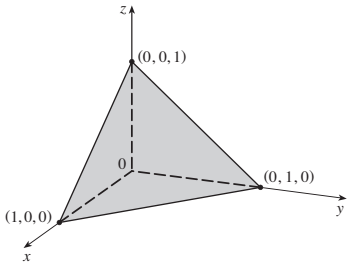
37. O Teorema de Fubini não se aplica. O integrando tem uma descontinuidade infinita na origem.

EXERCÍCIOS 15.3 ■ PÁGINA 924

1. $\frac{9}{20}$ **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{256}{21}$ **9.** π **11.** $\frac{1}{2}e^{16} - \frac{17}{2}$

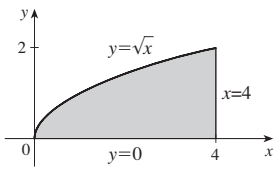
13. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **15.** $\frac{147}{20}$ **17.** 0 **19.** $\frac{6}{35}$ **21.** $\frac{31}{8}$

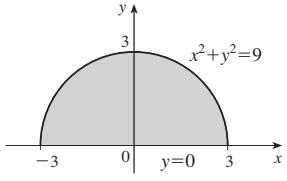
33.



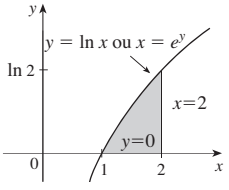
35. 13 984 735 616/14 549 535 **37.** $\pi/2$

39. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y)\, dx\, dy$ **41.** $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$





43. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 x^2 f(x, y)\, dx\, dy$



45. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **47.** $\frac{1}{3}\ln 9$ **49.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **51.** 1

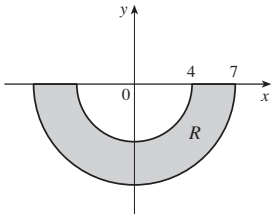
53. $(\pi/16)e^{-1/16} \leq \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA \leq \pi/16$ **55.** $\frac{3}{4}$

59. 8π **61.** $2\pi/3$

EXERCÍCIOS 15.4 ■ PÁGINA 930

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r\cos\theta) r\, dr\, d\theta$ **3.** $\int_{-1}^1 \int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\, dy\, dx$

5.



$33\pi/2$

7. 0 **9.** $\frac{1}{2}\pi$ sen 9 **11.** $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$

15. $\pi/12$ **17.** $\frac{1}{8}(\pi - 2)$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$

23. $\frac{4}{3}\pi a^3$ **25.** $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$

27. $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$

33. $37{,}5\pi\text{m}^3$ **35.** $\frac{15}{16}$ **37.** (a)$\sqrt{\pi}/4$ (b)$\sqrt{\pi}/2$

EXERCÍCIOS 15.5 ■ PÁGINA 939

1. $\frac{64}{3}$ C **3.** $\frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}, 0\right)$ **5.** $6, \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

7. $\frac{1}{4}(e^2 - 1), \left(\frac{e^2 - 1}{2(e^2 - 1)}, \frac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

9. $L/4, (L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $(0, 45/(14\pi))$

15. $(2a/5, 2a/5)$ se o vértice for $(0, 0)$ e os lados estiverem nos eixos positivos

17. $\frac{1}{16}(e^4 - 1), \frac{1}{8}(e^2 - 1), \frac{1}{16}(e^4 + 2e^2 - 3)$

19. $7ka^6/180, 7ka^6/180, 7ka^6/90$ se o vértice for $(0, 0)$ e os lados estiverem nos eixos positivos

21. $m = \pi^2/8$ $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\pi}, \frac{16}{9\pi}\right)$ $I_x = 3\pi^2/64$

$I_y = \frac{1}{16}(\pi^4 - 3\pi^2), I_0 = \pi^4/16 - 9\pi^2/64$

23. $\rho bh^3/3, \rho b^3 h/3; b/\sqrt{3}\ h/\sqrt{3}$

25. $\rho a^4/16, \rho a^4/16; a/2, a/2$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0,375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}1042$

29. (b) (i) $e^{-0,2} \approx 0{,}8187$

(ii) $1 + e^{-1,8} - e^{-0,8} - e^{-1} \approx 0{,}3481$ (c) 2, 5

31. (a) $\approx 0{,}500$ (b) $\approx 0{,}632$

33. (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]\, dA$, onde D é o disco de raio 10 km centrado no centro da cidade

(b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, na periferia

EXERCÍCIOS 15.6 ■ PÁGINA 948

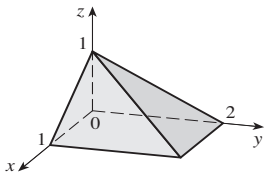
1. $\frac{27}{4}$ **3.** 1 **5.** $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $\frac{65}{28}$

13. $8/(3e)$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. 60,533

27.



29. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

33. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

35. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{y} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{y}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\int_{y}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{z}^{x} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{z}^{x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

37. $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$ **39.** $a, (7a/12, 7a/12, 7a/12)$

41. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$ **43.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

45. (a) $m = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$\bar{x} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} x\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

$\bar{y} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} y\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

$\bar{z} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

(c) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y}(x^2+y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

47. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{28}{9\pi+44}, \frac{30\pi+128}{45\pi+220}, \frac{45\pi+208}{135\pi+660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

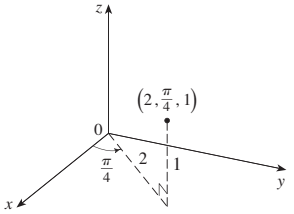
49. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5\,760}$

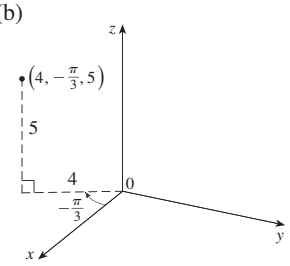
51. $L^3/8$

53. A região limitada pelo elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

EXERCÍCIOS 15.7 ■ PÁGINA 953

1. (a) (b)





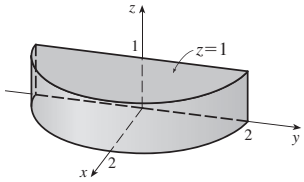
$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ $(2, -2\sqrt{3}, 5)$

3. (a) $(\sqrt{2}, 7\pi/4, 4)$ (b) $(2, 4\pi/3, 2)$

5. Semiplano vertical pelo eixo z **7.** Paraboloide circular

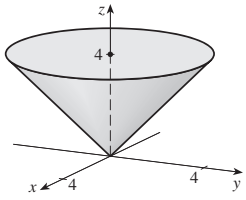
9. (a) $z = r^2$ (b) $r = 2 \operatorname{sen}\theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 20$

15. $64\pi/3$



17. 384π **19.** 0 **21.** $2\pi/5$

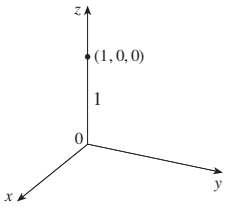
23. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

25. $\pi Ka^2/8, (0, 0, 2a/3)$ **27.** 0

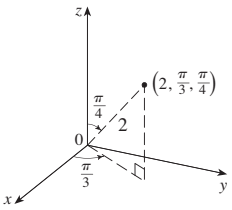
29. (a) $\iiint_C h(P)\,dV$, onde C é o cone (b) $\approx 4{,}4 \times 10^{18}$ J

EXERCÍCIOS 15.8 ■ PÁGINA 959

1. (a) $(0, 0, 1)$



(b) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2}\right)$



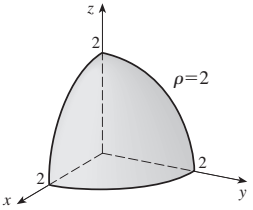
3. (a) $(4, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(\sqrt{2}, 3\pi/2, 3\pi/4)$

5. Semicone

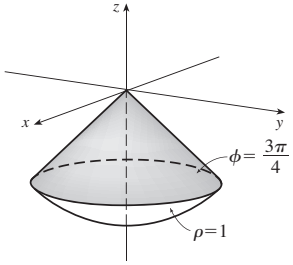
7. Esfera, raio $\frac{1}{2}$, centro $(0, \frac{1}{2}, 0)$

9. (a) $\cos^2\phi = \text{sen}^2\phi$ (b) $\rho^2(\text{sen}^2\phi \cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

11.

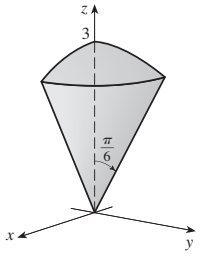


13.



15. $0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos\phi$

17. $(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$



19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

21. $312\,500\pi/7$ **23.** $15\pi/16$ **25.** $1562\pi/15$

27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) (0, 0, 2,1)

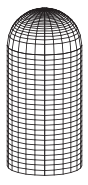
31. $\left(0, \frac{525}{296}, 0\right)$

33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$ (b) $4Kpa^5/15$

35. $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})], (0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$

37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$

41.



43. $136\pi/99$

EXERCÍCIOS 15.9 ■ PÁGINA 968

1. 16 **3.** 0 **5.** $2uvw$

7. O paralelogramo com vértices (0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, −2)

9. A região limitada pela reta $y = 1$, pelo eixo y e por $y = \sqrt{x}$

11. −3 **13.** 6π **15.** 2 ln 3

17. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) $1\,083 \times 10^{12}$ km^3

19. $\frac{8}{5}\ln 8$ **21.** $\frac{3}{2}\,\text{sen}\,1$ **23.** $e - e^{-1}$

CAPÍTULO 15 REVISÃO ■ PÁGINA 969

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Falso

Exercícios

1. ≈ 64,0 **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,1$ **7.** $\frac{2}{3}$

9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

11. A região dentro do laço da rosácea de quatro pétalas $r = \text{sen}\,2\theta$ no primeiro quadrante

13. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,1$ **15.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8

21. $81\pi/5$ **23.** 40,5 **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$

29. 176 **31.** $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$

35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$

(c) $I_x = \frac{1}{12}, Iy = \frac{1}{24}; \bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3}, \bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$

37. $(0, 0, h/4)$

39. 97,2 **41.** 0,0512

43. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$

45. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dxdy\, dz$ **47.** $-\ln 2$ **49.** 0

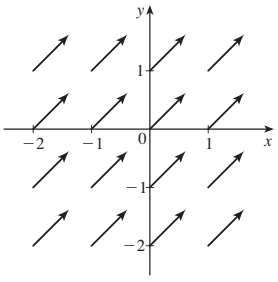
PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 972

1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,1$ **7.** (b) 0,90

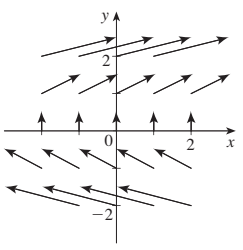
CAPÍTULO 16

EXERCÍCIOS 16.1 ■ PÁGINA 980

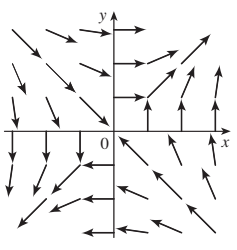
1.



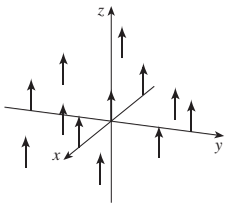
3.

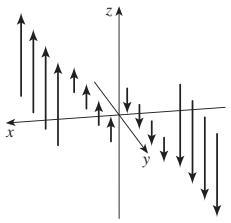


5.



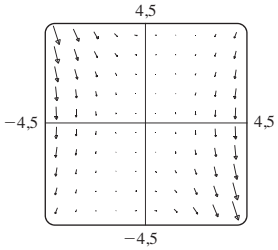
7.





11. II **13.** I **15.** IV **17.** III

19. A reta $y = 2x$

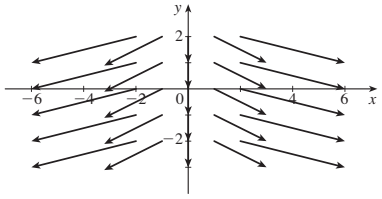


21. $\nabla f(x, y) = \dfrac{1}{x + 2y}\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{x + 2y}\,\mathbf{j}$

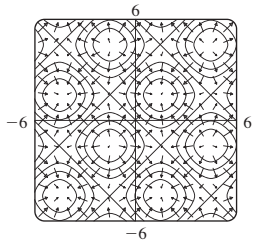
23. $\nabla f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j}$

$+ \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

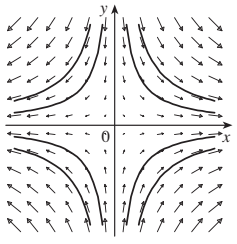


27.



29. III **31.** II **33.** (2,04, 1,03)

35. (b) $y = 1/x, x > 0$



$y = C/x$

EXERCÍCIOS 16.2 ■ PÁGINA 990

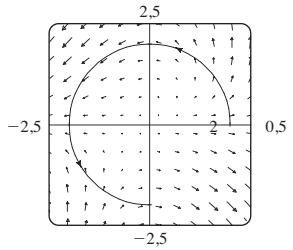
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638,4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{17}{3}$ **9.** 320

11. $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{97}{3}$

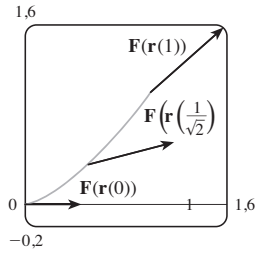
17. (a) Positivo (b) Negativo

19. 45 **21.** $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1,9633 **25.** 15,0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k, (4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, onde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right), I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$

39. $2\pi^2$ **41.** 26 **43.** $1{,}67 \times 10^4$ pés-lb

45. (b) Sim **47.** ≈22 J

EXERCÍCIOS 16.3 ■ PÁGINA 999

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + K$ **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}\,x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$ (b) 0

19. 25 sen 1 − 1 **21.** 30 **23.** Não **25.** Conservativo

29. (a) Sim (b) Sim (c) Sim

31. (a) Sim (b) Sim (c) Não

EXERCÍCIOS 16.4 ■ PÁGINA 1006

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $\frac{4}{3} - 2\pi$

13. $\frac{625}{2}\pi$ **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ se a região for a parte do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante

EXERCÍCIOS 16.5 ■ PÁGINA 1013

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $\mathbf{0}$ (b) 1

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle 1/y, -1/x, 1/x\rangle$ (b) $1/x + 1/y + 1/z$

9. (a) Negativo (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Zero (b) rot $\mathbf{F}$ aponta na direção de z negativo

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + K$

17. Não conservativo **19.** Não

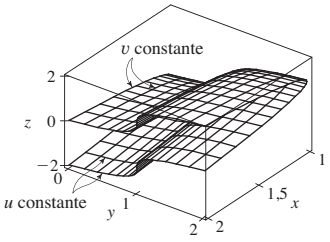
EXERCÍCIOS 16.6 ■ PÁGINA 1023

1. P: não; Q: sim

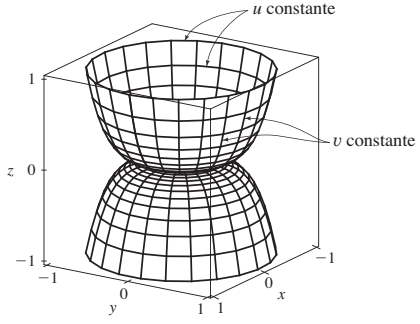
3. Plano por (0, 3, 1) contendo os vetores $\langle 1, 0, 4\rangle, \langle 1, -1, 5\rangle$

5. Cilindro circular com eixo no eixo x

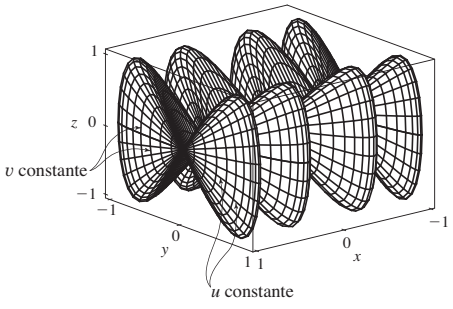
7.



9.



11.



13. IV **15.** II **17.** III

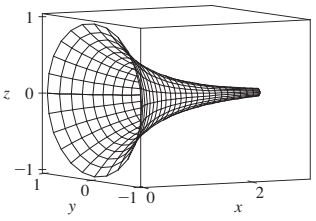
19. $x = 1 + u + v, y = 2 + u - v, z = -3 - u + v$

21. $x = x, z = z, y = \sqrt{1 - x^2 + z^2}$

23. $x = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\theta, y = 2 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,$
$z = 2\cos\phi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$
[ou $x = x, y = y, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leqslant 2$]

25. $x = x, y = e^{-x}\cos\theta, z = 4 \operatorname{sen}\theta, 0 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x, y = e^{-x}\cos\theta,$
$z = e^{-x}\operatorname{sen}\theta, 0 \leqslant x \leqslant 3$
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



31. (a) Inverte o sentido (b) O número de voltas dobra

33. $3x - y + 3z = 3$ **35.** $-x + 2z = 1$ **37.** $3\sqrt{14}$

39. $\frac{4}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$ **41.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

43. $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

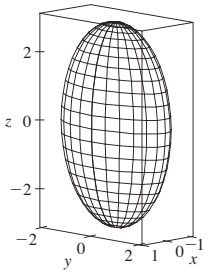
45. $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{17}{4}[\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln\sqrt{17}]$ **47.** 4

49. 13 9783

51. (a) 24 2055 (b) 24 2476

53. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

55. (b)



(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{36\operatorname{sen}^4u\cos^2v + 9\operatorname{sen}^4u\operatorname{sen}^2v + 4\cos^2u\operatorname{sen}^2u}\,du\,dv$

57. 4π **59.** $2a^2(\pi - 2)$

EXERCÍCIOS 16.7 ■ PÁGINA 1034

1. 49,09 **3.** 900π **5.** $171\sqrt{14}$ **7.** $\sqrt{3}/24$

9. $5\sqrt{5}/48 + 1/240$ **11.** $364\sqrt{2}/3\pi$

13. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **15.** 16π **17.** 12

19. $\frac{713}{180}$ **21.** $-\frac{1}{6}$ **23.** 108π **25.** 0 **27.** 48

29. $2\pi + \frac{8}{3}$ **31.** 0,1642 **33.** 3,4895

35. $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D [P(\partial h/\partial x) - Q + R(\partial h/\partial z)]dA$, onde
D = projeção de S no plano xz

37. $(0, 0, a/2)$

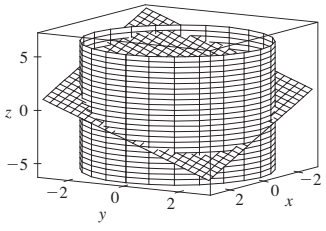
39. (a) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dS$ (b) $4\,329\sqrt{2}/5$

41. 0 kg/s **43.** $\frac{8}{3}\pi a^3\varepsilon_0$ **45.** $1\,248\pi$

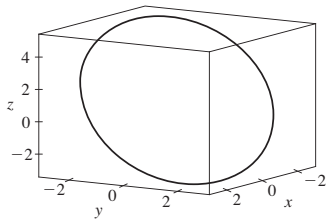
EXERCÍCIOS 16.8 ■ PÁGINA 1039

3. 0 **5.** 0 **7.** 1 **9.** 80π

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$
$z = 1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t)$,
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



17. 3

EXERCÍCIOS 16.9 ■ PÁGINA 1045

5. 2 **7.** $9\pi/2$ **9.** 0 **11.** $32\pi/3$ **13.** 0

15. $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20}\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/3)$ **17.** $13\pi/20$

19. Negativo em P_1, positivo em P_2

21. div $\mathbf{F} > 0$ nos quadrantes I, II; div $\mathbf{F} < 0$ nos quadrantes III, IV

CAPÍTULO 16 REVISÃO ■ PÁGINA 1048

Testes Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a) Negativo (b) Positivo **3.** $6\sqrt{10}$ **5.** $\frac{4}{15}$

7. $\frac{110}{3}$ **9.** $\frac{11}{12} - 4/e$ **11.** $f(x, y) = e^y + xe^{xy}$ **13.** 0

17. -8π **25.** $\frac{1}{6}(27 - 5\sqrt{5})$

27. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **29.** $-64\pi/3$

33. $-\frac{1}{2}$ **37.** -4 **39.** 21

CAPÍTULO 17

EXERCÍCIOS 17.1 ■ PÁGINA 1058

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **3.** $y = c_1\cos(x/2) + c_2\operatorname{sen}(x/2)$

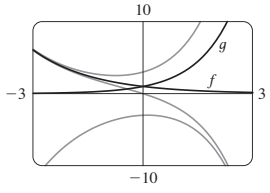
5. $y = c_1e^{2x/3} + c_2xe^{2x/3}$ **7.** $y = c_1 + c_2e^{x/2}$

9. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x)$

11. $y = c_1e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + c_2e^{(\sqrt{3}-1)t/2}$

13. $P = e^{-t}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{10}t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{10}t\right)\right]$

15.



Todas as soluções tendem ou a 0 ou a $\pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$.

17. $y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$ **19.** $y = e^{x/2} - 2xe^{x/2}$

21. $y = 3\cos 4x - \operatorname{sen} 4x$ **23.** $y = e^{-x}(2\cos x + 3\operatorname{sen} x)$

25. $y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **27.** $y = \dfrac{e^{x+3}}{e^3 - 1} + \dfrac{e^{2x}}{1 - e^3}$

29. Nenhuma solução

31. $y = e^{-2x}(2\cos 3x - e^{\pi}\operatorname{sen} 3x)$

33. (b) $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, n um inteiro positivo; $y = C\operatorname{sen}(n\pi x/L)$

EXERCÍCIOS 17.2 ■ PÁGINA 1064

1. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

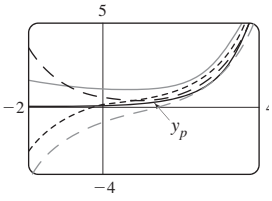
3. $y = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{40}\cos 4x - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 4x$

5. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) + \frac{1}{10}e^{-x}$

7. $y = \frac{3}{2}\cos x + \frac{11}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$

9. $y = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\right)$

11.



As soluções são todas assintóticas a $y_p = e^x/10$ quando $x \to \infty$. Exceto por y_p, todas as soluções tendem a ∞ ou $-\infty$ quando $x \to -\infty$.

13. $y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^2 + Fx + G)\operatorname{sen} x$

15. $y_p = Ax + (Bx + C)e^{9x}$

17. $y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\operatorname{sen} 3x]$

19. $y = c_1\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3}\cos x$

21. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$

23. $y = c_1\operatorname{sen} x + c_2\cos x + \operatorname{sen} x\ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - 1$

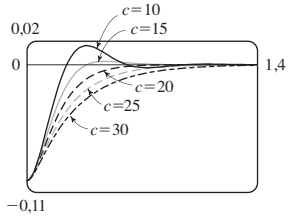
25. $y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$

27. $y = e^x[c_1 + c_2x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + x\operatorname{tg}^{-1}x]$

EXERCÍCIOS 17.3 ■ PÁGINA 1071

1. $x = 0{,}35\cos(2\sqrt{5}\,t)$ **3.** $x = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$ **5.** $\frac{49}{12}$ kg

7.



13. $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6\cos 20t + 3\operatorname{sen} 20t) + \frac{3}{125}$,
$I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t}\operatorname{sen} 20t$

15. $Q(t) = e^{-10t}\left[\frac{3}{250}\cos 20t - \frac{3}{500}\operatorname{sen} 20t\right] - \frac{3}{250}\cos 10t + \frac{3}{125}\operatorname{sen} 10t$

EXERCÍCIOS 17.4 ■ PÁGINA 1076

1. $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = c_0e^x$ **3.** $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0e^{x^3/3}$

5. $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

7. $c_0 + c_1\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = c_0 - c_1\ln(1 - x)$ for $|x| < 1$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

11. $x + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)}x^{3n+1}$

CAPÍTULO 17 REVISÃO ■ PÁGINA 1076

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro

Exercícios

1. $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-3x}$ **3.** $y = c_1 \cos(\sqrt{3}\,x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,x)$

5. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 1)$

7. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x+1)\operatorname{sen} x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}xe^{-2x}$

11. $y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$ **13.** $y = (e^{4x} - e^{x})/3$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

17. $Q(t) = -0{,}02e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + 0{,}03$

19. (c) $2\pi/k \approx 85$ min (d) $\approx 28{,}400$ km/h

ÍNDICE REMISSIVO

A

Aberta, região, 994
Absolutamente, série, convergente, 678
Absoluto, máximo e mínimo, 877
  valores, 882
Aceleração, 799
Aceleração de uma partícula, 787
    componentes da, 802
    Adição de vetores, 734
Afélio, 633
Algébrica, função, 685
  sistemas de computação, 1008
Alternadas
  séries, 673, 676
  séries harmônicas, 675
  Teorema da Estimativa das Séries, 676
  Testes das Séries, 674
Amortecedor de choque, 1066
Amortecidas, vibrações, 1066
Amortecimento, constante de, 1066
Angular, momento, 807
Ângulos diretores, 744
Ângulos entre vetores, 743, 744
Antenas de satélites,
  paraboloidais, 770
    caracterização geométrica de, 751
Apolúnio, 627
Aproximação
  pela Desigualdade de Taylor, 702
  por polinômios de Taylor, 712
Aproximação Linear, 854
Aproximação para um plano tangente, 849, 850
Arco
  comprimento de, 601, 619, 791
Área
  da superfície, 603
  de um setor de um círculo, 617
  de uma superfície de revolução, 600
  em coordenadas polares, 1003
  pelo Teorema de Grenn, 1003
  sobre uma curva paramétrica, 600
Argumento de um número complexo, A56
Aritmética-geométrica, média, 651
Árvore, diagrama em, 859
Assíntota de uma hipérbole, 625
Astroide, 597
Autônoma, equação diferencial, 545
Auxiliar, equação, 1054
Axioma da completude, 648

B

Bactérias, crescimento das, 564
Bactérias, crescimento das, 560
Beisebol
  posição para revezamento, 570
  velocidade de arremesso, 570
Beisebol e Cálculo, 569
Bernoulli
  equação diferencial de, 575
  James, 575
  John, 550, 593
Bessel
  Friedrich, 688
  função de, 688
Bézier, curvas de, 592-606
Bézier, Pierre, 606
Binomial
  série, 705
Binomial
  Teorema, 705
    descoberta por Newton, 711
Binormal
  vetor, 795
Brahe, Tycho, 803
Braquistócrona, problema da, 593
Bruxa de Maria Agnesi, 596

C

C1, transformação, 962
Cadeia, regra da, para várias variáveis, 857
Calculadora gráfica, 591, 614
  Humidex, 836
Calor
  índice de, 838
  condutividade do, 1033
  equação de condução do calor, 848
  fluxo de, 1033
Caminho, 994
Campo
  conservativo, 999
  elétrico, 979
  força, 979
  gradiente, 979
  gravitacional, 978

velocidade, 978
vetor, 976
Campo elétrico (força por unidade de carga), 979
Campos
escalares, 976
Canônica, base, dos vetores, 738
Cantor
conjunto, 660
Georg, 660
Capacidade de suporte, 561
Característica, equação, 1054
Cardioide, 610
Carga elétrica total, 946
Carga, 932, 939
densidade de, 939
densidade de, 932
Cassini, Giovanni, 616
Cauchy, Augustin-Louis, 914
Cauchy-Schwarz, Desigualdade de, 748
Centro de massa, 946, 984, 1013
Centro de massa
de uma lâmina, 932
de um sólido, 947
Centroide de um sólido, 946
Cicloide, 592
Cilíndricas, coordenadas, 951, 950
Cilindro, 766
parabólico, 766
Circulação de um campo vetorial, 1039
Círculo, equação do, A16
Círculo de curvatura, 796
Círculo máximo, 960
Cissoide, 596, 626
Cissoide de Diocles, 596, 626
Clairaut
Alexis, 843
Teorema de, 843
Cobb, Charles, 817, 844
Cobb-Douglas, função produção de, 817, 844, 894
Cocleoide, 636
Coeficiente de atrito estático, 776
Coeficiente de atrito, 776
Coeficiente
binomial, 705
Coeficientes binomiais, 705
Coeficiente de uma série de potência, 687
Cometas, órbitas dos, 634
Comparação,
Teste da, 668
para séries, 669
Complementar, equação, 1059
Completude, Axioma da, 648
Complexo conjugado, A54
Componente
função, 966
de um vetor, 736, 746
Componentes
funções, 779
Componentes da aceleração, 803
de campo vetorial, 989
componente tangencial da aceleração, 802
Composição de funções, 834
Composição de funções,
continuidade da, 832
Compostos, juros, 650
Comprimento
de um vetor, 737
de uma curva no espaço, 791
de uma curva paramétrica, 602
de uma curva polar, 619
Computacionais,
sistemas algébricos, 592,
para fazer gráfico de sequência, 893
Computador,
fazendo gráfico com, 614, 782
Conchoides, 594, 615
Condicionalmente, série, convergente, 678
Condutividade, 1033
Cone, 769
Conexa, região, 996
Confronto, Teorema do, para uma sequência, 644
Cônica,
seção
equação polar, 630
seções
deslocadas, 615
Cônicas,
seções, 621, 628
excentricidade, 629
diretriz, 629
foco, 629
Cônicas transladadas, 630
Conjugados, propriedades dos, A55
Conjunto fechado, 882
Conjunto limitado, 882
Conjunto, limitado ou fechado, 855
Conservação de energia, 998
Conservativo, campo vetorial, 979
Constantes da mola, 1068
Contínua(s)
composição de juros, 569
Contínuas
expansão em frações, 651
Continuidade
de uma função, 779
de uma função de duas variáveis, 833
de uma função de três variáveis, 834
Continuidade de função vetorial, 781
Contorno
curva de, 1024
problema de, 1057
Convergência
absoluta, 678
condicional, 678
de uma sequência, 642
de uma série, 654
intervalo de, 689
raio de, 689
Convergente
sequência, 642
série, 654
propriedades da, 657
Coordenada(s), 729
cilíndrica, 950,
esférica, 954,
x, 729
y, 729
z, 729
polar, 607
Coordenadas cilíndricas,
equações de conversão para, 766
Coordenado(s)
eixo(s), 729
planos, 729
Coplanares, vetores, 753
Coriolis, aceleração de, 811
Cornu, espiral de, 605
Corpo negro, 720
Corrida de patins, 944
Corrida na rampa, 960
Cosseno, função, 635
Crescente, sequência, 647
Crescimento, Lei do, Natural, 560
Crítico, ponto, 878, 887

Crítico, vibração, amortecimento, 1067
Cunha esférica, 956
Curva(s)
aberta, 982
comprimento da, 791
conexa, 982
de Bézier, 592, 606
de catástrofe em forma de rabo de andorinha, 597
de contorno, 1039
de nível, 820
do aprendizado, 541
do aprendizagem, 576
de fronteira, 1038
fechada, 1001
Curva polar, 583
comprimento de arco de, 594
gráfico de, 583
reta tangente à, 586
simetria em, 586
Curvas de contorno, 820
Curvatura, 792
no ponto P, 605
Cúspide, 594,

D

De Moivre, Abraham, A57
Decrescente,
sequência, 647
Definida, integral, de uma função a valores
vetoriais, 788
Densidade
de um sólido, 946
de uma lâmina, 932
Dependente, variável, 815, 859
Derivação e integração termo a termo, 669
Derivada(s)
de ordem superior, 841
de uma função a valores vetoriais, 772
direcional, 865, 867
de uma série de potência, 687
domínio da,
maximizando a, 870
normal, 1014
notação, 838
parcial, 836, 838
segunda, 787
valor máximo da, 870
Desigualdade de Cauchy-Schwarz, 749
Deslocamento, de um vetor, 746
Determinante, 740
Diferenciação
de uma função vetorial, 788
de uma série de potência, 694
implícita, 862
parcial, 836, 843
termo a termo, 694
Diferencial
equação, 537, 539
de Bernoulli, 576
de primeira ordem, 550
de segunda ordem, 539, 1053
linear, 571
logística, 652
não homogênea, 1053
ordem da, 539
parcial, 843
separável, 550
homogênea, 1053
solução da, 539
solução geral da, 539
autônoma, 545
Diferencial, 853
Diferenciável, função, 851
Direção
campo de, 542
números que dão a, 757
Direcional, derivada, 866, 869, 870
de uma função temperatura, 940
maximizando a, 867
Direções
campo de, 542
Direita, regra da mão, 729, 750
Diretores, cossenos, 744
Diretriz, 621, 629
Distância
entre planos, 762
entre ponto e plano, 755, 761
entre ponto e reta, 755
entre pontos no espaço, 731
fórmula da, em três dimensões, 731
Divergência
de um campo vetorial, 1010, 1042
de uma sequência, 642
de uma série infinita, 653
Teorema da, 1042
Teste para, 657
Divergente
sequência, 642
série, 653
Divisão de série de potência, 708
DNA, 781
Domínio de uma função, 834
Douglas, Paul, 816, 844
Dupla
integral, 918, 919
propriedades de, 911, 913
regra do ponto médio para, 909
sobre regiões genéricas, 918
sobre retângulos, 907
mudança de variável na, 965
em coordenadas polares, 926
soma de Riemann, 907

E

Efeito Doppler, 864
Eixos de uma parábola, 553
Eixo(s)
coordenados, 727
x, 727
y, 727
z, 727
Elemento de um conjunto, A3
Elétrica, carga, 946
Elétrico
campo de força, 979
fluxo, 1021
circuito, 573, 1068
Eliminação constante do remédio, 585
Elipse, 623,,629
diretriz, 630
eixo principal, 623
equação polar, 630
excentricidade, 629
focos, 623, 629
propriedade da reflexão, 624
vértice, 623
Elipsoide, 768
Elíptico, paraboloide, 768
Energia
cinética, 570, 998
conservação da, 998
potencial, 998
Epicicloide, 598
Equações auxiliares, 1054
raízes complexas da, 1056
raízes reais da, 1055
Equação de condução do calor, 847

Equação(s)
lebre-lince, 580
de Laplace, 843, 1011
de um plano, 759
de uma esfera, 732
de uma reta no espaço, 756, 757
diferencial (ver Diferencial, equação)
logística, 561
do calor, 848,
linear, 759
logística, 538
diferencial, 652
Lotka-Volterra, 577
onda, 843
paramétrica, 589, 757, 780, 1015
polar, 609
predador-presa, 577
da Onda, 843
escalar de um plano, 769
Equilíbrio
ponto de, 578
soluções de, 584, 577
Equipotenciais, curvas, 827
Erro(s)
estimados para séries alternadas, 676
na aproximação de Taylor, 713
Escalar, 735
múltiplo, de um vetor, 735
produto, 742
em forma de componente, 742
propriedades do, 742
equação, 760
projeção, 745
Escalares, 976
campos, 976
Esfera, equação da, 732
Esférica, coordenada, 956
Espaço
tridimensional, 729
curva no, 780, 781
Esperados, valores, 938
Estacionária, solução, 1070
Estimando a soma de uma série, 671, 676, 680, 664
Estratégia para testar séries, 745
Estrofoides, 684
Euler
constante de, 668
método de, 545
Excentricidade, 629
Exponencial (ais)
função série de potência para, 700
complexas, A59
Extremo, Teorema do Valor, 882

F

Família
de hipocicloides, 587
de soluções, 537
Fase
Plano de, 578
trajetórias de, 579
retrato de, 578
Fechada, superfície, 1018
Ferramenta gráfica. *Ver* sistema de computação algébrica
Fibonacci, 651
sequência de, 642
Final
ponto, de uma curva, 590
Floco de neve, 725
curva, 725
Fluido, fluxo do, 769
Fluxo,
linha de, 981
elétrico, 1033
Foco
de uma elipse, 629
de uma parábola, 621
de uma seção cônica, 629
Focos
de uma elipse, 623
de uma hipérbole, 625
Foguetes, ciência dos, 895
Fólio de Descartes, 638
Fonte, 1045
Força, campo de, 979
Força centrípeta, 801
Força elétrica, 979
Forçadas, vibrações, 1068
Forma de andorinha, curva de catástrofe em, 597
Formas vetoriais do Teorema de Green, 1014, 1015
Fórmulas do ângulo duplo, A29
Fórmula de Euler, A59
Frenet-Serret, fórmulas de, 798
Fronteira, 1047
lisa, 792
lisa por partes, 792
lisa por partes, 983
malha, 1003
no espaço, 771, 772
orientação da, 1001
paramétrica, 583,
polar, 609
simples, 1001
Fubini
Guido, 914
Teorema de, 914, 941
Função a valores vetoriais. *Ver* função vetorial
Função de Airy, 692
Função integrável, 907
conversão para coordenadas cilíndricas, 952
conversão para coordenadas esféricas, 957
conversão para coordenadas polares, 961
de uma função vetorial, 779
funções de Airy, 692
Funções homogêneas, 865
Função(ões),
componente, 779
composta, 834
comprimento de arco, 792
contínua, 779, 833
de duas variáveis, 815
de Gompertz, 569
de n variáveis, 824
de três variáveis, 824, 869
de várias variáveis, 815,
densidade conjunta, 936, 946
densidade de probabilidade, 936
diferenciável, 851
domínio de, 815
gradiente de, 867
gráfico de, 817, 818
harmônica, 843
homogênea, 865
implícita, 861
limite de, 829, 832
linear, 818
polinomial, 833
potência, 692, 979
produção Cobb, 844, 894
Cobb-Douglas, 817
racional, 833
representações como uma série de potências de, 692
valor máximo ou mínimo da, 877, 882
valor médio de, 909, 949

valor vetorial, 779
variação da, 815
vetor, 779
Bessel, 640, 688, 1077
imagem de, 817
Fundamental, Teorema, do Cálculo, versões
para dimensões superiores, 1047

G

Galileu, 593
Gases, lei dos, 847
Gause, G. F., 564
Gauss
Karl Friedrich, 1042
lei de, 1033
Teorema de, 1042
Gauss, óptica de, 717
Geometria do tetraedro, 756
Geométrica, série, 653
Geratriz de uma superfície, 766
Gompertz, função, 569
Gourdon, Xavier, 702
Grad, 868
Gradiente
campo vetorial, 979
vetor, 868, 869
importância do vetor, 873
Gráfica, calculadora, 591, 596
Gráfico polar, 609
Gráfico(s)
de uma curva paramétrica, 590
de uma superfície, 1012
polar, 609, 613
de uma função, 817, 818
por computadores, 613, 782
Gravitacional, campo, 979
Green
George, 1001, 1029
identidades de, 1014
Teorema de, 1000
formas vetoriais, 1011, 1012
Gregory
James, 696
série de, 696

H

Harmônica
função, 843
série, 656
Hecht, Eugene, 717
Hélice, 780
Helicoide, 1024
Hipérbole, 624, 629
assíntota, 625
diretriz da, 629
equação da, 625
equação polar da, 628
excentricidade da, 629
focos da, 625, 629
ramos da, 625
reflexão, propriedades da, 628
vértices da, 625
Hiperbólico, paraboloide, 768
Hiperboloide, 769
Hiperesfera, 950
Hipocicloide, 597
Homogênea, Equação diferencial, 1053,
1068
Hooke, lei de, 1065
Horizontal, plano, 730
Huygens, 593

I

i (número imaginário), A54
i (vetor da base canônica), 738
i, 738, 757
Imagem, 963
Implícita
diferenciação, 862
função, 862
Teorema da Função, 862
Importância do, 873
Impulso de uma força, 569
Inclinação da reta tangente à, 553
com relação ao comprimento de arco, 598
Inclinações, campo de, 543
Incompressível, campo de velocidade, 1001
Incremento, 851, 854
Independência de caminho, 993
Independente, variável, 815, 859
Indeterminados, coeficientes, 1060
Índice de sensação térmica, 816, 845
Inércia, momento de, 934, 947, 979
Infinita (sequência) (ver Sequência)
Infinita, série (ver Série)
Inicial
condição, 540
ponto, de uma curva paramétrica, 590
Problema de Valor, 540, 1056
Integração,
de uma série de potência, 694
revertendo a ordem da, 922
termo a termo, 694
parcial, 913
Integral(is)
dupla, 907, 918
iterada, 913
superfície, 1012, 1018
tabela de, contracapa
Teste(s) da, 661
tripla, 940, 941, 942
linha, 975, 981, 982, 985
múltipla, 961
de uma função vetorial,788
definida de funções a valores vetoriais, 789
definida, 905
Integrante, fator, 571
Intermediária, variável, 859
Intersecção
de gráficos polares, 618
de três cilindros, 891, 954
Intersecção de gráficos polares, área de, 594
Intervalo de convergência, 689
Inversa
transformação, 962
da função trigonométrica, envolvente, 597
Involuta, 606
Irrotacional, campo de vetores, 1010
Isotérmicas, 821
Iterada, integral, 922

J

j, 739
j(vetor da base canônica), 738
Jacobi, Carl, 964
Jacobiano, 964, 967
Jacobiano de uma transformação, 964, 968
Juros, compostos continuamente, 650

K

k, 739
k (vetor da base canônica), 738
de uma função vetorial, 749
para funções de duas variáveis, 761
Kepler
Johannes, 803
lei de, 804, 807
Kirchhoff, leis de, 544, 549, 1069

L

Lagrange
  Joseph, 889
  multiplicadores de, 888, 889, 892
Lâmina, 1008
Laplace
  equações de, 843, 1011
  operador de, 1011
  Pierre, 843
Lei
  da Conservação de Energia, 999
  do crescimento natural, 560
  de conservação do momento angular, 807
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 550, 631, 711
Limaçons, 614
Limitada, sequência, 648
Limitado, conjunto, 882
Limite(s)
  de duas variáveis, 832
  de três variáveis, 833
  de uma função a valor vetorial, 779
  de uma função, 829
  de uma sequência, 642
  leis de, para sequência, 643
  superior mínimo, 642
  Teste da Comparação do, 670
Linear
  aproximação, 850, 851, 854
  equação, 761
    diferencial, 571, 1053
  função, 811
  combinação, 1053
Linear
    para um plano tangente, 848, 849
Linearidade, 911
Linearidade da integral, 911
    para uma curva no espaço, 1036
    para uma curva plana, 982
  Linearização, 850
Linearmente, solução, independente, 1053
Linha (as)
  aerodinâmica, 969
  de corrente, 981
  integral de, 981, 982, 985
    de campos vetoriais, 976
    Teorema Fundamental para, 1047
      com relação ao comprimento do arco, 985
    no espaço, 974
Lisa
  curva, 792
  superfície, 1019
Lissajous, figuras de, 597
Litotripsia, 624
Local, máximo e mínimo, 877
Logística
  equação de diferença, 652
  equação de diferencial, 538, 538
  seqüências, 652
Logístico, modelo, 538
LORAN, sistema de, 627
Lotka-Volterra, equações de, 577

M

Maclaurin
  Colin, 699
  série de, 699
Magnitude de um vetor, 735
Maior eixo da elipse, 623
Mapa de contorno, 820
Marginal, propensão, a consumir ou a economizar, 659
Massa, 932, 946, 984, 1012
  centro de, 032, 946, 984, 1012
Massa
    de uma lâmina, 933
    de um sólido, 947
  Massa, centro de. *Ver* centro de massa
    Cobb-Douglas, para custos de produção, 844,
Matemática, indução, 648
Máximo e mínimo absoluto, 833
Máximo e mínimo, valores, 877, 832
Média Y, 938
Médio
  Teorema do Valor, para integrais duplas, 971
  valor, de uma função, 909, 949
Método
  dos Mínimos Quadrados, 886
  dos Multiplicadores de Lagrange, 892
Método dos coeficientes indeterminados, 1059, 1062
Misturas, problemas de, 554
Möbius, faixa de, 1024
Modelando
  com equações diferenciais, 537
  crescimento da população, 537,
  custo de produção, 816, 844, 894
  movimento de uma mola, 538
Modelo(s), matemático(s),
  comparação do crescimento natural versus logístico, 564
  crescimento sazonal, 569
  predador-presa, 577
  von Bertalanffy, 584
  Gompertz, função de, 569
Módulo, A55
Mola, constante da, 538, 1066
Momento
  de inércia, 934, 947, 979
  de um objeto, 569
  de um sólido, 946
  de uma lâmina, 932
  em torno de um eixo, 932
  em torno de um plano, 947
  polar, 935
  segundo, 934
Momento de inércia polar 934
Monótona
Monotônica
  sequência, 647
  Teorema da Sequência, 648
Movimento
  no espaço, 799, 804
    das luas e planetas, 632
    de satélites, 632
Movimento de uma mola, força que afeta o
    de decaimento, 1067
    ressonância, 1068
    restauradora, 1066
Mudança de variáveis
  em integrais duplas, 965
  em integrais múltiplas, 961
  em integrais triplas, 967
Múltipla, integral, 961
Multiplicação de séries de potências, 708
Multiplicação de vetores
  por escalar, 735,
Multiplicador
  de Lagrange, 888, 889
  efeito, 659

N

Não homogênea, equação
  diferencial, 1053, 1058
Natural, Lei do Crescimento, 560
Newton
  Lei da Gravitação de, 804, 966
  Lei de Resfriamento de, 542,
  sir Isaac, 804
  Segunda Lei de, 800, 804, 1064
Nicomedes, 594
Nível(is)
  de uma pressão barométrica, 874
  de curva(s), 820
    de temperatura média do
    mundo, 821
  superfície de, 824
    plano tangente à, 872
Nó trevo, 782
Normal
  componente, da aceleração, 802
  derivada, 1014
  plano, 796
  reta, 872
  vetor, 759, 796
Notação de conjunto, A3
Número(s) complexo(s), A54
  argumento de, A56
  forma polar de, A55
  igualdade de, A54
  módulo de, A55
  multiplicação de, A54, A56
  parte imaginária de, A54
  parte real de, A54
  potências de, A57
  raiz quadrada principal de, A55
  raízes de, A58
  divisão de, A55, A56

O

Octante, 729
Onda, equação da, 843
Óptica
  de Gauss, 717
  de primeira ordem, 717
Órbita, 804
Órbita dos planetas, 623

Ordem
  de uma equação diferencial, 539
  revertendo da integração, 923
Ordem maior, derivadas, 841
Ordenada tripla, 729
Oresme, Nicole, 656
Orientação
  de uma curva, 1000
  de uma superfície, 1017, 1018
Orientada, superfície, 1029
Ortogonal(is)
  vetores, 744
  trajetória, 552
  superfície, 876
  projeção, 749
Osculador
  círculo, 796
  plano, 796
Ostrogradsky, Mikhail, 1042
Óptica de terceira ordem, 718
Ovais de Cassini, 616

P

Padrão de ventos na baía de São
  Francisco, 975
  para Integral de linha, 980
Parábola, 621, 629
  diretriz da, 621
  eixo da, 622
  equação da, 622
  equação polar da, 628
  foco da, 621, 628
  vértice da, 621
Parabólico, cilindro, 766-767
Paraboloide, 767
Paralelepípedo, 753
Paralelogramo, Lei do, 734, 748
Paralelos, planos, 760
Paralelos, vetores, 735
Paramétrica(s)
  curva, 780
  equações, 583
    da reta, 757
    de uma curva espacial, 780
    de uma reta no espaço, 792
    de uma superfície, 1015
  superfície, 1012, 1015, 1018
Parametrização de uma curva
  no espaço, 792
Parametrização lisa, 792
  comprimento de arco de, 793, 797
Parametrizada
  curva, 589
Parâmetro, 589, 756, 780
Parcial(is)
  derivada, 836, 839
    de uma função com três ou
    mais variáveis, 824
    notações para, 838
    regras para determinar, 839
    segunda, 841
  equação diferencial, 843
  integração, 914
  soma(s), de uma série, 653
Partícula, movimento de uma, 799
  Periélio, 633
Perilúnio, 627
Perpendiculares, vetores, 744
Planck, Lei de, 720
Planetário, movimento, 804
Plano(s), 759
  coordenados, 729
  equação do, 756, 759
  horizontal, 730
  normal, 796
  paralelo, 760
  tangente a superfície, 849, 872,
  1019
Planos não paralelos, 735
Polar(es)
  coordenadas, 607
  eixo, 607
  equação(ões),
    gráfico de, 609
    de cônicas, 607,
Polar, forma, de um número
  complexo, A55
  retângulo, 926
Polinomial, função, de duas
  variáveis, 833
Polinômio de Taylor de grau n, 700
Polo, 607
Ponto
  amostra, 906
Ponto final de uma curva
  parametrizada, 590
Ponto(s) no espaço
  conversão de integrais duplas par,
  961, 962
  equações de conversão para
  coordenadas cartesianas, 608,
Pontos estacionários, 878
Ponto médio, regras do,
  para integral dupla, 909
  para integral tripla, 948
População, crescimento da, 537
  da bactéria, 537
  de peixe, 566,
  de modelos, 560
  do mundo, 538

Por partes, curva lisa, 983
Por trechos, curva lisa, 792
Posição padrão de um ângulo, A25
Posição vetor, 736
Positiva
  função, 907
  orientação
    de uma curva, 1024, 1000
    de uma superfície, 1018
Potência
Potência série de, 687
  coeficientes de, 687
  divisão de, 708
  integração de, 694
  intervalo de convergência, 689
  multiplicação de, 708
  raio de convergência, 689
  diferenciação de, 694
  representações de funções como, 692
Potencial
  energia, 998
  função, 979
Predador, 576
Predador-presa, modelo, 577
Presa, 576
Primeira
  Equação diferencial de, ordem, 571
  ordem, óptica de, 717
Primeiro octante, 729
Principal vetor normal unitário, 795
Princípio da superposição, 1061
Princípio de Arquimedes, 1047
Probabilidade, 936
  função densidade, 936
Produtividade marginal, 844
Produto
  escalar, 742
Produto interno, 742
Produto misto, 753
  triplo, 753
    escalar, 753
  vetorial, 753
Produto vetorial, propriedades do, 753
Projeção, 729, 745
Projétil, 597, 801
p-série, 663

Q

Quadrática, aproximação, 887
Quádrica, superfície, 767
  gráfico da, 768

R

Racional, função, 834
Radiação das estrelas, 720
Radiação de corpo negro, 720
Raio
  de convergência, 689
  de giração, 935
Raiz quadrada principal de um número complexo, A55
Raiz, Teste da, 681
Raízes de um número complexo, A58
Ramos da hipérbole, 625
Rayleigh-Jeans Law, 720
Razão, Teste da, 679
Rearranjo de uma série, 682
Referencial TNB, 795
Reflexão, propriedades da
  de uma elipse, 624
  de uma hipérbole, 628
Região
  aberta, 982
  conexa, 996
  do tipo I, 1001
  do tipo II, 1002
  simples, 1002
  sólida simples, 1042
  simplesmente conexa, 996
Região plana do tipo I ou do tipo II, 944,971
Região plana do tipo I, 942
Região plana do tipo II, 942
Região plana simples, 1036
Região polar, área de, 617
Região sólida do tipo 1, 2 ou 3, 942
Regra da mão direita, 729, 750
Regrada, superfície, 772
Relação de recursão, 1074
Relativa, taxa de crescimento, 561
Representações de um vetor, 736
Ressonância, 1068
Resto de uma série de Taylor, 701
Resto, estimativa do
  para o Teste da Integral, 665
  para o Teste da Razão, 681
  para o Teste de comparação, 671, 672
  para uma série alternada, 676
Restrição, 890, 894
Resultante, força, 740, 741
Reta(s)
Reta(s) no espaço
  normal, 872
  tangente, 786
  equações paramétricas de, 757
  equações simétricas de, 823
    no plano
  equação vetorial de, 756
Reta vertical, 757
Retangular, sistema de coordenada, 730
Reversa(s)
  ordem, da integração, 922
  retas, 759
Riemann, soma(s) de, para integral múltipla, 907
Roberval, Gilles de, 600
Rosa de quatro pétalas, 610
Rotacional de um campo vetorial, 1007

S

Sazonal, modelo de crescimento, 569
Secções transversais, 766
Segunda
  derivada, 539
    parcial, 841
  ordem, equação diferencial de, 539
Segunda derivada de uma função vetorial, 760
Segundo, momento de inércia, 934
Sela do cachorro, 827
Sela do macaco, 827
Sela, ponto de, 878
Semiespaço, 824
Seno, função, série de potência da, 703
Seno, série de potências para a função, 703
Separável, equação diferencial, 549, 550
Sequências, 641
Sequência
  convergente, 642
  crescente, 647
  de Fibonacci, 642
  de somas parciais, 653
  decrescente, 647

divergente, 642
gráfico da, 645
limitada, 647
limite de, 642
monótona, 647
termos da, 642
Série, 652
absolutamente convergente, 678
alternada, 673
binomial, 705,
coeficiente da, 687
condicionalmente convergente, 678
convergente, 653
de Gregory, 696
de potência, 747
divergente, 653
estratégia para teste, 684
geométrica, 653
harmônica, 656
infinita, 652
Maclaurin, 759
p-série, 663
rearranjo da, 682
soma da, 653
soma parcial da, 653
Taylor, 698
termo da, 640
série de potência da, 687
harmônica alternada, 675, 677
trigonométrica, 687
Série de Fourier, finita,
Série harmônica, alternada, 652
Setor de um círculo, 617
Sierpinski, carpete de, 660
Simétricas, equações, de uma reta, 757
Simples
curva, 995
movimento harmônico, 1065
região, 1001
sólida, 1042
Simplesmente conexa, região, 996
Simpson, Thomas, 903
Sólida, região, 1044
Sólido
volume do, 960, 961
ângulo, 1051
Solução
curva, 542
soluções da, 1046
da equação predador-presa, 577
de uma equação diferencial em série, 1072
Soma
de uma série geométrica, 654
de uma série infinita, 653
de vetores, 734
Telescópica, 655
Sorvedouro, 1045
Stokes
Stokes, sir George, 1036
Stokes, Teorema de, 1036
Suave
Subamortecido, vibração, 1067
Superamortecido, vibração, 1067
Superfície
área da
de uma superfície paramétrica, 600
de uma superfície z = f(x, y), 940
de uma esfera, 603
de nível, 824
de revolução, representação paramétrica da, 1018
fechada, 1018
gráfico da, 1016
integral de, 1026
lisa, 1019
orientada, 1029
paramétrica, 1094, 1015, 1019
quádrica, 767
de nível, 824

T

T–1 Transformação inversa, 962
Tangencial, componente, da aceleração, 802
Tangente plano
a uma superfície de nível, 872
a uma superfície paramétrica, 1019
a uma superfície $z = f(x, y)$, 849, 851
aproximação, 851
Tangente reta
a uma curva paramétrica, 598
a uma curva no espaço, 774
a uma curva polar, 611
vetor, 786
Tautócrona, problema, 593
Taylor
Brook, 699
desigualdade de, 701
polinômio de, 700, 887
série de, 659
Telescópica, soma, 655
Temperatura-umidade, índice da, 825, 836
Teorema de De Moivre, A57
Teorema do Confronto para sequências, 644
Terminal
ponto, de um vetor, 734
velocidade, 557
Termo
a termo, diferenciação e integração, 694
de uma sequência, 641
de uma série, 645
Teste de comparação para integrais impróprias, 661
Teste da segunda derivada, 878
Testes para Convergência e Divergência de Série
da Comparação do Limite, 670
da Integral, 663
da Razão, 679
da Série Alternada, 674
da Raiz, 681
para Divergência, 657
Tetraedro, 756
Thomson, William (lorde Kelvin), 1001, 1036
Tipo
1, região sólida do, 942
2, região sólida do, 943
3, região sólida do, 944
I, região do plano do, 919
II, região do plano do, 920
Torcida, cúbica, 782
Toro, 1025
Toroide, espiral, 782
Torque, 753
Torre de resfriamento, hiperbólica, 772
Torricelli, Evangelista, 557
Total, diferencial, 853
Trabalho, 746, 977
Traços, 766
Trajetória, 801

Trajetória, equações paramétricas para, 801
Transferência, curva, 811
Transformação, 962
  jacobiano da, 964
  um a um, 962
Triangular
  desigualdade, para vetores, 748
Triângulo, Lei do, 734
Tridimensional, sistema coordenado, 730
Trigonométrica, Série, 687
Tripla
  soma, de Riemann, 941
Tripla integral, 941,
  sobre uma região geral limitada, 942
  em coordenadas esféricas, 950
  ponto médio, regra do, para, 948
  aplicações da, 945
  em coordenadas cilíndricas, 950
Tripla, *Ver* integral dupla; integral tripla
Triplo, produto, 753
Trocoide, 596
Turbina hidráulica, otimização da, 897

U

Ultravioleta, catástrofe do, 720
Um a um, transformação, 962
Unitário, vetor, 739
  normal, 795

V

Valor Absoluto, A55
Valores máximo e mínimos locais, 900
Variação
  de parâmetros, 1059
Variação dos parâmetros, método de, 1059
  Variável(is)
  aleatória independente, 937
  dependente, 815, 859
  independente, 815, 859
  intermediária, 859
Variáveis, mudança de. *Ver* mudança de variáveis
Velocidade, 799
  campo, 978
  padrão de vento, 975
  correntes oceânicas, 976
  fluxo do ar, 976
  vento, 975
Velocidade angular, 800
Verhulst, 538
Vértice(s)
  de uma elipse, 623
  de uma hipérbole, 625
  de uma parábola, 621
Vetor força, 975
Vetor n-dimensional, 950
Vetor secante, 785
Vetores equivalentes, 734
  irrotacional, 1010
  i, j e k, 738
  gradiente, 868,
  módulo do, 737
  multiplicação de, 735
  múltiplo escalar do, 735
  negativo, 735
  normal, 796
  normal unitário, 795
  normal unitário principal, 795
  ortogonal, 744
  paralelo, 735
  perpendicular, 744
  posição, 736
  produto escalar, 742
  produto triplo, 753
  produto vetorial de, 749, 753
  projeção, 745
  propriedades do, 738
  representações de, 737
  soma de, 734
  subtração de, 735
  tangente, 855
  tangente unitário, 855
  tridimensional, 737
  unitário, 739
  unitário (vetor), 739
  unitário normal (vetor normal), 795
  unitário normal principal, 795
  unitário tangente (vetor tangente), 786
  velocidade, 799
  zero, 734
Vetor(es), 734
  aceleração, 799
  adição de, 734
  ângulos entre, 743, 744
  bidimensional, 737
  binormal, 795
  componentes do, 736
  comprimento do, 737
  coplanares, 753
  deslocamento, 746
  diferença de, 735
  equivalentes, 734
  força, 967
Vetorial(is)
  projeção, 745
  equação
    de um plano, 759
    de uma reta, 756
  produto(s), 749
    triplo, 753
  campo, 976, 978
    conservativo, 979, 999
    divergente do, 1007
    fluxo do, 1031
    gradiente, 979
    incompressível, 1011
    irrotacional, 1010
    rotacional do, 1007
    velocidade, 978
  função a valores, 779
    contínua, 779
    derivada da, 785
    limite da, 779
Vibração(ões), 1065, 1068
  da mola, 1065
  de uma membrana de borracha, modelo da, 688
Vibração de uma mola, 1065
  Vínculos, 892
Volterra, Vito, 577
Volume,
  de um sólido, 907
  por integral dupla, 907
  por integral tripla, 945
  de hiperesferas, 950
Von Bertalanffy, modelo de, 584

W

Wren, sir Christopher, 603

Z

Zero, vetor, 734

ÁLGEBRA

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

EXPOENTES E RADICAIS

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS ESPECIAIS

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

TEOREMA BINOMIAL

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2$$
$$+ \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$\text{onde } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k}$$

FÓRMULA QUADRÁTICA

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

DESIGUALDADES E VALOR ABSOLUTO

Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

Se $a < b$, então $a + c < b + c$.

Se $a < b$ e $c > 0$, então $ca < cb$.

Se $a < b$ e $c < 0$, então $ca > cb$.

Se $a > 0$, então

$|x| = a$ significa que $x = a$ ou $x = -a$

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$

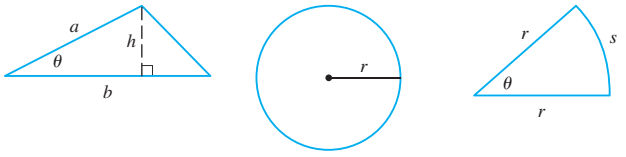
$|x| > a$ significa que $x > a$ ou $x < -a$

GEOMETRIA

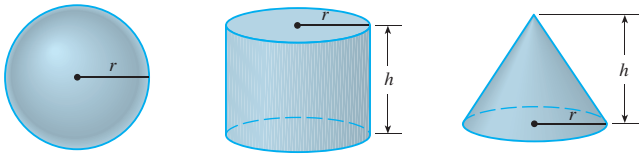
FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Fórmula para a área A, comprimento da circunferência C, e volume V:

Triângulo	Círculo	Setor de Círculo
$A = \frac{1}{2}bh$	$A = \pi r^2$	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
$= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$	$C = 2\pi r$	$s = r\theta$ (θ in radians)



Esfera	Cilindro	Cone
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$	$A = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A = 4\pi r^2$		$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



FÓRMULAS DA DISTÂNCIA E DO PONTO MÉDIO

Distância entre $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ponto médio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

LINHAS

Inclinação da reta que passa por $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Equação ponto inclinação da reta que passa por $P_1(x_1, y_1)$, com inclinação m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Equação inclinação-intersecção da reta com inclinação m e com a intersecção com o eixo y sendo b:

$$y = mx + b$$

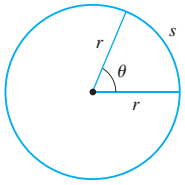
CÍRCULOS

Equação de um círculo com centro (h, k) e raio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

TRIGONOMETRIA

MEDIDA DE ÂNGULOS



π radianos $= 180^\circ$

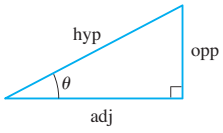
$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad$ 1 rad $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$s = r\theta$ $\qquad$ (θ em radianos)

TRIGONOMETRIA DO ÂNGULO RETO

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{opo}}{\text{hop}} \qquad \text{cossec}\,\theta = \frac{\text{hip}}{\text{opo}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hop}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hop}}{\text{adj}}$$

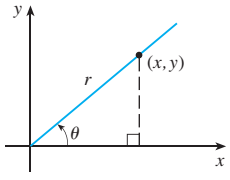


$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{opo}}{\text{adj}} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opo}}$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

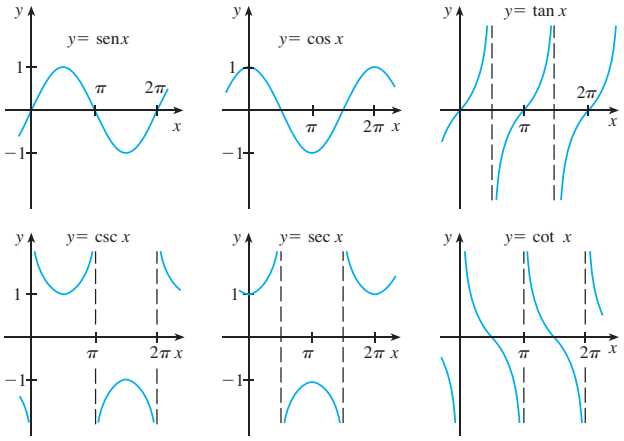
$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \text{cossec}\,\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$



$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$$

GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS IMPORTANTES

θ	radianos	sen θ	cos θ	tg θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	–

IDENTIDADES FUNDAMENTAIS

$$\text{cossec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\theta} \qquad \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \text{cotg}^2\theta = \text{cossec}^2\theta$$

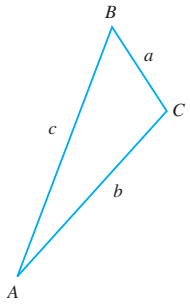
$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta \qquad \cos(-\theta) = -\cos\theta$$

$$\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}\,\theta \qquad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta \qquad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cotg}\,\theta$$

A LEI DOS SENOS

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



A LEI DOS COSSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

FÓRMULAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x\cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

FÓRMULAS DO ÂNGULO DUPLO

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

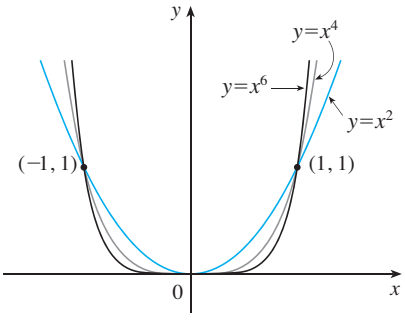
FÓRMULAS DA METADE DO ÂNGULO

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

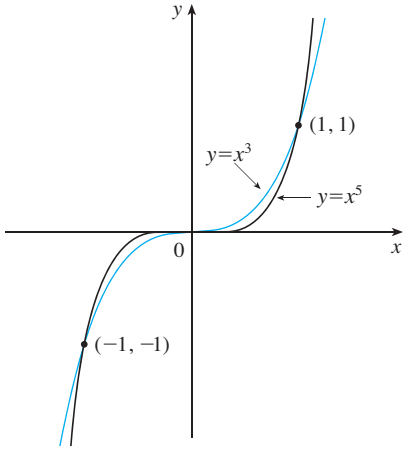
FUNÇÕES ESPECIAIS

FUNÇÕES DE POTÊNCIA $f(x) = x^a$

(i) $f(x) = x^n$, n um inteiro positivo

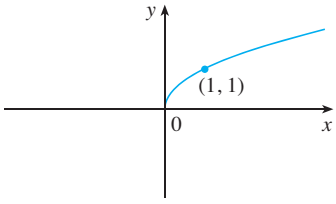


n even

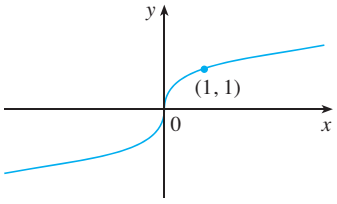


n odd

(ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n um inteiro positivo

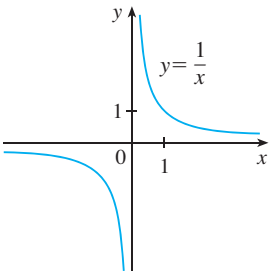


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

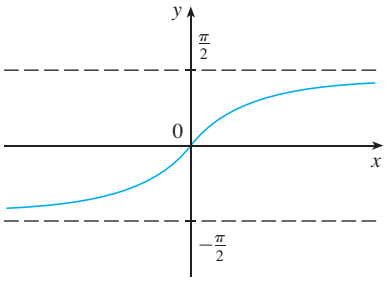


FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$\arcsen\, x = \operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

$\arccos x = \cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$

$\operatorname{arctg}\, x = \operatorname{tg}^{-1} x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{e} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$



$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{tg}^{-1} x = -\dfrac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to \infty} \operatorname{tg}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg}\, x$

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

$\log_a x = y \iff a^y = x$

$\ln x = \log_e x \quad \text{where} \quad \ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$

Equações de cancelamento

$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$

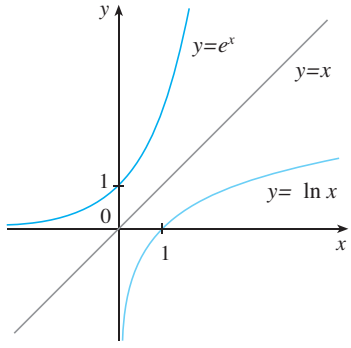
$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$

Propriedades dos logaritmos

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

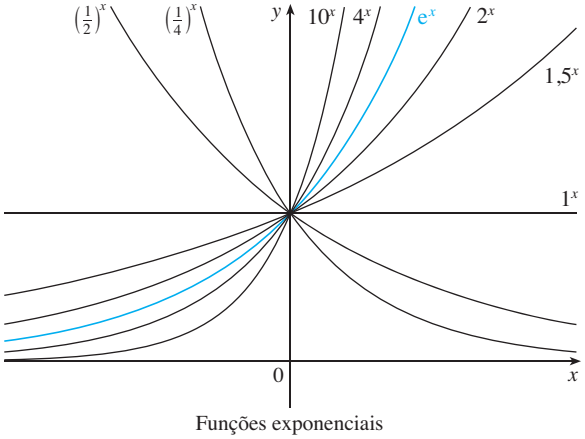
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$

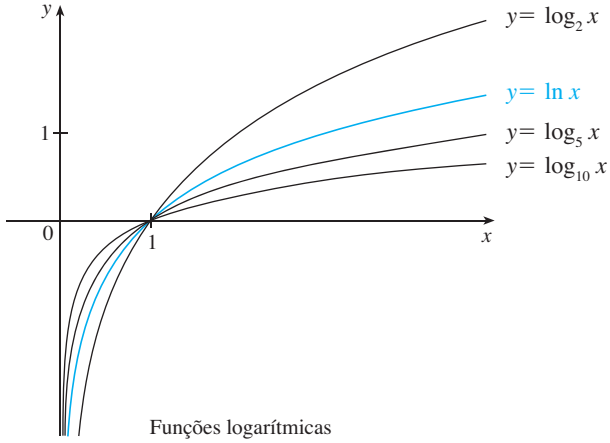


$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$



Funções exponenciais



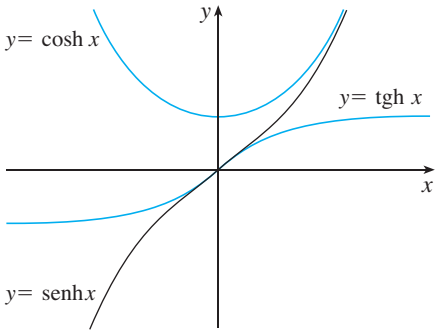
Funções logarítmicas

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$



FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \iff \operatorname{senh} y = x \qquad \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x \quad \text{e} \quad y \geqslant 0 \qquad \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$y = \operatorname{tgh}^{-1} x \iff \operatorname{tgh} y = x \qquad \operatorname{tgh}^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

FÓRMULAS GERAIS

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regra do Produto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regra do Quociente)

7. $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regra da Cadeia)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regra do da Potência)

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\dfrac{d}{dx} \ln |x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

13. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

16. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

17. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$

18. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

22. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

23. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

24. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

25. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

26. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

27. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x$

28. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} x) = -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x$

29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$

30. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cossech}^2 x$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

31. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

33. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

34. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

35. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

36. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh}^{-1} x) = -\frac{1}{1-x^2}$

TABELA DE INTEGRAIS

FÓRMULAS BÁSICAS

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

11. $\int \operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cossec} u + C$

12. $\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

9. $\int \operatorname{cossec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

10. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

15. $\int \operatorname{cossec} u\,du = 1\text{n}\,|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\displaystyle\frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u + a}{u - a}\right| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

FÓRMULAS ENVOLVENDO $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

21. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

22. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

26. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u^2}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

27. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{du}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

FÓRMULAS ENVOLVENDO $\sqrt{u^2+a^2}$, $a>0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2) + \frac{a^2}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2+u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2+u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2+u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{du}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

FÓRMULAS ENVOLVENDO $\sqrt{u^2-a^2}$, $a>0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

FÓRMULAS ENVOLVENDO $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\,|a + bu|) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a + bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a\ln|a + bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu}+C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C, \qquad \text{se } a>0$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}}+C, \qquad \text{se } a<0$$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu}+a\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u}+\frac{b}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2}-na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)}-\frac{2na}{b(2n+1)}\int\frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}}-\frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int\frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

TABELA DE INTEGRAIS

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2u\,du = \tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2u+C$

64. $\displaystyle\int \cos^2u\,du = \tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2u+C$

65. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2u\,du = \operatorname{tg}u-u+C$

66. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2u\,du = -\operatorname{cotg}u-u+C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3u\,du = \tfrac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2u)\cos u+C$

68. $\displaystyle\int \cos^3u\,du = \tfrac{1}{3}(2+\cos^2u)\operatorname{sen}u+C$

69. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3u\,du = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2u+\ln|\cos u|+C$

70. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^3u\,du = -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2u-\ln|\operatorname{sen}u|+C$

71. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\,\operatorname{tg} u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

72. $\int \operatorname{cossec}^3 u\,du = -\frac{1}{2}\operatorname{cossec} u\,\operatorname{cotg} u + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\,\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du\ n\ 1$

76. $\int \operatorname{cotg}^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u\,du$

77. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg} u\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\int \operatorname{cossec}^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cotg} u\operatorname{cossec}^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cossec}^{n-2} u\,du$

79. $\int \operatorname{sen} au\operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au\cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au\cos bu\,du = \frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u\operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u\cos u\,du = \cos u + u\operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\int \operatorname{sen}^n u\cos^m u\,du = \frac{\operatorname{sen}^{n-1} u\cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\cos^m u\,du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u\cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u\cos^{m-2} u\,du$

TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \operatorname{tg}^{-1} u\,du = u\operatorname{tg}^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \dfrac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \dfrac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u\cos^{-1} u\,du = \dfrac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \dfrac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u\operatorname{tg}^{-1} u\,du = \dfrac{u^2+1}{2}\operatorname{tg}^{-1} u - \dfrac{u}{2} + C$

93. $\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \dfrac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \dfrac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$

94. $\int u^n\cos^{-1} u\,du = \dfrac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \dfrac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$

95. $\int u^n\operatorname{tg}^{-1} u\,du = \dfrac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{tg}^{-1} u - \int \dfrac{u^{n+1}du}{1+u^2}\right], n \neq -$

FÓRMULAS EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

96. $\int ue^{au}du = \dfrac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au}\,du = \dfrac{1}{a}u^n e^{au} - \dfrac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$

98. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\int e^{au}\cos bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

100. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \dfrac{1}{u\ln u}du = \ln|\ln u| + C$

FÓRMULAS HIPERBÓLICAS

103. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\int \operatorname{tgh} u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\int \operatorname{cotgh} u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\int \operatorname{sech} u\,du = \operatorname{tg}^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\int \operatorname{cossech} u\,du = \ln|\operatorname{tgh}\frac{1}{2}u| + C$

109. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + C$

110. $\int \operatorname{cossech}^2 u\,du = -\operatorname{cotgh} u + C$

111. $\int \operatorname{sech} u\operatorname{tgh} u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\int \operatorname{cossech} u\operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cossec} u + C$

FÓRMULAS ENVOLVENDO $\sqrt{2au-u^2}$, $a > 0$

113. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \dfrac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\displaystyle\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = \frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u^2} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

s2au u 2 u 2 du(u + 3a)3a2

119. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

cálculo

VOLUME 2

TRADUÇÃO DA 6ª EDIÇÃO NORTE-AMERICANA

Neste volume, continuação de *Cálculo vol. 1* (capítulos 1 a 8), James Stewart mantém o estímulo e o apreço dos estudantes pelo cálculo, defendendo seu papel fundamental inclusive na percepção e no entendimento do mundo natural, dos fenômenos mais corriqueiros à nossa volta. *Cálculo vol. 2* (capítulos 9 a 17) traz temas importantes, como equações diferenciais, vetores, integrais, entre outros, complementando a obra sobre cálculo de maior sucesso no mundo.

Esta 6ª edição de *Cálculo* traz diversas inovações em relação à edição anterior. Algumas seções e capítulos foram reformulados. Mais de 25% dos exercícios são novos e os exemplos tiveram seus dados modernizados. Em muitos deles, as unidades foram alteradas do sistema norte-americano para o Sistema Internacional de Unidades.

Revista e atualizada, a obra mantém o espírito das edições anteriores, apresentando exercícios graduados, com progressão cuidadosamente planejada desde conceitos básicos até problemas complexos e desafiadores. Os exemplos e exercícios agora têm perspectiva global, incluindo dados inspirados em países da Ásia e América Latina.

Aplicações:
Livro-texto para a disciplina cálculo nos cursos de Matemática e Engenharia.

POSSUI MATERIAL DE APOIO
(para professores que comprovadamente adotam a obra)

ISBN 13 978-85-221-1274-6
ISBN 10 85-221-1274-6
9 788522 112746

CENGAGE Learning™
Para suas soluções de curso e aprendizado,
visite **www.cengage.com.br**